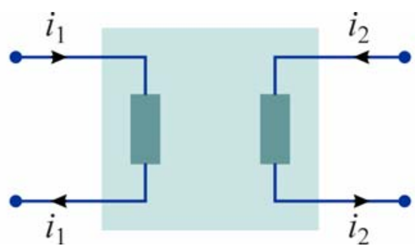
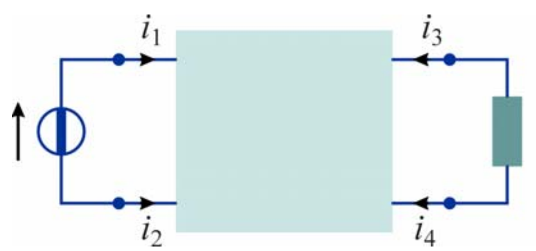
# Doppi bipoli

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 3-11-2014)

## Doppi bipoli (o 2-porte)

- **Doppi bipoli:** componenti con due copie di terminali (**porte**) tali che, per ciascuna coppia, la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro
- Doppio bipolo **intrinseco**:
  - il vincolo tra le correnti dei terminali di ciascuna porta è determinato dalla struttura interna del componente
- Doppio bipolo **non intrinseco**:
  - il vincolo tra le correnti  è dovuto al modo in cui il componente viene collegato

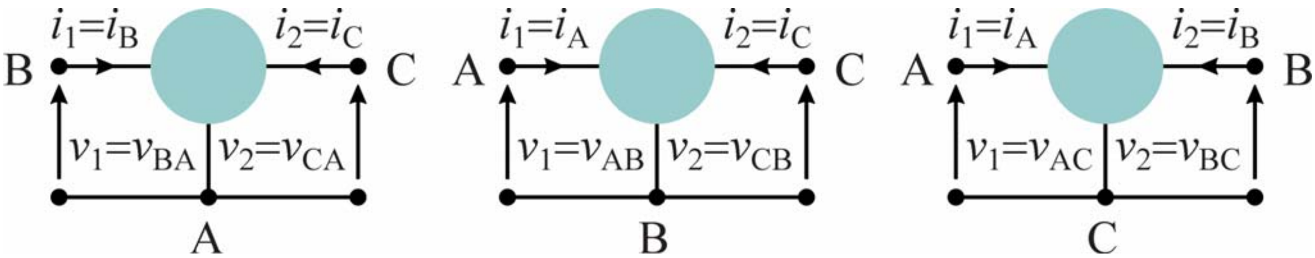



$$i_2 = -i_1$$
$$i_4 = -i_3$$

## Rappresentazioni di un tripolo come doppio bipolo

- Un tripolo può essere considerato come un doppio bipolo con i terminali negativi delle porte collegati tra loro
- Le tensioni e le correnti utilizzate per caratterizzare il componente e le espressioni delle equazioni caratteristiche dipendono dalla scelta del **terminale comune**



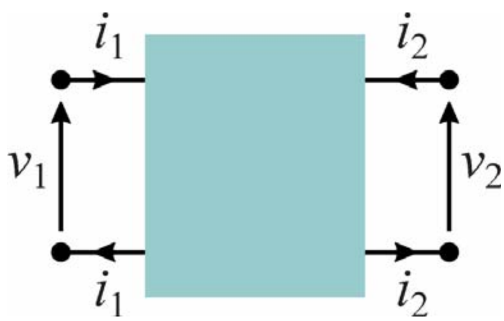



## Doppi bipoli resistivi

- Le equazioni di un doppio bipolo resistivo sono del tipo

$$f_1\left[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t\right] = 0$$
$$f_2\left[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t\right] = 0$$

$f_1,\ f_2 =$ funzioni generiche




- Se il tempo non compare esplicitamente come argomento di $f_1$ e $f_2$ il componente è detto **tempo-invariante**
- Se le equazioni consentono di ricavare due delle variabili in funzioni delle altre si possono avere altre forme particolari delle equazioni

# Rappresentazioni di un doppio bipolo

| Rappresentazione | Variabili indipendenti | Variabili dipendenti |
|---|---|---|
| Comandata in corrente | $i_1, i_2$ | $v_1, v_2$ |
| Comandata in tensione | $v_1, v_2$ | $i_1, i_2$ |
| Ibrida (diretta) | $i_1, v_2$ | $v_1, i_2$ |
| Ibrida inversa | $v_1, i_2$ | $i_1, v_2$ |
| Trasmissione (diretta) | $v_2, -i_2$ | $v_1, i_1$ |
| Trasmissione inversa | $v_1, -i_1$ | $v_2, i_2$ |



# Doppi bipoli resistivi lineari tempo-invarianti

- Per un doppio bipolo resistivo **lineare** e **tempo-invariante** le equazioni, nel caso generale, sono del tipo
  $$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + b_{11}i_1 + b_{12}i_2 = 0$$
  $$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + b_{21}i_1 + b_{22}i_2 = 0$$
  $a_{ij}, b_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ rappresentano delle costanti
- Queste equazioni possono essere espresse nella forma
  $$\mathbf{Av} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$$
  dove
  $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
- Di seguito si considereranno solo componenti di questo tipo, quindi gli aggettivi *lineare* e *tempo-invariante* saranno sottointesi

# Matrice di resistenza

- Per un doppio bipolo comandato in corrente le equazioni possono essere poste nella forma

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

cioè

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ri}$$

dove

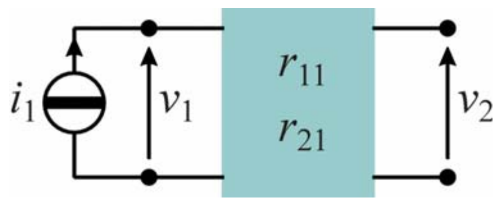
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{R}$ = **matrice di resistenza**
- Per comprendere il significato dei parametri, si considerano le condizioni di funzionamento in cui una delle variabili indipendenti viene azzerata (mentre l'altra assume un valore arbitrario $\neq 0$)



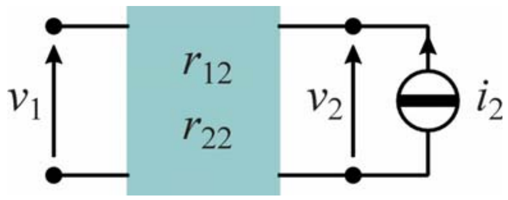
# Significato dei parametri di resistenza

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$



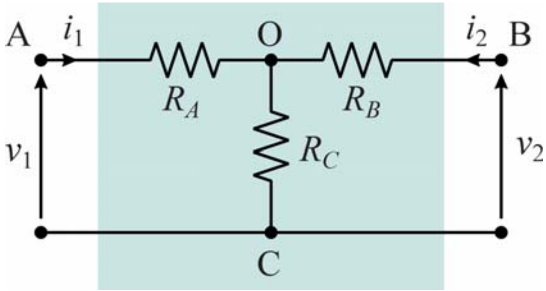

- $r_{11}$ = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 1
- $r_{21}$ = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

$$r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \qquad r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

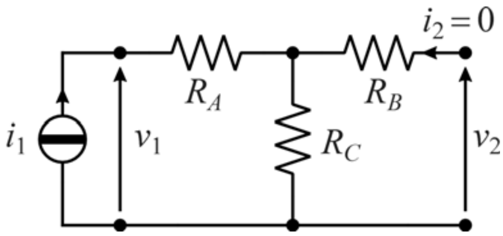


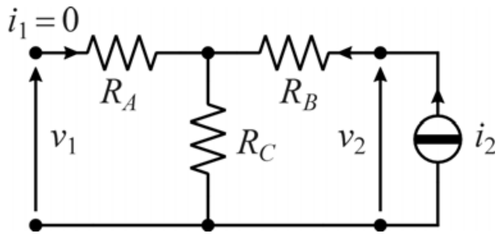

- $r_{22}$ = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 2
- $r_{12}$ = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

# Esempio – Resistori collegati a T




$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{C}} & R_{\mathrm{C}} \\ R_{\mathrm{C}} & R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}$$



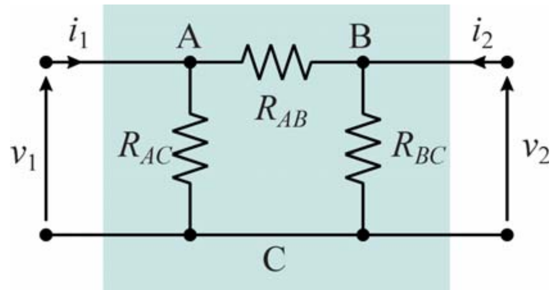




$$v_1 = \left(R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{C}}\right) i_1$$
$$v_2 = R_{\mathrm{C}} i_1$$

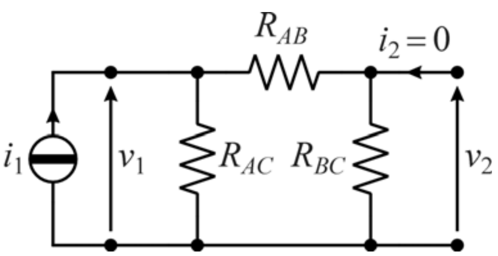
$$v_1 = R_{\mathrm{C}} i_2$$
$$v_2 = \left(R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{C}}\right) i_2$$

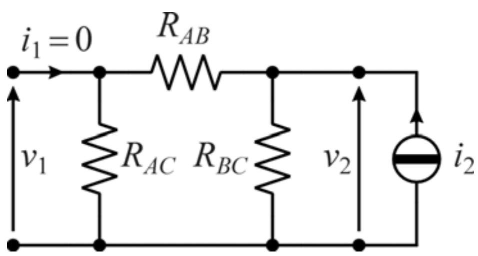


# Esempio – Resistori collegati a Π




$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{\mathrm{AB}} R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AC}} R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} & \dfrac{R_{\mathrm{AC}} R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \\ \dfrac{R_{\mathrm{AC}} R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} & \dfrac{R_{\mathrm{AB}} R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}} R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{BC}}} \end{bmatrix}$$




$$v_1 = i_1 \frac{R_{\mathrm{AC}}\left(R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}}\right)}{R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}}}$$
$$v_2 = i_1 \frac{R_{\mathrm{AC}}}{R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}}} R_{\mathrm{BC}}$$

$$v_2 = i_2 \frac{R_{\mathrm{BC}}\left(R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{AC}}\right)}{R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AB}}}$$
$$v_1 = i_2 \frac{R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AC}} + R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}}} R_{\mathrm{AC}}$$

# Esempio – Equivalenza Π – T (triangolo-stella)

- Un doppio bipolo a T e un doppio bipolo a Π sono equivalenti se le loro matrici di resistenza $\mathbf{R}_\mathrm{T}$ e $\mathbf{R}_\Pi$ sono uguali

$$\mathbf{R}_\mathrm{T} = \begin{bmatrix} R_\mathrm{A}+R_\mathrm{C} & R_\mathrm{C} \\ R_\mathrm{C} & R_\mathrm{B}+R_\mathrm{C} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_\Pi = \begin{bmatrix} \dfrac{R_\mathrm{AB}R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{AC}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} & \dfrac{R_\mathrm{AC}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} \\ \dfrac{R_\mathrm{AC}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} & \dfrac{R_\mathrm{AB}R_\mathrm{BC}+R_\mathrm{AC}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} \end{bmatrix}$$

- Confrontando le matrici si riconosce che devono essere verificate le relazioni

$$R_\mathrm{A} = \frac{R_\mathrm{AB}R_\mathrm{AC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} \qquad R_\mathrm{B} = \frac{R_\mathrm{AB}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}} \qquad R_\mathrm{C} = \frac{R_\mathrm{AC}R_\mathrm{BC}}{R_\mathrm{AB}+R_\mathrm{AC}+R_\mathrm{BC}}$$

  che corrispondono alle formule di trasformazione triangolo-stella



# Matrice di conduttanza

- Per un doppio bipolo comandato in tensione le equazioni possono essere poste nella forma

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$

  cioè

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$$

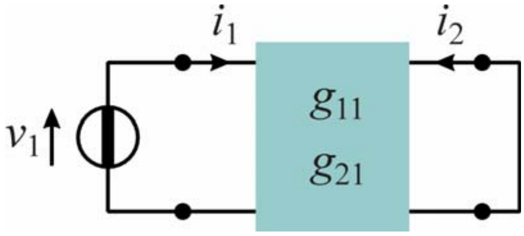
  dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{G}$ = **matrice di conduttanza**

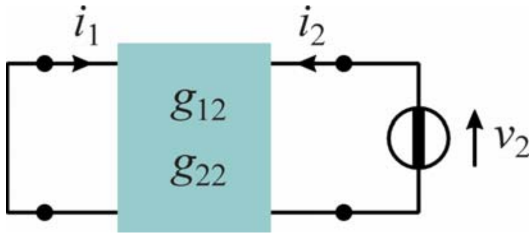
# Significato dei parametri di conduttanza

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \qquad g_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$




- $g_{11}$ = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- $g_{21}$ = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

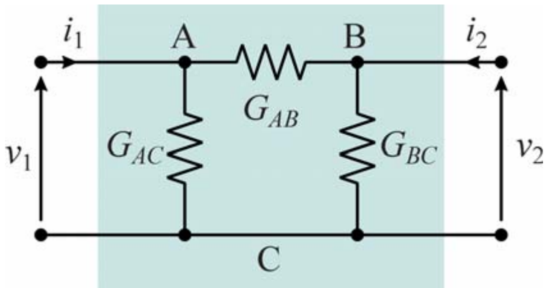
$$g_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} \qquad g_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$



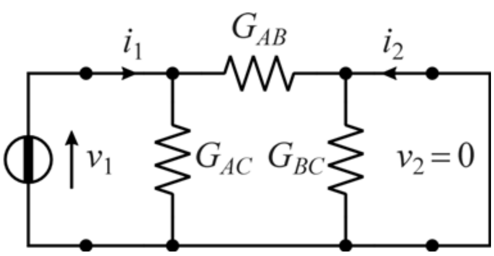

- $g_{22}$ = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 2
- $g_{12}$ = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

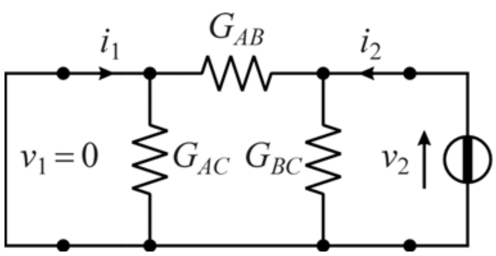


# Esempio – Resistori collegati a Π




$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{AB} + G_{AC} & -G_{AB} \\ -G_{AB} & G_{AB} + G_{BC} \end{bmatrix}$$

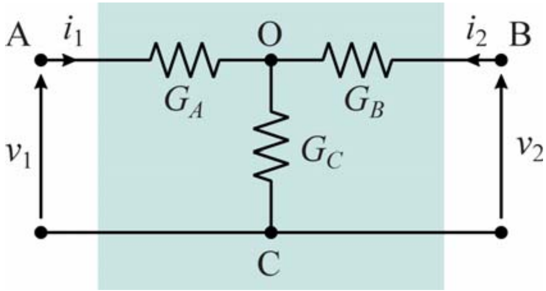


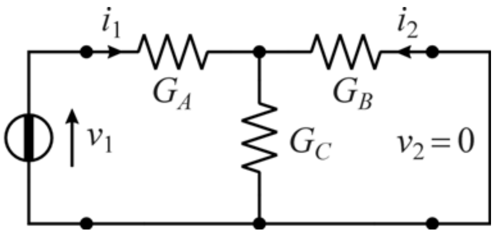

$$i_1 = v_1\left(G_{AB} + G_{AC}\right)$$
$$i_2 = -v_1 G_{AB}$$

$$i_1 = -v_2 G_{AB}$$
$$i_2 = v_2\left(G_{AB} + G_{BC}\right)$$

# Esempio – Resistori collegati a T

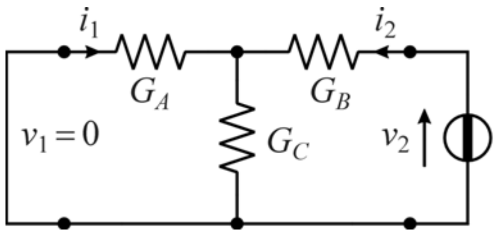



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{G_A G_B + G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} & -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \\ -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} & \dfrac{G_A G_B + G_B G_C}{G_A + G_B + G_C} \end{bmatrix}$$




$$i_1 = v_1 \frac{G_A (G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C}$$

$$i_2 = -v_1 \frac{G_A (G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C} \cdot \frac{G_B}{G_B + G_C}$$




$$i_2 = v_2 \frac{G_B (G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C}$$

$$i_1 = -v_2 \frac{G_B (G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C} \cdot \frac{G_A}{G_A + G_C}$$



# Esempio – Equivalenza T – Π (stella-triangolo)

- Un doppio bipolo a Π e un doppio bipolo a T sono equivalenti se le loro matrici di resistenza $\mathbf{G}_\Pi$ e $\mathbf{G}_T$ sono uguali

$$\mathbf{G}_\Pi = \begin{bmatrix} G_{AB} + G_{AC} & -G_{AB} \\ -G_{AB} & G_{AB} + G_{BC} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{G_A G_B + G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} & -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \\ -\dfrac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} & \dfrac{G_A G_B + G_B G_C}{G_A + G_B + G_C} \end{bmatrix}$$

- Confrontando le matrici si riconosce che devono essere verificate le relazioni

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \qquad G_{AC} = \frac{G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} \qquad G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

che corrispondono alle formule di trasformazione stella-triangolo

# Esempio – Equivalenza T – Π (stella-triangolo)

- In termini di resistenze, le formule precedenti divengono

$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{\frac{1}{R_A R_B}}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}} \qquad \frac{1}{R_{AC}}=\frac{\frac{1}{R_A R_C}}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}} \qquad \frac{1}{R_{BC}}=\frac{\frac{1}{R_B R_C}}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}}$$

  - quindi si ha

$$R_{AB}=\frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$
$$R_{AC}=\frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$
$$R_{BC}=\frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$



# Matrici ibride

- Se è possibile esprimere $v_1$ e $i_2$ in funzione di $i_1$ e $v_2$ si ha

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

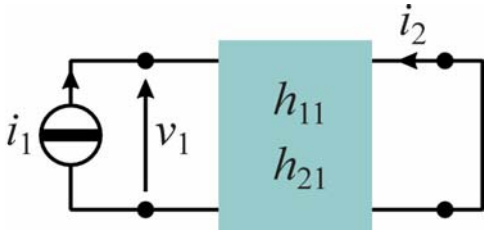
- $\mathbf{H}$ = **matrice ibrida** (**diretta**)
- Se è possibile esprimere $i_1$ e $v_2$ in funzione di $v_1$ e $i_2$ si ha

$$\begin{aligned} i_1 &= h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 \\ v_2 &= h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}'\cdot\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}'=\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{H}'$ = **matrice ibrida inversa**
- I coefficienti delle matrici ibride non hanno dimensioni omogenee

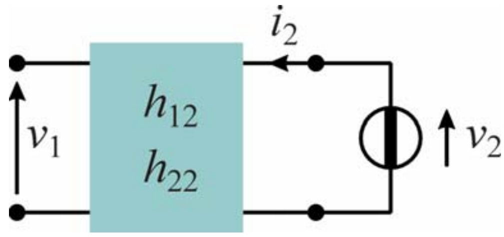
# Significato dei coefficienti di H

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$




- $h_{11}$ = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- $h_{21}$ = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$

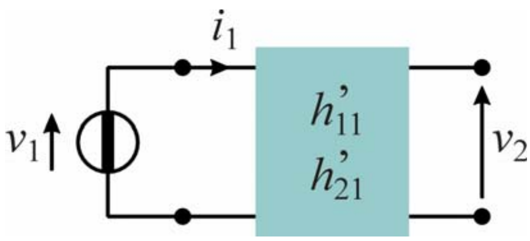



- $h_{22}$ = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 2
- $h_{12}$ = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 2 alla porta 1



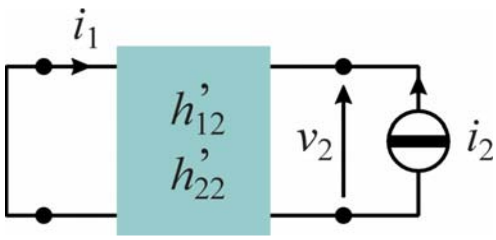
# Significato dei coefficienti di H′

$$h'_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0} \qquad h'_{21} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$




- $h'_{11}$ = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 1
- $h'_{21}$ = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

$$h'_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0} \qquad h'_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0}$$




- $h'_{22}$ = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 2
- $h'_{12}$ = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

# Matrice di trasmissione (matrice catena)

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 1 in funzione della tensione e della corrente alla porta 2
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_2$ invece di $i_2$

$$v_1 = Av_2 - Bi_2 \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
$$i_1 = Cv_2 - Di_2$$

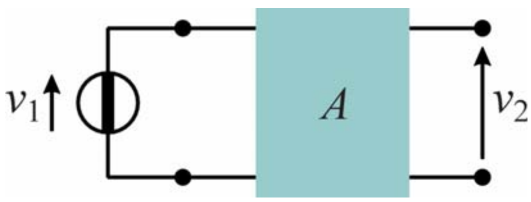
- $\mathbf{T}$ = **matrice di trasmissione** (**matrice catena**)
- Significato dei coefficienti

$$A = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \qquad B = \left.\frac{v_1}{-i_2}\right|_{v_2=0} \qquad C = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \qquad D = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{v_2=0}$$

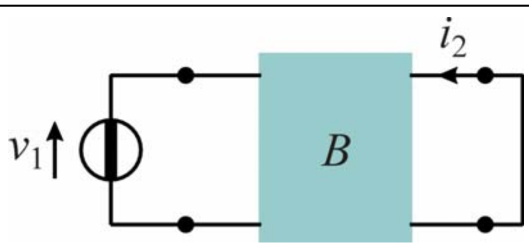
- Non è possibile utilizzare queste relazioni per determinare i coefficienti (occorrerebbe fissare sia la tensione che la corrente della porta 2)



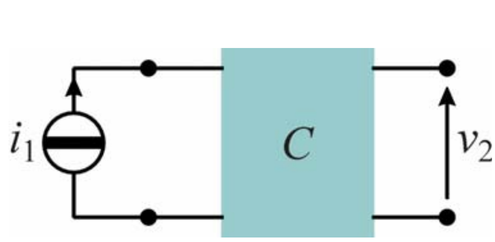
# Determinazione dei coefficienti di T



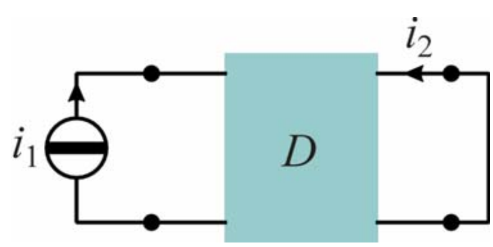

$$\frac{1}{A} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$




$$\frac{1}{B} = \left.\frac{-i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$




$$\frac{1}{C} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$




$$\frac{1}{D} = \left.\frac{-i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

# Matrice di trasmissione inversa

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 2 in funzione della tensione e della corrente alla porta 1
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_1$ invece di $i_1$

$$v_2 = A'v_1 - B'i_1 \qquad \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$
$$i_2 = C'v_1 - D'i_1$$

- $\mathbf{T}'$ = **matrice di trasmissione inversa**
- Significato dei coefficienti

$$A' = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \qquad B' = \left.\frac{v_2}{-i_1}\right|_{v_1=0} \qquad C' = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \qquad D' = \left.\frac{i_2}{-i_1}\right|_{v_1=0}$$



# Relazioni tra le rappresentazioni

- Confrontando le varie espressioni delle equazioni di un doppio bipolo si riconosce che (quando il doppio bipolo ammette tutte le rappresentazioni considerate)
  - la matrice $\mathbf{G}$ è l'inversa della matrice $\mathbf{R}$
  - la matrice $\mathbf{H}'$ è l'inversa della matrice $\mathbf{H}$
  - La matrice $\mathbf{T}'$ è l'inversa della matrice $\mathbf{T}$ con i coefficienti della diagonale secondaria cambiati di segno a causa delle scelte diverse per i versi di riferimento delle correnti
- Le altre relazioni tra le varie rappresentazioni si possono ottenere utilizzando le definizioni dei coefficienti delle matrici

# Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della prima colonna di $\mathbf{H}$

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$ (si pone $v_2 = 0$)

$$v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ 0 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_2 &= -\frac{r_{21}}{r_{22}} i_1 \\ v_1 &= \left( r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right) i_1 = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} i_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h_{11} = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} \qquad h_{21} = -\frac{r_{21}}{r_{22}}$$



# Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della seconda colonna di $\mathbf{H}$

$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$ (si pone $i_1 = 0$)

$$i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{r_{22}} v_2 \\ v_1 &= \frac{r_{12}}{r_{22}} v_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}} \qquad h_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

# Relazioni tra le rappresentazioni

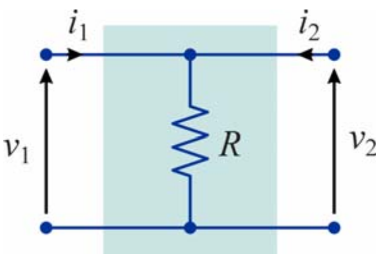
| | $\mathbf{R}$ | $\mathbf{G}$ | $\mathbf{H}$ | $\mathbf{H}'$ | $\mathbf{T}$ | $\mathbf{T}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{R}$ | $\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta\mathbf{G}} & -\frac{g_{12}}{\Delta\mathbf{G}} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta\mathbf{G}} & \frac{g_{11}}{\Delta\mathbf{G}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$ |
| $\mathbf{G}$ | $\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta\mathbf{R}} & -\frac{r_{12}}{\Delta\mathbf{R}} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta\mathbf{R}} & \frac{r_{11}}{\Delta\mathbf{R}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$ |
| $\mathbf{H}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ -\frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h'_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h'_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$ |
| $\mathbf{H}'$ | $\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$ |
| $\mathbf{T}$ | $\begin{matrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{21}} & -\frac{g_{11}}{g_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{B'}{\Delta\mathbf{T}'} \\ \frac{C'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}'} \end{matrix}$ |
| $\mathbf{T}'$ | $\begin{matrix} \frac{r_{22}}{r_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{12}} \\ \frac{1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{12}} & -\frac{g_{11}}{g_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{B}{\Delta\mathbf{T}} \\ \frac{C}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$ |

$\Delta\mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$

*Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne*



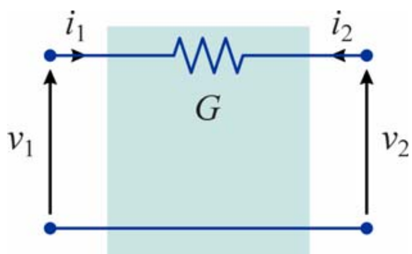
# Esempio – doppi bipoli che non ammettono la matrice R o la matrice G




$$v_1 = v_2 = R(i_1 + i_2)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

- Non è possibile imporre valori arbitrari ad entrambe le tensioni (cioè utilizzarle come variabili indipendenti) ➡ la matrice **G** non è definita




$$i_1 = -i_2 = G(v_1 - v_2)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}$$

- Non è possibile utilizzare le correnti come variabili indipendenti ➡ la matrice **R** non è definita

# Reciprocità

- **Ipotesi:**

$$\{v_1', v_2', i_1', i_2'\}$$
$$\{v_1'', v_2'', i_1'', i_2''\}$$

➡ insiemi arbitrari di tensioni e correnti che soddisfano le equazioni del doppio bipolo

- **Definizione:**
  si dice che il doppio bipolo è **reciproco** se

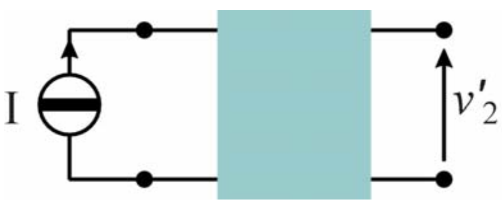
$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2'$$

- Per interpretare il significato di questa relazione e ricavare le condizioni che devono soddisfare i parametri delle matrici del doppio bipolo si fa riferimento alle situazioni in cui una sola delle variabili indipendenti è diversa da zero



# Reciprocità - parametri r

## Condizione 1




$$i_1' = \mathrm{I} \qquad i_2' = 0$$

$$v_2' = r_{21} i_1' + r_{22} i_2' = r_{21}\,\mathrm{I}$$

## Condizione 2


$$i_1'' = 0 \qquad i_2'' = \mathrm{I}$$

$$v_1'' = r_{11} i_1'' + r_{12} i_2'' = r_{12}\,\mathrm{I}$$

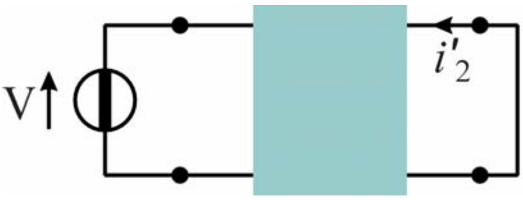
## Condizione di reciprocità

$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \;\Rightarrow\; v_1' \cdot 0 + v_2'\,\mathrm{I} = v_1''\,\mathrm{I} + v_2'' \cdot 0 \;\Rightarrow\; v_2' = v_1''$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{12} = r_{21}}$$

# Reciprocità - parametri g

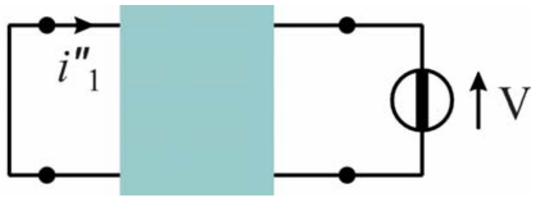
### Condizione 1




$v_1' = \mathrm{V} \qquad v_2' = 0$

$i_2' = g_{21} v_1' + g_{22} v_2' = g_{21}\,\mathrm{V}$

### Condizione 2




$v_1'' = 0 \qquad v_2'' = \mathrm{V}$

$i_1'' = g_{11} v_1'' + g_{12} v_2'' = g_{12}\,\mathrm{V}$

### Condizione di reciprocità

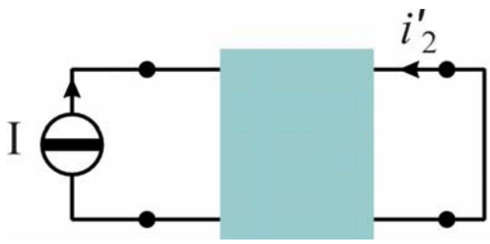
$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \;\Rightarrow\; \mathrm{V}\, i_1'' + 0 \cdot i_2'' = 0 \cdot i_1' + \mathrm{V}\, i_2' \;\Rightarrow\; i_2' = i_1''$

$\Rightarrow \boxed{g_{12} = g_{21}}$



# Reciprocità - parametri h

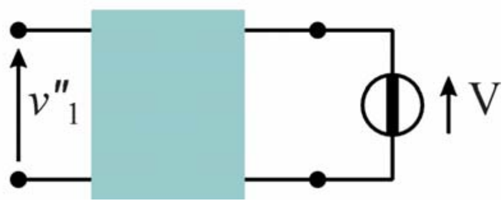
### Condizione 1




$i_1' = \mathrm{I} \qquad v_2' = 0$

$i_2' = h_{21} i_1' + h_{22} v_2' = h_{21}\,\mathrm{I}$

### Condizione 2




$i_1'' = 0 \qquad v_2'' = \mathrm{V}$

$v_1'' = h_{11} i_1'' + h_{12} v_2'' = h_{12}\,\mathrm{V}$

### Condizione di reciprocità

$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2' \;\Rightarrow\; v_1' \cdot 0 + 0 \cdot i_2'' = v_1'' \cdot \mathrm{I} + \mathrm{V}\, i_2' \;\Rightarrow\; \frac{i_2'}{\mathrm{I}} = -\frac{v_1''}{\mathrm{V}}$

$\Rightarrow \boxed{h_{12} = -h_{21}}$

# Reciprocità - parametri h′, T e T′

- **Parametri h′**:
  - procedendo in modo simile al caso precedente si ottiene la condizione
    $h'_{12} = -h'_{21}$
- **Parametri di trasmissione**:
  - si può dimostrare che per un doppio bipolo reciproco valgono le condizioni
    $\det(\mathbf{T}) = 1$
    $\det(\mathbf{T}') = 1$



# Doppi bipoli reciproci

- Per un doppio bipolo reciproco valgono le seguenti proprietà:
  - Applicando una corrente $I$ ad una qualunque delle porte all'altra porta si ottiene la stessa tensione a vuoto
  - Applicando una tensione $V$ ad una qualunque delle porte all'altra porta si ottiene la stessa corrente di cortocircuito
  - Il guadagno di corrente in cortocircuito in una direzione è uguale al guadagno di tensione a vuoto nella direzione opposta cambiato di segno

# Simmetria

- Si dice che un doppio bipolo è **simmetrico** se, per ogni insieme di tensioni e di correnti alle porte che soddisfano le sue equazioni caratteristiche, anche l'insieme ottenuto scambiando la porta 1 con la porta 2 soddisfa le equazioni caratteristiche
- Si può dimostrare che le matrici di un due porte simmetrico soddisfano le seguenti proprietà
  - matrice $\mathbf{R}$: $r_{11} = r_{22}$ $r_{12} = r_{21}$
  - matrice $\mathbf{G}$: $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = g_{21}$
  - matrice $\mathbf{H}$: $h_{12} = -h_{21}$ $\det(\mathbf{H}) = 1$
  - matrice $\mathbf{H}'$: $h'_{12} = -h'_{21}$ $\det(\mathbf{H}') = 1$
  - matrice $\mathbf{T}$: $A = D$ $\det(\mathbf{T}) = 1$
  - matrice $\mathbf{T}'$: $A' = D'$ $\det(\mathbf{T}') = 1$
- ➡ La simmetria implica anche la reciprocità



# Passività

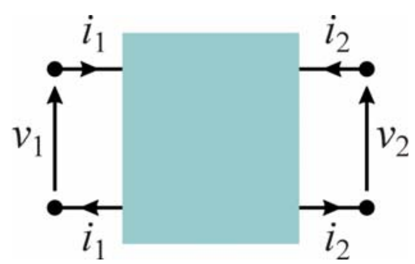
- Potenza assorbita da un doppio bipolo
  $p = v_1 i_1 + v_2 i_2$
- Per un doppio bipolo resistivo passivo, per tutti i valori di $v_1$, $v_2$, $i_1$, $i_2$ compatibili con le equazioni caratteristiche deve essere
  $p \geq 0$
- Da questa, si possono ricavare delle condizioni che devono essere soddisfatte dagli elementi delle matrici del doppio bipolo (**condizioni di passività**)
- Facendo uso delle matrici $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$, la potenza può essere espressa come

$$p = r_{11} i_1^2 + (r_{12} + r_{21}) i_1 i_2 + r_{22} i_2^2$$

$$p = g_{11} v_1^2 + (g_{12} + g_{21}) v_1 v_2 + g_{22} v_2^2$$

$$p = h_{11} i_1^2 + (h_{12} + h_{21}) i_1 v_2 + h_{22} v_2^2$$

$$p = h'_{11} v_1^2 + (h'_{12} + h'_{21}) v_1 i_2 + h'_{22} i_2^2$$



# Passività

- Le espressioni precedenti sono tutte del tipo

$$p = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

- Affinché il doppio bipolo sia passivo si deve avere $p \geq 0 \ \forall \ x_1, x_2$, quindi, in particolare
  - per $x_1 = 0$:
    $$p = cx_2^2 \geq 0 \ \forall x_2 \quad \Leftrightarrow \quad c \geq 0$$
  - per $x_2 = 0$:
    $$p = ax_1^2 \geq 0 \ \forall x_1 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0$$
  - per $x_2 \neq 0$:
    $$\frac{p}{x_2^2} = a\frac{x_1^2}{x_2^2} + b\frac{x_1}{x_2} + c \geq 0 \ \forall x_1, x_2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ac \geq \left(\frac{b}{2}\right)^2$$



# Passività

- Quindi valgono le seguenti condizioni di passività
  - matrice $\mathbf{R}$:
    $$r_{11} \geq 0 \quad r_{22} \geq 0 \quad r_{11}r_{22} \geq \left(\frac{r_{12} + r_{21}}{2}\right)^2$$
  - matrice $\mathbf{G}$:
    $$g_{11} \geq 0 \quad g_{22} \geq 0 \quad g_{11}g_{22} \geq \left(\frac{g_{12} + g_{21}}{2}\right)^2$$
  - matrice $\mathbf{H}$:
    $$h_{11} \geq 0 \quad h_{22} \geq 0 \quad h_{11}h_{22} \geq \left(\frac{h_{12} + h_{21}}{2}\right)^2$$
  - matrice $\mathbf{H}'$:
    $$h'_{11} \geq 0 \quad h'_{22} \geq 0 \quad h'_{11}h'_{22} \geq \left(\frac{h'_{12} + h'_{21}}{2}\right)^2$$

# Trasformatore ideale

- Le equazioni del trasformatore ideale possono essere espresse intermini di matrice ibrida o di matrice di trasmissione (dirette o inverse)

**Parametri di trasmissione**

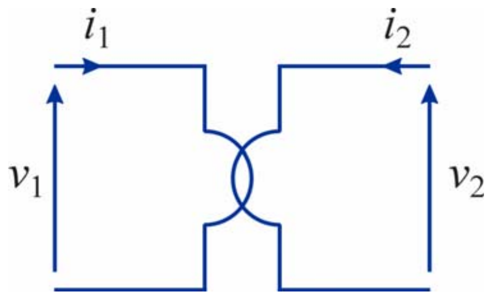
$$v_1 = K v_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{K} i_2$$

**Parametri ibridi**

$$v_1 = K v_2$$

$$i_2 = -K i_1$$



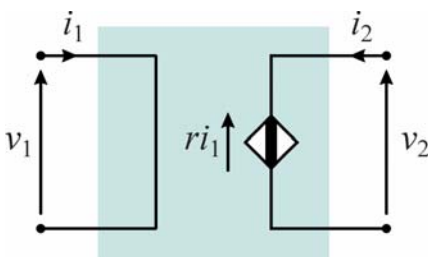

$K =$ **rapporto di trasformazione** o **rapporto spire**

- Per il trasformatore ideale non è possibile definire le matrici $\mathbf{R}$ e $\mathbf{G}$
- Vale la relazione $h_{12} = -h_{21} = K$
  - ➡ Il trasformatore ideale è un componente reciproco (ma non simmetrico, se $K \neq 1$ )



# Generatori dipendenti

**Generatore di tensione controllato in corrente**

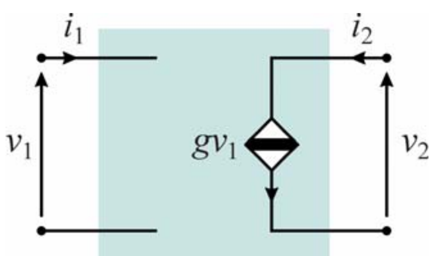



$$v_1 = 0 \qquad v_2 = r i_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di resistenza

$$r_{11} = r_{12} = r_{22} = 0 \qquad r_{21} = r$$

**Generatore di corrente controllato in tensione**



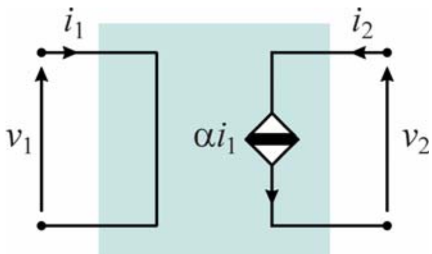

$$i_1 = 0 \qquad i_2 = g v_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di conduttanza

$$g_{11} = g_{12} = g_{22} = 0 \qquad g_{21} = g$$

# Generatori dipendenti

**Generatore di corrente controllato in corrente**

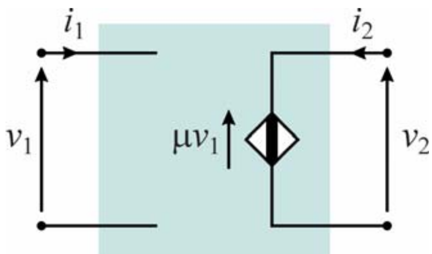



$$v_1 = 0 \qquad i_2 = \alpha i_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (diretti)

$$h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0 \qquad h_{21} = \alpha$$

**Generatore di tensione controllato in tensione**




$$i_1 = 0 \qquad v_2 = \mu v_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (inversi)

$$h'_{11} = h'_{12} = h'_{22} = 0 \qquad h'_{21} = \mu$$



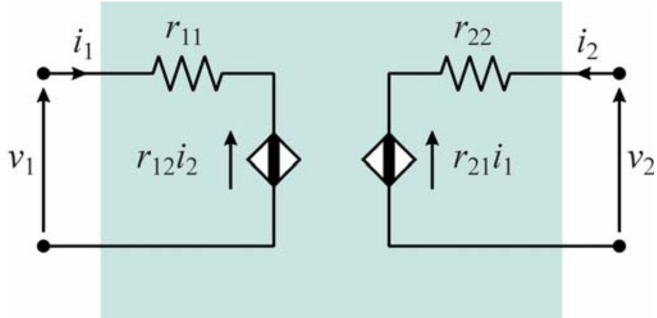
# Generatori dipendenti

- I quattro tipi di generatori dipendenti corrispondono a matrici $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$ con il solo elemento 21 diverso da zero
  - I generatori dipendenti sono componenti non reciproci
- Ciascun tipo di generatore ammette una sola tra le matrici $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$
- Si può verificare che l'unica altra matrice definita in tutti e quattro i casi è la matrice $\mathbf{T}$
- I doppi bipoli (e più in generale i componenti $N$-porte) lineari resistivi possono essere rappresentati mediante circuiti equivalenti formati da generatori dipendenti e resistori
  - In questo modo è possibile estendere i metodi generali di analisi (maglie, nodi, anelli) ai circuiti che contengono doppi bipoli (o, più in generale, $N$-porte)

# Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

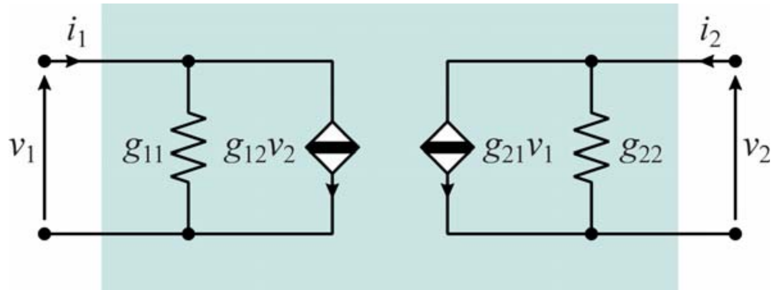
### Matrice di resistenza

$$v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2$$
$$v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2$$




### Matrice di conduttanza

$$i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} v_2$$
$$i_2 = g_{21} v_1 + g_{22} v_2$$

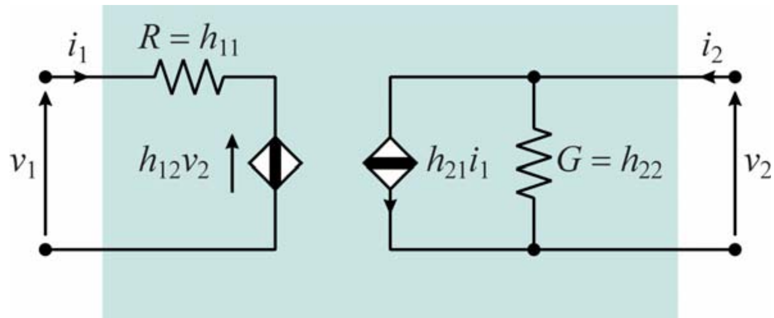





# Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

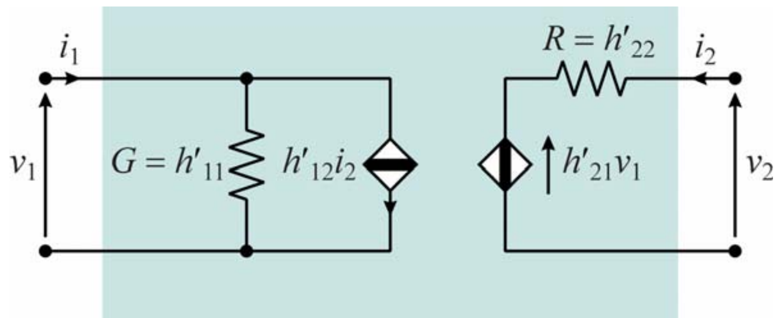
### Matrice H

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2$$
$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2$$




### Matrice H′

$$i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2$$
$$v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2$$

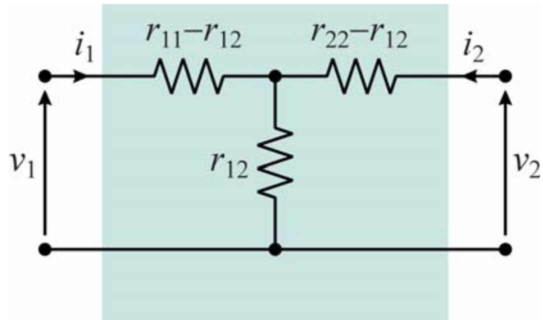


# Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

## Circuiti equivalenti a T

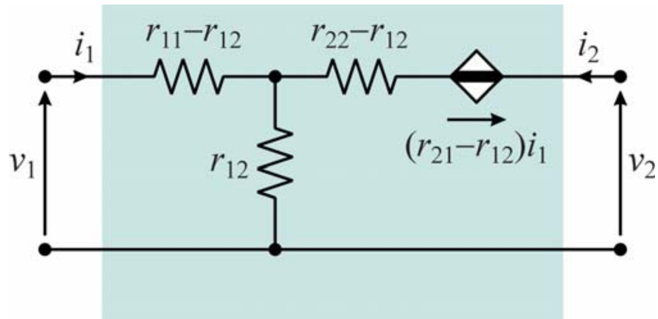
### Doppio bipolo reciproco

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$v_2 = r_{12}i_1 + r_{22}i_2$$




### Doppio bipolo non reciproco

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$
$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



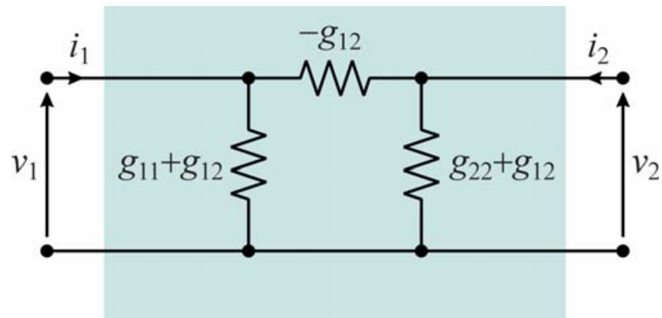



# Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

## Circuiti equivalenti a Π

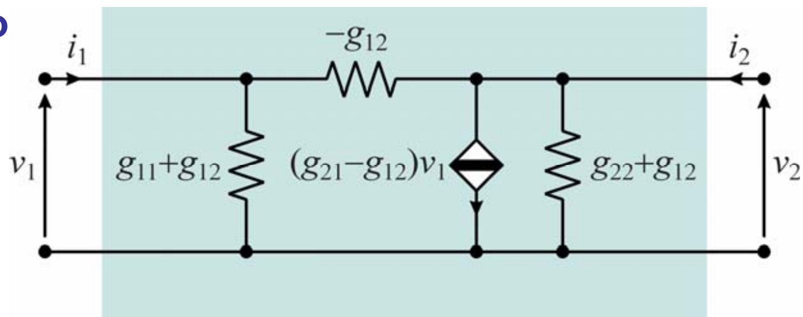
### Doppio bipolo reciproco

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{12}v_1 + g_{22}v_2$$




### Doppio bipolo non reciproco

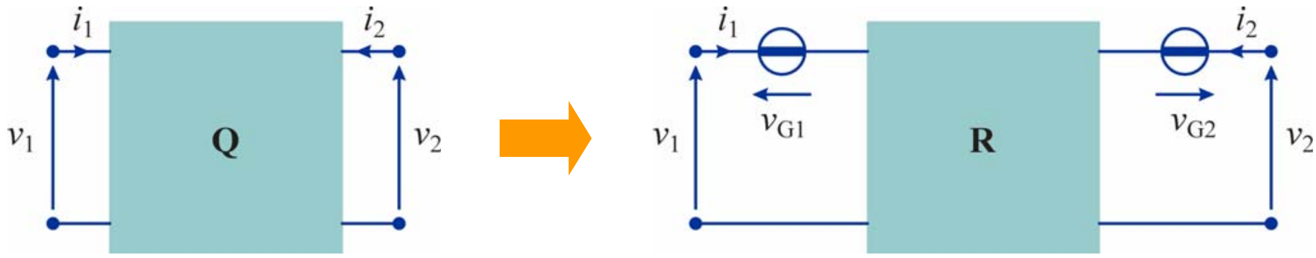
$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$
$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$



# Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

## Rappresentazione comandata in corrente

- **Ipotesi**:
  - Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - Q è comandato in corrente
- **Circuito equivalente**:
  - $v_{G1}$, $v_{G2}$ = tensioni a vuoto alle porte di Q ($v_1$ e $v_2$ per $i_1 = i_2 = 0$)
  - $\mathbf{R}$ = matrice di resistenza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti

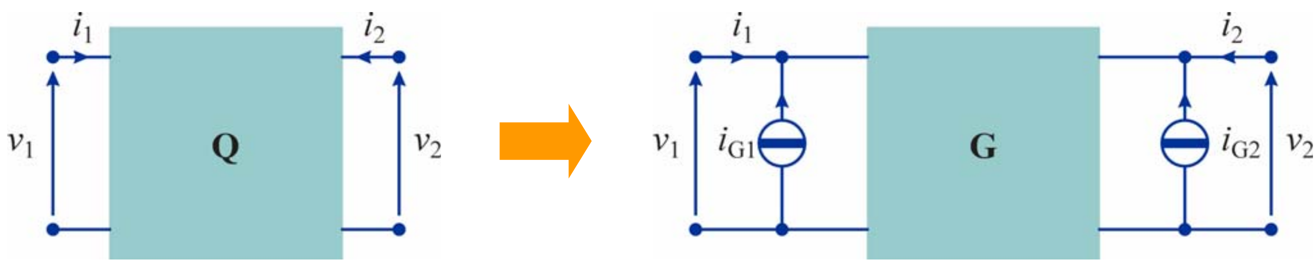





# Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

## Rappresentazione comandata in tensione

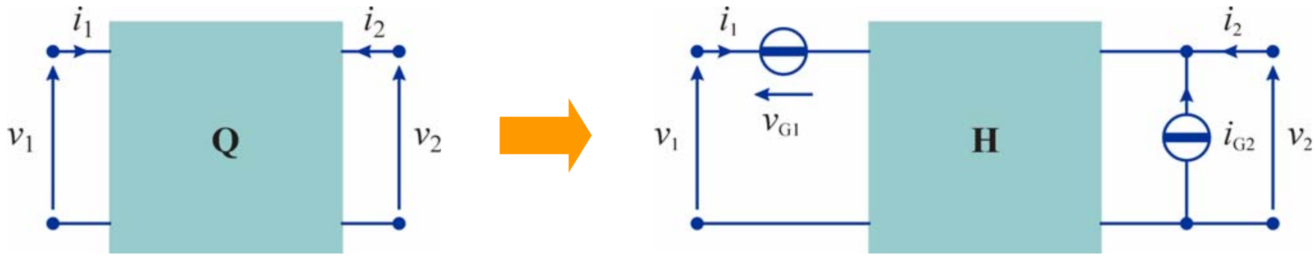
- **Ipotesi**:
  - Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - Q è comandato in tensione
- **Circuito equivalente**:
  - $i_{G1}$, $i_{G2}$ = correnti di cortocircuito alle porte di Q ($-i_1$ e $-i_2$ per $v_1 = v_2 = 0$)
  - $\mathbf{G}$ = matrice di conduttanza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti



# Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

## Rappresentazione ibrida (diretta)

- **Ipotesi**:
  - $\mathrm{Q}$ = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
  - $\mathrm{Q}$ ammette la rappresentazione ibrida (diretta)
- **Circuito equivalente**:
  - $v_{G1} = v_1$ per $i_1 = 0,\ v_2 = 0$
  - $i_{G2} = -i_2$ per $i_1 = 0,\ v_2 = 0$
  - $\mathbf{H}$ = matrice ibrida (diretta) del doppio bipolo ottenuto da $\mathrm{Q}$ azzerando i generatori indipendenti



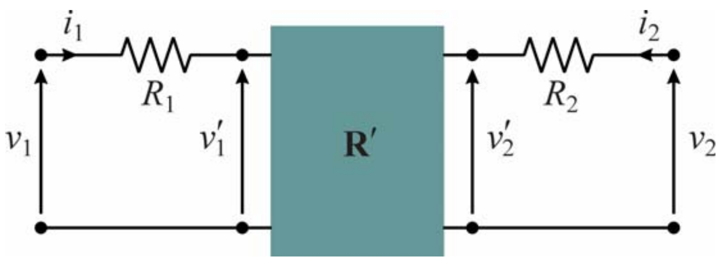


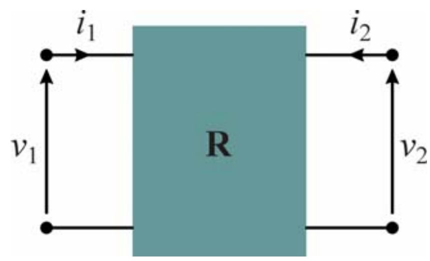

# Collegamenti di bipoli e doppi bipoli

- Di seguito si prenderanno in esame alcuni casi in cui un doppio bipolo è ottenuto collegando due doppi bipoli oppure collegando un doppio bipolo con uno più bipoli
- In tutti i casi si sottintende che siano soddisfatte le seguenti ipotesi (che nei casi pratici dovranno sottoposte a verifica)
  - I collegamenti considerati sono leciti (cioè non dànno origine a circuiti impossibili o indeterminati)
  - Le matrici utilizzate per rappresentare i doppi bipoli sono definite
  - Nel caso di doppi bipoli non intrinseci, i componenti, collegati nei modi considerati, si comportano effettivamente come doppi bipoli

# Resistori in serie alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di resistenza




$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = R_1 i_1 + v_1' = (R_1 + r'_{11}) i_1 + r'_{12} i_2$$
$$v_2 = R_2 i_2 + v_2' = r'_{21} i_1 + (R_2 + r'_{22}) i_2$$

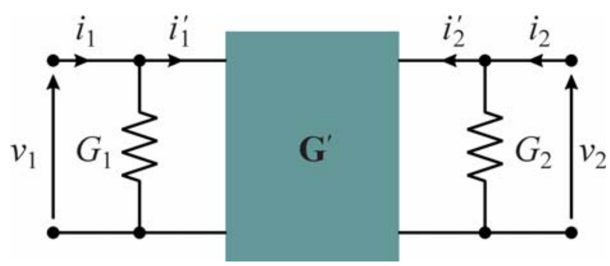
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r'_{11} + R_1 & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} + R_2 \end{bmatrix}$$

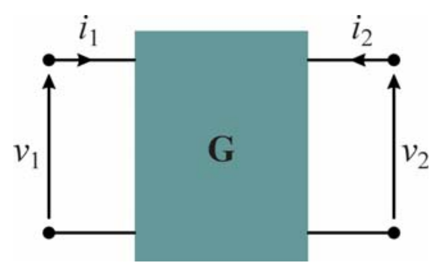
- Le resistenze in serie alle porte si sommano alle resistenze di ingresso



# Resistori in parallelo alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di conduttanza




$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = G_1 v_1 + i_1' = (G_1 + g'_{11}) v_1 + g'_{12} v_2$$
$$i_2 = G_2 v_2 + i_2' = g'_{21} v_1 + (G_2 + g'_{22}) v_2$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g'_{11} + G_1 & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} + G_2 \end{bmatrix}$$

- Le conduttanze dei resistori in parallelo alle porte si sommano alle conduttanze di ingresso

# Doppi bipoli in serie

- **LKI:**

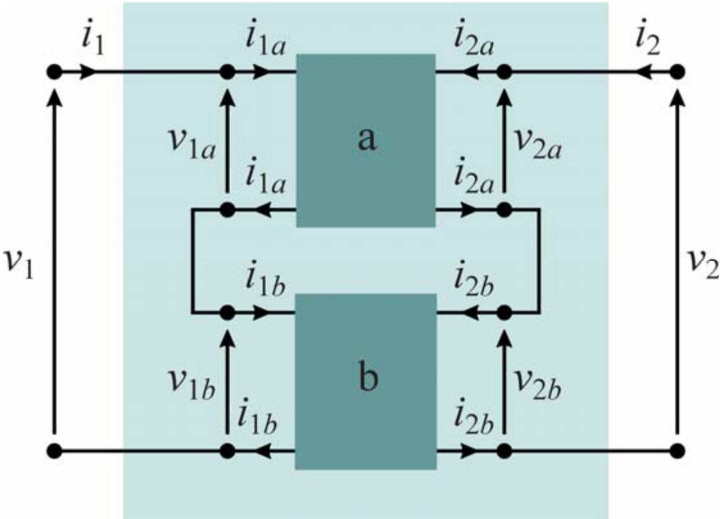
$$i_1 = i_{1a} = i_{1b} \qquad i_2 = i_{2a} = i_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_a = \mathbf{i}_b$$

- **LKV:**

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b} \qquad v_2 = v_{2a} + v_{2b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$$

- **Componenti:**

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{R}_a \mathbf{i}_a \qquad \mathbf{v}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b$$



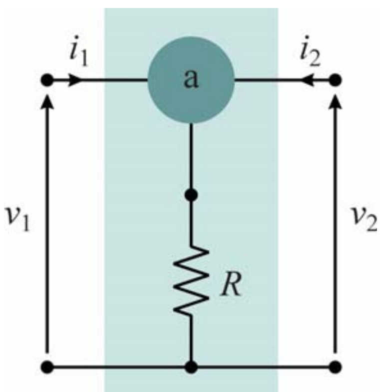

➡ $\mathbf{v} = (\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b)\mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$ ➡ $\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b}$

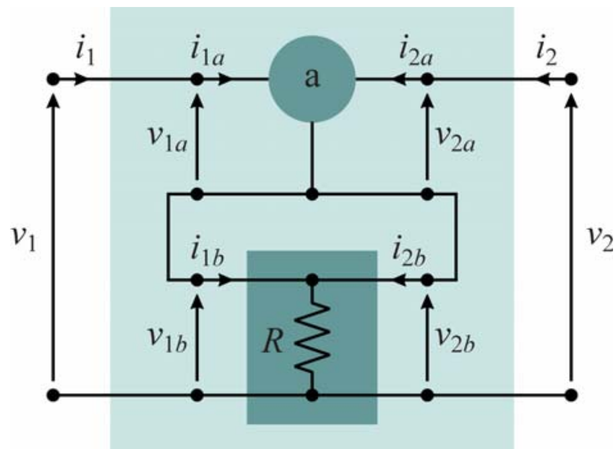
- La matrice $\mathbf{R}$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di resistenza dei due doppi bipoli



# Resistore in serie al terminale comune di un tripolo

- Questo collegamento può essere visto come un caso particolare di collegamento in serie di doppi bipoli




$$\mathbf{R}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} r_{11}+R & r_{12}+R \\ r_{21}+R & r_{22}+R \end{bmatrix}$$

➡ $R$ si somma a tutti gli elementi della matrice $\mathbf{R}_\mathrm{a}$

# Doppi bipoli in parallelo

- **LKV:**

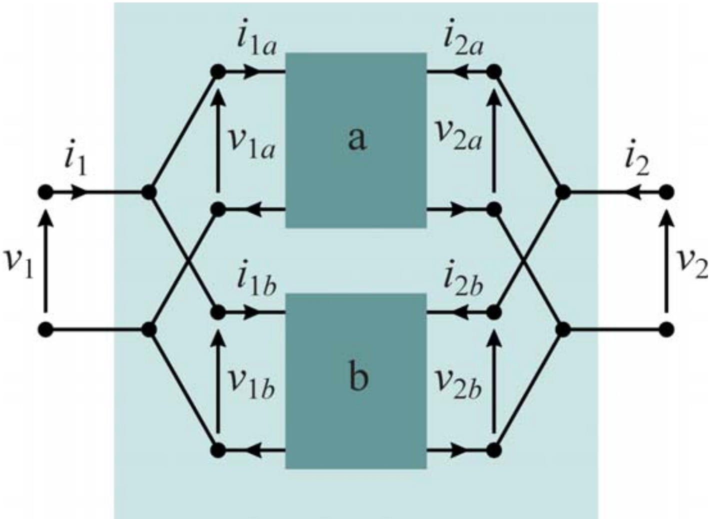
$$v_1 = v_{1a} = v_{1b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$$
$$v_2 = v_{2a} = v_{2b}$$

- **LKI:**

$$i_1 = i_{1a} + i_{1b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b$$
$$i_2 = i_{2a} + i_{2b}$$

- **Componenti:**

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{G}_a \mathbf{v}_a$$
$$\mathbf{i}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{v}_b$$



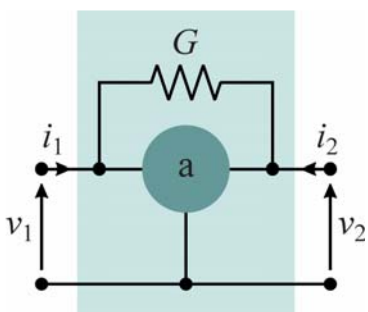

➡ $\mathbf{i} = (\mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b)\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$ ➡ $\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b}$

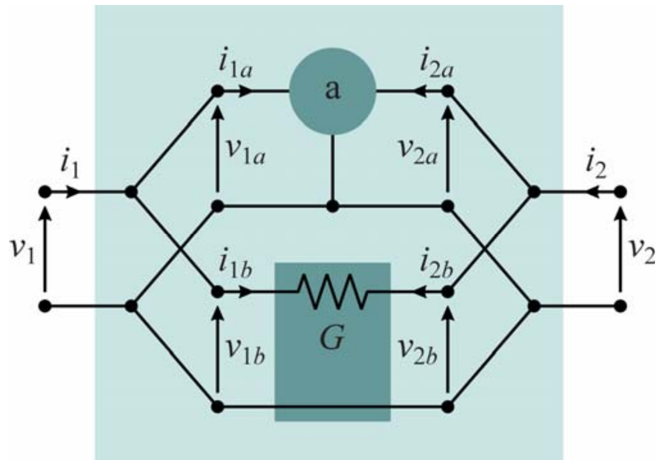
➡ La matrice $\mathbf{G}$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di conduttanza dei due doppi bipoli



# Resistore collegato tra le due porte

- Questo può essere visto come un caso particolare di collegamento in parallelo di doppi bipoli




$$\mathbf{G}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}_\mathrm{a} + \mathbf{G}_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} g_{11}+G & g_{12}-G \\ g_{21}-G & g_{22}+G \end{bmatrix}$$

➡ $G$ si somma agli elementi della diagonale principale e si sottrae dagli elementi della diagonale secondaria della matrice $\mathbf{G}_\mathrm{a}$

# Collegamento serie-parallelo

- **LKV:**

$v_1 = v_{1a} + v_{1b}$

$v_2 = v_{2a} = v_{2b}$

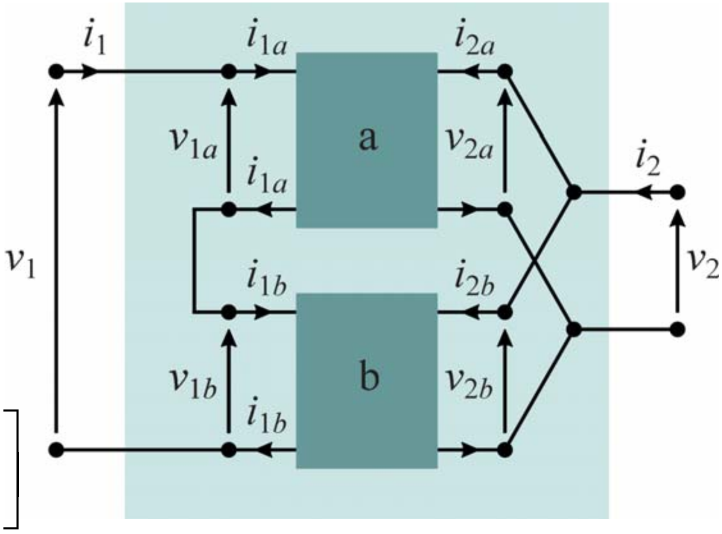
- **LKI:**

$i_1 = i_{1a} = i_{1b}$

$i_2 = i_{2a} + i_{2b}$

- **Componenti:**

$$\begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_a \begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_b \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix}$$




$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b) \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b}$$

➡ La matrice $\mathbf{H}$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride dei due doppi bipoli



# Collegamento parallelo-serie

- **LKV:**

$v_1 = v_{1a} = v_{1b}$

$v_2 = v_{2a} + v_{2b}$

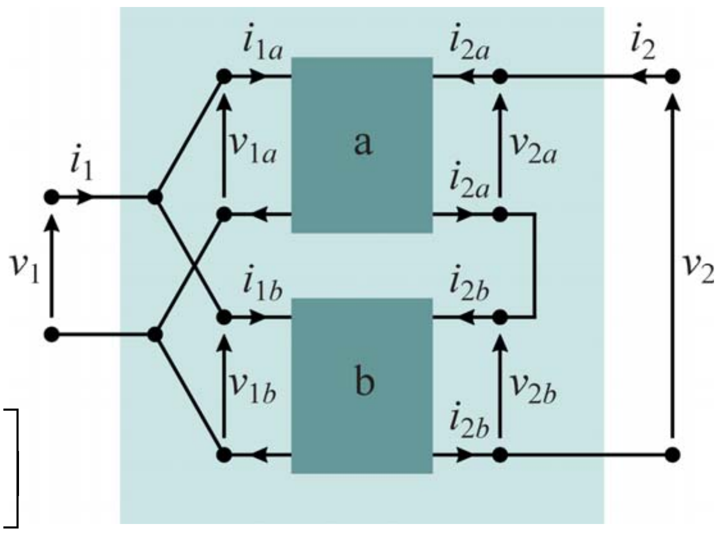
- **LKI:**

$i_1 = i_{1a} + i_{1b}$

$i_2 = i_{2a} = i_{2b}$

- **Componenti:**

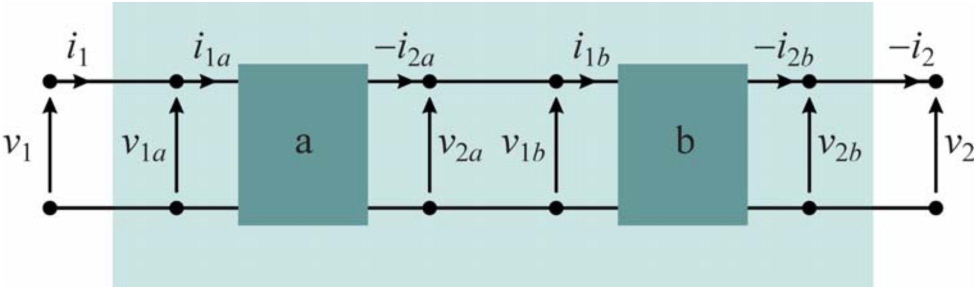
$$\begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_a \begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_b \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$




$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b}$$

➡ La matrice $\mathbf{H}'$ del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride inverse dei due doppi bipoli

# Doppi bipoli in cascata




- In questo caso conviene utilizzare le matrici di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

- Le tensioni e le correnti alla porta comune coincidono

$$v_{1b} = v_{2a} \qquad i_{1b} = -i_{2a}$$

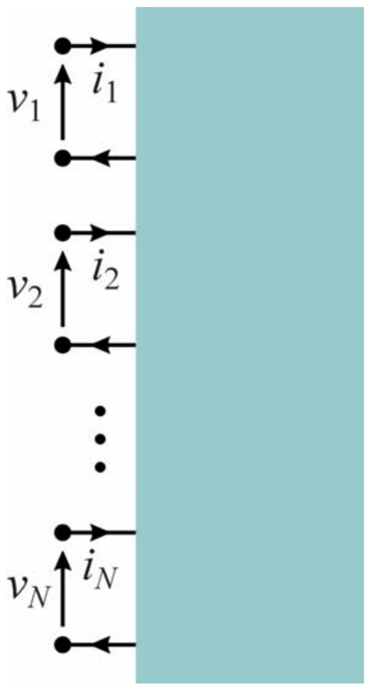
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b}$$

➡ La matrice $\mathbf{T}$ del doppio bipolo risultante è data dal prodotto delle matrici di trasmissione dei due doppi bipoli



# N-porte resistivi

- Componenti con $2N$ terminali che costituiscono $N$ porte
  - per ciascuna porta la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro




- Relazioni costitutive

$$\mathrm{f}_1[v_1, \ldots, v_N, i_1, \ldots i_N, t] = 0$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{f}_N[v_1, \ldots, v_N, i_1, \ldots i_N, t] = 0$$

$\mathrm{f}_1$, ..., $\mathrm{f}_N$ funzioni generiche

- Se il tempo non compare esplicitamente nelle funzioni il componente è detto **tempo-invariante**

# N-porte lineari tempo-invarianti

- Nel caso più generale le equazioni costitutive di un $N$-porte **lineare** e **tempo-invariante** sono del tipo

$$
\begin{aligned}
&a_{11}v_1 + \cdots + a_{1N}v_N + b_{11}i_1 + \cdots + b_{1N}i_N = 0 \\
&\vdots \\
&a_{N1}v_1 + \cdots + a_{NN}v_N + b_{11}i_1 + \cdots + b_{NN}i_N = 0
\end{aligned}
$$

- Queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix}$$



# Rappresentazioni di un N-porte lineare

- **Parametri di resistenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix}$$

- **Parametri di conduttanza**

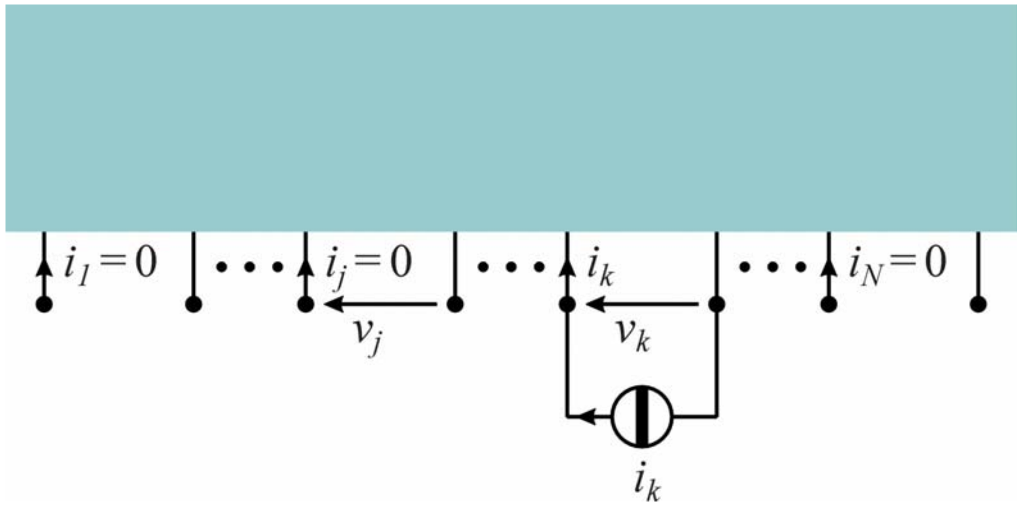
$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix}$$

- Se l'$N$-porte ammette entrambe le rappresentazioni, si ha

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

- Le altre possibili rappresentazioni sono dette **ibride**

## Significato dei parametri di resistenza

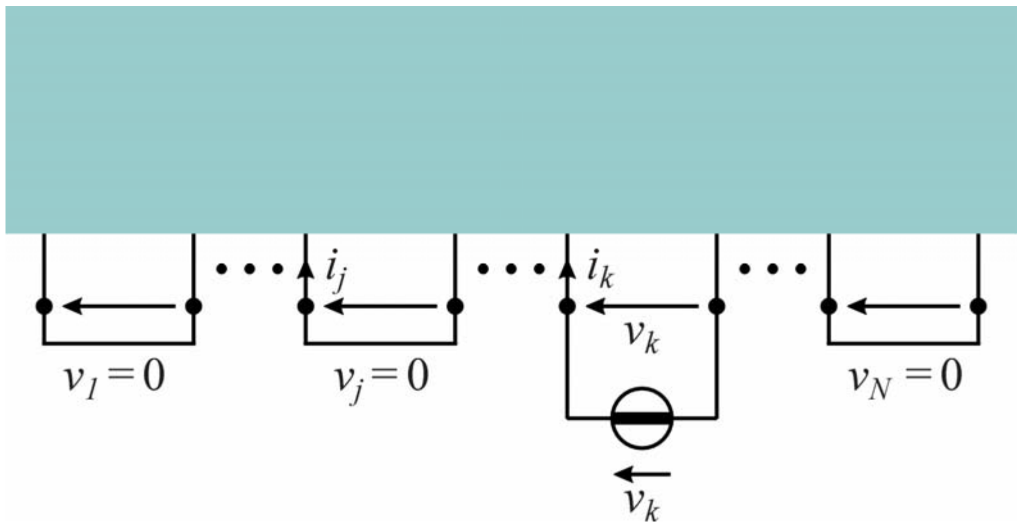



$$r_{jk} = \left.\frac{v_j}{i_k}\right|_{i_h=0\ \forall h\neq k}$$

Rapporto tra la tensione alla porta $j$ e la corrente alla porta $k$ quando tutte le porte diverse dalla $k$-esima sono a vuoto



## Significato dei parametri di conduttanza




$$g_{jk} = \left.\frac{i_j}{v_k}\right|_{v_h=0\ \forall h\neq k}$$

Rapporto tra la corrente alla porta $j$ e la tensione alla porta $k$ quando tutte le porte diverse dalla $k$-esima sono in cortocircuito

# Reciprocità

- Si dice che un $N$-porte è reciproco se, dati due generici insiemi di tensioni e correnti $v'_k, i'_k$ e $v''_k, i''_k$ $(k = 1,\ldots,N)$ compatibili con le sue equazioni caratteristiche, è verificata la relazione

$$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k = \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k$$

- Se il componente ammette la matrice di resistenza vale la relazione

$$r_{jk} = r_{kj} \quad \forall k \neq j$$

- Se il componente ammette la matrice di conduttanza vale la relazione

$$g_{jk} = g_{kj} \quad \forall k \neq j$$



# Teorema di reciprocità

- *Un $N$-porte ottenuto connettendo componenti resistivi reciproci è reciproco*

## Dimostrazione

- Premessa: per un resistore la condizione di reciprocità è sempre verificata, infatti

$$\begin{array}{l} v' = Ri' \\ v'' = Ri'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v'i'' = Ri'i'' \\ v''i' = Ri''i' \end{array} \Rightarrow v'i'' = v''i'$$

- Si considerano due condizioni di funzionamento dell'$N$-porte, in cui le porte vengono collegate a due insiemi arbitrari di $N$ bipoli, scelti con l'unico vincolo che i circuiti ottenuti dal collegamento ammettano soluzione unica
- Si indica con $l$ il numero totale di lati dei circuiti così ottenuti e si attribuiscono i numeri da $1$ a $N$ ai bipoli collegati alle porte

# Teorema di reciprocità

## Dimostrazione

- Si indicano le tensioni e le correnti relative ai due funzionamenti con
  $v'_1,\ldots,v'_l \;\; i'_1,\ldots,i'_l$ e $v''_1,\ldots,v''_l \;\; i''_1,\ldots,i''_l$
- Per il teorema di Tellegen si ha
  $$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k + \sum_{k=N+1}^{l} v'_k i''_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k + \sum_{k=N+1}^{l} v''_k i'_k = 0$$
- Se l'$N$-porte è formato da componenti reciproci, i secondi addendi di queste equazioni sono uguali
  $$\sum_{k=N+1}^{l} v'_k i''_k = \sum_{k=N+1}^{l} v''_k i'_k$$
- ➡ Questo richiede che siano uguali i primi addendi, cioè che le tensioni e le correnti dell'$N$-polo risultante soddisfino la condizione di reciprocità
  $$\sum_{k=1}^{N} v'_k i''_k = \sum_{k=1}^{N} v''_k i'_k$$



# N-porte dinamici

- Per una rete lineare dinamica a $N$ porte le relazioni tra le correnti e le tensioni alle porte sono di tipo differenziale lineare omogeneo
- In condizioni di regime sinusoidale, applicando la trasformata di Steinmetz si ottengono relazioni lineari algebriche omogenee tra i fasori delle tensioni $\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_N$ e delle correnti $\mathbf{I}_1 \ldots \mathbf{I}_N$ del tipo
  $$\mathbf{Av} + \mathbf{Bi} = \mathbf{0}$$
  dove
  $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N1} & \cdots & \mathbf{a}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \cdots & \mathbf{b}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{N1} & \cdots & \mathbf{b}_{NN} \end{bmatrix}$$
- Le equazioni hanno la stessa forma delle equazioni di un $N$-porte resistivo, ma in questo caso le matrici hanno coefficienti complessi dipendenti dalla pulsazione

# Matrici di impedenza e di ammettenza

- Se il componente è comandato in corrente oppure in tensione è possibile rappresentarlo mediante **parametri di impedenza o di ammettenza** che costituiscono l'estensione al caso dei regimi sinusoidale dei parametri di resistenza e di conduttanza

- **Matrice di impedenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \cdots & \mathbf{z}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{N1} & \cdots & \mathbf{z}_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{V}_j}{\mathbf{I}_k}\right|_{\mathbf{I}_h=0\ \forall h\neq k}$$

- **Matrice di ammettenza**

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \cdots & \mathbf{y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{N1} & \cdots & \mathbf{y}_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{I}_j}{\mathbf{V}_k}\right|_{\mathbf{V}_h=0\ \forall h\neq k}$$



# Matrici ibride e matrici di trasmissione

- Per i componenti a due porte si possono estendere al regime sinusoidale le definizioni delle matrici ibride e di trasmissione (in questo caso i coefficienti sono complessi e dipendono da $\omega$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

**Matrice ibrida**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}'_{11} & \mathbf{h}'_{12} \\ \mathbf{h}'_{21} & \mathbf{h}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

**Matrice ibrida inversa**

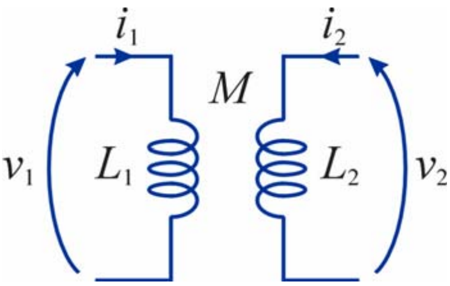
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

**Matrice di trasmissione**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix}$$

**Matrice di trasmissione inversa**

# Induttori accoppiati in regime sinusoidale




$$\mathrm{v}_1(t) = L_1 \frac{d\,\mathrm{i}_1(t)}{dt} + M \frac{d\,\mathrm{i}_2(t)}{dt}$$
$$\mathrm{v}_2(t) = M \frac{d\,\mathrm{i}_1(t)}{dt} + L_2 \frac{d\,\mathrm{i}_2(t)}{dt}$$

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

- Le equazioni sono un caso particolare di rappresentazione mediante di matrice di impedenza

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$



# Relazioni tra le rappresentazioni dei doppi bipoli

| | **Z** | **Y** | **H** | **H′** | **T** | **T′** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Z** | $\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta Y} & \frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$ |
| **Y** | $\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta Z} & \frac{z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$ |
| **H** | $\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta Y}{y_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$ |
| **H′** | $\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta Z}{z_{11}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$ |
| **T** | $\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta Y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta H'}{h'_{21}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{\Delta T'} & \frac{A}{\Delta T'} \end{matrix}$ |
| **T′** | $\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta Z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta Y}{y_{12}} & -\frac{y_{11}}{y_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \end{matrix}$ | $\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$ |

$\Delta \mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$

*Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne*