Circuiti dinamici

Circuiti del secondo ordine

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 9-11-2013)

Circuiti del secondo ordine

- **Circuiti del secondo ordine**: circuiti il cui stato è definito da due variabili $x_1(t)$ e $x_2(t)$

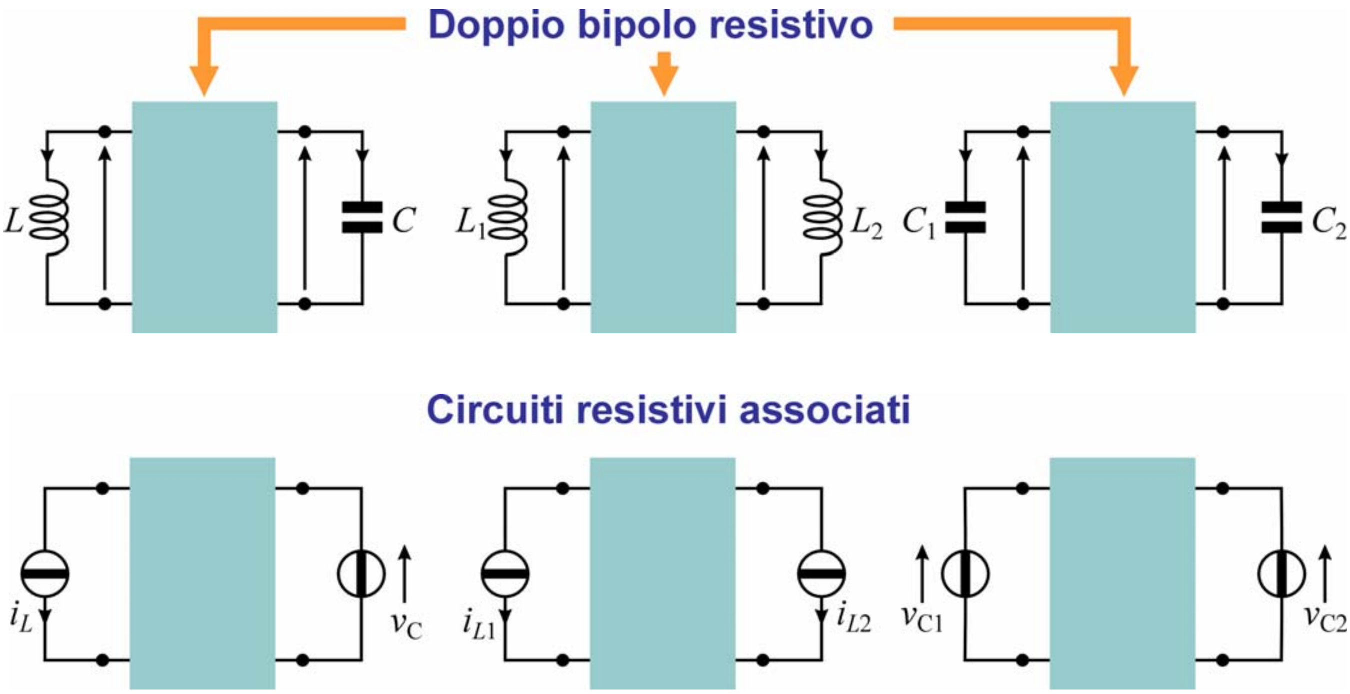
➡ Per un circuito (non degenere) del secondo ordine le equazioni di stato hanno la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \mathrm{f}_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \mathrm{f}_2(t) \end{cases}$$

- $\mathrm{f}_1(t)$ e $\mathrm{f}_2(t)$ sono delle combinazioni lineari degli ingressi

Circuiti del secondo ordine

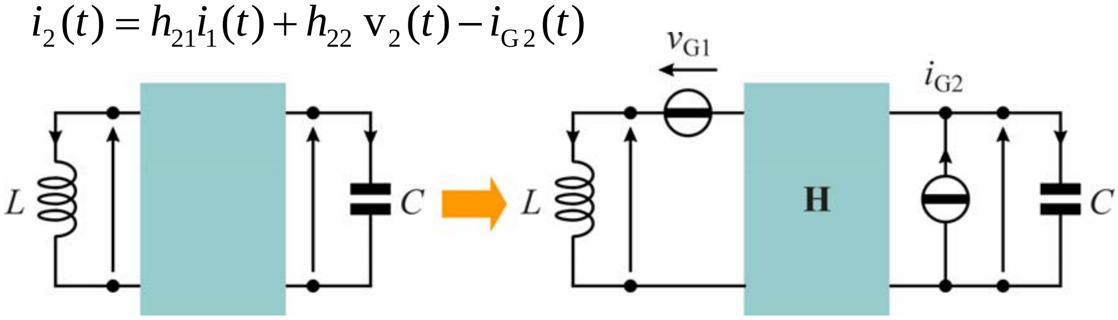
- I circuiti non degeneri del secondo ordine contengono due bipoli dinamici (condensatori o induttori) ➡ si hanno tre possibilità:



Circuiti con un induttore e un condensatore (1)

- Il circuito è costituito da un doppio bipolo resistivo (formato da componenti lineari e generatori indipendenti) con le porte collegate a un induttore e un condensatore
- Se il circuito non è degenere il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione ➡ è possibile fissare i valori di i_L e di v_C
  - ➡ il doppio bipolo ammette la rappresentazione ibrida
  - ➡ Per il teorema di rappresentazione del doppio bipolo, le equazioni della parte resistiva del circuito sono

$$v_1(t) = h_{11}i_1(t) + h_{12}v_2(t) + v_{G1}(t)$$
$$i_2(t) = h_{21}i_1(t) + h_{22}\,v_2(t) - i_{G2}(t)$$



Circuiti con un induttore e un condensatore (2)

- Inoltre si ha

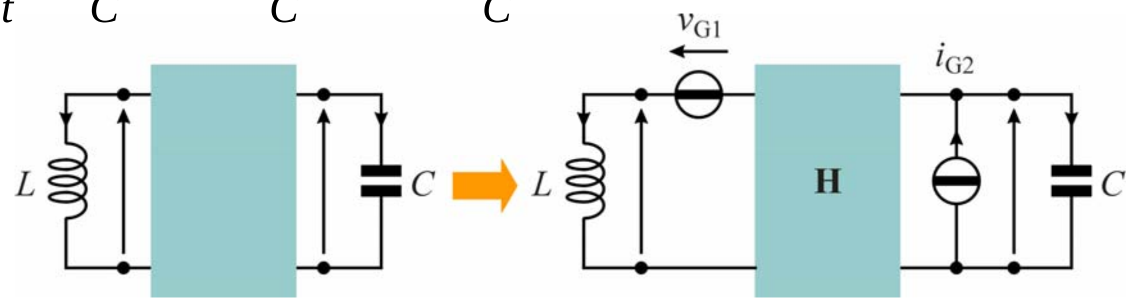
$$i_1 = -i_L \quad v_1 = v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_2 = v_C \quad i_2 = -i_C = -C\frac{dv_C}{dt}$$

➡ Quindi le equazioni di stato sono

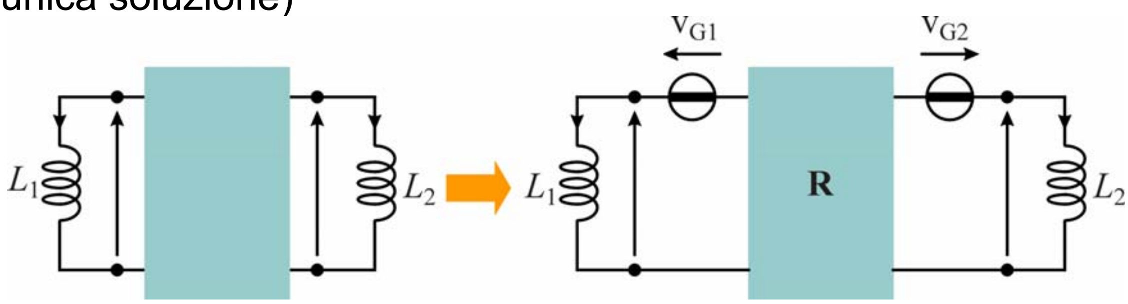
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{h_{11}}{L} i_L(t) + \frac{h_{12}}{L} v_C(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{h_{21}}{C} i_L(t) - \frac{h_{22}}{C} v_C(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C}$$



Circuiti con due induttori

- Per un circuito non degenere con due induttori, il doppio bipolo è comandato in corrente (➡ il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione)



➡ Il doppio bipolo ammette la rappresentazione mediante di matrice di resistenza

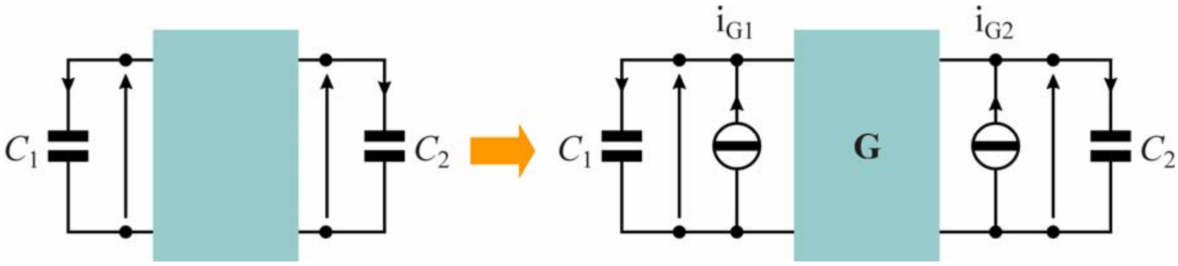
➡ Le equazioni di stato sono

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{r_{11}}{L_1} i_{L1}(t) - \frac{r_{12}}{L_1} i_{L2}(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L_1}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{r_{21}}{L_2} i_{L1}(t) - \frac{r_{22}}{L_2} i_{L2}(t) + \frac{v_{G2}(t)}{L_2}$$

Circuiti con due condensatori

- Per un circuito non degenere con due condensatori, il doppio bipolo è comandato in tensione (➡ il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione)



➡ Il doppio bipolo ammette la rappresentazione mediante di matrice di conduttanza

➡ Le equazioni di stato sono

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{g_{11}}{C_1} v_{C1}(t) - \frac{g_{12}}{C_1} v_{C2}(t) + \frac{i_{G1}(t)}{C_1}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{g_{21}}{C_2} v_{C1}(t) - \frac{g_{22}}{C_2} v_{C2}(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C_2}$$

Circuiti del 2° ordine reciproci

- Se il circuito è formato da componenti reciproci si ha

$$h_{12} = -h_{21} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\, \mathrm{i_L}}{dt} = -\dfrac{h_{11}}{L} \mathrm{i_L}(t) - \dfrac{h_{21}}{L} \mathrm{v_C}(t) + \dfrac{\mathrm{v_{G1}}(t)}{L} \\ \dfrac{d\, \mathrm{v_C}}{dt} = \dfrac{h_{21}}{C} \mathrm{i_L}(t) - \dfrac{h_{22}}{C} \mathrm{v_C}(t) + \dfrac{\mathrm{i_{G2}}(t)}{C} \end{cases}$$

$$r_{12} = r_{21} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\, \mathrm{i_{L1}}}{dt} = -\dfrac{r_{11}}{L_1} \mathrm{i_{L1}}(t) - \dfrac{r_{21}}{L_1} \mathrm{i_{L2}}(t) + \dfrac{\mathrm{v_{G1}}(t)}{L_1} \\ \dfrac{d\, \mathrm{i_{L2}}}{dt} = -\dfrac{r_{21}}{L_2} \mathrm{i_{L1}}(t) - \dfrac{r_{22}}{L_2} \mathrm{i_{L2}}(t) + \dfrac{\mathrm{v_{G2}}(t)}{L_2} \end{cases}$$

$$g_{12} = g_{21} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\, \mathrm{v_{C1}}}{dt} = -\dfrac{g_{11}}{C_1} \mathrm{v_{C1}}(t) - \dfrac{g_{21}}{C_1} \mathrm{v_{C2}}(t) + \dfrac{\mathrm{i_{G1}}(t)}{C_1} \\ \dfrac{d\, \mathrm{v_{C2}}}{dt} = -\dfrac{g_{21}}{C_2} \mathrm{v_{C1}}(t) - \dfrac{g_{22}}{C_2} \mathrm{v_{C2}}(t) + \dfrac{\mathrm{i_{G2}}(t)}{C_2} \end{cases}$$

Equazioni risolventi del secondo ordine (1)

- In generale la risoluzione del sistema delle equazioni di stato può essere ricondotta alla risoluzione di un'equazione del secondo ordine contenente una sola variabile di stato
- Per ottenere l'equazione risolvente si elimina una delle variabili dal sistema
  - Mediante una delle equazioni si esprime una delle variabili di stato in funzione dell'altra variabile e della derivata dell'altra variabile
  - Si sostituisce questa espressione nell'altra equazione

Derivazione dell'equazione del secondo ordine in x_1

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \mathrm{f}_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \mathrm{f}_2(t) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1(t) - \frac{1}{a_{12}}\mathrm{f}_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{a_{12}}\frac{d\,\mathrm{f}_1}{dt}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - (a_{11}+a_{22})\frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = \frac{d\,\mathrm{f}_1}{dt} - a_{22}\,\mathrm{f}_1(t) + a_{12}\,\mathrm{f}_2(t)$$

Nota

- Il procedimento non è applicabile se $a_{12} = 0$ o $a_{21} = 0$
  - Se $a_{12} = 0$ nella prima equazione di stato non compare $x_2(t)$
    - ➡ $x_1(t)$ soddisfa un'equazione differenziale del primo ordine
  - Se $a_{21} = 0$ nella seconda equazione di stato non compare $x_1(t)$
    - ➡ $x_2(t)$ soddisfa un'equazione differenziale del primo ordine
- Se il circuito è reciproco $a_{12} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{21} = 0$
  - ➡ In questo caso il circuito si riduce a due circuiti del primo ordine disaccoppiati

Equazioni risolventi del secondo ordine (2)

- Equazione risolvente in x_1

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = \frac{d\,\mathrm{f}_1}{dt} - a_{22}\,\mathrm{f}_1(t) + a_{12}\,\mathrm{f}_2(t)$$

- Procedendo in modo analogo si trova l'equazione risolvente in x_2

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx_2}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2(t) = \frac{d\,\mathrm{f}_2}{dt} + a_{21}\,\mathrm{f}_1(t) - a_{11}\,\mathrm{f}_2(t)$$

➡ *Le equazioni del secondo ordine relative alle due variabili di stato differiscono solo per i termini noti*

Equazioni risolventi del secondo ordine (3)

- Le due equazioni possono essere scritte nella forma

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_i}{dt} + \omega_0^2 x_i(t) = F_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

$$2\alpha = -(a_{11} + a_{22}) = -\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\omega_0^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(\mathbf{A})$$

  - α = **coefficiente di smorzamento**
  - ω_0 = **pulsazione naturale**

Espressioni delle variabili di stato

- I primi membri delle equazioni in x_1 e x_2 sono uguali
  - ➡ per entrambe le variabili di stato l'equazione omogenea associata è la stessa
- Le variabili di stato possono essere espresse come

$$x_1(t) = x_{H1}(t) + x_{P1}(t)$$

$$x_2(t) = x_{H2}(t) + x_{P2}(t)$$

- $x_{P1}(t)$ e $x_{P2}(t)$ rappresentano le soluzioni particolari
- $x_{H1}(t)$ e $x_{H2}(t)$ derivano dall'integrale generale della stessa equazione omogenea
  - ➡ differiscono solo per i valori delle due costanti dipendenti dalle condizioni iniziali

Condizioni iniziali

- Per determinare la soluzione occorre associare a ciascuna equazione differenziale due condizioni iniziali relative al valore all'istante t_0^+ di x_j e della sua derivata
- I valori iniziali delle variabili di stato si ottengono studiando il comportamento del circuito per $t = t_0^-$
- I valori all'istante t_0^+ delle derivate delle variabili di stato si ottengono inserendo nelle equazioni di stato i valori delle variabili di stato all'istante $t = t_0$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx_1}{dt}\right|_{t_0^+} = a_{11}x_1(t_0) + a_{12}x_2(t_0) + \mathrm{f}_1(t_0^+) \\ \left.\dfrac{dx_2}{dt}\right|_{t_0^+} = a_{21}x_1(t_0) + a_{22}x_2(t_0) + \mathrm{f}_2(t_0^+) \end{cases}$$

Determinazione della soluzione omogenea

- Per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

- Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono dette **frequenze naturali** del circuito
- Si distinguono tre casi caratterizzati da valore positivo, nullo o negativo del discriminante $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$
  - soluzioni reali distinte: $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 > \omega_0^2$
  - soluzioni reali coincidenti: $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \omega_0^2$
  - soluzioni complesse coniugate: $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 < \omega_0^2$

Soluzioni reali distinte (1)

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta > 0$$

- Le frequenze naturali sono

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_d$$

  - Se $\alpha > 0$ e $\omega_0^2 > 0$, si ha $\alpha_d < \alpha$ e quindi $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
  - ➡ Il circuito è asintoticamente stabile
  - ➡ In questo caso si dice che il circuito è **sovrasmorzato**
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$x_{Hi}(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t}$$

- Integrale generale dell'equazione completa:

$$x_i(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t} + x_{Pi}(t)$$

Soluzioni reali distinte (2)

- Le costanti k_{1i} e k_{2i} si determinano imponendo le condizioni iniziali
- Assumendo, per semplicità, $t_0 = 0$ si ha

$$\begin{cases} x_i(0) = k_{1i} + k_{2i} + x_{Pi}(0^+) \\ \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} = \lambda_1 k_{1i} + \lambda_2 k_{2i} + \left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{1i} = \frac{\left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} - \left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} - \lambda_2\left[x_i(0) - x_{Pi}(0^+)\right]}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$k_{2i} = \frac{\left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} - \left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} - \lambda_1\left[x_i(0) - x_{Pi}(0^+)\right]}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Soluzioni reali coincidenti (1)

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

- Il valore comune delle due frequenze naturali è

  $$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

  - Se $\alpha > 0$, le soluzioni sono negative
  - ➡ Il circuito è asintoticamente stabile
  - ➡ In questo caso si dice che il circuito è **criticamente smorzato**
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

  $$x_{Hi}(t) = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\alpha t} = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\omega_0 t}$$

- Integrale generale dell'equazione completa:

  $$x_i(t) = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\alpha t} + x_{Pi}(t)$$

Soluzioni reali coincidenti (2)

- Le costanti k_{1i} e k_{2i} si determinano imponendo le condizioni iniziali
- Assumendo $t_0 = 0$ si ha

$$\begin{cases} x_i(0) = k_{1i} + x_{Pi}(0^+) \\ \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} = -\alpha k_{1i} + k_{2i} + \left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} \end{cases}$$

⬇

$$k_{1i} = x_i(0) - x_{Pi}(0^+)$$

$$k_{2i} = \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} - \left.\frac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} + \alpha\left[x_i(0) - x_{Pi}(0^+)\right]$$

Soluzioni complesse coniugate (1)

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

- Le frequenze naturali sono
  $$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$
  - Se $\alpha > 0$, le parti reali di λ_1 e λ_2 sono negative
  - ➡ Il circuito è asintoticamente stabile
  - ➡ In questo caso si dice che il circuito è **sottosmorzato**
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:
  $$x_{Hi}(t) = k_{1i} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_{2i} e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$
- Questa soluzione rappresenta la tensione di un condensatore o la corrente di un induttore, quindi ha significato fisico solo se assume valori reali per ogni t

Soluzioni complesse coniugate (2)

- Affinché $x_{Hi}(t)$ sia reale occorre che sia $k_{2i} = k_{1i}^*$
- ➡ Si può porre
  $$k_{1i} = \frac{A_i}{2} e^{j\varphi_i} \quad (A_i, \varphi_i \in R, \quad A_i \geq 0) \quad \Rightarrow \quad k_{2i} = \frac{A_i}{2} e^{-j\varphi_i}$$
- ➡ Utilizzando la formula di Eulero si ottiene
  $$x_{Hi}(t) = \frac{A_i}{2} e^{j\varphi_i} \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{A_i}{2} e^{-j\varphi_i} \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t} =$$
  $$= A_i e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega_d t + \varphi_i)} + e^{-j(\omega_d t + \varphi_i)}}{2} \right] = A_i e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi_i)$$
- Integrale generale dell'equazione completa:
  $$x_i(t) = A_i e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi_i) + x_{Pi}(t)$$
- Anche in questo caso si devono determinare due costanti reali (A_i e φ_i) imponendo le condizioni iniziali

Soluzioni complesse coniugate (3)

- Assumendo $t_0 = 0$, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_i(0) = A_i\cos(\varphi_i) + x_{Pi}(0^+) \\ \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} = -\alpha A_i\cos(\varphi_i) - \omega_d A_i \operatorname{sen}(\varphi_i) + \left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A_i\cos(\varphi_i) = x_i(0) - x_{Pi}(0^+) = a \\ A_i \operatorname{sen}(\varphi_i) = \dfrac{1}{\omega_d}\left\{\left.\dfrac{dx_{Pi}}{dt}\right|_{0^+} - \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{0^+} - \alpha\left[x_i(0) - x_{Pi}(0^+)\right]\right\} = b \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A_i = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & a > 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(b) & a = 0 \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi\cdot\operatorname{sgn}(b) & a < 0 \end{cases}$$

Espressioni delle risposte (1)

- Le altre risposte sono combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi

$$y_i(t) = c_{i1}x_1(t) + c_{i2}x_2(t) + g_i(t)$$

➡ La generica risposta $y_i(t)$ può essere espressa come

$$y_i(t) = y_{Hi}(t) + y_{Pi}(t)$$

- $y_{Pi}(t)$ è un termine che dipende solo dagli ingressi
- $y_{Hi}(t)$ ha la stessa forma di $x_{H1}(t)$ e $x_{H2}(t)$

- Quindi tutte le tensioni e le correnti del circuito hanno, a seconda del valore di Δ, espressioni del tipo

$$y_i(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t} + y_{Pi}(t) \qquad \text{per } \Delta > 0$$

$$y_i(t) = k_{1i}e^{-\alpha t} + k_{2i}te^{-\alpha t} + y_{Pi}(t) \qquad \text{per } \Delta = 0$$

$$y_i(t) = A_i e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \varphi_i) + y_{Pi}(t) \qquad \text{per } \Delta < 0$$

Espressioni delle risposte (2)

- Se il circuito è asintoticamente stabile, per $t \to \infty$ le componenti $y_{Hi}(t)$ tendono a zero (**componenti transitorie**)
- Per t abbastanza grande, cioè per

$$t >> \max\left(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}\right) \quad \text{se } \Delta > 0$$

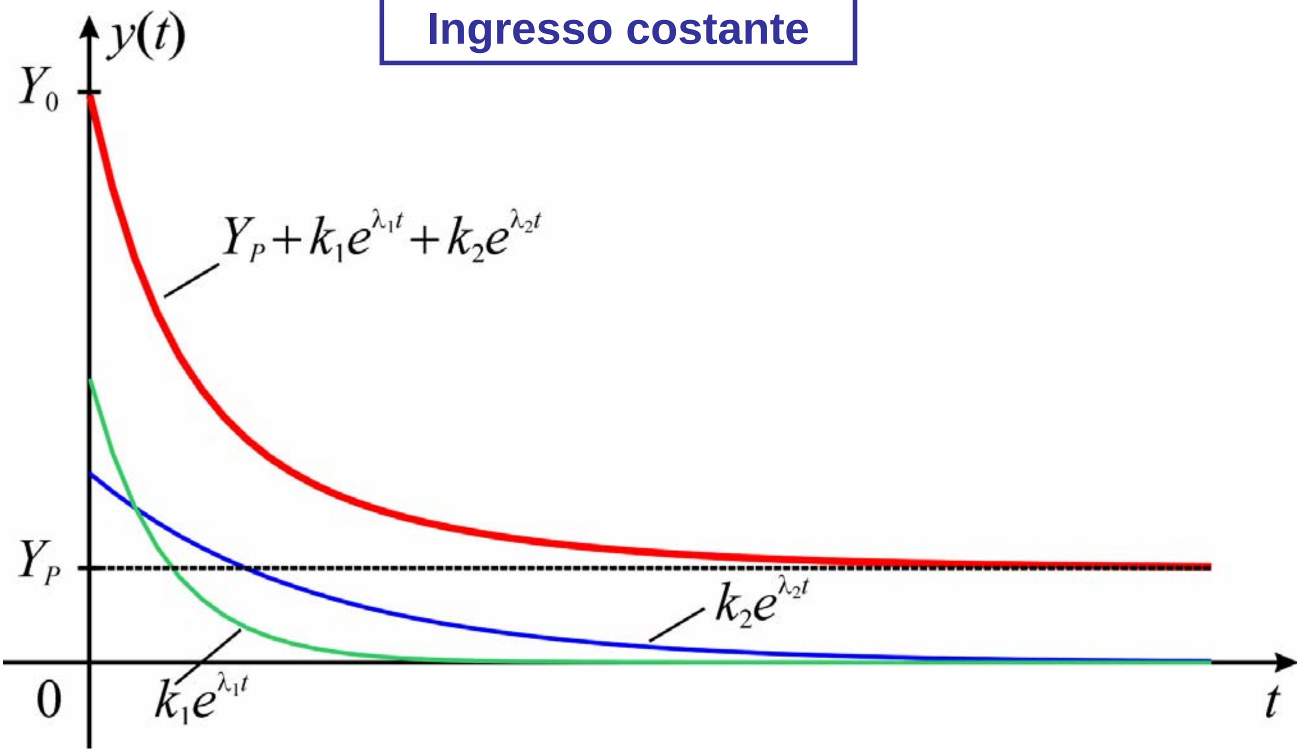
$$t >> \frac{1}{\alpha} \quad \text{se } \Delta \leq 0$$

(dove >> in pratica significa 5÷7 volte maggiore) le risposte si identificano con le componenti $y_{Pi}(t)$ (**componenti di regime**) dipendenti solo dagli ingressi

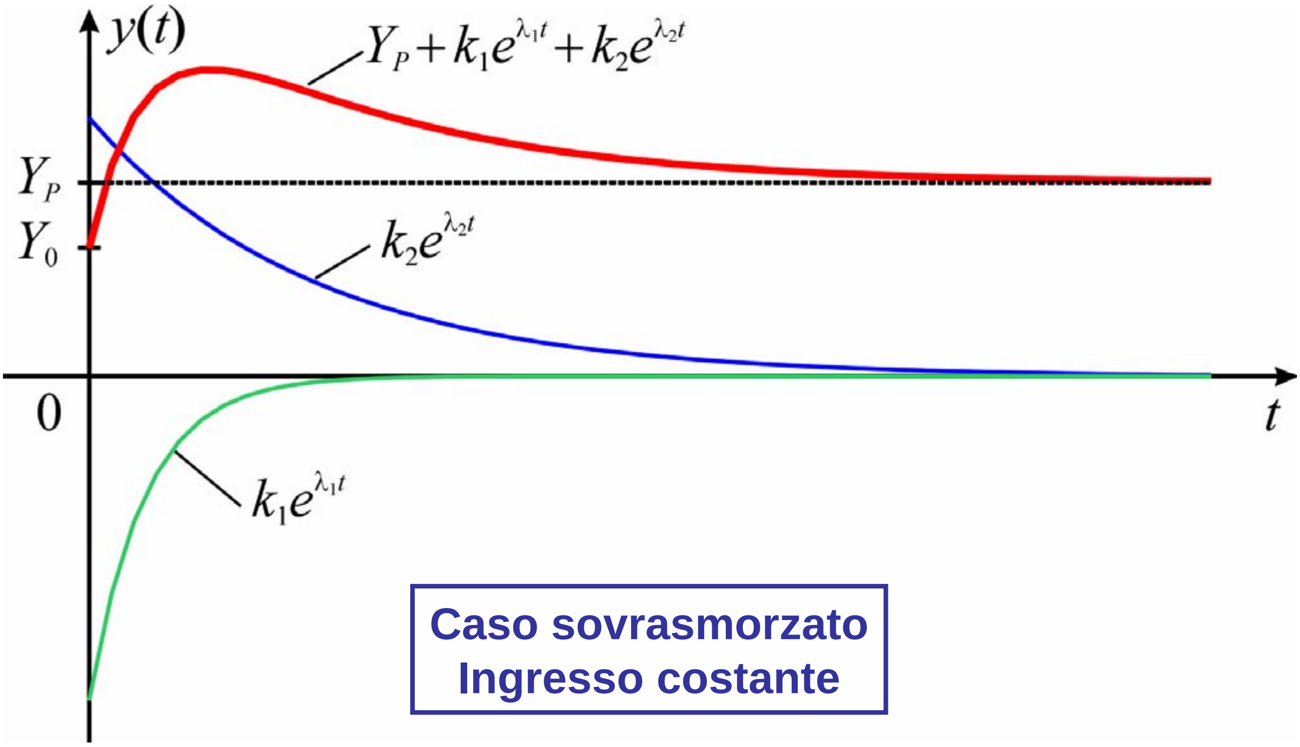
- In particolare
  - se gli ingressi sono costanti il circuito si porta in regime stazionario
  - se gli ingressi sono sinusoidali e isofrequenziali il circuito si porta in regime sinusoidale

Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sovrasmorzato
Ingresso costante



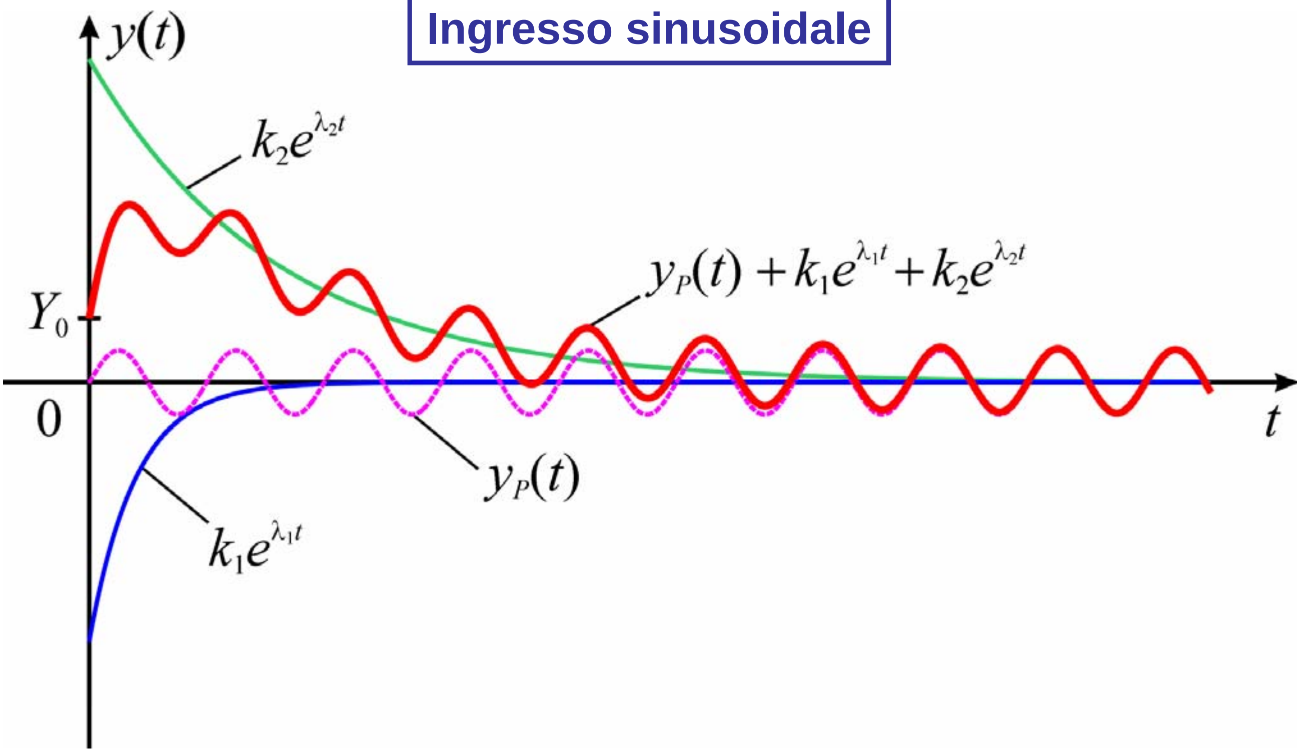
Risposta di un circuito del secondo ordine



Caso sovrasmorzato
Ingresso costante

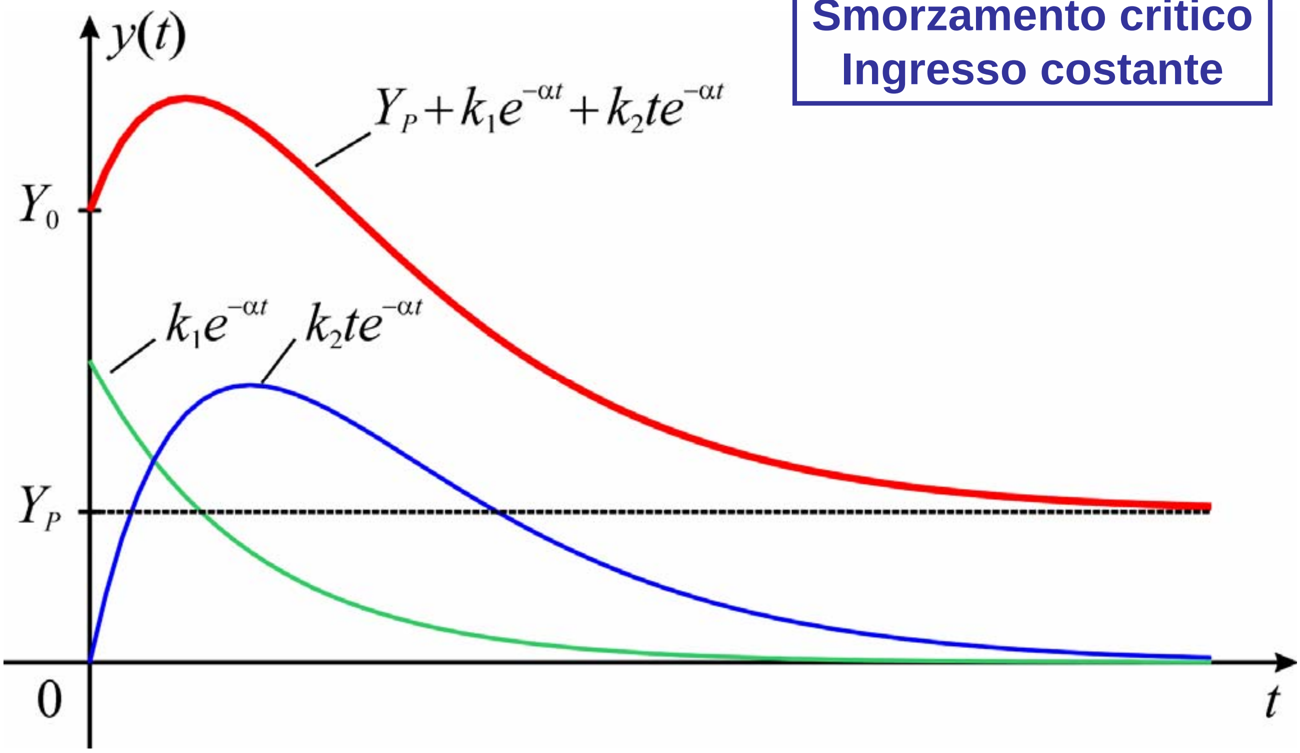
Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sovrasmorzato
Ingresso sinusoidale



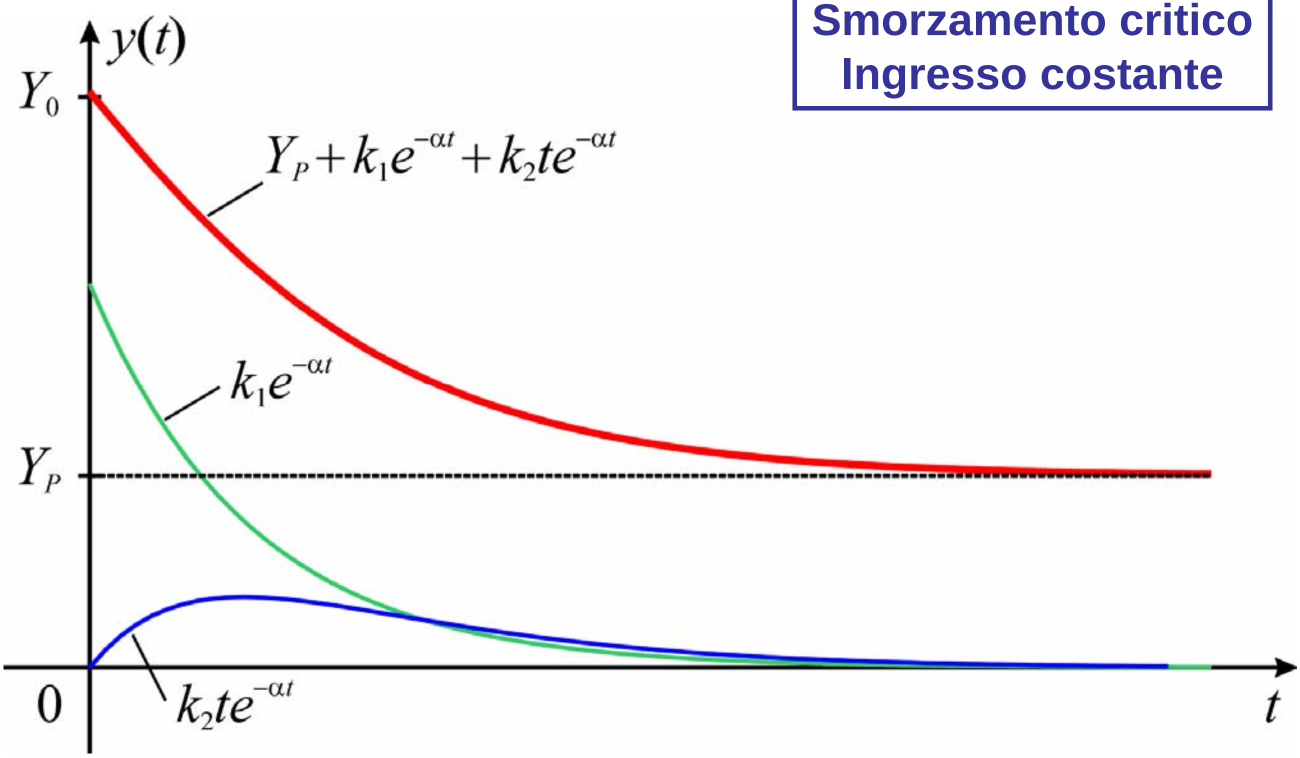
Risposta di un circuito del secondo ordine

Smorzamento critico
Ingresso costante

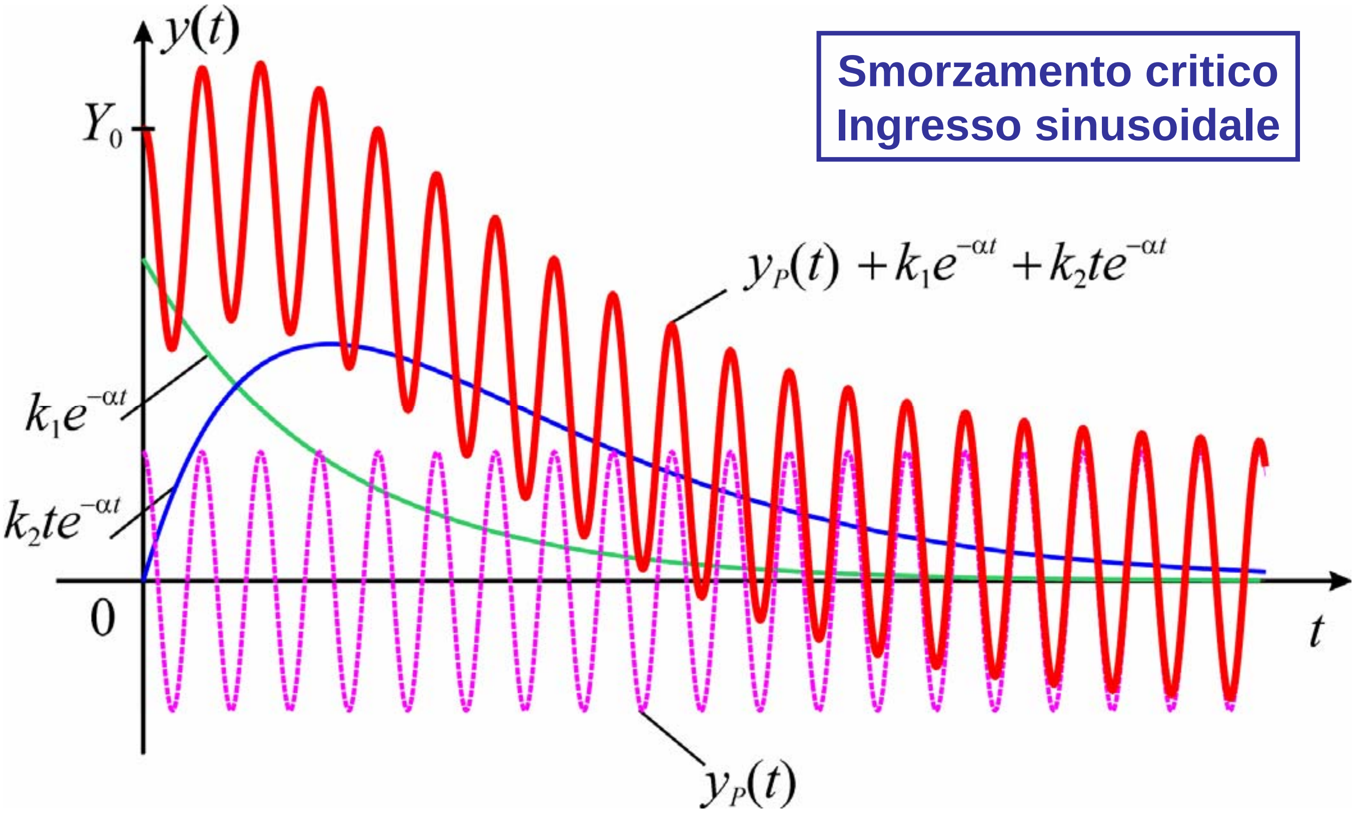


Risposta di un circuito del secondo ordine

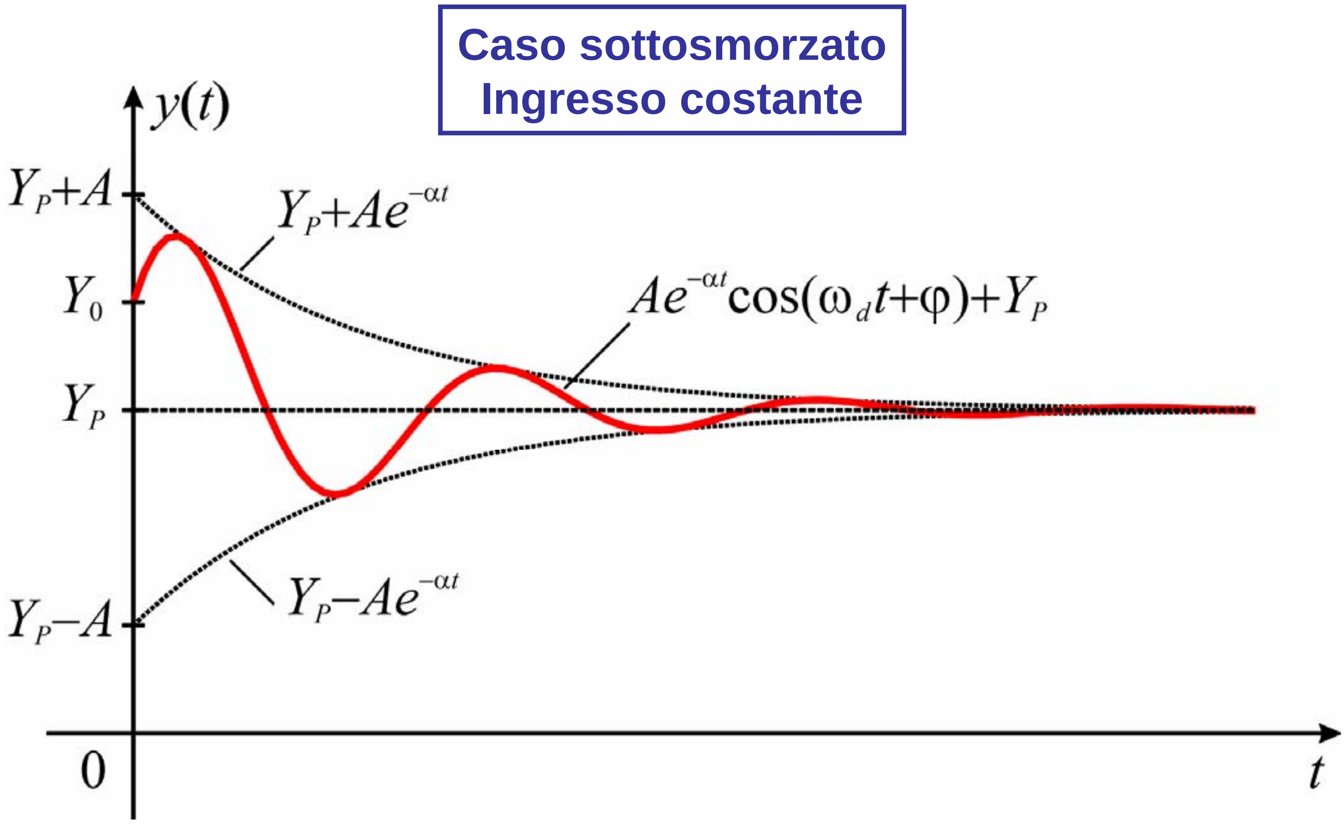
Smorzamento critico
Ingresso costante



Risposta di un circuito del secondo ordine

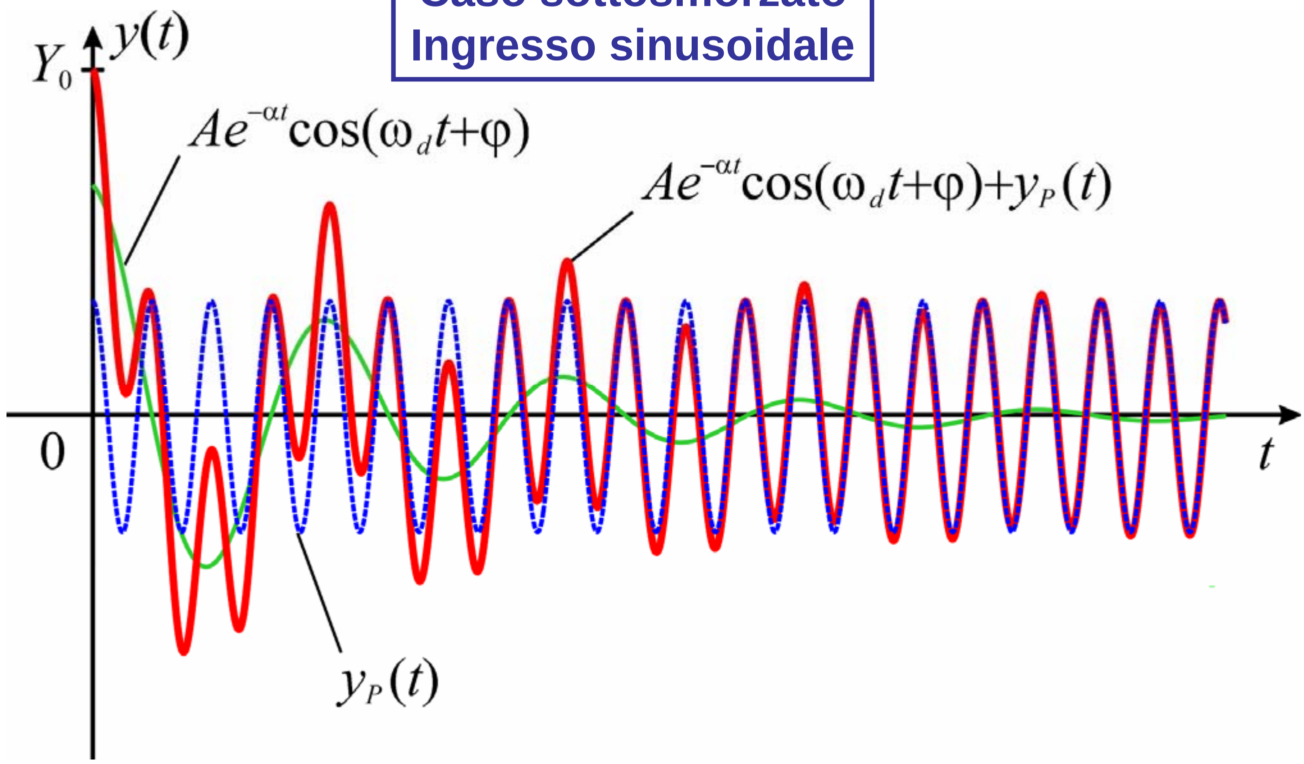


Risposta di un circuito del secondo ordine



Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sottosmorzato
Ingresso sinusoidale



Risposta di un circuito passivo (1)

- Un circuito formato da componenti passivi e generatori indipendenti è stabile
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni distinte con parte reale non positiva oppure due soluzioni coincidenti negative, quindi:
  - La somma delle soluzioni è non positiva
  - Il prodotto delle soluzioni è non negativo

➡ I coefficienti dell'equazione caratteristica soddisfano le condizioni

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = -2\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = \omega_0^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$$

Risposta di un circuito passivo (2)

- Le condizioni precedenti possono essere ricavate anche a partire dalle proprietà delle matrici $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, e $\mathbf{H}$ di un due porte passivo
- Nei tre casi di circuito con due induttori, due condensatori o un condensatore e un induttore si ha, rispettivamente

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{r_{11}}{L_1} - \frac{r_{22}}{L_2}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{g_{11}}{C_1} - \frac{g_{22}}{C_2}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C}$$

- Se il circuito è passivo, gli elementi sulla diagonale principale delle matrici $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$, e $\mathbf{H}$ sono non negativi, quindi

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \leq 0$$

Risposta di un circuito passivo (3)

- Per un doppio bipolo passivi valgono, inoltre le condizioni

$$r_{11}r_{22} \geq \left(\frac{r_{12}+r_{21}}{2}\right)^2 \qquad g_{11}g_{22} \geq \left(\frac{g_{12}+g_{21}}{2}\right)^2 \qquad h_{11}h_{22} \geq \left(\frac{h_{12}+h_{21}}{2}\right)^2$$

- Queste condizioni implicano che sia

$$a_{11}a_{22} \geq \left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)^2$$

- Quindi si ha anche

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq \left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)^2 - a_{12}a_{21} = \left(\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\right)^2$$

- E, di conseguenza,

$$\det(\mathbf{A}) \geq \left(\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\right)^2 \geq 0$$

Risposta di un circuito reciproco

- Se il circuito è reciproco si può avere $\Delta \le 0$ solo se i due componenti dinamici sono un induttore e un condensatore

Dimostrazione:

- Il discriminante dell'equazione caratteristica è

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}$$

- Per un circuito reciproco con due induttori o due condensatori a_{12} e a_{21} hanno lo stesso segno
  - ➡ il discriminante è positivo
- Per un circuito reciproco con un induttore e un condensatore a_{12} e a_{21} hanno segno opposto
  - ➡ il discriminante può essere positivo, nullo o negativo

Analisi di circuiti del secondo ordine - Riepilogo (1)

- Si studia il circuito per $t = t_0^-$ e si determinano i valori iniziali (all'istante $t = t_0$) delle variabili di stato
- Si costruisce il circuito resistivo associato per $t > t_0$
- Analizzando il circuito resistivo associato si ricavano
  - le equazioni di stato
  - le equazioni di uscita relative alle (eventuali) altre risposte richieste
- Si elimina una delle variabili di stato dalle equazioni di stato
  - ➡ Si ricava un'equazione differenziale del secondo ordine nell'altra variabile

Analisi di circuiti del secondo ordine - Riepilogo (2)

- Si ricava la condizione iniziale relativa alla derivata inserendo i valori iniziali delle variabili di stato in una delle equazioni di stato
- Si risolve l'equazione differenziale e si determina l'andamento di una delle variabili di stato
- Si ricava l'altra variabile di stato mediante l'espressione che è stata utilizzata per eliminarla dal sistema
- Si determinano le altre risposte inserendo le espressioni delle variabili di stato nelle equazioni di uscita

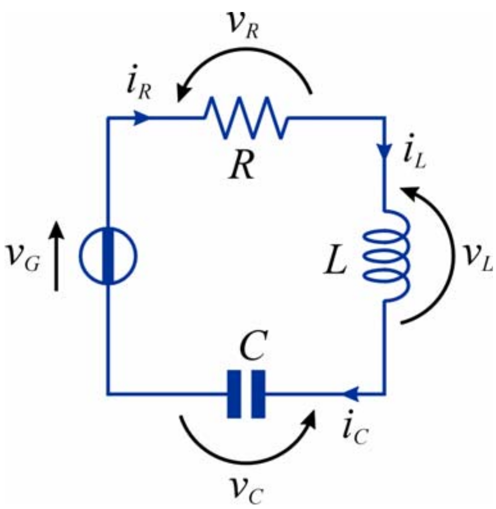
  (Le variabili coniugate possono essere calcolate anche sostituendo le espressioni delle variabili di stato nelle equazioni dei componenti dinamici)

Analisi di circuiti del 2° ordine – Metodo diretto

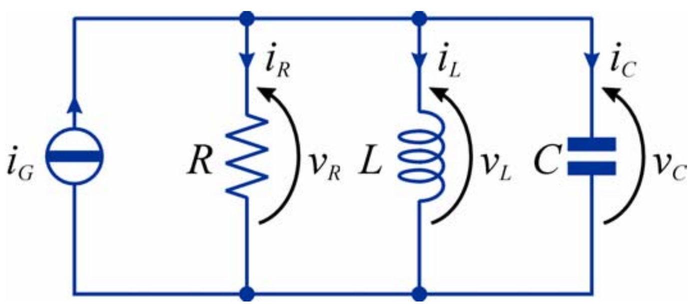
- Se la componente di regime $y_{Pj}(t)$ può essere ricavata direttamente (es. regime stazionario o sinusoidale) è possibile calcolare le risposte con un procedimento semplificato:
  - Dalle equazioni di stato si ricava l'equazione caratteristica
    $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$
  - Risolta l'equazione caratteristica, si ricava $y_{Hi}(t)$
  - Si determinano le due costanti contenute in $y_{Hi}(t)$ imponendo che $y_i(t) = y_{Hi}(t) + y_{Pi}(t)$ soddisfi le condizioni iniziali
  - Se la risposta che si deve valutare non coincide con una variabile di stato, le condizioni iniziali si ottengono sostituendo
    - i valori iniziali delle variabili di stato nell'equazione di uscita
    - i valori iniziali delle derivate delle variabili di stato nell'equazione ottenuta derivando membro a membro l'equazione di uscita

Circuiti elementari del secondo ordine

Circuito RLC serie



Circuito RLC parallelo



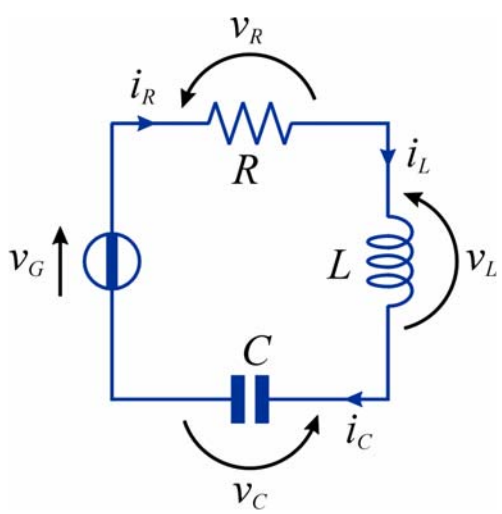
Circuito RLC serie

- **LKI**: $i_C(t) = i_L(t) = i_R(t)$
- **LKV**: $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti**:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri_R(t) = RC\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = LC\frac{d^2v_C}{dt^2}$$



$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = v_G(t)$$

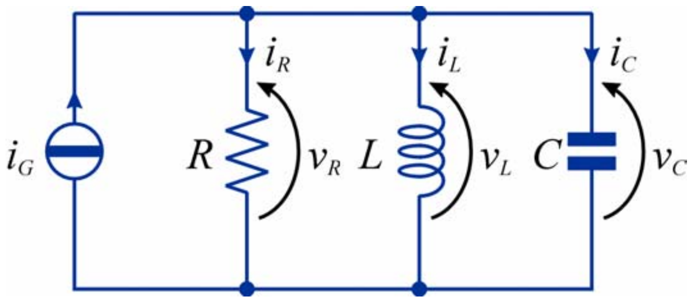
Circuito RLC parallelo

- **LKI**: $i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_G(t)$
- **LKV**: $v_C(t) = v_L(t) = v_R(t)$
- **Componenti**:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$



$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L(t) = i_G(t)$$

Equazione risolvente

- Le due equazioni possono essere poste nella forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2\,\mathrm{f}(t)$$

$\mathrm{f}(t) =$ grandezza impressa del generatore

- Il coefficiente di smorzamento α è
  - $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ per il circuito RLC serie
  - $\alpha = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{G}{2C}$ per il circuito RLC parallelo
- La pulsazione naturale ω_0 vale

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

  - ➡ ω_0 è pulsazione di risonanza del bipolo RLC
- Il rapporto $Q_0 = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$ è il fattore di merito del bipolo RLC

Risposte di un circuito RLC (1)

- Per il circuito RLC serie, il discriminante dell'equazione caratteristica si annulla se

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$$

  - R_C è detta **resistenza critica**
- Per il circuito RLC parallelo, il discriminante si annulla se

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{G^2}{4C^2} = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad G = 2\sqrt{\frac{C}{L}} = G_C$$

  - G_C è detta **conduttanza critica**
- In termini di fattore di merito, dato che α e ω_0 per un circuito passivo non possono essere negativi, per entrambi i circuiti si ha

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

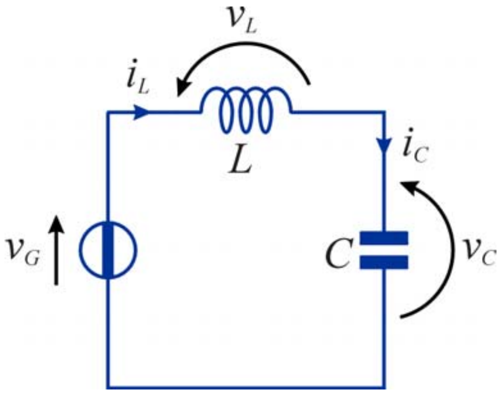
Risposte di un circuito RLC (2)

- Il circuito RLC serie è
  - sovrasmorzato per $R > R_C$
  - criticamente smorzato per $R = R_C$
  - sottosmorzato per $R < R_C$
- Il circuito RLC parallelo è
  - sovrasmorzato per $G > G_C$
  - criticamente smorzato per $G = G_C$
  - sottosmorzato per $G < G_C$
- In termini di fattore di merito, per entrambi i circuiti si ha
  - caso sovrasmorzato per $Q_0 < 1/2$
  - caso criticamente smorzato per $Q_0 = 1/2$
  - caso sottosmorzato per $Q_0 > 1/2$

Circuiti LC (1)

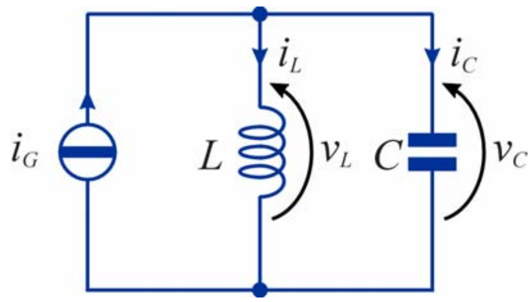
- Come casi limite per $R \to 0$ per il circuito RLC serie e per $G \to 0$ ($R \to \infty$) per il circuito RLC parallelo si ha

Circuito LC serie



$$R \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L} \to 0 \qquad Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} \to \infty$$

Circuito LC parallelo



$$G \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{G}{2C} \to 0 \qquad Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} \to \infty$$

Circuiti LC (2)

- Le equazioni differenziali (rispettivamente in v_C e i_L) diventano

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2\, \mathrm{f}(t)$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie coniugate

$$\Delta = -\omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \pm j\omega_0$$

  - In questo caso si dice che il circuito è **senza perdite**
- L'integrale generale dell'equazione omogenea è una funzione sinusoidale di pulsazione ω_0

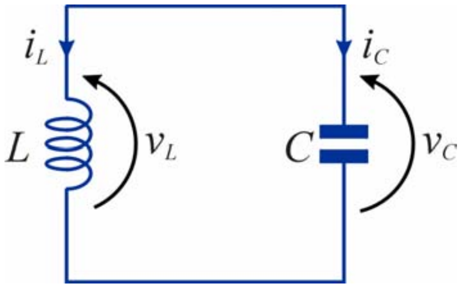
$$x_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

  - non si annulla per $t \to \infty$ ma rimane limitata
  - ➡ il circuito è **semplicemente stabile**
- L'espressione della risposta completa è

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_P(t)$$

Oscillatore armonico (1)

- Se l'ingresso è nullo, i circuiti LC serie e parallelo si riducono al circuito seguente



Oscillatore armonico

- Considerando (per esempio) l'equazione in v_C si ottiene

$$v_C(t) = v_L(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Quindi si ha anche

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C\frac{dv_C}{dt} = \omega_0 C V_M \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_V) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_M \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_V)$$

➡ La tensione e la corrente sono sinusoidali con pulsazione ω_0

Oscillatore armonico (2)

- Energia accumulata nel condensatore

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Energia accumulata nell'induttore

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

➡ $w_C(t)$ è massima quando $w_L(t)$ si annulla e viceversa

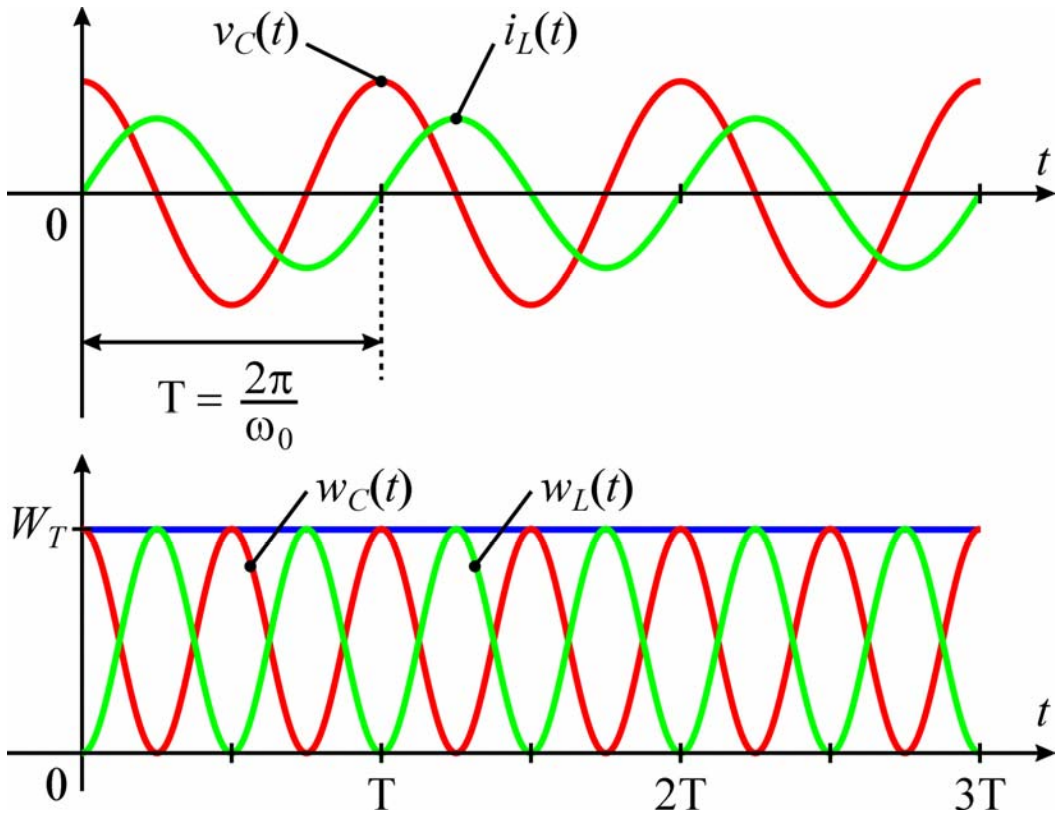
- Energia totale

$$W_T = w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C V_M^2$$

- L'energia totale è costante e coincide con i valori massimi assunti da $w_C(t)$ e da $w_L(t)$

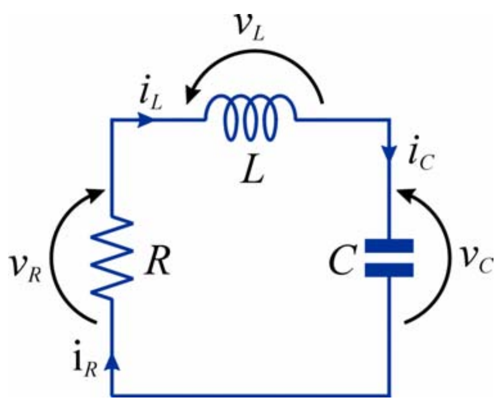
➡ Si ha uno scambio continuo di energia tra il condensatore e l'induttore

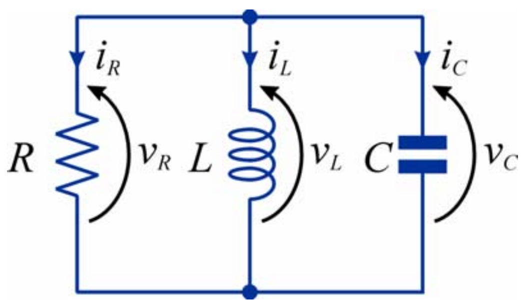
Oscillatore armonico (3)



Oscillatore smorzato (1)

- A partire dal valore 0, si incrementa la resistenza del resistore in serie a L e C o la conduttanza del resistore in parallelo a L e C
- ➡ A causa della dissipazione nel resistore, l'energia accumulata nel circuito diminuisce progressivamente e tende a zero per $t \to \infty$





$R\uparrow \quad \Rightarrow \quad \alpha\uparrow \quad Q_0\downarrow$ $\qquad$ $G\uparrow \quad \Rightarrow \quad \alpha\uparrow \quad Q_0\downarrow$

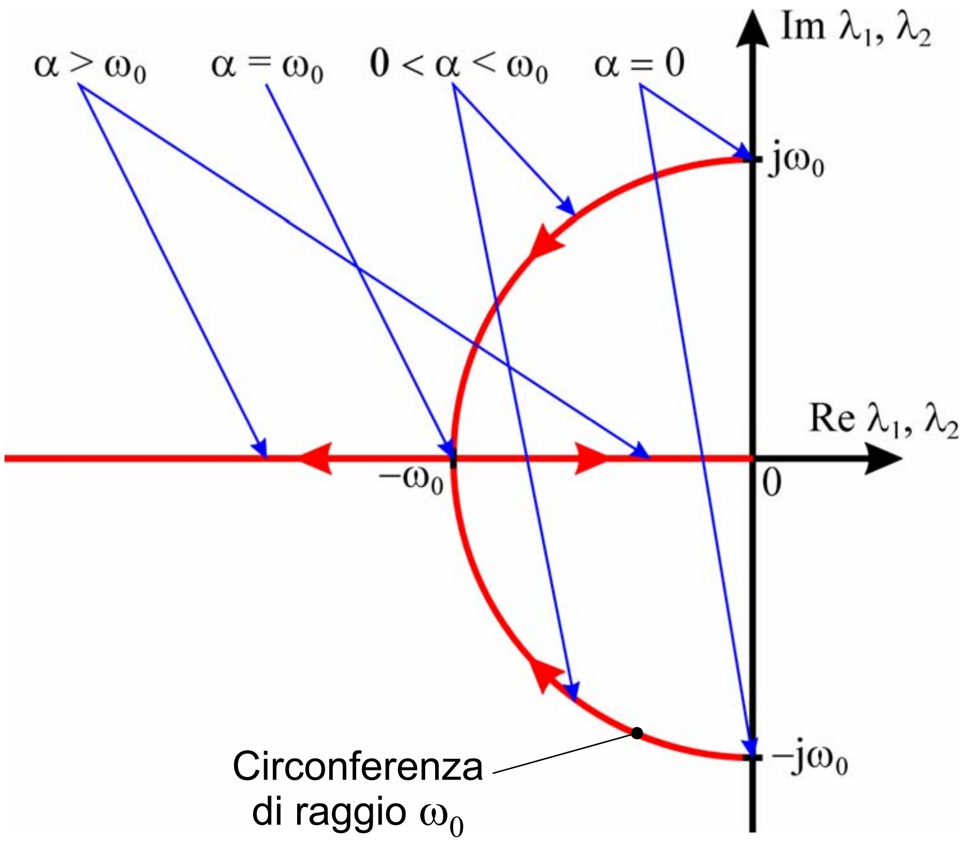
Oscillatore smorzato (2)

- Inizialmente il circuito è sottosmorzato
  - l'ampiezza delle oscillazioni decresce come $e^{-\alpha t}$
  - la pulsazione $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ diminuisce all'aumentare di α
- Aumentando α si raggiunge la condizione di smorzamento critico per

$$\alpha = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad G = G_C = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

  - in queste condizioni la pulsazione ω_d si annulla
  - ➡ a partire da questo punto nelle risposte dei circuiti non sono più presenti i termini oscillanti
- Aumentando ulteriormente α il circuito diviene sovrasmorzato
  - al crescere di α una delle soluzioni dell'equazione caratteristica tende a $-\infty$ mentre l'altra tende a zero
  - ➡ per $t \to \infty$ la risposta tende a zero sempre più lentamente

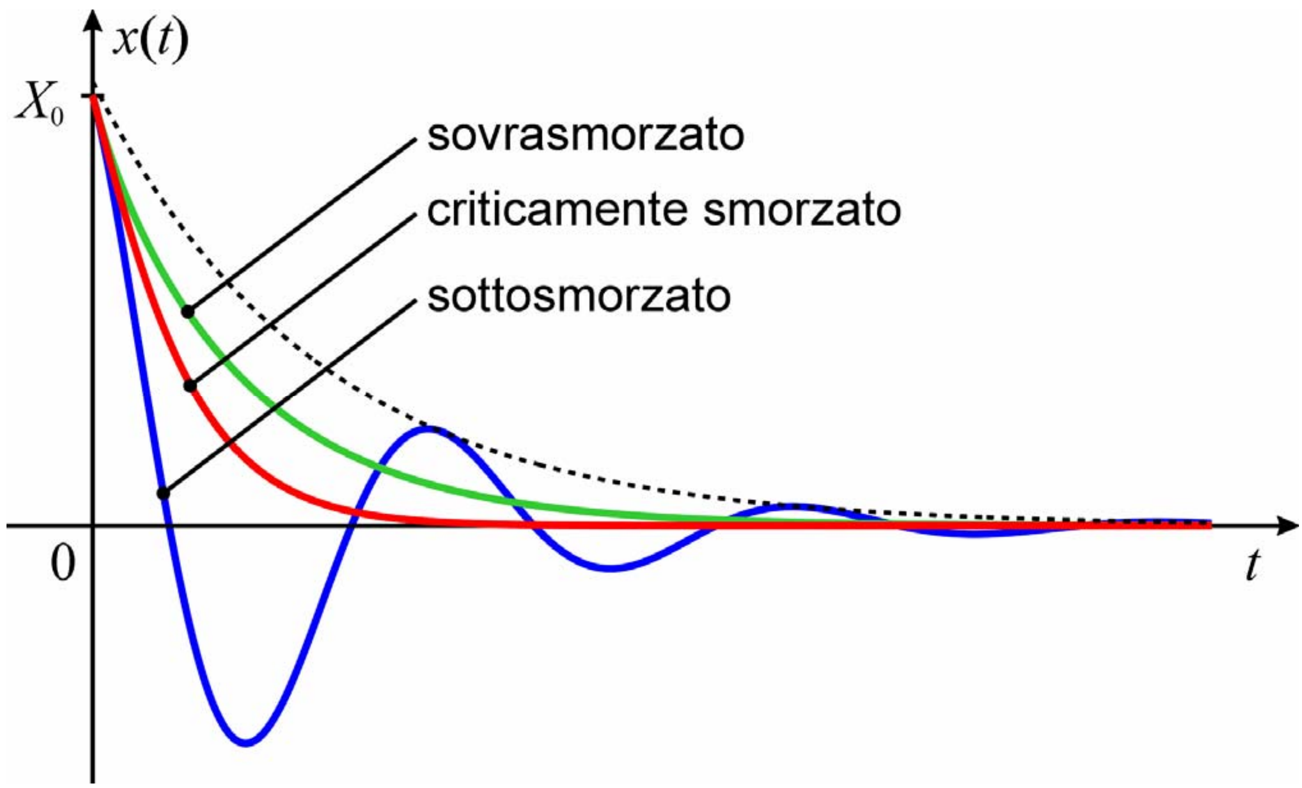
Luogo delle soluzioni dell'equazione caratteristica



Oscillatore smorzato (3)

- A parità di ω_0 la risposta con smorzamento critico è quella che tende a zero più rapidamente per $t \to \infty$
- **Dimostrazione**
  - In condizioni di smorzamento critico ($\alpha = \omega_0$) le risposte del circuito sono del tipo
    $$x_C(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\omega_0 t}$$
  - caso sottosmorzato
    $$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{con} \quad \alpha < \omega_0 \;\Rightarrow\; \alpha - \omega_0 < 0$$
    $$\lim_{t\to\infty}\frac{x_C(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{c_1 + c_2 t}{A\cos(\omega_0 t + \varphi)} \cdot e^{(\alpha-\omega_0)t} = 0$$
  - caso sovrasmorzato
    $$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad \lambda_1 < -\omega_0 < \lambda_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 + \omega_0 < 0 \\ \lambda_2 + \omega_0 > 0 \end{cases}$$
    $$\lim_{t\to\infty}\frac{x_C(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{c_1 + c_2 t}{k_1 e^{(\omega_0+\lambda_1)t} + k_2 e^{(\omega_0+\lambda_2)t}} = 0$$

Oscillatore smorzato (4)



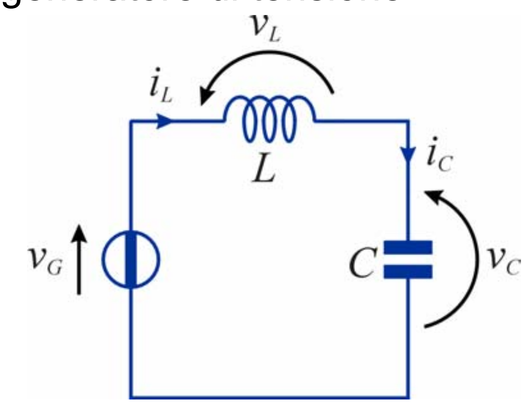
Oscillatore armonico forzato (1)

- Si considera un circuito LC serie con un generatore di tensione sinusoidale

  $V_G(t) = V_{GM}\cos(\omega t + \vartheta)$
- Se $\omega \neq \omega_0$, l'equazione in v_C

  $$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \omega_0^2 v_C(t) = \omega_0^2 V_{GM}\cos(\omega t + \vartheta)$$

  ammette una soluzione particolare sinusoidale con pulsazione ω



- La soluzione particolare può essere determinata direttamente mediante il metodo simbolico

$$\mathbf{V}_{CP} = \mathbf{V}_G \cdot \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{\mathbf{V}_G}{1-\omega^2 LC} = \frac{\omega_0^2 \mathbf{V}_G}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Oscillatore armonico forzato (2)

- Soluzione particolare

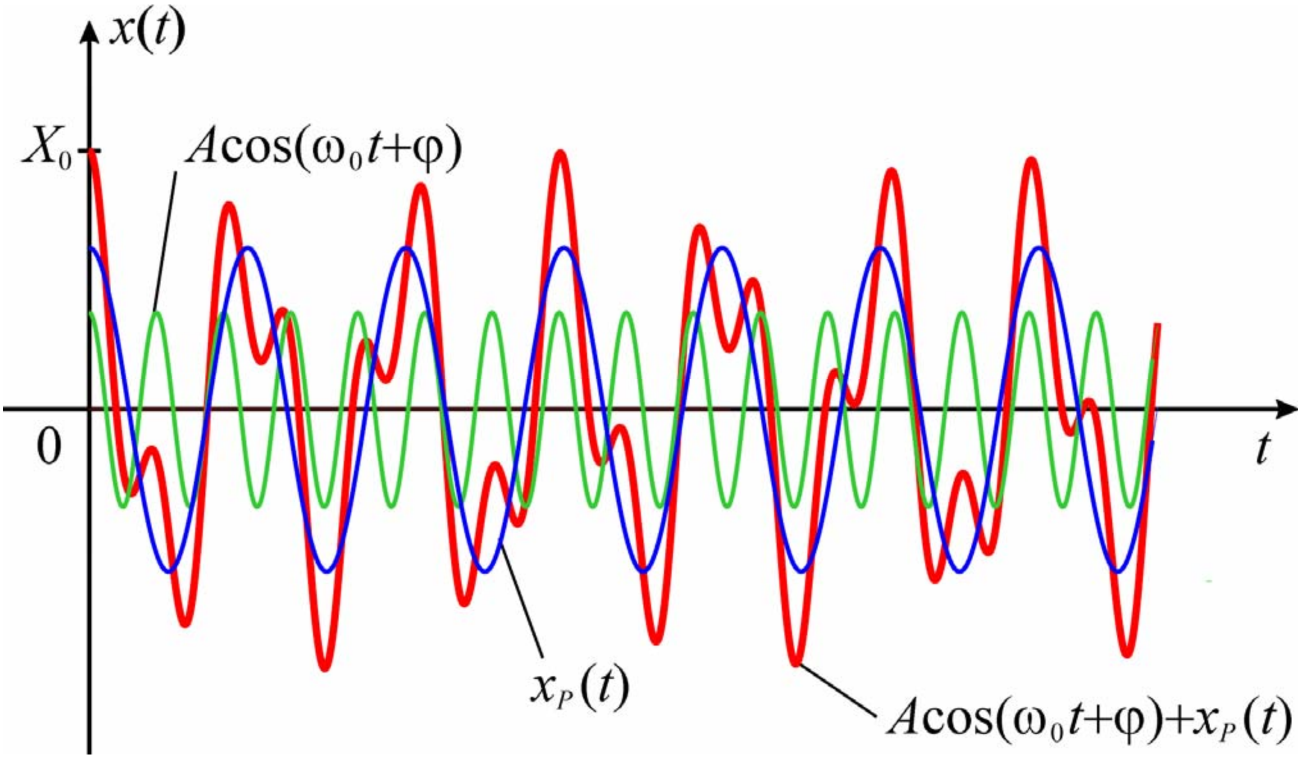
  $$v_{CP}(t) = \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \vartheta)$$
- Integrale generale dell'equazione completa

  $$v_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \vartheta)$$
- Per la corrente dell'induttore si ha

  $$i_L(t) = C\frac{dv_C}{dt} = -\omega_0 C A \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi) - \omega C \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2}\mathrm{sen}(\omega t + \vartheta)$$
- Le risposte del circuito sono combinazioni di due funzioni sinusoidali con pulsazioni diverse

➡ In generale le risposte sono aperiodiche

Oscillatore armonico forzato (3)



Oscillatore armonico forzato (4)

- Se $\omega = \omega_0$ l'impedenza della serie L-C si annulla
- Nell'analisi con il metodo simbolico si ottiene un circuito assurdo (generatore di tensione in parallelo con un cortocircuito)
- L'equazione differenziale non ammette una soluzione particolare sinusoidale di pulsazione ω_0
- Si può verificare che in questo caso l'equazione ammette una soluzione particolare del tipo

$$v_{CP}(t) = Vt\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \gamma)$$

- Infatti, dato che $\dfrac{d^2 v_{CP}}{dt^2} = 2\omega_0 V\cos(\omega_0 t + \gamma) - \omega_0^2 Vt\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \gamma)$

sostituendo $v_{CP}(t)$ nell'equazione differenziale si ottiene

$$2\omega_0 V\cos(\omega_0 t + \gamma) = \omega_0^2 V_{GM}\cos(\omega_0 t + \vartheta) \quad \Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{\omega_0 V_{GM}}{2} \\ \gamma = \vartheta \end{cases}$$

Oscillatore armonico forzato (4)

- L'integrale generale è quindi

$$v_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_0 V_{GM}}{2} t \,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \vartheta)$$

- Se si considera il caso particolare

$$\vartheta = 0$$ (➡ fase di $v_G(t)$ uguale a zero)

$$v_C(0) = 0 \text{ V}$$ (➡ Risposta nello stato zero)

$$i_L(0) = 0 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+} = 0 \text{ V/s}$$

si ottiene

$$v_C(t) = \frac{\omega_0 V_{GM}}{2} t \,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$i_L(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{\omega_0 C V_{GM}}{2} \mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 C V_{GM}}{2} t \cos(\omega_0 t)$$

Oscillatore armonico forzato (5)