

Circuiti in regime sinusoidale

Parte 1

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 23-10-2015)

Funzioni sinusoidali

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

A_M = ampiezza

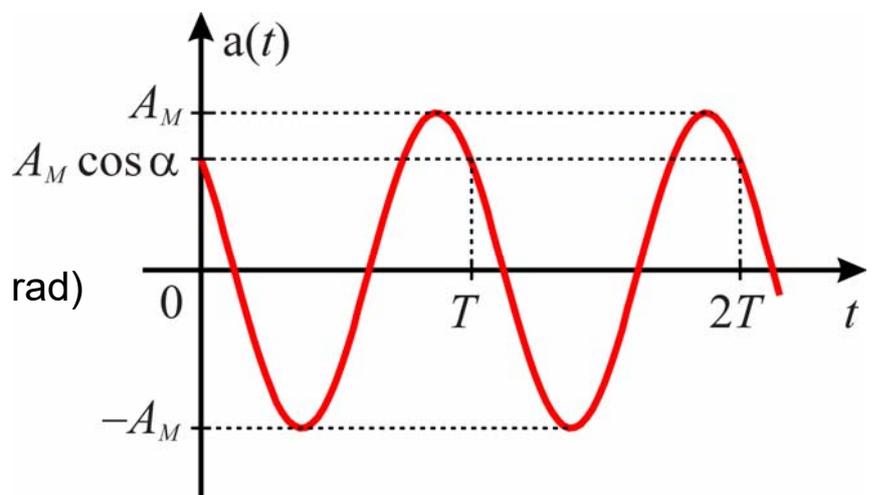
α = fase iniziale (radianti, rad)

$$(-\pi < \alpha \leq \pi)$$

ω = pulsazione (rad/s)

f = frequenza (hertz, Hz)

T = periodo (secondi, s)



$$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Regimi sinusoidali (1)

- Si considera un circuito lineare dinamico in cui tutti i generatori indipendenti sono sinusoidali e hanno la stessa pulsazione ω
- Le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari nel quale i termini noti sono funzioni sinusoidali con pulsazione ω
- Le equazioni generalmente ammettono una soluzione sinusoidale con pulsazione ω
- Se il circuito è asintoticamente stabile, questa soluzione particolare rappresenta la componente di regime della risposta (→ **regime sinusoidale**)

3

Regimi sinusoidali (2)

- **Regime sinusoidale**: condizione di funzionamento di un circuito nella quale tutte le tensioni e le correnti sono funzioni sinusoidali del tempo aventi la stessa pulsazione ω
- Fissata la pulsazione, una funzione sinusoidale è definita da due parametri
 - ◆ **ampiezza**
 - ◆ **fase**
- Il problema della determinazione della soluzione particolare sinusoidale delle equazioni del circuito (cioè della determinazione delle ampiezze e delle fasi di tutte le tensioni e correnti) può essere ricondotto ad un problema di tipo algebrico mediante la **trasformata di Steinmetz**
- Il metodo di analisi basato sulla trasformata di Steinmetz è detto anche **metodo simbolico**

4

Trasformata di Steinmetz

• Trasformata di Steinmetz: \mathcal{S}

- ◆ Ad ogni funzione sinusoidale di pulsazione ω

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

si associa un numero complesso \mathbf{A} avente

- modulo A_M (= ampiezza della funzione sinusoidale)
- argomento α (= fase della funzione sinusoidale)

$$\mathbf{A} = \mathcal{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha} = A_M (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

- ◆ \mathbf{A} = **fasore** o **numero complesso rappresentativo** di $a(t)$

• Antitrasformata di Steinmetz: \mathcal{S}^{-1}

$$a(t) = \mathcal{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = \operatorname{Re}[\mathbf{A}e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

5

Interpretazione geometrica

- La funzione

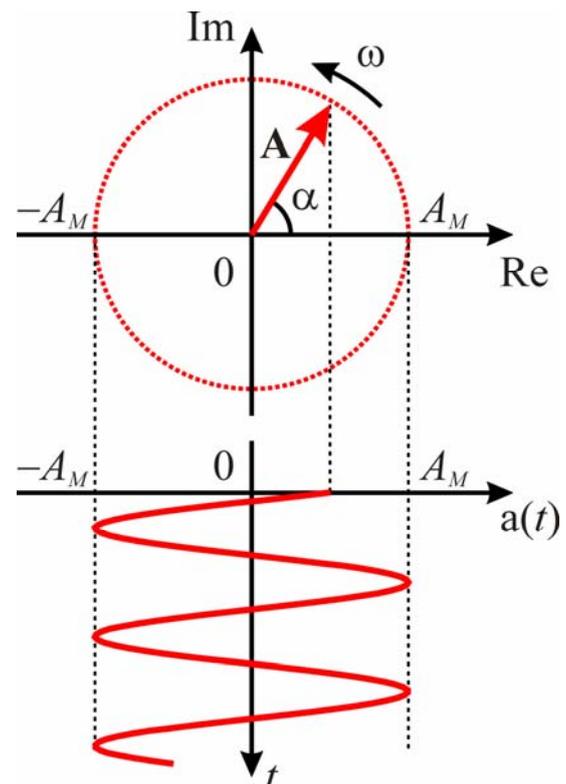
$$s(t) = \mathbf{A} e^{j\omega t} = A_M e^{j(\omega t + \alpha)}$$

può essere rappresentata nel piano complesso mediante un vettore che ruota con velocità angolare ω

- La proiezione sull'asse reale restituisce la funzione $a(t)$

$$a(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{A} e^{j\omega t}] = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

- Il fasore \mathbf{A} determina la posizione del vettore per $t = 0$, a partire dalla quale, nota ω , si può ricostruire $a(t)$



6

Proprietà della trasformata di Steinmetz (1)

Unicità

- La trasformata di Steinmetz stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni sinusoidali di pulsazione ω e i numeri complessi

$$\begin{array}{ll} a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) & \mathbf{A} = \mathfrak{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha} \\ b(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) & \mathbf{B} = \mathfrak{S}\{b(t)\} = B_M e^{j\beta} \end{array}$$



$$a(t) = b(t) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

7

Proprietà della trasformata di Steinmetz (2)

Linearità

- La trasformata di Steinmetz è un'operazione lineare

$$\begin{array}{ll} a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) & \mathbf{A} = \mathfrak{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha} \\ b(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) & \mathbf{B} = \mathfrak{S}\{b(t)\} = B_M e^{j\beta} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \forall k_1, k_2 \in \mathbb{C} : \\ \mathfrak{S}\{k_1 a(t) + k_2 b(t)\} = k_1 \mathfrak{S}\{a(t)\} + k_2 \mathfrak{S}\{b(t)\} = k_1 \mathbf{A} + k_2 \mathbf{B} \end{array}$$

8

Proprietà della trasformata di Steinmetz (3)

Regola di derivazione

- La trasformata della derivata di una funzione sinusoidale si ottiene moltiplicando per $j\omega$ la trasformata della funzione

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \quad \mathbf{A} = \mathcal{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha}$$



$$\mathcal{S}\left\{\frac{da}{dt}\right\} = j\omega \mathcal{S}\{a(t)\} = j\omega \mathbf{A}$$

- Dimostrazione:

$$\frac{da}{dt} = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathcal{S}\left\{\frac{da}{dt}\right\} = \omega A_M e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A_M e^{j\alpha} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega A_M e^{j\alpha} = j\omega \mathbf{A} = j\omega \mathcal{S}\{a(t)\}$$

9

Proprietà della trasformata di Steinmetz (4)

Regola di derivazione

- Applicando ricorsivamente la regola di derivazione si possono ottenere le trasformate delle derivate di ordine superiore

$$\mathcal{S}\left\{\frac{d^2 a}{dt^2}\right\} = j\omega \cdot \mathcal{S}\left\{\frac{da}{dt}\right\} = (j\omega)^2 \mathbf{A} = -\omega^2 \mathbf{A}$$

$$\mathcal{S}\left\{\frac{d^3 a}{dt^3}\right\} = j\omega \cdot \mathcal{S}\left\{\frac{d^2 a}{dt^2}\right\} = (j\omega)^3 \mathbf{A} = -j\omega^3 \mathbf{A}$$

⋮

$$\mathcal{S}\left\{\frac{d^n a}{dt^n}\right\} = j\omega \cdot \mathcal{S}\left\{\frac{da^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\} = (j\omega)^n \mathbf{A}$$

10

Antitrasformata

- Noto il numero complesso rappresentativo \mathbf{A} di una funzione sinusoidale

$$\mathbf{A} = A_M e^{ja} = x + jy$$

e nota la pulsazione ω , è possibile determinare in modo univoco la funzione sinusoidale $a(t)$ mediante la relazione

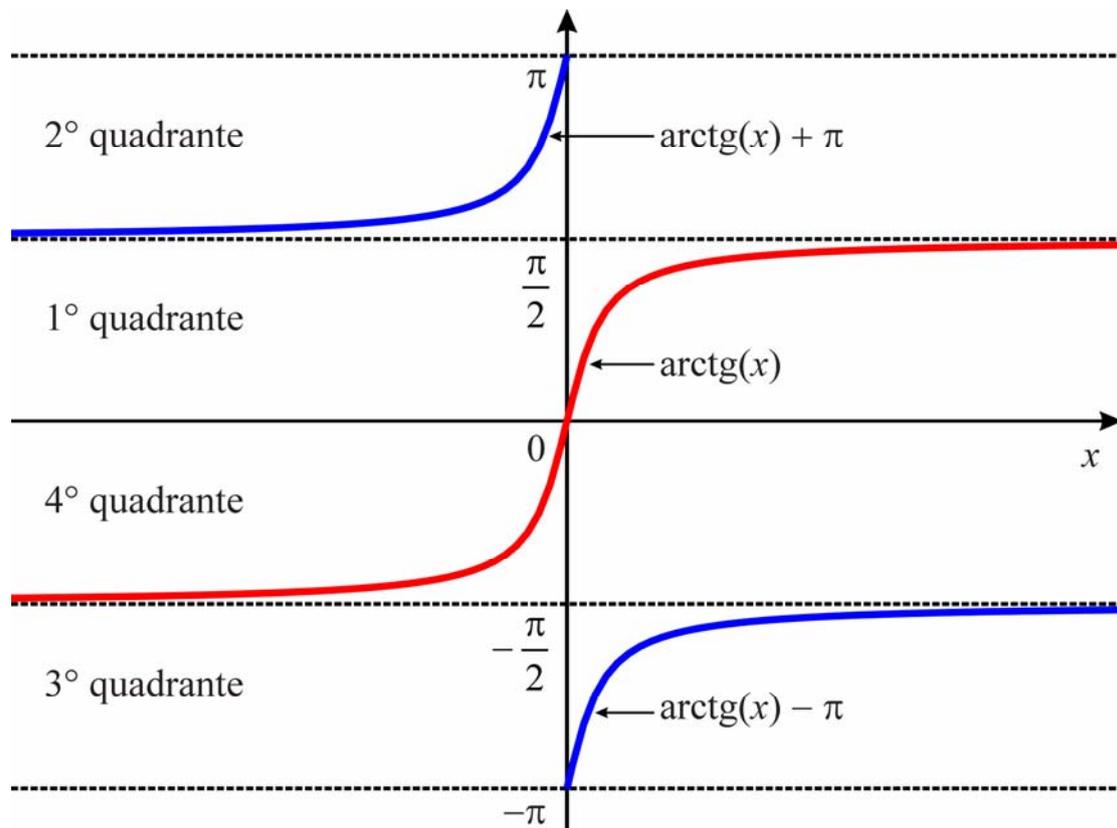
$$a(t) = \mathcal{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = A_M \cos(\omega t + \alpha) = |\mathbf{A}| \cos[\omega t + \arg(\mathbf{A})]$$

- **Nota:**

- ◆ Vale la relazione $\operatorname{tg}\alpha = y/x$ ma questo non consente di affermare che $\alpha = \operatorname{arctg}(y/x)$
- ◆ Dato che la funzione tangente ha periodo π esistono due valori di α nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ in cui la tangente ha lo stesso valore
- ➔ Per determinare α occorre tenere conto dei segni di x e y

11

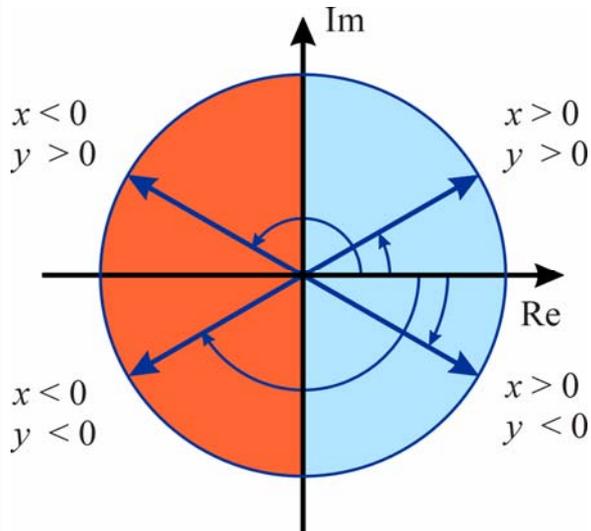
Antitrasformata – determinazione della fase (1)



12

Antitrasformata – determinazione della fase (2)

$$\mathbf{A} = x + jy = A_M e^{j\alpha}$$

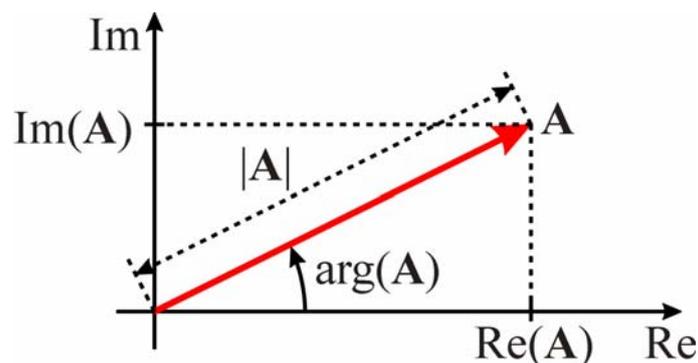


$$A_M = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\alpha = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{per } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(y) & \text{per } x = 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi \cdot \text{sgn}(y) & \text{per } x < 0, y \neq 0 \\ \pi & \text{per } x < 0, y = 0 \end{cases}$$
$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ -1 & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

13

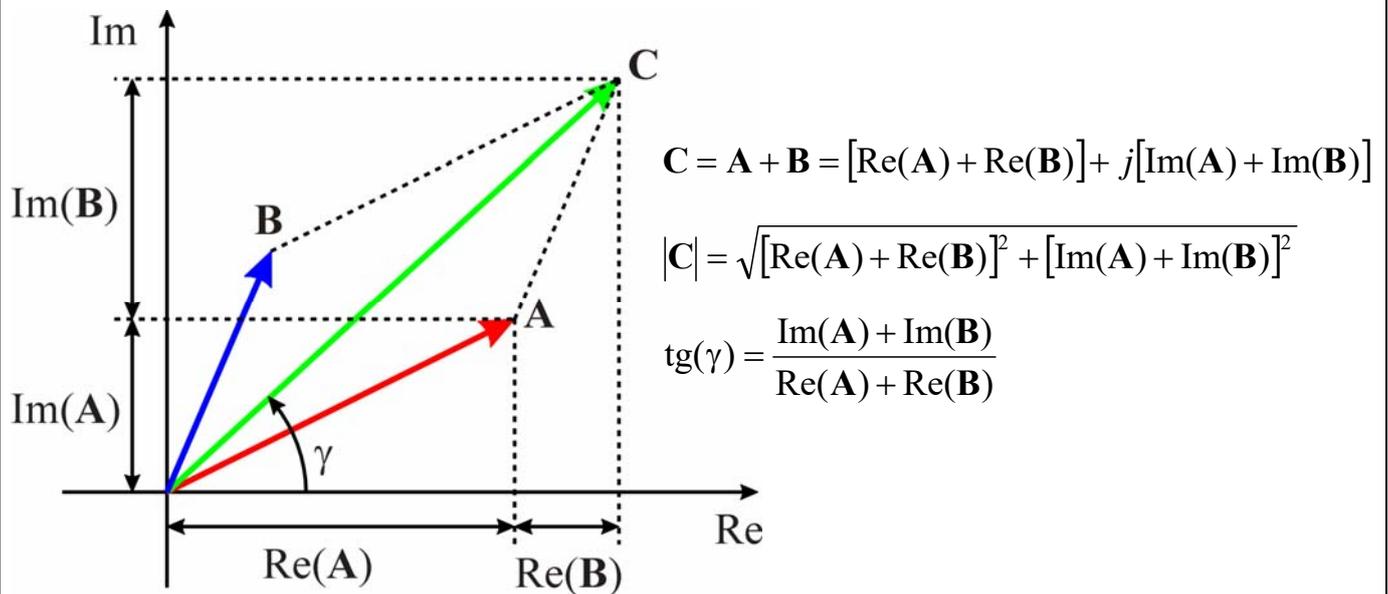
Diagrammi fasoriali

- I fasori possono essere rappresentati mediante vettori nel piano complesso
 - ◆ Le operazioni sui fasori possono essere eseguite anche operando graficamente sui vettori
 - ◆ I diagrammi nel piano complesso (**diagrammi fasoriali**) possono essere utilizzati per visualizzare le relazioni tra i fasori



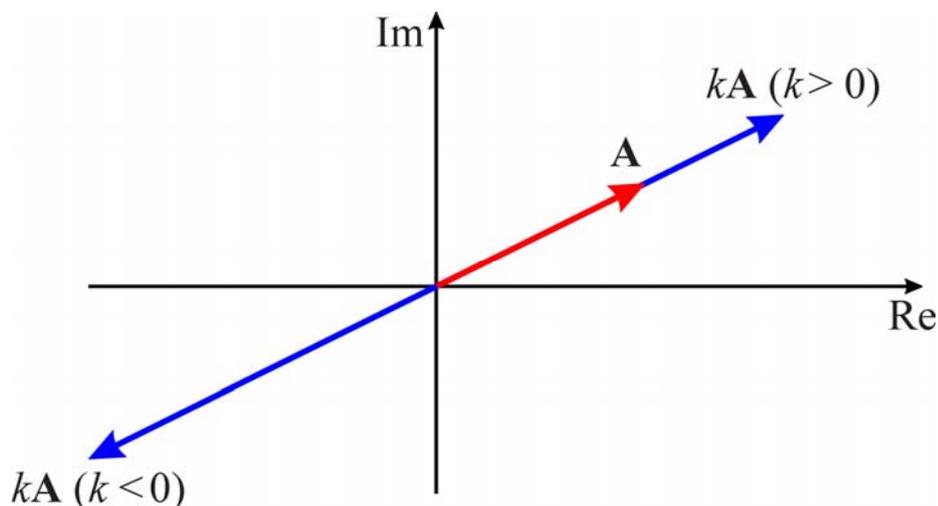
Operazioni grafiche sui fasori (1)

- La somma tra due fasori può essere eseguita per via grafica mediante la regola del parallelogramma



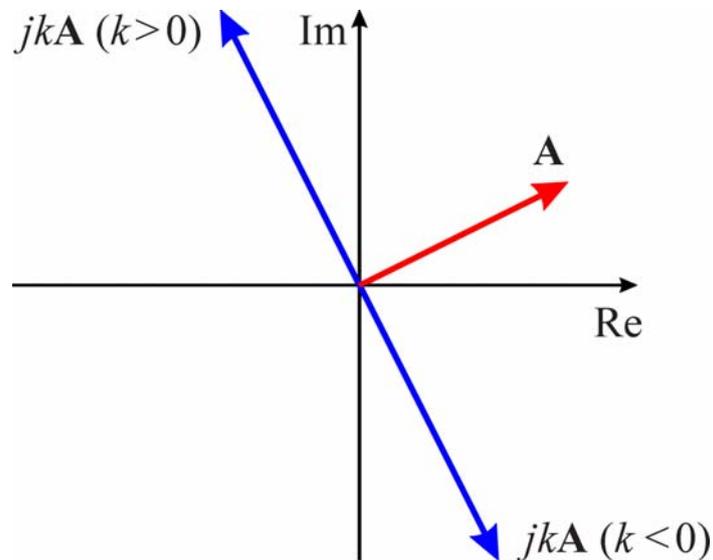
Operazioni grafiche sui fasori (2)

- Moltiplicando un fasore A per una costante reale positiva k si ottiene un fasore il cui modulo è kA
- Moltiplicando un fasore A per una costante reale negativa k si ottiene un fasore il cui modulo è kA e che ha verso opposto ad A



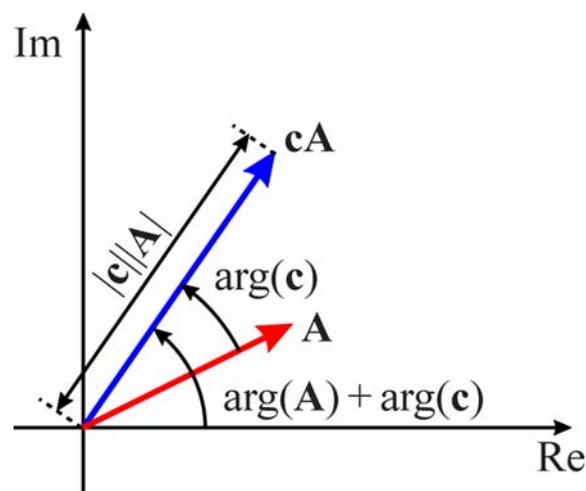
Operazioni grafiche sui fasori (3)

- Moltiplicando un fasore \mathbf{A} per una costante immaginaria jk si ottiene un fasore con modulo $k|\mathbf{A}|$ e ruotato di 90° rispetto ad \mathbf{A}
 - ◆ in senso antiorario per $k > 0$
 - ◆ in senso orario per $k < 0$



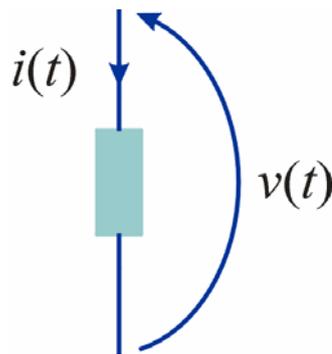
Operazioni grafiche sui fasori (4)

- Moltiplicando un fasore \mathbf{A} per una costante complessa \mathbf{c} si ottiene un fasore con modulo $|\mathbf{c}||\mathbf{A}|$ e argomento $\arg(\mathbf{A}) + \arg(\mathbf{c})$



- **Nota:** Come si vedrà in seguito, se \mathbf{A} e \mathbf{cA} sono fasori, \mathbf{c} non è un fasore (per questo non si parla di prodotto tra due fasori)

Bipoli in regime sinusoidale



- Condizioni di regime sinusoidale
- Tensione e corrente orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_I)$$



$$\mathbf{V} = \mathcal{S}\{v(t)\} = V_M e^{j\varphi_V}$$

$$\mathbf{I} = \mathcal{S}\{i(t)\} = I_M e^{j\varphi_I}$$

- Sfasamento fra tensione e corrente: $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$

19

Resistore in regime sinusoidale

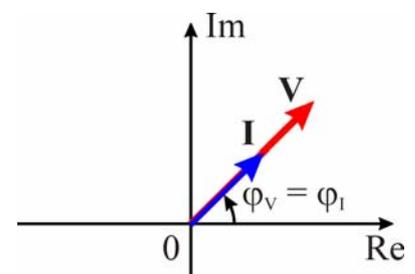
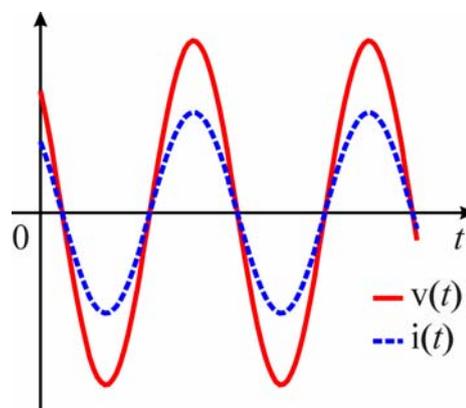
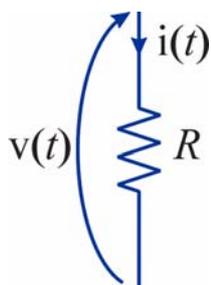
$$v(t) = R i(t) = R I_M \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$i(t) = G v(t) = G V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$



$$\mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = G \mathbf{V}$$

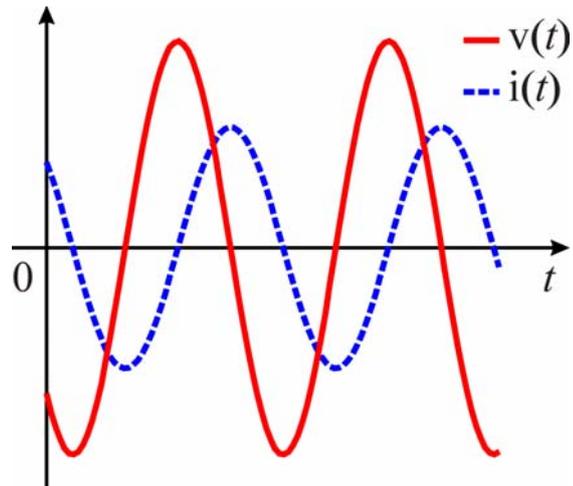
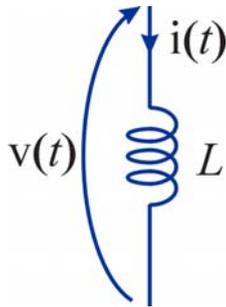


$$V_M = R I_M$$

$\varphi_V = \varphi_I \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ la tensione e la corrente sono **in fase**

20

Induttore in regime sinusoidale



$$v(t) = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_M \sin(\omega t + \varphi_I) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2})$$

$$V_M = \omega L I_M$$

$$\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{la corrente è in quadratura in ritardo rispetto alla tensione}$$

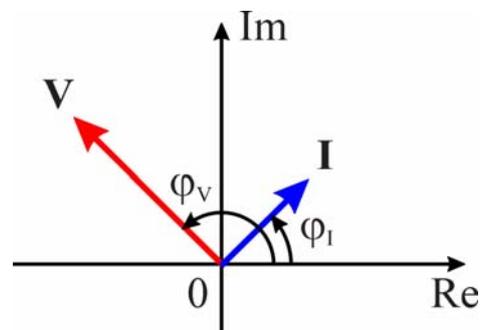
21

Induttore – relazioni tra i fasori

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L \mathbf{I} = jX_L \mathbf{I} \\ \mathbf{I} &= -j \frac{1}{\omega L} \mathbf{V} = jB_L \mathbf{V} \end{aligned}$$

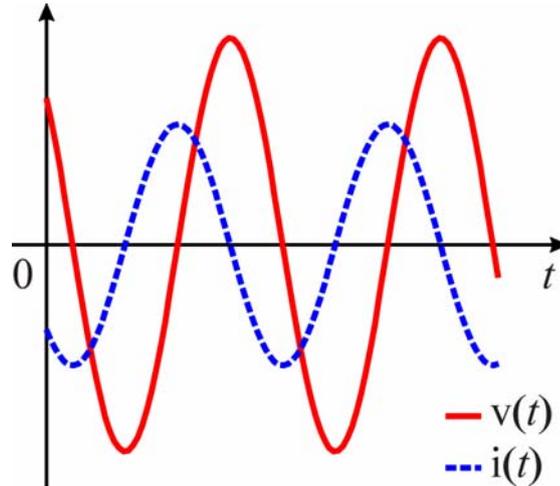
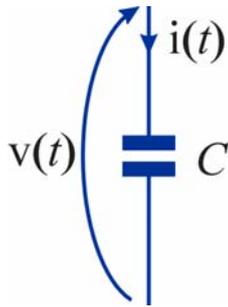
Reattanza: $X_L = \omega L$

Suscettanza: $B_L = -\frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{X_L}$



22

Condensatore in regime sinusoidale



$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = -\omega CV_M \text{sen}(\omega t + \varphi_V) = \omega CV_M \cos(\omega t + \varphi_V + \frac{\pi}{2})$$

$$I_M = \omega CV_M$$

$$\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{la corrente è in quadratura in anticipo rispetto alla tensione}$$

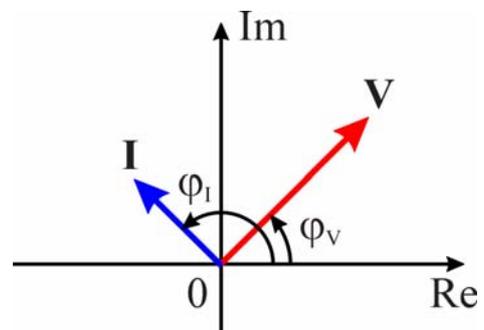
23

Condensatore – relazioni tra i fasori

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{I} &= j\omega C \mathbf{V} = jB_C \mathbf{V} \\ \mathbf{V} &= -j \frac{1}{\omega C} \mathbf{I} = jX_C \mathbf{I} \end{aligned}$$

Suscettanza: $B_C = \omega C$

Reattanza: $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{B_C}$



24

Legge di Ohm simbolica (1)

- Le relazioni tra i fasori della tensione e della corrente per il resistore, l'induttore e il condensatore sono casi particolari delle equazioni

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

Componente	\mathbf{Z}	\mathbf{Y}
Resistore	R	G
Induttore	$j\omega L$	$-j\frac{1}{\omega L}$
Condensatore	$-j\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$

25

Legge di Ohm simbolica (2)

- Più in generale, per un bipolo lineare non contenente generatori indipendenti, la tensione e la corrente sono legate tra loro da relazioni differenziali lineari omogenee
- ➔ Per la proprietà di linearità e la regola di derivazione della trasformata di Steinmetz, le corrispondenti relazioni tra i fasori della tensione e della corrente sono lineari algebriche omogenee, e quindi ancora del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

- Nel caso generale \mathbf{Z} e \mathbf{Y} sono funzioni complesse della pulsazione

$$\mathbf{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\mathbf{Y}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

26

Impedenza

- Per un bipolo lineare non contenente generatori si definisce **impedenza** il rapporto

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} R = \text{resistenza} \\ X = \text{reattanza} \end{array} \quad (\text{unità di misura ohm})$$

- Il modulo dell'impedenza è uguale al rapporto tra le ampiezze della tensione e della corrente

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_M}{I_M}$$

- L'argomento dell'impedenza è uguale allo sfasamento tra la tensione e la corrente

$$\arg(\mathbf{Z}) = \varphi = \varphi_V - \varphi_I \quad \begin{array}{l} \varphi > 0 \rightarrow \text{corrente in ritardo sulla tensione} \\ \varphi < 0 \rightarrow \text{corrente in anticipo sulla tensione} \end{array}$$

27

Ammettenza

- Il reciproco dell'impedenza è detto **ammettenza**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{I_M}{V_M} e^{-j\varphi}$$

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} G = \text{conduttanza} \\ B = \text{suscettanza} \end{array} \quad (\text{unità di misura siemens})$$

- Valgono le relazioni

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad \mathbf{Z} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$\rightarrow G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|\mathbf{Z}|^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{|\mathbf{Z}|^2}$$

$$\rightarrow R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|\mathbf{Y}|^2} \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{|\mathbf{Y}|^2}$$

28

Nota

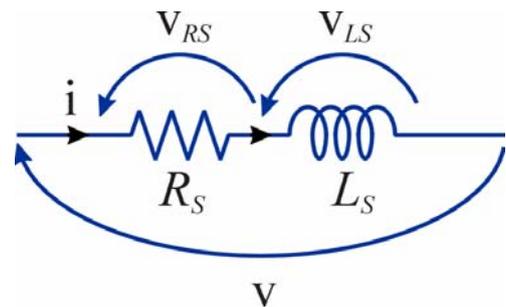
- Il termine **fasori** viene utilizzato per indicare numeri complessi che corrispondono (tramite la trasformata di Steinmetz) a funzioni sinusoidali
- Nelle relazioni $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ o $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$, \mathbf{V} e \mathbf{I} sono fasori, perché rappresentano funzioni sinusoidali $v(t)$ e $i(t)$
- L'impedenza \mathbf{Z} e l'ammettenza \mathbf{Y} non corrispondono a funzioni sinusoidali, ma rappresentano le operazioni (in generale differenziali) che legano le funzioni $v(t)$ e $i(t)$
- ➔ L'impedenza \mathbf{Z} e l'ammettenza \mathbf{Y} non sono fasori ma **operatori** complessi

Bipolo RL serie (1)

$$v(t) = v_{RS}(t) + v_{LS}(t) = R_S i(t) + L_S \frac{di}{dt}$$

⇓

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{LS} = (R_S + j\omega L_S) \mathbf{I}$$



Impedenza:

$$\mathbf{Z} = R_S + j\omega L_S \Rightarrow \begin{cases} R = R_S \\ X = \omega L_S \end{cases} \quad \varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \arctg\left(\frac{\omega L_S}{R_S}\right)$$

Ammettenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} - j \frac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \\ B = -\frac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \end{cases}$$

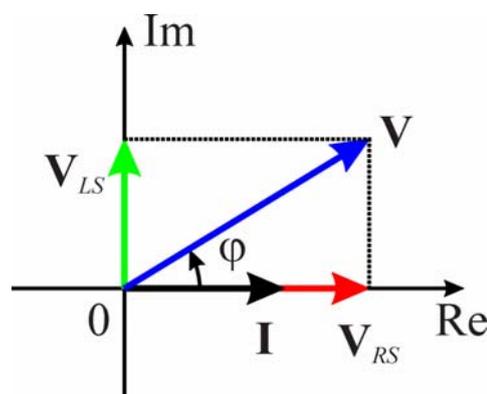
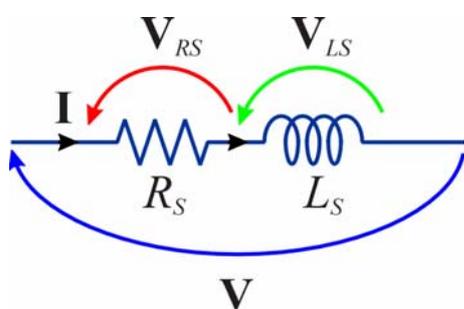
Bipolo RL serie (2)

- Per un bipolo RL serie passivo (con R_S e $L_S > 0$) si ha
 - ◆ $R = \text{Re}(\mathbf{Z}) > 0$ $X = \text{Im}(\mathbf{Z}) > 0$
 - ◆ $G = \text{Re}(\mathbf{Y}) > 0$ $B = \text{Im}(\mathbf{Y}) < 0$
 - ◆ $0 < \varphi < \pi/2$ ➔ la corrente è sfasata in ritardo rispetto alla tensione
- Per $\omega \rightarrow 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow R_S$
 - ◆ $\varphi \rightarrow 0$
- Per $\omega \rightarrow \infty$ il bipolo tende a comportarsi come il solo induttore (e quindi come un circuito aperto)
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow \omega L_S \rightarrow \infty$
 - ◆ $\varphi \rightarrow \pi/2$

31

Bipolo RL serie (3)

Diagramma nel piano complesso



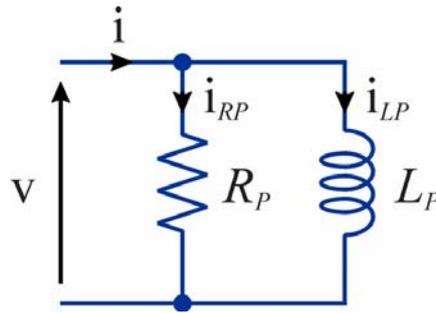
Ampiezze delle tensioni: $V_M = |\mathbf{V}|$ $V_{RSM} = |\mathbf{V}_{RS}|$ $V_{LSM} = |\mathbf{V}_{LS}|$

$$V_M = \sqrt{V_{RSM}^2 + V_{LSM}^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{V_{LSM}}{V_{RSM}}$$

32

Bipolo RL parallelo (1)



$$i(t) = i_{RP}(t) + i_{LP}(t) = \frac{1}{R_p} v(t) + \frac{1}{L_p} \int_{-\infty}^t v(x) dx \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_p} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L_p} v(t)$$

⇓

$$j\omega \mathbf{I} = j\omega \frac{1}{R_p} \mathbf{V} + \frac{1}{L_p} \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{RL} = \left(\frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} \right) \mathbf{V}$$

33

Bipolo RL parallelo (2)

Ammetenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{1}{R_p} \\ B = -\frac{1}{\omega L_p} \end{cases}$$

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{\omega^2 R_p L_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} + j \frac{\omega R_p^2 L_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{\omega^2 R_p L_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \\ X = \frac{\omega R_p^2 L_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \end{cases}$$

$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \arctg\left(\frac{R_p}{\omega L_p}\right)$$

34

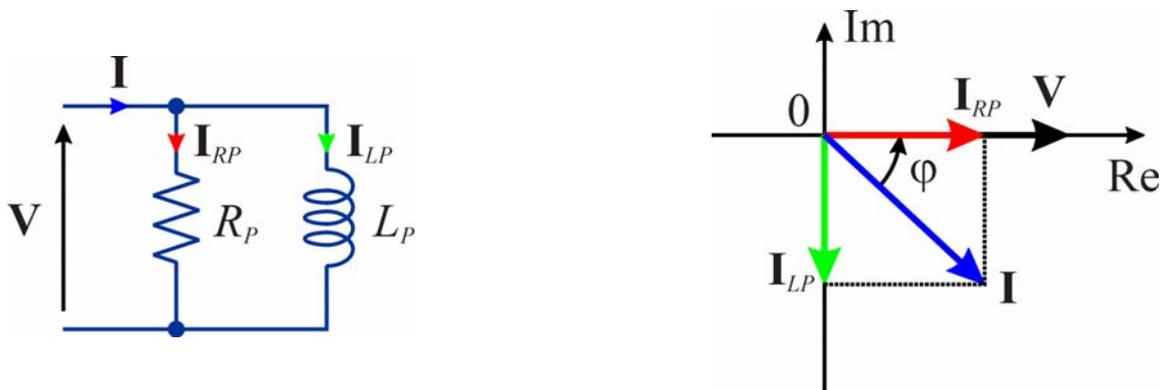
Bipolo RL parallelo (3)

- Per un bipolo RL parallelo passivo (con R_p e $L_p > 0$) si ha
 - ◆ $R = \text{Re}(\mathbf{Z}) > 0$ $X = \text{Im}(\mathbf{Z}) > 0$
 - ◆ $G = \text{Re}(\mathbf{Y}) > 0$ $B = \text{Im}(\mathbf{Y}) < 0$
 - ◆ $0 < \varphi < \pi/2$ ➔ la corrente è sfasata in ritardo rispetto alla tensione
- Per $\omega \rightarrow 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo induttore (e quindi come un cortocircuito)
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow \omega L_p \rightarrow 0$
 - ◆ $\varphi \rightarrow \pi/2$
- Per $\omega \rightarrow \infty$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow R_p$
 - ◆ $\varphi \rightarrow 0$

35

Bipolo RL parallelo (4)

Diagramma nel piano complesso



Ampiezze delle correnti:

$$I_M = |\mathbf{I}|$$

$$I_{RPM} = |\mathbf{I}_{RP}|$$

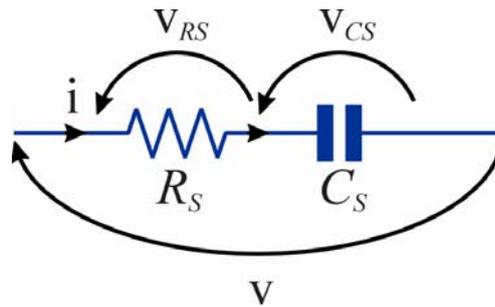
$$I_{LPM} = |\mathbf{I}_{LP}|$$

$$I_M = \sqrt{I_{RPM}^2 + I_{LPM}^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{I_{LPM}}{I_{RPM}}$$

36

Bipolo RC serie (1)



$$v(t) = v_{RS}(t) + v_{CS}(t) = R_S i(t) + \frac{1}{C_S} \int_{-\infty}^t i(x) dx \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R_S \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_S} i(t)$$

⇓

$$j\omega \mathbf{V} = R_S j\omega \mathbf{I} + \frac{1}{C_S} \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{CS} = \left(R_S - j \frac{1}{\omega C_S} \right) \mathbf{I}$$

37

Bipolo RC serie (2)

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = R_S - j \frac{1}{\omega C_S} \Rightarrow \begin{cases} R = R_S \\ X = -\frac{1}{\omega C_S} \end{cases} \quad \varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\arctg\left(\frac{1}{\omega R_S C_S}\right)$$

Ammettenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\omega^2 R_S C_S^2}{1 + (\omega R_S C_S)^2} + j \frac{\omega C_S}{1 + (\omega R_S C_S)^2} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{\omega^2 R_S C_S^2}{1 + (\omega R_S C_S)^2} \\ B = \frac{\omega C_S}{1 + (\omega R_S C_S)^2} \end{cases}$$

38

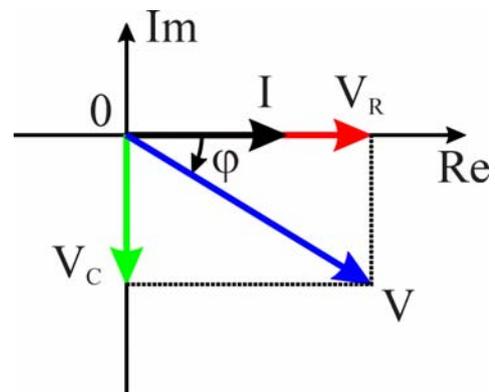
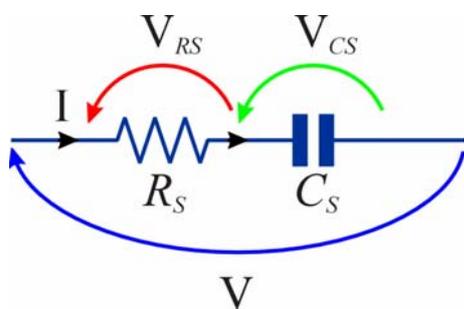
Bipolo RC serie (3)

- Per un bipolo RC serie passivo (con R_S e $C_S > 0$) si ha
 - ◆ $R = \text{Re}(\mathbf{Z}) > 0$ $X = \text{Im}(\mathbf{Z}) < 0$
 - ◆ $G = \text{Re}(\mathbf{Y}) > 0$ $B = \text{Im}(\mathbf{Y}) > 0$
 - ◆ $-\pi/2 < \varphi < 0$ → la corrente è sfasata in anticipo rispetto alla tensione
- Per $\omega \rightarrow 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo condensatore (e quindi come un circuito aperto)
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow 1/(\omega C_S) \rightarrow \infty$
 - ◆ $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- Per $\omega \rightarrow \infty$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow R_S$
 - ◆ $\varphi \rightarrow 0$

39

Bipolo RC serie (4)

Diagramma nel piano complesso



Ampezze delle tensioni: $V_M = |\mathbf{V}|$ $V_{RSM} = |\mathbf{V}_{RS}|$ $V_{CSM} = |\mathbf{V}_{CS}|$

$$V_M = \sqrt{V_{RSM}^2 + V_{CSM}^2}$$

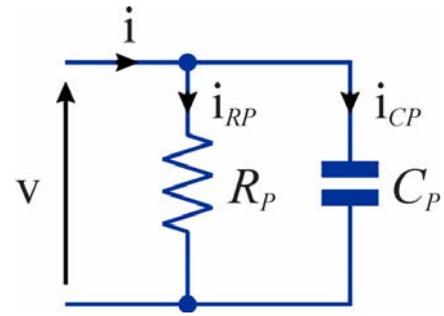
$$\varphi = -\arctg \frac{V_{CSM}}{V_{RSM}}$$

40

Bipolo RC parallelo (1)

$$i(t) = i_{RP}(t) + i_{CP}(t) = \frac{1}{R_p} v(t) + C_p \frac{dv}{dt}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{CP} = \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p \right) \mathbf{V}$$



Ammettenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{1}{R_p} \\ B = \omega C_p \end{cases}$$

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{R_p}{1 + (\omega R_p C_p)^2} - j \frac{\omega R_p^2 C_p}{1 + (\omega R_p C_p)^2} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{R_p}{1 + (\omega R_p C_p)^2} \\ X = -\frac{\omega R_p^2 C_p}{1 + (\omega R_p C_p)^2} \end{cases}$$

$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\arctg(\omega R_p C_p)$$

41

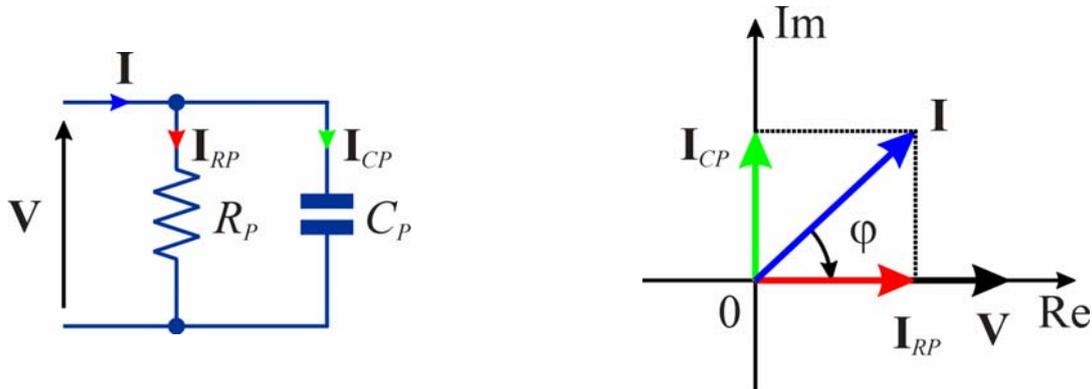
Bipolo RC parallelo (2)

- Per un bipolo RC parallelo passivo (con R_p e $C_p > 0$) si ha
 - ◆ $R = \text{Re}(\mathbf{Z}) > 0$ $X = \text{Im}(\mathbf{Z}) < 0$
 - ◆ $G = \text{Re}(\mathbf{Y}) > 0$ $B = \text{Im}(\mathbf{Y}) > 0$
 - ◆ $-\pi/2 < \varphi < 0$ ➔ la corrente è sfasata in anticipo rispetto alla tensione
- Per $\omega \rightarrow 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow R_p$
 - ◆ $\varphi \rightarrow 0$
- Per $\omega \rightarrow \infty$ il bipolo tende a comportarsi come il solo condensatore (e quindi come un cortocircuito)
 - ◆ $|\mathbf{Z}| \rightarrow 1/(\omega C_p) \rightarrow 0$
 - ◆ $\varphi \rightarrow -\pi/2$

42

Bipolo RC parallelo (3)

Diagramma nel piano complesso



Ampiezze delle correnti: $I_M = |\mathbf{I}|$ $I_{RPM} = |\mathbf{I}_{RP}|$ $I_{CPM} = |\mathbf{I}_{CP}|$

$$I_M = \sqrt{I_{RPM}^2 + I_{CPM}^2}$$

$$\varphi = -\arctg \frac{I_{CPM}}{I_{RPM}}$$

43

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (1)

Equazioni dei componenti

- Generatori indipendenti:
sono note le tensioni o le correnti → sono noti anche i loro fasori

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_G$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G$$

- Bipoli lineari:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

- Generatori dipendenti:
per la proprietà di linearità, le relazioni tra i fasori sono

$$\mathbf{I}_2 = \alpha \mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 = g \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = r \mathbf{I}_1 \quad \mathbf{V}_2 = \mu \mathbf{V}_1$$

44

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (2)

Equazioni dei collegamenti

- Le relazioni tra le grandezze funzioni del tempo sono espresse da equazioni algebriche lineari omogenee del tipo

$$\sum_k \pm i_k(t) = 0$$

$$\sum_k \pm v_k(t) = 0$$

- Per le proprietà di unicità e di linearità della trasformata di Steinmetz

$$\sum_k \pm \mathbf{I}_k = 0$$

$$\mathbf{I}_k = \mathcal{S}\{i_k(t)\} \quad \mathbf{V}_k = \mathcal{S}\{v_k(t)\}$$

$$\sum_k \pm \mathbf{V}_k = 0$$

- Le leggi di Kirchhoff valgono anche per i fasori delle tensioni e delle correnti

45

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (3)

- Le equazioni di un circuito lineare in regime sinusoidale, scritte in termini di fasori, hanno la stessa forma delle equazioni di un circuito lineare resistivo in regime stazionario
- I teoremi e i metodi di analisi dedotti a partire dalle equazioni generali dei circuiti resistivi si possono estendere ai circuiti in regime sinusoidale eseguendo le seguenti sostituzioni:
 - Resistenza → Impedenza
 - Conduttanza → Ammettenza
 - Tensione → Fasore della tensione
 - Corrente → Fasore della corrente

46

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (4)

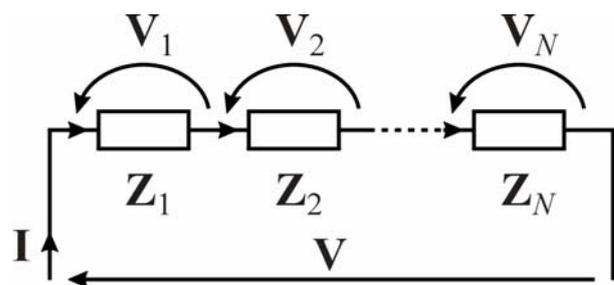
- In particolare si possono estendere ai circuiti lineari in regime sinusoidale
 - ◆ le relazioni di equivalenza come
 - serie, parallelo
 - stella-triangolo
 - trasformazione dei generatori
 - formule di Millman
 - ◆ i metodi di analisi generali
 - metodo delle maglie, metodo dei nodi e metodo degli anelli
 - ◆ il teorema di sovrapposizione
 - ◆ il teorema di sostituzione
 - ◆ i teoremi di Thévenin e Norton

47

Impedenze in serie e in parallelo

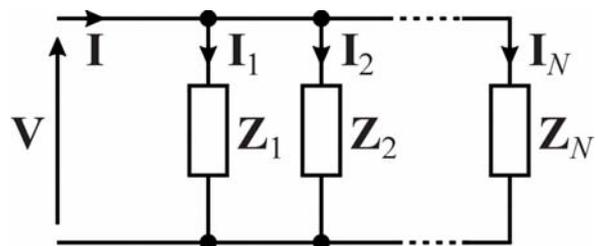
● Impedenze in serie

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{V}_k \\ \mathbf{I}_k &= \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_k &= \mathbf{Z}_k \mathbf{I}_k \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{Z}_S \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}_S &= \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_K \end{aligned}$$



● Impedenze in parallelo

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_k \\ \mathbf{V}_k &= \mathbf{V} \\ \mathbf{I}_k &= \mathbf{Y}_k \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{Y}_P \mathbf{V} \\ \mathbf{Y}_P &= \sum_{k=1}^N \mathbf{Y}_K \\ \mathbf{Z}_P &= \frac{1}{\mathbf{Y}_P} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\mathbf{Z}_k}} \end{aligned}$$

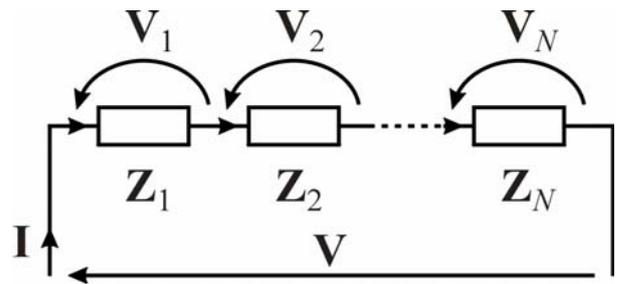


48

Partitore di tensione e di corrente

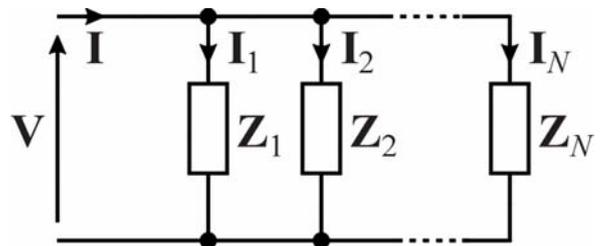
- Partitore di tensione

$$V_j = V \frac{Z_j}{\sum_{k=1}^N Z_k}$$



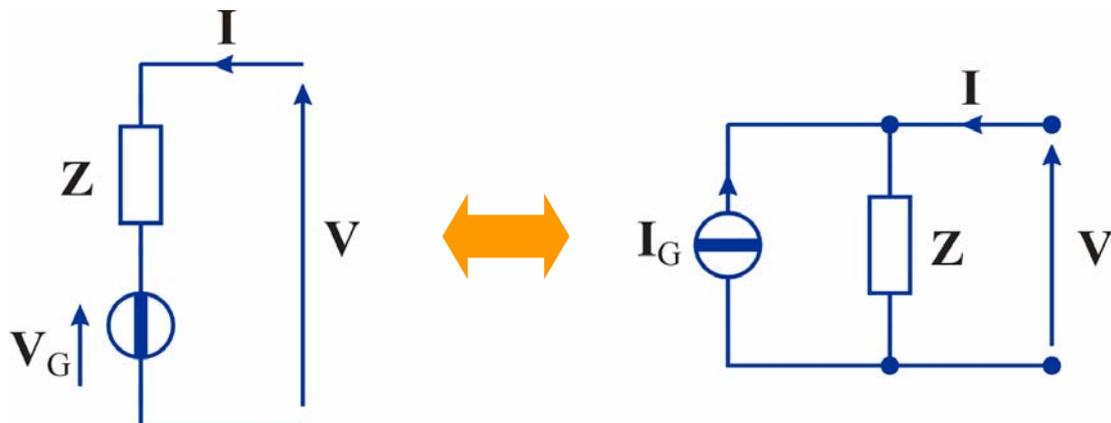
- Partitore di corrente

$$I_j = I \frac{Y_j}{\sum_{k=1}^N Y_k}$$



49

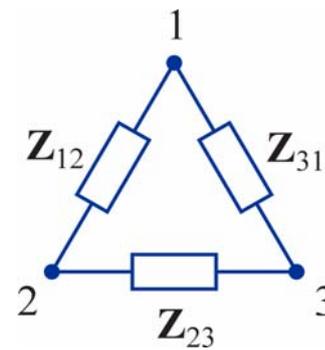
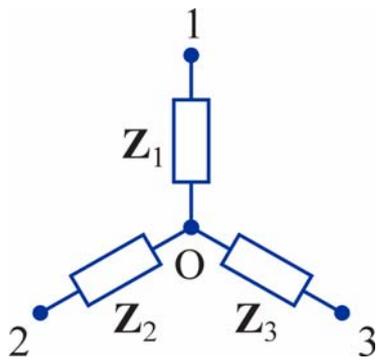
Trasformazioni dei generatori



$$V_G = Z I_G \quad I_G = Y V_G$$

50

Equivalenza stella-triangolo



$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_{12} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}$$

$$Z_{13} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$$

$$Z_{23} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$$

51

Teorema di sovrapposizione

• Ipotesi:

- ♦ circuito lineare contenente
 - N_V generatori indipendenti di tensione $v_{G1}(t), \dots, v_{GN_V}(t)$
 - N_I generatori indipendenti di corrente $i_{G1}(t), \dots, i_{GN_I}(t)$
- ♦ tutti i generatori sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω
- ♦ condizioni di regime sinusoidale

➔ I fasori della tensione e della corrente del generico lato i sono combinazioni lineari dei fasori delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti

$$\mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_{ik} \mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} z_{ik} \mathbf{I}_{Gk}$$

$$\mathbf{I}_i = \sum_{k=1}^{N_V} y_{ik} \mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \beta_{ik} \mathbf{I}_{Gk}$$

52

Funzioni di rete

- I coefficienti delle combinazioni sono funzioni complesse della pulsazione ω e sono detti **funzioni di di rete**

$$\alpha_{ik} = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \end{array} \right.$$

(adimensionale)

$$\mathbf{z}_{ik} = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \neq k \end{array} \right.$$

(ha le dimensioni di un'impedenza)

$$\mathbf{y}_{ik} = \frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \end{array} \right.$$

(ha le dimensioni di un'ammettenza)

$$\beta_{ik} = \frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \neq k \end{array} \right.$$

(adimensionale)

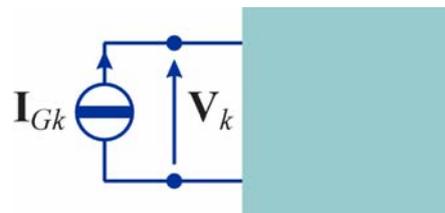
- Le funzioni di rete che mettono in relazione i fasori della tensione e della corrente dello stesso lato sono dette **funzioni di immettenza**
- Le funzioni di rete che mettono in relazione fasori di tensioni e correnti di lati diversi sono dette **funzioni di trasferimento**

53

Funzioni di immettenza

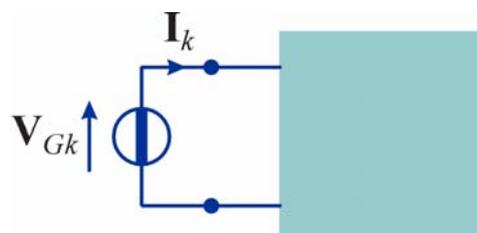
- Impedenza di ingresso**

$$\mathbf{Z}_{INk}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{I}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \neq k \end{array} \right.$$



- Ammettenza di ingresso**

$$\mathbf{Y}_{INk}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{V}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \end{array} \right.$$

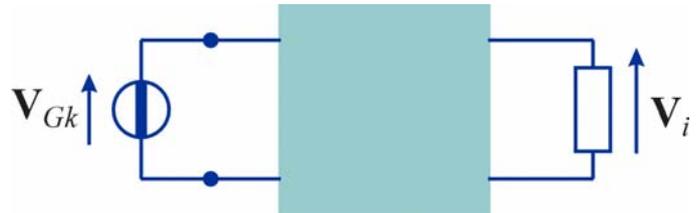


54

Funzioni di trasferimento (1)

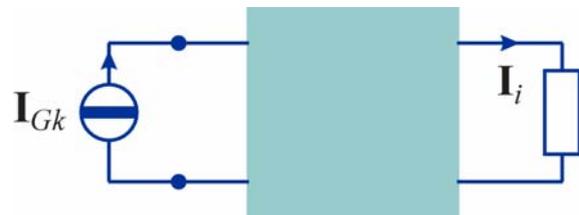
- Rapporto di trasferimento di tensione

$$\alpha_{ik}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \end{array} \right.$$



- Rapporto di trasferimento di corrente

$$\beta_{ik}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \neq k \end{array} \right.$$



55

Funzioni di trasferimento (2)

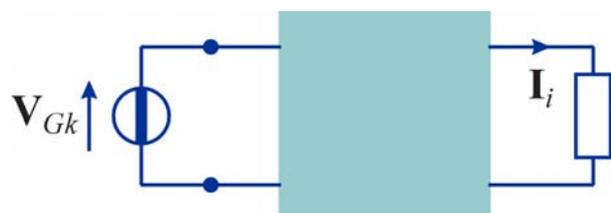
- Impedenza di trasferimento

$$\mathbf{z}_{ik}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \neq k \end{array} \right.$$



- Ammettenza di trasferimento

$$\mathbf{y}_{ik}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}_{Gh}=0 \forall h \neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0 \forall h \end{array} \right.$$



56

Funzioni di rete

- Tutte le funzioni di rete sono funzioni razionali della variabile complessa $j\omega$ (cioè sono rapporti tra polinomi nella variabile $j\omega$)

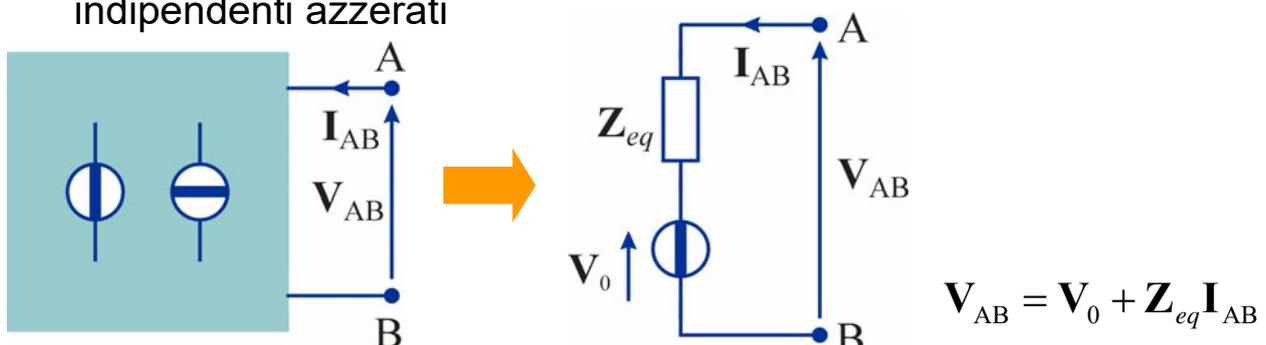
$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

- Ciò deriva dal fatto che i fasori delle tensioni e delle correnti possono essere calcolati a partire da un sistema di equazioni i cui coefficienti contengono i fattori $j\omega$ o $1/j\omega$ (presenti nelle equazioni caratteristiche dei componenti dinamici)
- I coefficienti dei polinomi, a_k e b_k , sono sempre reali e dipendono dai parametri dei componenti diversi dai generatori indipendenti

57

Teorema di Thévenin

- **Ipotesi:**
 - ♦ condizioni di regime sinusoidale
 - ♦ il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
 - ♦ il bipolo A-B è comandato in corrente
- ➔ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di tensione V_0 in serie con un'impedenza Z_{eq}
 - ♦ V_0 è la tensione a vuoto del bipolo A-B
 - ♦ Z_{eq} è l'impedenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



58

Teorema di Norton

Ipotesi:

- ◆ condizioni di regime sinusoidale
 - ◆ il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
 - ◆ il bipolo A-B è comandato in tensione
- ➔ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di corrente \mathbf{I}_{cc} in parallelo con un'ammettenza \mathbf{Y}_{eq}
- ◆ \mathbf{I}_{cc} è la corrente di cortocircuito del bipolo A-B
 - ◆ \mathbf{Y}_{eq} è l'ammettenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati

