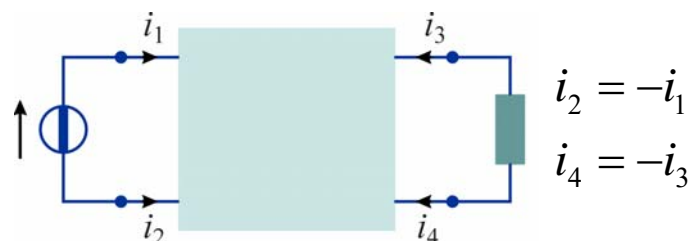
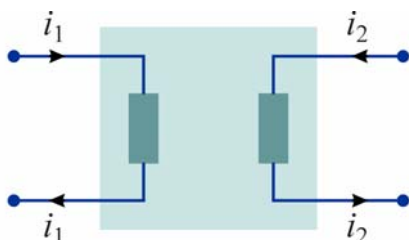


Doppi bipoli

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 3-11-2014)

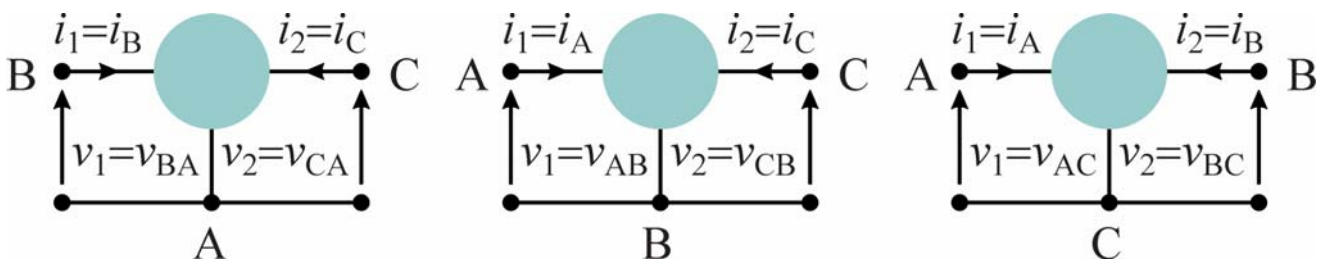
Doppi bipoli (o 2-porte)

- **Doppi bipoli:** componenti con due copie di terminali (**porte**) tali che, per ciascuna coppia, la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro
- Doppio bipolo **intrinseco**:
 - ◆ il vincolo tra le correnti dei terminali di ciascuna porta è determinato dalla struttura interna del componente
- Doppio bipolo **non intrinseco**:
 - ◆ il vincolo tra le correnti è dovuto al modo in cui il componente viene collegato



Rappresentazioni di un tripolo come doppio bipolo

- Un tripolo può essere considerato come un doppio bipolo con i terminali negativi delle porte collegati tra loro
- Le tensioni e le correnti utilizzate per caratterizzare il componente e le espressioni delle equazioni caratteristiche dipendono dalla scelta del **terminale comune**



3

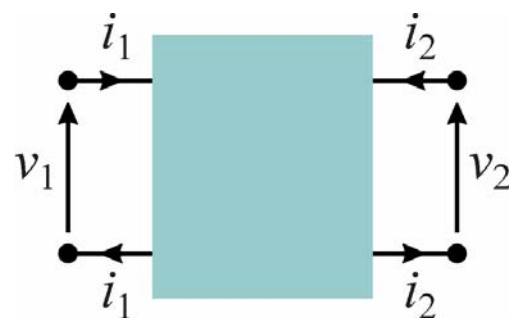
Doppi bipoli resistivi

- Le equazioni di un doppio bipolo resistivo sono del tipo

$$f_1[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t] = 0$$

$$f_2[v_1(t), v_2(t), i_1(t), i_2(t), t] = 0$$

$f_1, f_2 =$ funzioni generiche



- Se il tempo non compare esplicitamente come argomento di f_1 e f_2 il componente è detto **tempo-invariante**
- Se le equazioni consentono di ricavare due delle variabili in funzioni delle altre si possono avere altre forme particolari delle equazioni

4

Rappresentazioni di un doppio bipolo

Rappresentazione	Variabili indipendenti	Variabili dipendenti
Comandata in corrente	i_1, i_2	v_1, v_2
Comandata in tensione	v_1, v_2	i_1, i_2
Ibrida (diretta)	i_1, v_2	v_1, i_2
Ibrida inversa	v_1, i_2	i_1, v_2
Trasmissione (diretta)	$v_2, -i_2$	v_1, i_1
Trasmissione inversa	$v_1, -i_1$	v_2, i_2

5

Doppi bipoli resistivi lineari tempo-invarianti

- Per un doppio bipolo resistivo **lineare** e **tempo-invariante** le equazioni, nel caso generale, sono del tipo

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + b_{11}i_1 + b_{12}i_2 = 0$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + b_{21}i_1 + b_{22}i_2 = 0$$

a_{ij}, b_{ij} ($i, j = 1, 2$) rappresentano delle costanti

- Queste equazioni possono essere espresse nella forma

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- Di seguito si considereranno solo componenti di questo tipo, quindi gli aggettivi *lineare* e *tempo-invariante* saranno sottointesi

6

Matrice di resistenza

- Per un doppio bipolo comandato in corrente le equazioni possono essere poste nella forma

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$

cioè

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$$

dove

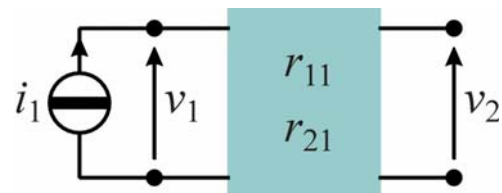
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- R = matrice di resistenza**
- Per comprendere il significato dei parametri, si considerano le condizioni di funzionamento in cui una delle variabili indipendenti viene azzerata (mentre l'altra assume un valore arbitrario $\neq 0$)

7

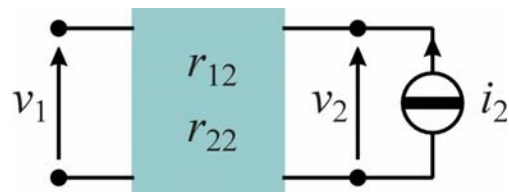
Significato dei parametri di resistenza

$$r_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$



- ➔ r_{11} = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 1
- ➔ r_{21} = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

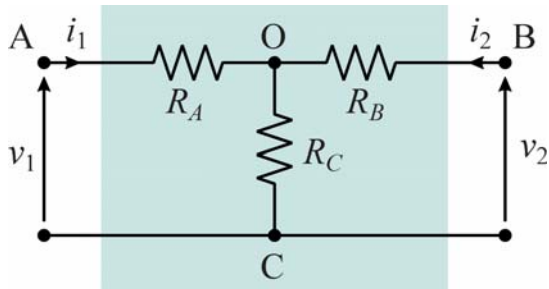
$$r_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad r_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$



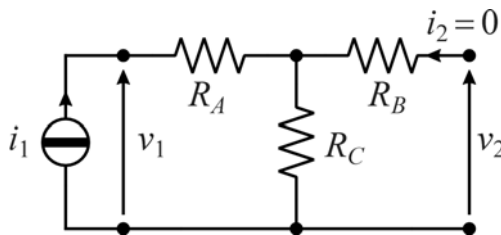
- ➔ r_{22} = resistenza di ingresso a vuoto alla porta 2
- ➔ r_{12} = resistenza di trasferimento a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

8

Esempio – Resistori collegati a T

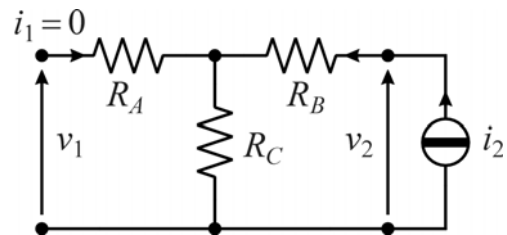


$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_A + R_C & R_C \\ R_C & R_B + R_C \end{bmatrix}$$



$$v_1 = (R_A + R_C)i_1$$

$$v_2 = R_C i_1$$

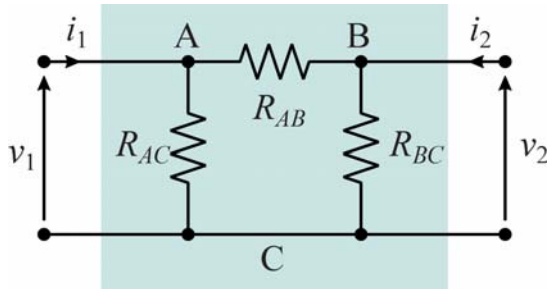


$$v_1 = R_C i_2$$

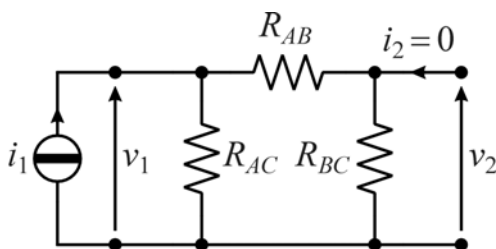
$$v_2 = (R_B + R_C)i_2$$

9

Esempio – Resistori collegati a Π

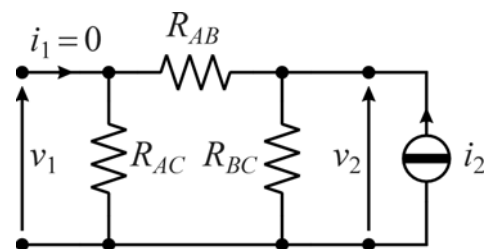


$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_{AB}R_{AC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\ \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \frac{R_{AB}R_{BC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \end{bmatrix}$$



$$v_1 = i_1 \frac{R_{AC}(R_{AB} + R_{BC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$v_2 = i_1 \frac{R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} R_{BC}$$



$$v_2 = i_2 \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{AC})}{R_{BC} + R_{AC} + R_{AB}}$$

$$v_1 = i_2 \frac{R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} R_{AC}$$

10

Esempio – Equivalenza Π – T (triangolo-stella)

- Un doppio bipolo a T e un doppio bipolo a Π sono equivalenti se le loro matrici di resistenza \mathbf{R}_T e \mathbf{R}_Π sono uguali

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} R_A + R_C & R_C \\ R_C & R_B + R_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\Pi = \begin{bmatrix} \frac{R_{AB}R_{AC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\ \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} & \frac{R_{AB}R_{BC} + R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \end{bmatrix}$$

- Confrontando le matrici si riconosce che devono essere verificate le relazioni

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \quad R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

che corrispondono alle formule di trasformazione triangolo-stella

11

Matrice di conduttanza

- Per un doppio bipolo comandato in tensione le equazioni possono essere poste nella forma

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$

$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$

cioè

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

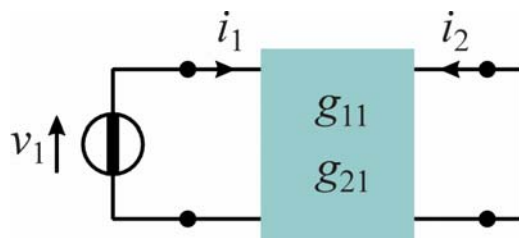
- \mathbf{G} = matrice di conduttanza

12

Significato dei parametri di conduttanza

$$g_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

$$g_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

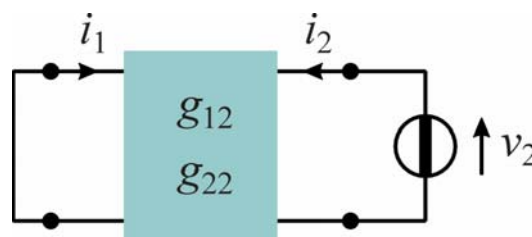


➔ g_{11} = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 1

➔ g_{21} = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

$$g_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0}$$

$$g_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0}$$

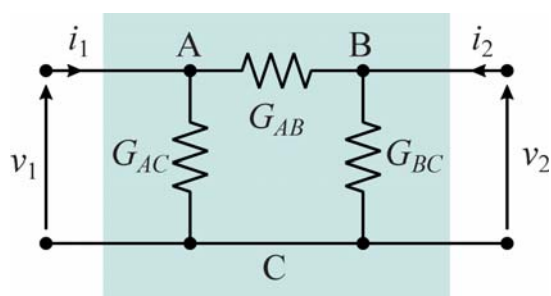


➔ g_{22} = conduttanza di ingresso in cortocircuito alla porta 2

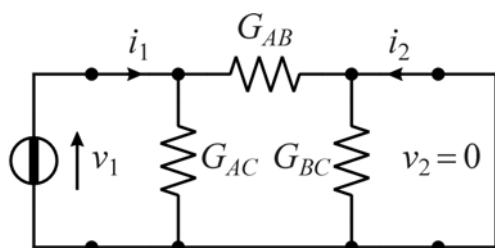
➔ g_{12} = conduttanza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

13

Esempio – Resistori collegati a Π

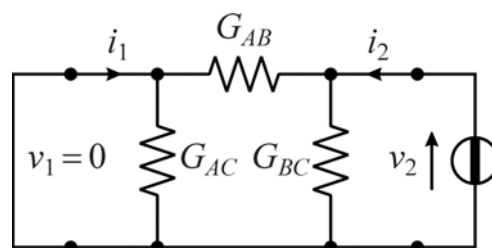


$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{AB} + G_{AC} & -G_{AB} \\ -G_{AB} & G_{AB} + G_{BC} \end{bmatrix}$$



$$i_1 = v_1(G_{AB} + G_{AC})$$

$$i_2 = -v_1 G_{AB}$$

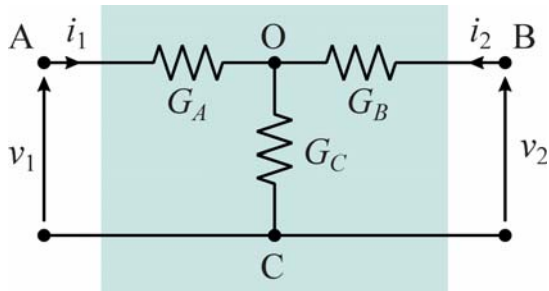


$$i_1 = -v_2 G_{AB}$$

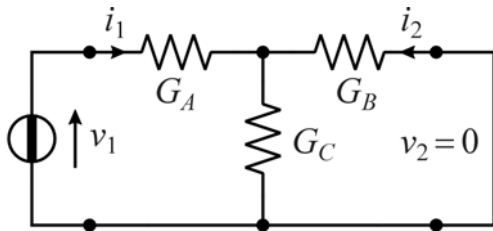
$$i_2 = v_2(G_{AB} + G_{BC})$$

14

Esempio – Resistori collegati a T

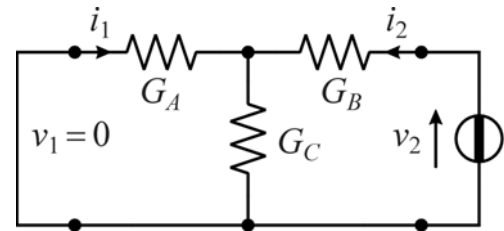


$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{G_A G_B + G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} & -\frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \\ -\frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} & \frac{G_A G_B + G_B G_C}{G_A + G_B + G_C} \end{bmatrix}$$



$$i_1 = v_1 \frac{G_A (G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C}$$

$$i_2 = -v_1 \frac{G_A (G_B + G_C)}{G_A + G_B + G_C} \cdot \frac{G_B}{G_B + G_C}$$



$$i_2 = v_2 \frac{G_B (G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C}$$

$$i_1 = -v_2 \frac{G_B (G_A + G_C)}{G_B + G_A + G_C} \cdot \frac{G_A}{G_A + G_C}$$

15

Esempio – Equivalenza T – Π (stella-triangolo)

- Un doppio bipolo a Π e un doppio bipolo a T sono equivalenti se le loro matrici di resistenza \mathbf{G}_Π e \mathbf{G}_T sono uguali

$$\mathbf{G}_\Pi = \begin{bmatrix} G_{AB} + G_{AC} & -G_{AB} \\ -G_{AB} & G_{AB} + G_{BC} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} \frac{G_A G_B + G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} & -\frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \\ -\frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} & \frac{G_A G_B + G_B G_C}{G_A + G_B + G_C} \end{bmatrix}$$

- Confrontando le matrici si riconosce che devono essere verificate le relazioni

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \quad G_{AC} = \frac{G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} \quad G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

che corrispondono alle formule di trasformazione stella-triangolo

16

Esempio – Equivalenza T – Π (stella-triangolo)

- In termini di resistenze, le formule precedenti divengono

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A R_B} \quad \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_A R_C} \quad \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_B R_C}$$
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} \quad \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} \quad \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}$$

→ quindi si ha

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

17

Matrici ibride

- Se è possibile esprimere v_1 e i_2 in funzione di i_1 e v_2 si ha

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{H} = **matrice ibrida (diretta)**

- Se è possibile esprimere i_1 e v_2 in funzione di v_1 e i_2 si ha

$$\begin{aligned} i_1 &= h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 \\ v_2 &= h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{H}' = **matrice ibrida inversa**

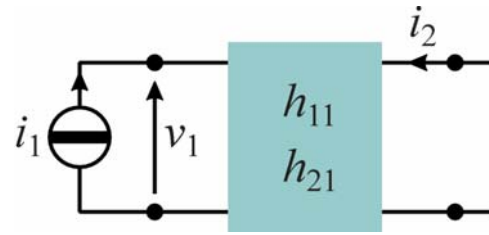
- I coefficienti delle matrici ibride non hanno dimensioni omogenee

18

Significato dei coefficienti di H

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

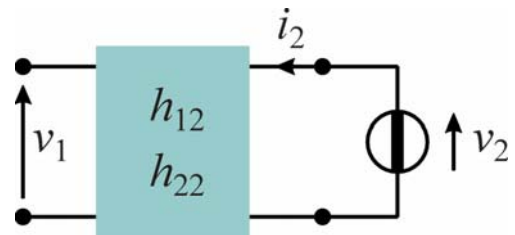


➔ h_{11} = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 1

➔ h_{21} = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0}$$



➔ h_{22} = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 2

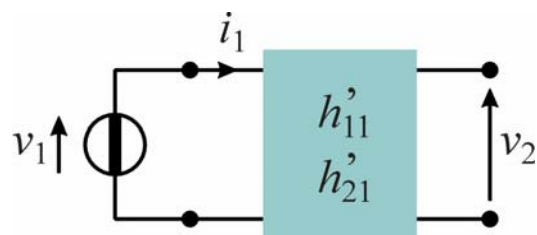
➔ h_{12} = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

19

Significato dei coefficienti di H'

$$h'_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0}$$

$$h'_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0}$$

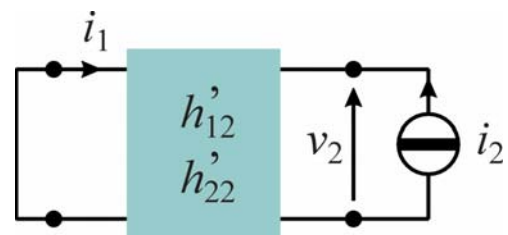


➔ h'_{11} = conduttanza di ingresso a vuoto alla porta 1

➔ h'_{21} = guadagno di tensione a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

$$h'_{12} = \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_1=0}$$

$$h'_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0}$$



➔ h'_{22} = resistenza di ingresso in cortocircuito alla porta 2

➔ h'_{12} = guadagno di corrente in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

20

Matrice di trasmissione (matrice catena)

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 1 in funzione della tensione e della corrente alla porta 2
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_2$ invece di i_2

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_2 - Bi_2 \\ i_1 &= Cv_2 - Di_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

- \mathbf{T} = **matrice di trasmissione (matrice catena)**
- Significato dei coefficienti

$$A = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0} \quad B = \left. \frac{v_1}{-i_2} \right|_{v_2=0} \quad C = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} \quad D = \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{v_2=0}$$

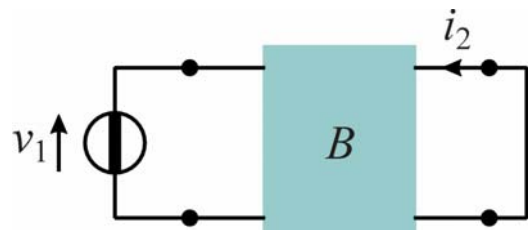
- Non è possibile utilizzare queste relazioni per determinare i coefficienti (occorrerebbe fissare sia la tensione che la corrente della porta 2)

21

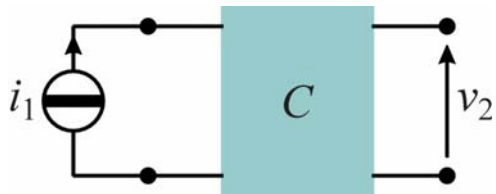
Determinazione dei coefficienti di T



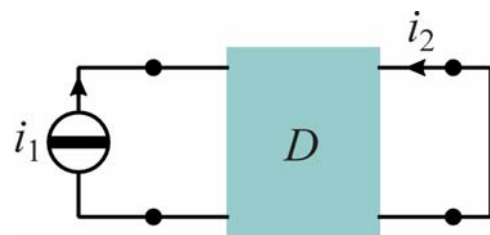
$$\frac{1}{A} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0}$$



$$\frac{1}{B} = \left. \frac{-i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$



$$\frac{1}{C} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$



$$\frac{1}{D} = \left. \frac{-i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

22

Matrice di trasmissione inversa

- Si esprimono la tensione e la corrente alla porta 2 in funzione della tensione e della corrente alla porta 1
- Per motivi pratici, conviene considerare come variabile indipendente $-i_1$ invece di i_1

$$\begin{aligned} v_2 &= A'v_1 - B'i_1 \\ i_2 &= C'v_1 - D'i_1 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{T}' =$ **matrice di trasmissione inversa**
- Significato dei coefficienti

$$A' = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_1=0} \quad B' = \left. \frac{v_2}{-i_1} \right|_{v_1=0} \quad C' = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{i_1=0} \quad D' = \left. \frac{i_2}{-i_1} \right|_{v_1=0}$$

23

Relazioni tra le rappresentazioni

- Confrontando le varie espressioni delle equazioni di un doppio bipolo si riconosce che (quando il doppio bipolo ammette tutte le rappresentazioni considerate)
 - ◆ la matrice \mathbf{G} è l'inversa della matrice \mathbf{R}
 - ◆ la matrice \mathbf{H}' è l'inversa della matrice \mathbf{H}
 - ◆ La matrice \mathbf{T}' è l'inversa della matrice \mathbf{T} con i coefficienti della diagonale secondaria cambiati di segno a causa delle scelte diverse per i versi di riferimento delle correnti
- Le altre relazioni tra le varie rappresentazioni si possono ottenere utilizzando le definizioni dei coefficienti delle matrici

24

Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 &= r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della prima colonna di **H**

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} & h_{21} &= \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} & & \text{(si pone } v_2 = 0) \\ v_2 = 0 & \Rightarrow & \begin{aligned} v_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ 0 &= r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{aligned} & \Rightarrow & \begin{aligned} i_2 &= -\frac{r_{21}}{r_{22}}i_1 \\ v_1 &= \left(r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right) i_1 = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} i_1 \end{aligned} \\ \Rightarrow & h_{11} = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} & h_{21} &= -\frac{r_{21}}{r_{22}} \end{aligned}$$

25

Esempio - Passaggio da parametri r a parametri h

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 &= r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{aligned}$$

- Calcolo degli elementi della seconda colonna di **H**

$$\begin{aligned} h_{12} &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} & h_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} & & \text{(si pone } i_1 = 0) \\ i_1 = 0 & \Rightarrow & \begin{aligned} v_1 &= r_{12}i_2 \\ v_2 &= r_{22}i_2 \end{aligned} & \Rightarrow & \begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{r_{22}}v_2 \\ v_1 &= \frac{r_{12}}{r_{22}}v_2 \end{aligned} \\ \Rightarrow & h_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}} & h_{22} &= \frac{1}{r_{22}} \end{aligned}$$

26

Relazioni tra le rappresentazioni

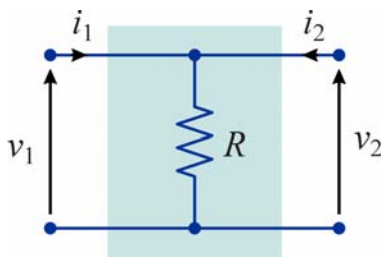
	R	G	H	H'	T	T'
R	$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta G} & -\frac{g_{12}}{\Delta G} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta G} & \frac{g_{11}}{\Delta G} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{h_{21}}{h_{22}} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ 1 & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta R} & -\frac{r_{12}}{\Delta R} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{11}}{\Delta R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -1 & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & \frac{1}{B'} \\ \frac{B'}{D'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta R}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ \frac{r_{21}}{r_{22}} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -g_{12} \\ g_{11} & g_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -1 & C \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ \frac{A'}{\Delta T'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
H'	$\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{\Delta R} \\ \frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{11}}{\Delta R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ \frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ 1 & B \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{r_{11}}{\Delta R} & \frac{r_{12}}{\Delta R} \\ \frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{22}}{\Delta R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -g_{22} & -1 \\ g_{21} & g_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{21}} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta H'}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{B'}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{\Delta T'}{C'} \end{matrix}$
T'	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta R} & \frac{r_{12}}{\Delta R} \\ \frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{11}}{\Delta R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -g_{11} & -1 \\ g_{12} & g_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{12}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ \frac{h'_{12}}{h'_{12}} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{C} & \frac{B}{A} \\ \frac{\Delta T}{C} & \frac{\Delta T}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$$\Delta \mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$$

Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne

27

Esempio – doppi bipoli che non ammettono la matrice R o la matrice G

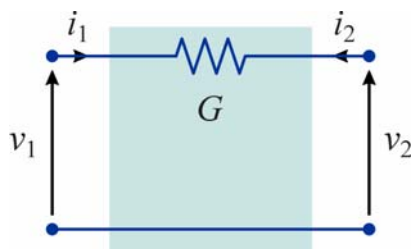


$$v_1 = v_2 = R(i_1 + i_2)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

- Non è possibile imporre valori arbitrari ad entrambe le tensioni (cioè utilizzarle come variabili indipendenti) → la matrice **G** non è definita



$$i_1 = -i_2 = G(v_1 - v_2)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}$$

- Non è possibile utilizzare le correnti come variabili indipendenti → la matrice **R** non è definita

28

Reciprocità

- Ipotesi:**

$$\begin{cases} \{v'_1, v'_2, i'_1, i'_2\} \\ \{v''_1, v''_2, i''_1, i''_2\} \end{cases}$$



insiemi arbitrari di tensioni e correnti che soddisfano le equazioni del doppio bipolo

- Definizione:**

si dice che il doppio bipolo è **reciproco** se

$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2$$

- Per interpretare il significato di questa relazione e ricavare le condizioni che devono soddisfare i parametri delle matrici del doppio bipolo si fa riferimento alle situazioni in cui una sola delle variabili indipendenti è diversa da zero

Reciprocità - parametri r

Condizione 1



$$i'_1 = I \quad i'_2 = 0$$

$$v'_2 = r_{21} i'_1 + r_{22} i'_2 = r_{21} I$$

Condizione 2



$$i''_1 = 0 \quad i''_2 = I$$

$$v''_1 = r_{11} i''_1 + r_{12} i''_2 = r_{12} I$$

Condizione di reciprocità

$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2 \Rightarrow v'_1 \cdot 0 + v'_2 I = v''_1 I + v''_2 \cdot 0 \Rightarrow v'_2 = v''_1$$

$$\Rightarrow r_{12} = r_{21}$$

Reciprocità - parametri g

Condizione 1



$$v'_1 = V \quad v'_2 = 0$$

$$i'_2 = g_{21}v'_1 + g_{22}v'_2 = g_{21} V$$

Condizione 2



$$v''_1 = 0 \quad v''_2 = V$$

$$i''_1 = g_{11}v''_1 + g_{12}v''_2 = g_{12} V$$

Condizione di reciprocità

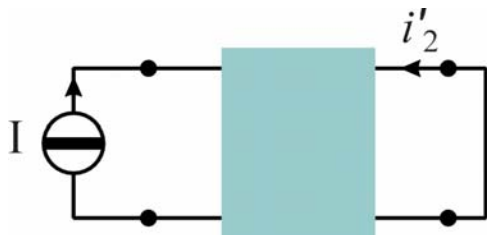
$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2 \quad \Rightarrow \quad V i''_1 + 0 \cdot i''_2 = 0 \cdot i'_1 + V i'_2 \quad \Rightarrow \quad i'_2 = i''_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_{12} = g_{21}}$$

31

Reciprocità - parametri h

Condizione 1



$$i'_1 = I \quad v'_1 = 0$$

$$i'_2 = h_{21}i'_1 + h_{22}v'_1 = h_{21} I$$

Condizione 2



$$i''_1 = 0 \quad v''_1 = V$$

$$v''_2 = h_{11}i''_1 + h_{12}v''_1 = h_{12} V$$

Condizione di reciprocità

$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2 \quad \Rightarrow \quad v'_1 \cdot 0 + 0 \cdot i''_2 = v''_1 \cdot I + V i'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i'_2}{I} = -\frac{v''_1}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_{12} = -h_{21}}$$

32

Reciprocità - parametri h' , T e T'

- **Parametri h' :**

- ◆ procedendo in modo simile al caso precedente si ottiene la condizione

$$h'_{12} = -h'_{21}$$

- **Parametri di trasmissione:**

- ◆ si può dimostrare che per un doppio bipolo reciproco valgono le condizioni

$$\det(\mathbf{T}) = 1$$

$$\det(\mathbf{T}') = 1$$

33

Doppi bipoli reciproci

- Per un doppio bipolo reciproco valgono le seguenti proprietà:

- ◆ Applicando una corrente I ad una qualunque delle porte all'altra porta si ottiene la stessa tensione a vuoto
- ◆ Applicando una tensione V ad una qualunque delle porte all'altra porta si ottiene la stessa corrente di cortocircuito
- ◆ Il guadagno di corrente in cortocircuito in una direzione è uguale al guadagno di tensione a vuoto nella direzione opposta cambiato di segno

34

Simmetria

- Si dice che un doppio bipolo è **simmetrico** se, per ogni insieme di tensioni e di correnti alle porte che soddisfano le sue equazioni caratteristiche, anche l'insieme ottenuto scambiando la porta 1 con la porta 2 soddisfa le equazioni caratteristiche
- Si può dimostrare che le matrici di un due porte simmetrico soddisfano le seguenti proprietà
 - ◆ matrice **R**: $r_{11} = r_{22}$ $r_{12} = r_{21}$
 - ◆ matrice **G**: $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = g_{21}$
 - ◆ matrice **H**: $h_{12} = -h_{21}$ $\det(\mathbf{H}) = 1$
 - ◆ matrice **H'**: $h'_{12} = -h'_{21}$ $\det(\mathbf{H}') = 1$
 - ◆ matrice **T**: $A = D$ $\det(\mathbf{T}) = 1$
 - ◆ matrice **T'**: $A' = D'$ $\det(\mathbf{T}') = 1$
- ➔ La simmetria implica anche la reciprocità

35

Passività

- Potenza assorbita da un doppio bipolo

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$
- Per un doppio bipolo resistivo passivo, per tutti i valori di v_1, v_2, i_1, i_2 compatibili con le equazioni caratteristiche deve essere

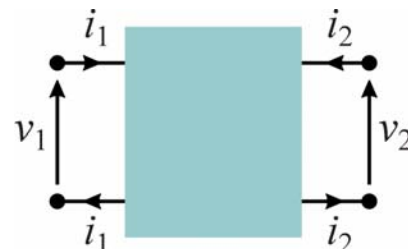
$$p \geq 0$$
- Da questa, si possono ricavare delle condizioni che devono essere soddisfatte dagli elementi delle matrici del doppio bipolo (**condizioni di passività**)
- Facendo uso delle matrici **R**, **G**, **H** e **H'**, la potenza può essere espressa come

$$p = r_{11} i_1^2 + (r_{12} + r_{21}) i_1 i_2 + r_{22} i_2^2$$

$$p = g_{11} v_1^2 + (g_{12} + g_{21}) v_1 v_2 + g_{22} v_2^2$$

$$p = h_{11} i_1^2 + (h_{12} + h_{21}) i_1 v_2 + h_{22} v_2^2$$

$$p = h'_{11} v_1^2 + (h'_{12} + h'_{21}) v_1 i_2 + h'_{22} i_2^2$$



36

Passività

- Le espressioni precedenti sono tutte del tipo

$$p = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

- Affinché il doppio bipolo sia passivo si deve avere $p \geq 0 \forall x_1, x_2$, quindi, in particolare

- per $x_1 = 0$:

$$p = cx_2^2 \geq 0 \forall x_2 \Leftrightarrow c \geq 0$$

- per $x_2 = 0$:

$$p = ax_1^2 \geq 0 \forall x_1 \Leftrightarrow a \geq 0$$

- per $x_2 \neq 0$:

$$\frac{p}{x_2^2} = a \frac{x_1^2}{x_2^2} + b \frac{x_1}{x_2} + c \geq 0 \forall x_1, x_2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow ac \geq \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

37

Passività

- Quindi valgono le seguenti condizioni di passività

- matrice **R**:

$$r_{11} \geq 0 \quad r_{22} \geq 0 \quad r_{11}r_{22} \geq \left(\frac{r_{12} + r_{21}}{2}\right)^2$$

- matrice **G**:

$$g_{11} \geq 0 \quad g_{22} \geq 0 \quad g_{11}g_{22} \geq \left(\frac{g_{12} + g_{21}}{2}\right)^2$$

- matrice **H**:

$$h_{11} \geq 0 \quad h_{22} \geq 0 \quad h_{11}h_{22} \geq \left(\frac{h_{12} + h_{21}}{2}\right)^2$$

- matrice **H'**:

$$h'_{11} \geq 0 \quad h'_{22} \geq 0 \quad h'_{11}h'_{22} \geq \left(\frac{h'_{12} + h'_{21}}{2}\right)^2$$

38

Trasformatore ideale

- Le equazioni del trasformatore ideale possono essere espresse intermini di matrice ibrida o di matrice di trasmissione (dirette o inverse)

Parametri di trasmissione

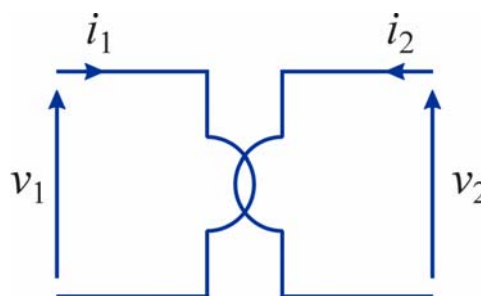
$$v_1 = Kv_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{K}i_2$$

Parametri ibridi

$$v_1 = Kv_2$$

$$i_2 = -Ki_1$$



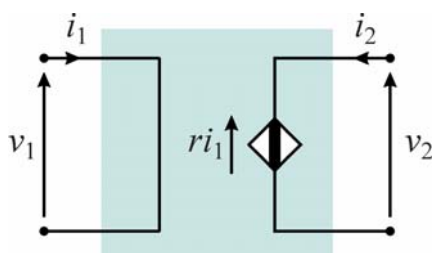
$K =$ **rapporto di trasformazione** o **rapporto spire**

- Per il trasformatore ideale non è possibile definire le matrici **R** e **G**
- Vale la relazione $h_{12} = -h_{21} = K$
 - ➔ Il trasformatore ideale è un componente reciproco (ma non simmetrico, se $K \neq 1$)

39

Generatori dipendenti

Generatore di tensione controllato in corrente

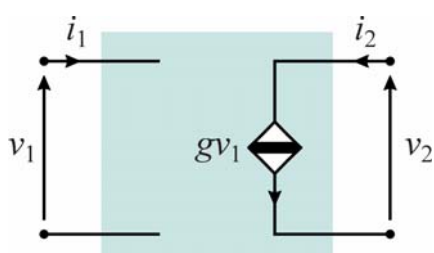


$$v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di resistenza

$$r_{11} = r_{12} = r_{22} = 0 \quad r_{21} = r$$

Generatore di corrente controllato in tensione



$$i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

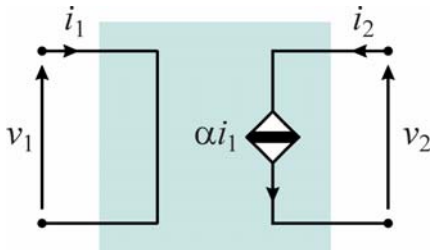
Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri di conduttanza

$$g_{11} = g_{12} = g_{22} = 0 \quad g_{21} = g$$

40

Generatori dipendenti

Generatore di corrente controllato in corrente

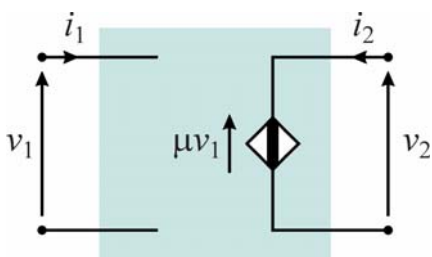


$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ i_2 &= \alpha i_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (diretti)

$$h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0 \quad h_{21} = \alpha$$

Generatore di tensione controllato in tensione



$$\begin{aligned} i_1 &= 0 \\ v_2 &= \mu v_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Caso particolare di rappresentazione in termini di parametri ibridi (inversi)

$$h'_{11} = h'_{12} = h'_{22} = 0 \quad h'_{21} = \mu$$

41

Generatori dipendenti

- I quattro tipi di generatori dipendenti corrispondono a matrici \mathbf{R} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e \mathbf{H}' con il solo elemento 21 diverso da zero
 - ➔ I generatori dipendenti sono componenti non reciproci
- Ciascun tipo di generatore ammette una sola tra le matrici \mathbf{R} , \mathbf{G} , \mathbf{H} e \mathbf{H}'
- Si può verificare che l'unica altra matrice definita in tutti e quattro i casi è la matrice \mathbf{T}
- I doppi bipoli (e più in generale i componenti N -porte) lineari resistivi possono essere rappresentati mediante circuiti equivalenti formati da generatori dipendenti e resistori
 - ➔ In questo modo è possibile estendere i metodi generali di analisi (maglie, nodi, anelli) ai circuiti che contengono doppi bipoli (o, più in generale, N -porte)

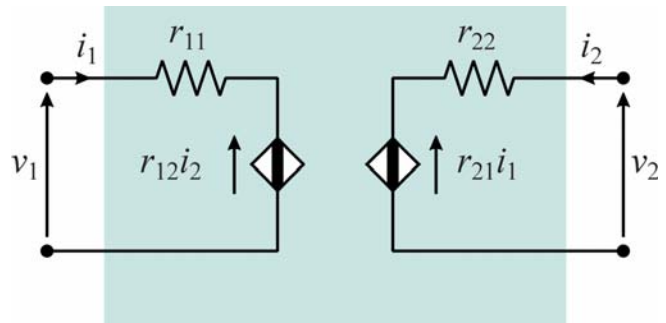
42

Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Matrice di resistenza

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

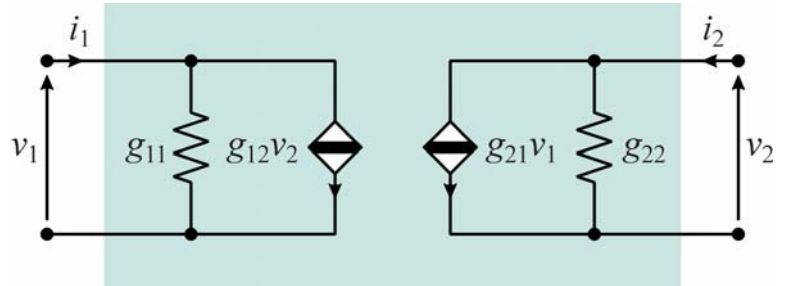
$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



Matrice di conduttanza

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$

$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$



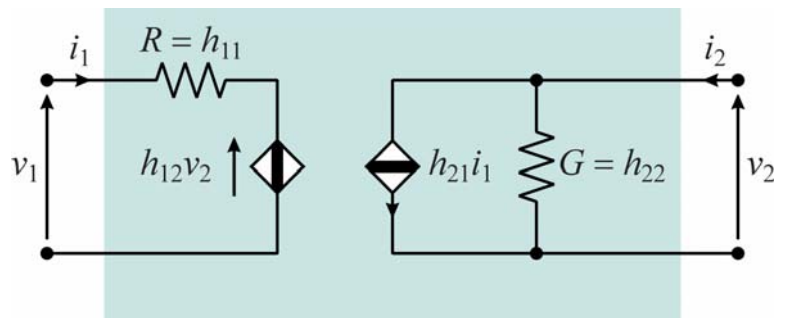
43

Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Matrice H

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

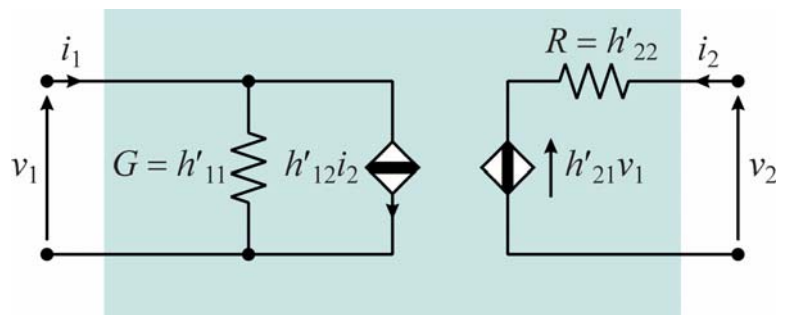
$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$



Matrice H'

$$i_1 = h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2$$

$$v_2 = h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2$$



44

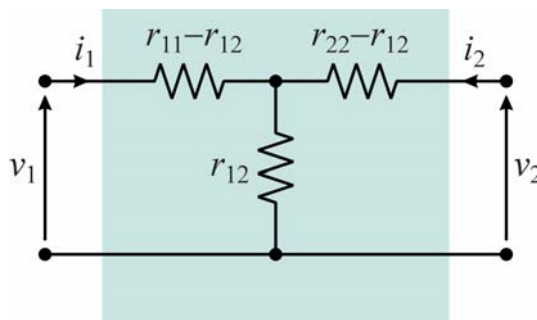
Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Circuiti equivalenti a T

Doppio bipolo reciproco

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

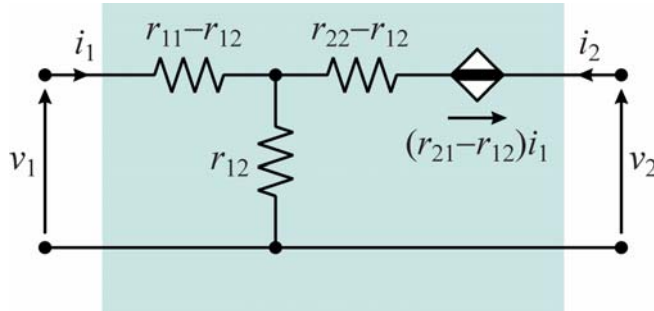
$$v_2 = r_{12}i_1 + r_{22}i_2$$



Doppio bipolo non reciproco

$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



45

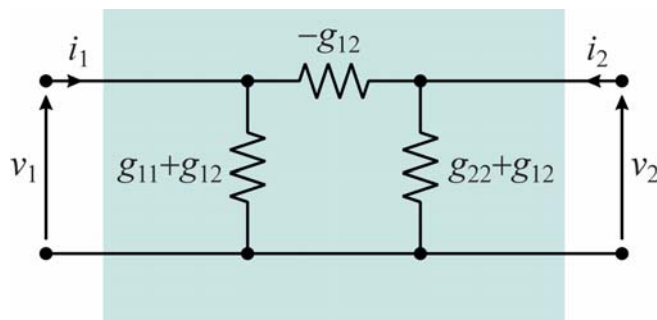
Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari

Circuiti equivalenti a Π

Doppio bipolo reciproco

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$

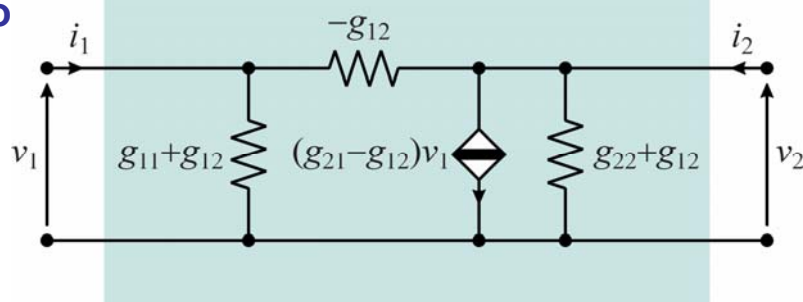
$$i_2 = g_{12}v_1 + g_{22}v_2$$



Doppio bipolo non reciproco

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$$

$$i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$$

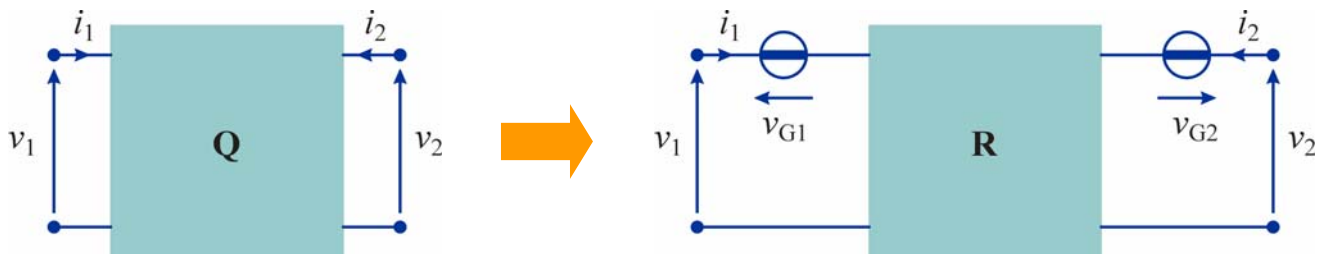


46

Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione comandata in corrente

- **Ipotesi:**
 - ◆ Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
 - ◆ Q è comandato in corrente
- ➔ **Circuito equivalente:**
 - ◆ v_{G1}, v_{G2} = tensioni a vuoto alle porte di Q
(v_1 e v_2 per $i_1 = i_2 = 0$)
 - ◆ R = matrice di resistenza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti

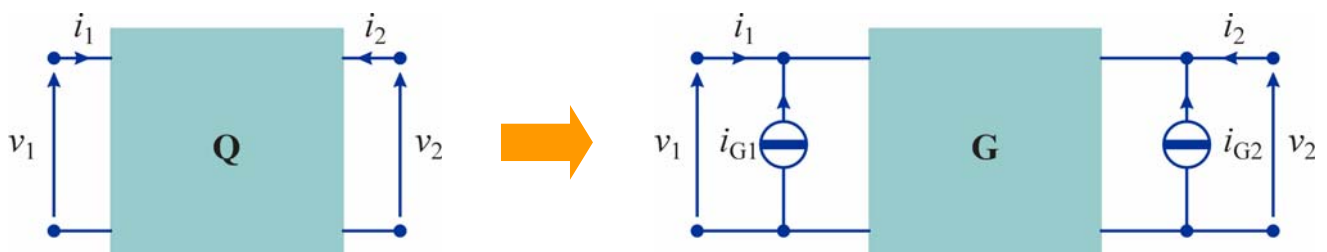


47

Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione comandata in tensione

- **Ipotesi:**
 - ◆ Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
 - ◆ Q è comandato in tensione
- ➔ **Circuito equivalente:**
 - ◆ i_{G1}, i_{G2} = correnti di cortocircuito alle porte di Q
($-i_1$ e $-i_2$ per $v_1 = v_2 = 0$)
 - ◆ G = matrice di conduttanza del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti

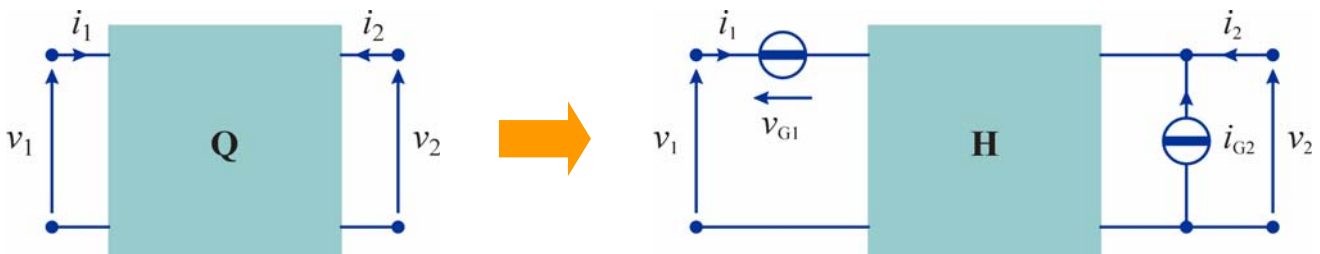


48

Teoremi di rappresentazione dei doppi bipoli

Rappresentazione ibrida (diretta)

- **Ipotesi:**
 - ◆ Q = doppio bipolo formato da componenti resistivi lineari e generatori indipendenti
 - ◆ Q ammette la rappresentazione ibrida (diretta)
- ➔ **Circuito equivalente:**
 - ◆ $v_{G1} = v_1$ per $i_1 = 0, v_2 = 0$
 - ◆ $i_{G2} = -i_2$ per $i_1 = 0, v_2 = 0$
 - ◆ \mathbf{H} = matrice ibrida (diretta) del doppio bipolo ottenuto da Q azzerando i generatori indipendenti



49

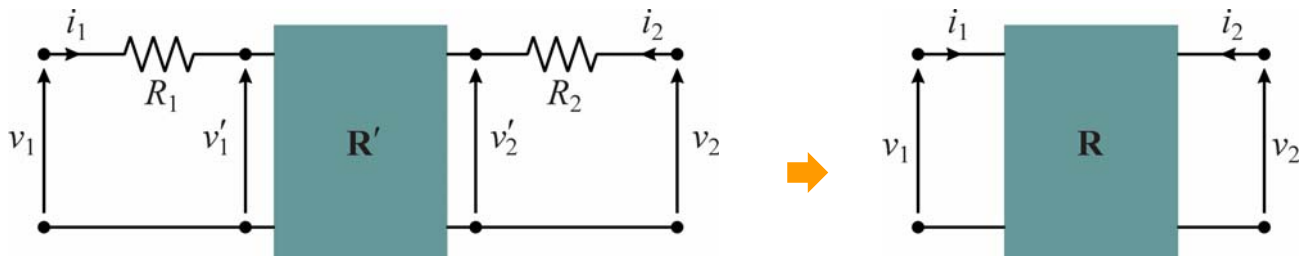
Collegamenti di bipoli e doppi bipoli

- Di seguito si prenderanno in esame alcuni casi in cui un doppio bipolo è ottenuto collegando due doppi bipoli oppure collegando un doppio bipolo con uno più bipoli
- In tutti i casi si sottintende che siano soddisfatte le seguenti ipotesi (che nei casi pratici dovranno sottoposte a verifica)
 - ◆ I collegamenti considerati sono leciti (cioè non danno origine a circuiti impossibili o indeterminati)
 - ◆ Le matrici utilizzate per rappresentare i doppi bipoli sono definite
 - ◆ Nel caso di doppi bipoli non intrinseci, i componenti, collegati nei modi considerati, si comportano effettivamente come doppi bipoli

50

Resistori in serie alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di resistenza



$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r'_{11} + R_1 & r'_{12} \\ r'_{21} & r'_{22} + R_2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = R_1 i_1 + v'_1 = (R_1 + r'_{11}) i_1 + r'_{12} i_2$$

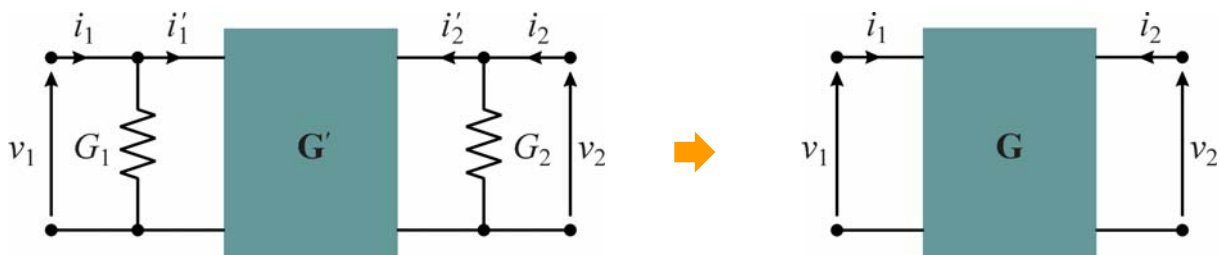
$$v_2 = R_2 i_2 + v'_2 = r'_{21} i_1 + (R_2 + r'_{22}) i_2$$

- Le resistenze in serie alle porte si sommano alle resistenze di ingresso

51

Resistori in parallelo alle porte

- In questo caso conviene utilizzare i parametri di conduttanza



$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g'_{11} + G_1 & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} + G_2 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = G_1 v_1 + i'_1 = (G_1 + g'_{11}) v_1 + g'_{12} v_2$$

$$i_2 = G_2 v_2 + i'_2 = g'_{21} v_1 + (G_2 + g'_{22}) v_2$$

- Le conduttanze dei resistori in parallelo alle porte si sommano alle conduttanze di ingresso

52

Doppi bipoli in serie

- LKI:**

$$i_1 = i_{1a} = i_{1b} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{i}_a = \mathbf{i}_b$$

$$i_2 = i_{2a} = i_{2b}$$

- LKV:**

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$$

$$v_2 = v_{2a} + v_{2b}$$

- Componenti:**

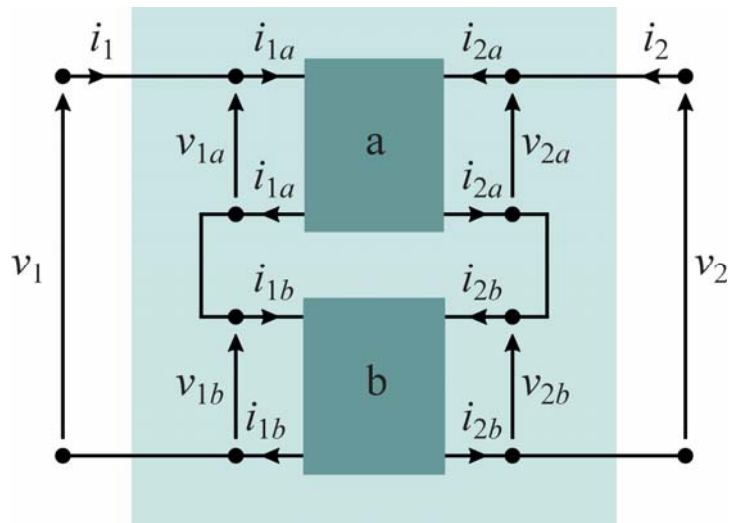
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{R}_a \mathbf{i}_a$$

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = (\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b) \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b$$

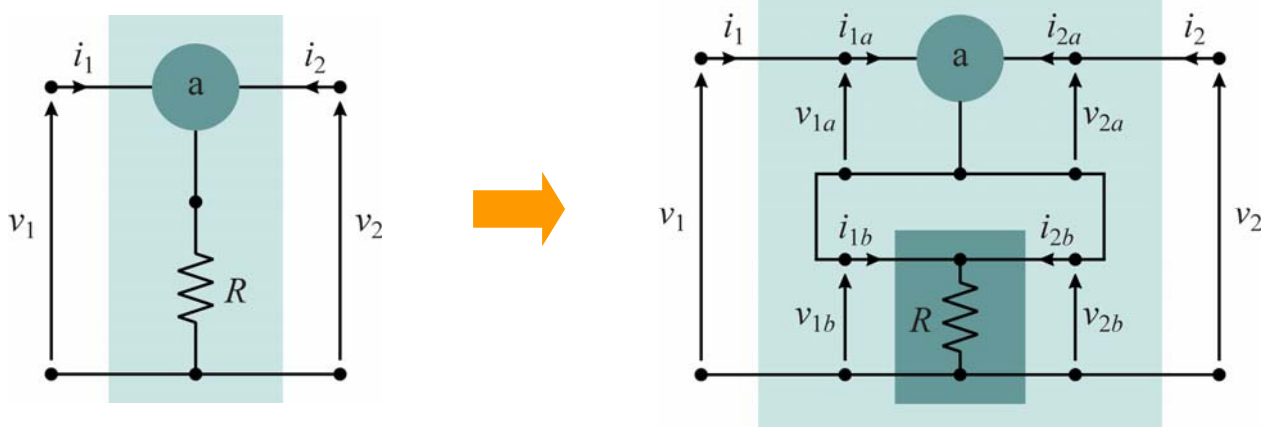
- La matrice \mathbf{R} del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di resistenza dei due doppi bipoli



53

Resistore in serie al terminale comune di un tripolo

- Questo collegamento può essere visto come un caso particolare di collegamento in serie di doppi bipoli



$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} r_{11} + R & r_{12} + R \\ r_{21} + R & r_{22} + R \end{bmatrix}$$

- R si somma a tutti gli elementi della matrice \mathbf{R}_a

54

Doppi bipoli in parallelo

- LKV:**

$$v_1 = v_{1a} = v_{1b} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$$

$$v_2 = v_{2a} = v_{2b}$$

- LKI:**

$$i_1 = i_{1a} + i_{1b} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b$$

$$i_2 = i_{2a} + i_{2b}$$

- Componenti:**

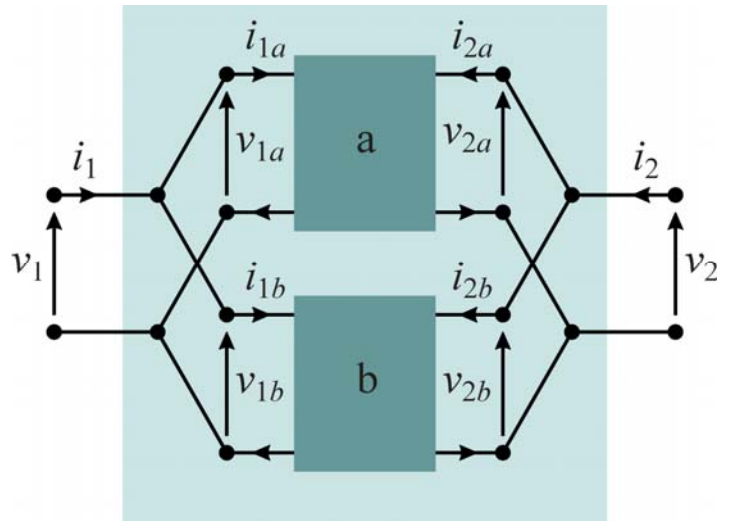
$$\mathbf{i}_a = \mathbf{G}_a \mathbf{v}_a$$

$$\mathbf{i}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{v}_b$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = (\mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b) \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b$$

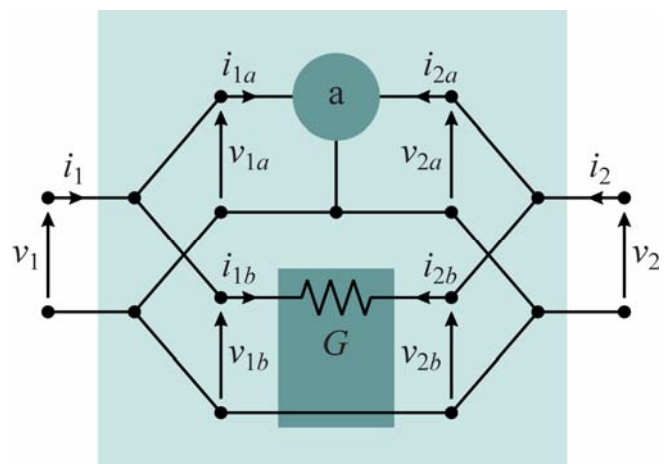
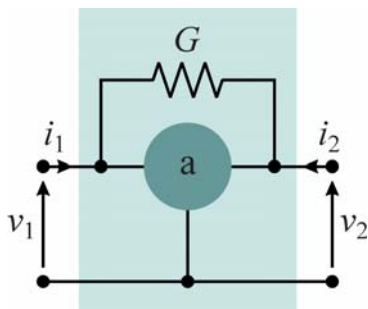
➔ La matrice \mathbf{G} del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici di conduttanza dei due doppi bipoli



55

Resistore collegato tra le due porte

➔ Questo può essere visto come un caso particolare di collegamento in parallelo di doppi bipoli



$$\mathbf{G}_a = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} g_{11} + G & g_{12} - G \\ g_{21} - G & g_{22} + G \end{bmatrix}$$

➔ G si somma agli elementi della diagonale principale e si sottrae dagli elementi della diagonale secondaria della matrice \mathbf{G}_a

56

Collegamento serie-parallelo

- LKV:**

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b}$$

$$v_2 = v_{2a} = v_{2b}$$

- LKI:**

$$i_1 = i_{1a} = i_{1b}$$

$$i_2 = i_{2a} + i_{2b}$$

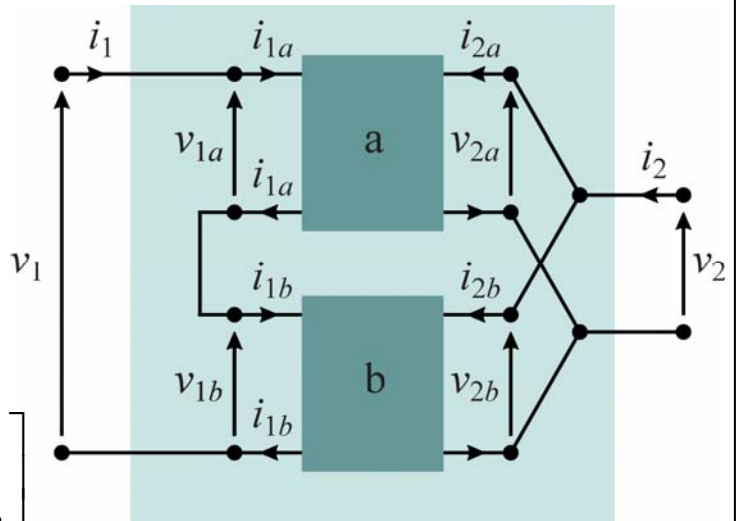
- Componenti:**

$$\begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_a \begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_b \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b) \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_b$$

➔ La matrice \mathbf{H} del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride dei due doppi bipoli



57

Collegamento parallelo-serie

- LKV:**

$$v_1 = v_{1a} = v_{1b}$$

$$v_2 = v_{2a} + v_{2b}$$

- LKI:**

$$i_1 = i_{1a} + i_{1b}$$

$$i_2 = i_{2a} = i_{2b}$$

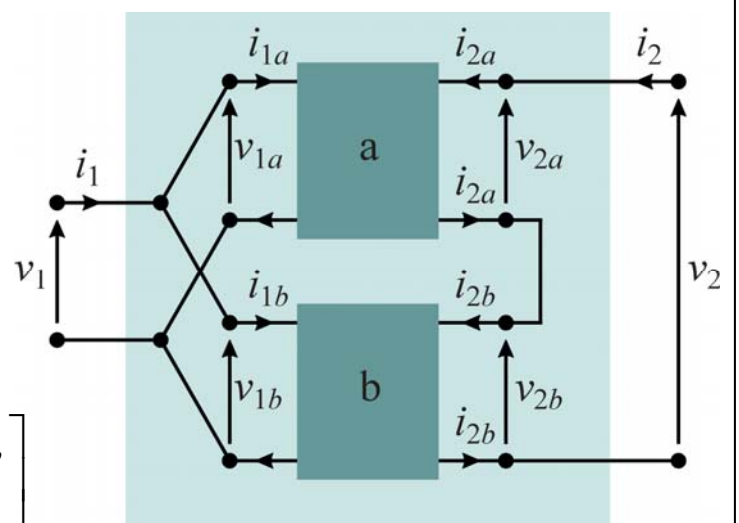
- Componenti:**

$$\begin{bmatrix} i_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_a \begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{2a} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_{1b} \\ v_{2b} \end{bmatrix} = \mathbf{H}'_b \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

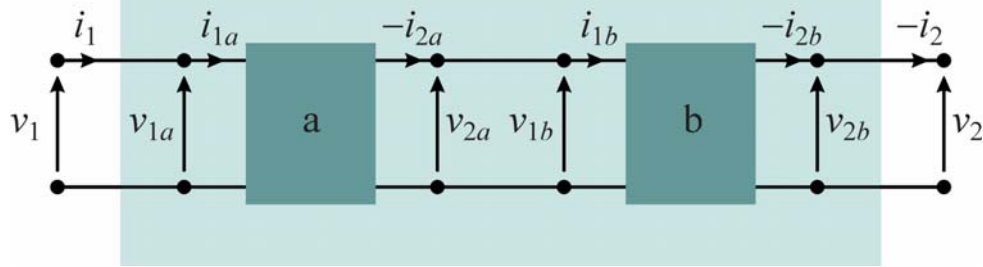
$$\Rightarrow \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_a + \mathbf{H}'_b$$

➔ La matrice \mathbf{H}' del doppio bipolo risultante è data dalla somma delle matrici ibride inverse dei due doppi bipoli



58

Doppi bipoli in cascata



- In questo caso conviene utilizzare le matrici di trasmissione

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

- Le tensioni e le correnti alla porta comune coincidono

$$v_{1b} = v_{2a} \quad i_{1b} = -i_{2a}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{T}_b}$$

- La matrice \mathbf{T} del doppio bipolo risultante è data dal prodotto delle matrici di trasmissione dei due doppi bipoli

59

N-porte resistivi

- Componenti con $2N$ terminali che costituiscono N porte

- per ciascuna porta la corrente entrante in uno dei terminali è uguale a quella uscente dall'altro

- Relazioni costitutive

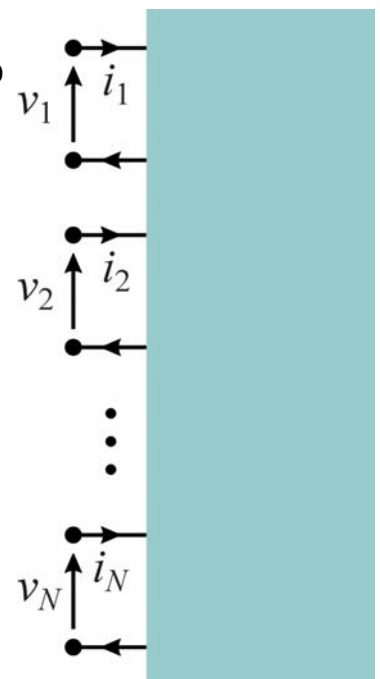
$$f_1[v_1, \dots, v_N, i_1, \dots, i_N, t] = 0$$

⋮

$$f_N[v_1, \dots, v_N, i_1, \dots, i_N, t] = 0$$

f_1, \dots, f_N funzioni generiche

- Se il tempo non compare esplicitamente nelle funzioni il componente è detto **tempo-invariante**



60

N-porte lineari tempo-invarianti

- Nel caso più generale le equazioni costitutive di un N -porte **lineare** e **tempo-invariante** sono del tipo

$$a_{11}v_1 + \dots + a_{1N}v_N + b_{11}i_1 + \dots + b_{1N}i_N = 0$$

\vdots

$$a_{N1}v_1 + \dots + a_{NN}v_N + b_{N1}i_1 + \dots + b_{NN}i_N = 0$$

- Queste equazioni possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix}$$

61

Rappresentazioni di un N-porte lineare

- Parametri di resistenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \dots & r_{NN} \end{bmatrix}$$

- Parametri di conduttanza**

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix}$$

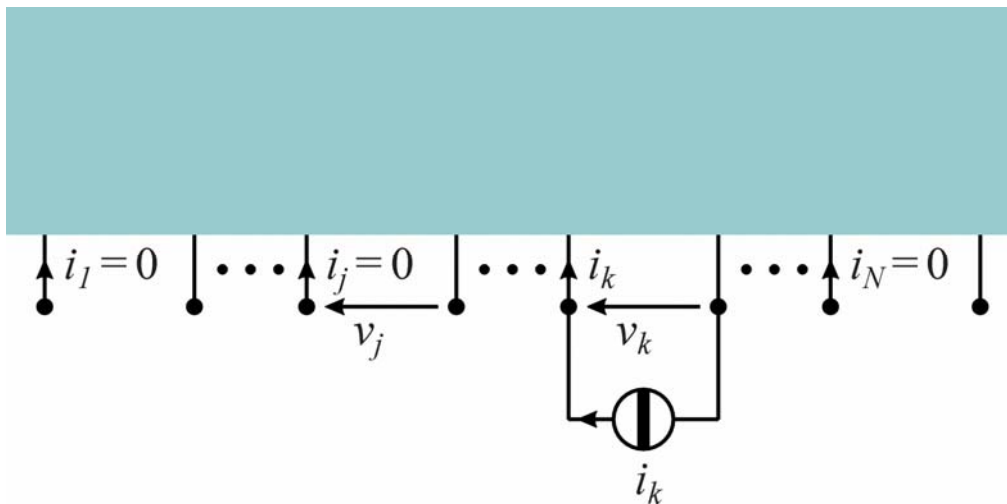
- Se l' N -porte ammette entrambe le rappresentazioni, si ha

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \quad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

- Le altre possibili rappresentazioni sono dette **ibride**

62

Significato dei parametri di resistenza

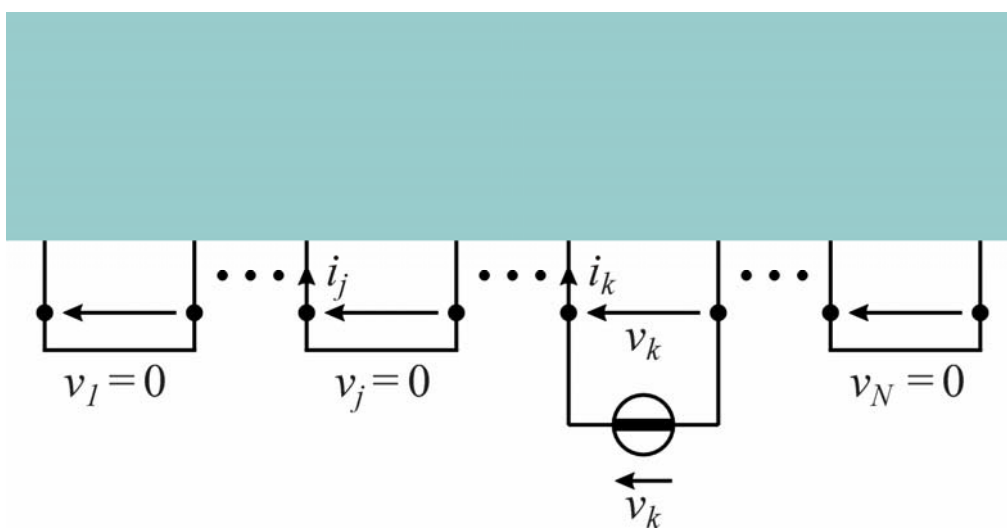


$$r_{jk} = \left. \frac{v_j}{i_k} \right|_{i_h=0 \forall h \neq k}$$

Rapporto tra la tensione alla porta j e la corrente alla porta k quando tutte le porte diverse dalla k -esima sono a vuoto

63

Significato dei parametri di conduttanza



$$g_{jk} = \left. \frac{i_j}{v_k} \right|_{v_h=0 \forall h \neq k}$$

Rapporto tra la corrente alla porta j e la tensione alla porta k quando tutte le porte diverse dalla k -esima sono in cortocircuito

64

Reciprocità

- Si dice che un N -porte è reciproco se, dati due generici insiemi di tensioni e correnti v'_k, i'_k e v''_k, i''_k ($k=1, \dots, N$) compatibili con le sue equazioni caratteristiche, è verificata la relazione

$$\sum_{k=1}^N v'_k i''_k = \sum_{k=1}^N v''_k i'_k$$

- ➔ Se il componente ammette la matrice di resistenza vale la relazione

$$r_{jk} = r_{kj} \quad \forall k \neq j$$

- ➔ Se il componente ammette la matrice di conduttanza vale la relazione

$$g_{jk} = g_{kj} \quad \forall k \neq j$$

65

Teorema di reciprocità

- *Un N -porte ottenuto connettendo componenti resistivi reciproci è reciproco*

Dimostrazione

- **Premessa:** per un resistore la condizione di reciprocità è sempre verificata, infatti

$$\begin{aligned} v' = Ri' & \Rightarrow v'i'' = Ri'i'' \\ v'' = Ri'' & \Rightarrow v''i' = Ri''i' \end{aligned} \Rightarrow v'i'' = v''i'$$

- Si considerano due condizioni di funzionamento dell' N -porte, in cui le porte vengono collegate a due insiemi arbitrari di N bipoli, scelti con l'unico vincolo che i circuiti ottenuti dal collegamento ammettano soluzione unica
- Si indica con l il numero totale di lati dei circuiti così ottenuti e si attribuiscono i numeri da 1 a N ai bipoli collegati alle porte

66

Teorema di reciprocità

Dimostrazione

- Si indicano le tensioni e le correnti relative ai due funzionamenti con $v'_1, \dots, v'_l, i'_1, \dots, i'_l$ e $v''_1, \dots, v''_l, i''_1, \dots, i''_l$

- Per il teorema di Tellegen si ha

$$\sum_{k=1}^N v'_k i''_k + \sum_{k=N+1}^l v'_k i''_k = 0 \quad \sum_{k=1}^N v''_k i'_k + \sum_{k=N+1}^l v''_k i'_k = 0$$

- Se l' N -porte è formato da componenti reciproci, i secondi addendi di queste equazioni sono uguali

$$\sum_{k=N+1}^l v'_k i''_k = \sum_{k=N+1}^l v''_k i'_k$$

- ➔ Questo richiede che siano uguali i primi addendi, cioè che le tensioni e le correnti dell' N -polo risultante soddisfino la condizione di reciprocità

$$\sum_{k=1}^N v'_k i''_k = \sum_{k=1}^N v''_k i'_k$$

67

N-porte dinamici

- Per una rete lineare dinamica a N porte le relazioni tra le correnti e le tensioni alle porte sono di tipo differenziale lineare omogeneo
- In condizioni di regime sinusoidale, applicando la trasformata di Steinmetz si ottengono relazioni lineari algebriche omogenee tra i fasori delle tensioni $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_N$ e delle correnti $\mathbf{I}_1 \dots \mathbf{I}_N$ del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N1} & \cdots & \mathbf{a}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \cdots & \mathbf{b}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{N1} & \cdots & \mathbf{b}_{NN} \end{bmatrix}$$

- Le equazioni hanno la stessa forma delle equazioni di un N -porte resistivo, ma in questo caso le matrici hanno coefficienti complessi dipendenti dalla pulsazione

68

Matrici di impedenza e di ammettenza

- Se il componente è comandato in corrente oppure in tensione è possibile rappresentarlo mediante **parametri di impedenza o di ammettenza** che costituiscono l'estensione al caso dei regimi sinusoidale dei parametri di resistenza e di conduttanza

- Matrice di impedenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \cdots & \mathbf{z}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{N1} & \cdots & \mathbf{z}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_{jk} = \left. \frac{\mathbf{V}_j}{\mathbf{I}_k} \right|_{\mathbf{I}_h=0 \forall h \neq k}$$

- Matrice di ammettenza**

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \cdots & \mathbf{y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{N1} & \cdots & \mathbf{y}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_{jk} = \left. \frac{\mathbf{I}_j}{\mathbf{V}_k} \right|_{\mathbf{V}_h=0 \forall h \neq k}$$

69

Matrici ibride e matrici di trasmissione

- Per i componenti a due porte si possono estendere al regime sinusoidale le definizioni delle matrici ibride e di trasmissione (in questo caso i coefficienti sono complessi e dipendono da ω)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice ibrida}$$

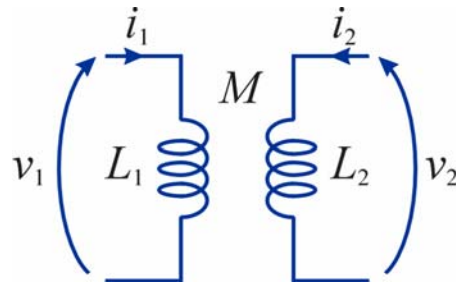
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}'_{11} & \mathbf{h}'_{12} \\ \mathbf{h}'_{21} & \mathbf{h}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice ibrida inversa}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di trasmissione}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice di trasmissione inversa}$$

70

Induttori accoppiati in regime sinusoidale



$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\
 v_2(t) &= M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \mathbf{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \\
 \mathbf{V}_2 &= j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2
 \end{aligned}$$

- Le equazioni sono un caso particolare di rappresentazione mediante di matrice di impedenza

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Relazioni tra le rappresentazioni dei doppi bipoli

	Z	Y	H	H'	T	T'
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta Y} & \frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta Z} & \frac{z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ \frac{B'}{\Delta T'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta Y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ \frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ \frac{A'}{\Delta T'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
H'	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta Z}{z_{11}} \\ \frac{z_{11}}{z_{11}} & \frac{z_{11}}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \\ \frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{y_{22}}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \\ \frac{\Delta H}{\Delta H} & \frac{\Delta H}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{h'_{12}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{A'}{D'} \\ \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{D'}{D'} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ \frac{z_{21}}{z_{21}} & \frac{z_{21}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ \frac{y_{21}}{y_{21}} & \frac{y_{21}}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta Y}{\Delta Y} & -\frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{21}} & \frac{h_{21}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{21}} & \frac{\Delta H'}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{21}} & \frac{h'_{21}}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{A'} & \frac{B'}{A'} \\ \frac{\Delta T'}{A'} & \frac{\Delta T'}{A'} \\ \frac{\Delta T'}{A'} & \frac{\Delta T'}{A'} \end{matrix}$
T'	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{11}}{z_{21}} \\ \frac{z_{21}}{z_{21}} & \frac{z_{21}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ \frac{y_{12}}{y_{12}} & \frac{y_{12}}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta Y}{\Delta Y} & -\frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{12}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{12}} & -\frac{1}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ \frac{h'_{12}}{h'_{12}} & \frac{h'_{12}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \\ \frac{\Delta T}{\Delta T} & \frac{\Delta T}{\Delta T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$$\Delta M = \det(\mathbf{M})$$

Ogni riga riporta le espressioni dei coefficienti di una matrice in funzione dei coefficienti delle matrici indicate nelle intestazioni delle colonne