Circuiti dinamici

Equazioni di stato

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 9-11-2013)

Relazioni tra stato ingressi e risposte

- **Ipotesi**: circuito dinamico lineare non degenere

➡ Lo stato può essere rappresentato mediante le tensioni di tutti i condensatori e le correnti di tutti gli induttori

➡ Lo stato all'istante t_0 assieme all'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$ determina l'evoluzione dello stato per $t \geq t_0$

➡ Ad ogni istante t le risposte sono determinate dai valori all'istante t stesso delle variabili di stato e degli ingressi

Definizioni

- **Vettore di stato:** vettore $\mathbf{x}(t)$ contenente le variabili di stato indipendenti (dimensione N)
- **Vettore degli ingressi:** vettore $\mathbf{u}(t)$ contenente le tensioni e le correnti impresse dai generatori indipendenti (dimensione N_I)
- **Vettore delle risposte:** vettore $\mathbf{y}(t)$ contenente le tensioni e le correnti di cui si vuole determinare l'andamento (dimensione N_R)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{N_I}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{N_R}(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni di un circuito dinamico non degenere

- Le proprietà precedentemente enunciate corrispondono alla possibilità di esprimere le equazioni di un circuito dinamico lineare non degenere nella forma canonica

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$ **Equazioni di stato**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$ **Equazioni di uscita**

$\mathbf{A} =$ matrice $N \times N$

$\mathbf{B} =$ matrice $N \times N_I$

$\mathbf{C} =$ matrice $N_R \times N$

$\mathbf{D} =$ matrice $N_R \times N_I$

$N =$ numero delle variabili di stato indipendenti (ordine del circuito)

$N_I =$ numero degli ingressi

$N_R =$ numero delle risposte

Equazioni di uscita (1)

- *Ad ogni istante t la risposta è determinata dai valori all'istante t stesso delle variabili di stato e degli ingressi*

Dimostrazione:

- Se è noto l'andamento delle variabili di stato si può sostituire
  - ogni condensatore con un generatore di tensione
  - ogni induttore con un generatore di corrente
- Il circuito così ottenuto è detto **circuito resistivo associato**
- Il circuito è non degenere ➡ il circuito resistivo associato ammette una e una sola soluzione
- Teorema di sostituzione ➡ la soluzione del circuito dinamico coincide con quella del circuito resistivo associato

➡ Le risposte all'istante t dipendono dai valori all'istante t stesso delle grandezze impresse dei generatori indipendenti del circuito resistivo associato (variabili di stato e ingressi)

Equazioni di uscita (2)

- Il circuito resistivo associato è lineare ➡ le risposte sono combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_i} d_{ij} u_j(t) \qquad i = 1, \ldots, N_R$$

- Queste equazioni possono essere scritte sinteticamente nella forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N_R 1} & \cdots & c_{N_R N} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1N_I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N_R 1} & \cdots & d_{N_R N_I} \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato (1)

- *Lo stato all'istante t_0 assieme all'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$ determina l'evoluzione dello stato per $t \geq t_0$*

Dimostrazione

- Come casi particolari di risposte, si possono esprimere in funzione delle variabili di stato e degli ingressi le **variabili coniugate**

Componente	Variabile di stato x	Variabile coniugata $\hat{x}$
Condensatore	Tensione	Corrente
Induttore	Corrente	Tensione

➡ Combinando queste espressioni con le equazioni dei componenti dinamici si ottiene un sistema di N equazioni differenziali nelle N incognite $x_k(t)$ (**equazioni di stato**) da cui si possono ricavare gli andamenti per $t \geq t_0$ delle variabili di stato, noti i loro valori all'istante $t = t_0$ e l'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$

Equazioni di stato (2)

- Le variabili coniugate (essendo un caso particolare di risposte del circuito) possono essere espresse come combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi

$$\hat{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{c}_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_i} \hat{d}_{ij} u_j(t) \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Le variabili coniugate sono legate alle variabili di stato anche dalle relazioni costitutive dei componenti dinamici, cioè da equazioni del tipo

$$\hat{x}_i(t) = K_i \frac{dx_i}{dt} \qquad \left(\begin{aligned} i_{Ci}(t) &= C_i \frac{dv_{Ci}}{dt} \\ v_{Li}(t) &= L_i \frac{di_i}{dt} \end{aligned} \right)$$

Equazioni di stato (3)

- Combinando le due espressioni delle variabili coniugate si ottengono le equazioni differenziali (**equazioni di stato**)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_I} b_{ij} u_j(t) \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\left(a_{ij} = \frac{\hat{c}_{ij}}{K_i} \quad b_{ij} = \frac{\hat{d}_{ij}}{K_i} \right)$$

- Le equazioni di stato possono essere poste nella forma

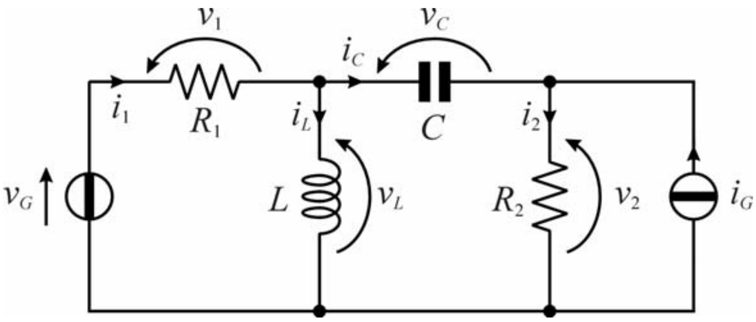
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N_I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN_I} \end{bmatrix}$$

Scrittura delle equazioni di stato e di uscita

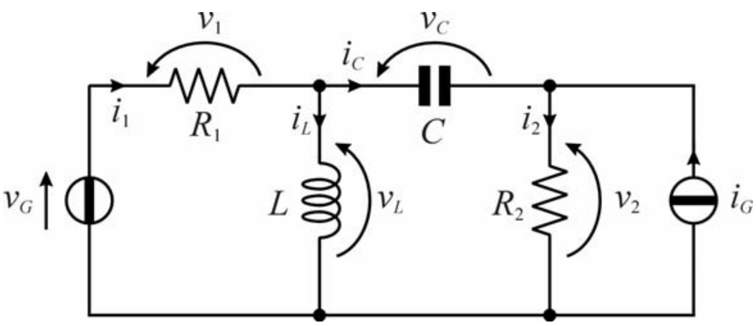
- Si costruisce il circuito resistivo associato sostituendo
  - i condensatori con generatori di tensione
  - gli induttori con generatori di corrente
- Trattando le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori come quantità note, si determinano le espressioni delle variabili coniugate
  - correnti dei condensatori
  - tensioni degli induttori
- Allo stesso modo si determinano le espressioni delle altre eventuali risposte richieste
  - Le espressioni delle risposte costituiscono le equazioni di uscita
- Si inseriscono le espressioni delle variabili coniugate nelle equazioni caratteristiche dei componenti dinamici
  - In questo modo si ottiene un sistema di N equazioni differenziali del primo ordine che costituiscono le equazioni di stato

Esempio (1)



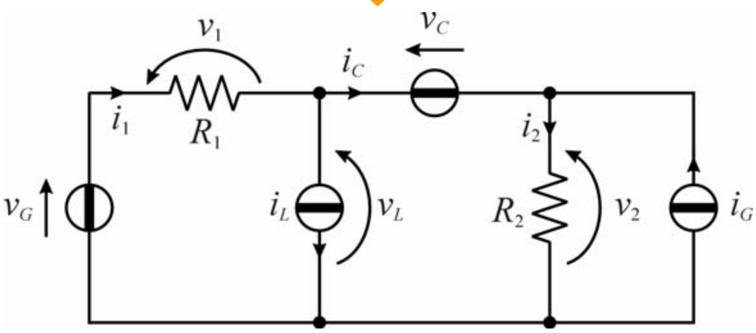
Si vogliono scrivere le equazioni di stato del circuito e le equazioni di uscita relative alle risposte $v_1(t)$ e $i_2(t)$

Esempio (2)



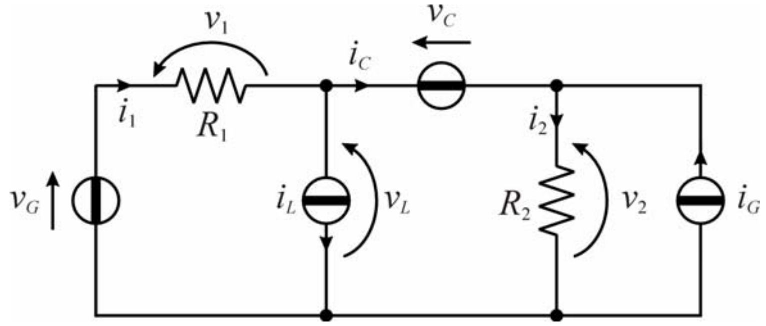
Induttore
↓
Generatore di corrente

Condensatore
↓
Generatore di tensione



Circuito resistivo associato

Esempio (3)



Analisi del circuito resistivo associato

Variabili coniugate

$$\begin{cases} v_L = -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{R_2}{R_1+R_2}v_G + \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_G \\ i_C = -\dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{1}{R_1+R_2}v_G - \dfrac{R_2}{R_1+R_2}i_G \end{cases}$$

Risposte

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_G - \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_G \\ i_2 = -\dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{1}{R_1+R_2}v_G + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_G \end{cases}$$

Esempio (4)

- **Equazioni di stato**

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}\left(-\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{R_2}{R_1+R_2}v_G + \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_G\right) \\ \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C}\left(-\dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{1}{R_1+R_2}v_G - \dfrac{R_2}{R_1+R_2}i_G\right) \end{cases}$$

- **Equazioni di uscita**

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v_G - \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_G \\ i_2 = -\dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_L - \dfrac{1}{R_1+R_2}v_C + \dfrac{1}{R_1+R_2}v_G + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}i_G \end{cases}$$

Esempio (5)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_G(t) \\ i_G(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} & \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ -\frac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1+R_2)} & \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1+R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{1}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}$$

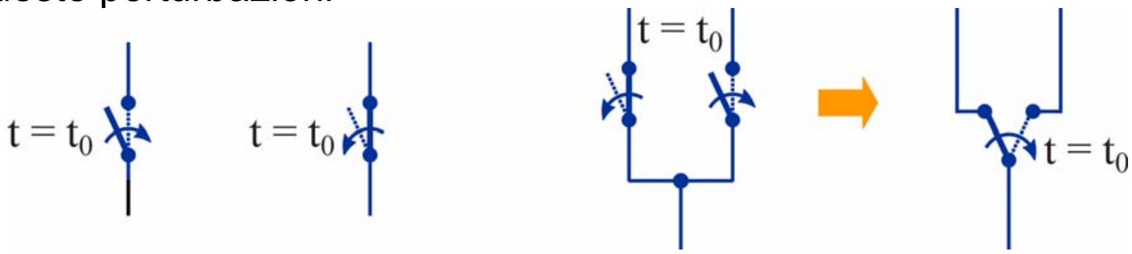
Nota

- La tensioni e le correnti dei generatori che sostituiscono i condensatori e gli induttori devono essere sempre orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
- Solo in questo modo il legame tra variabili di stato e variabili coniugate può essere scritto nella forma

$$i_{Ci}(t) = C_i \frac{dv_{Ci}}{dt}$$
$$v_{Li}(t) = L_i \frac{di_i}{dt}$$

Condizioni iniziali

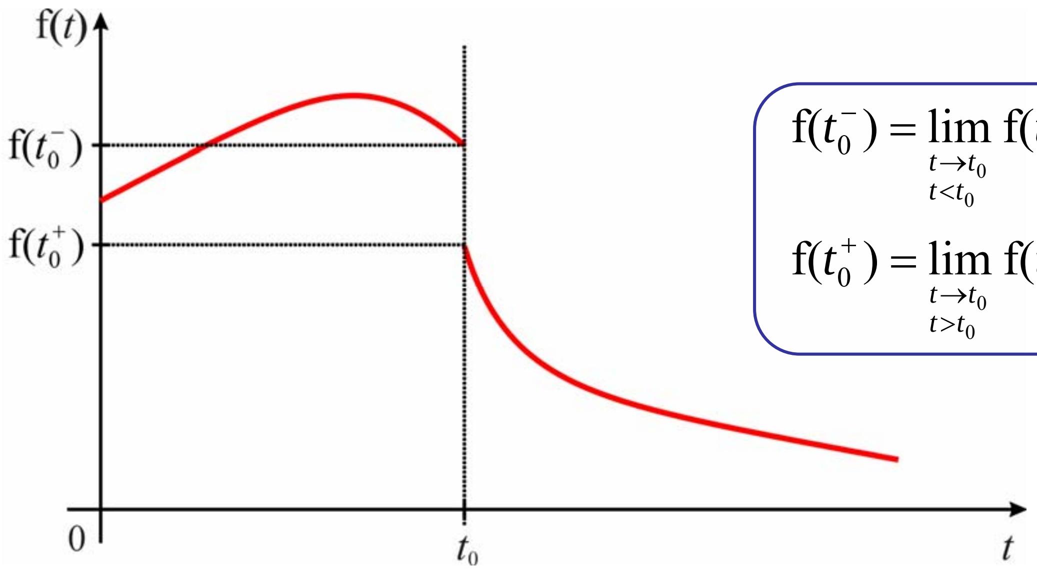
- Per determinare la risposta di un circuito dinamico, si devono associare alle sue equazioni delle opportune condizioni iniziali
- In genere le condizioni iniziali non sono direttamente disponibili, ma devono essere determinate a partire da informazioni di tipo diverso
- Spesso è noto il comportamento del circuito prima di un istante iniziale t_0 in corrispondenza del quale si ha una perturbazione dovuta alla commutazione di uno o più interruttori o a discontinuità delle grandezze impresse dei generatori
- Per determinare le condizioni iniziali si devono studiare gli effetti prodotti da queste perturbazioni



Interruttori **Deviatore**

Discontinuità

- All'istante t_0 alcune tensioni o correnti nel circuito possono presentare una **discontinuità di prima specie** (cioè un "salto")
  - ➡ il loro valore per $t = t_0$ non è definito
- In questo caso si definiscono i valori relativi agli istanti t_0^- e t_0^+



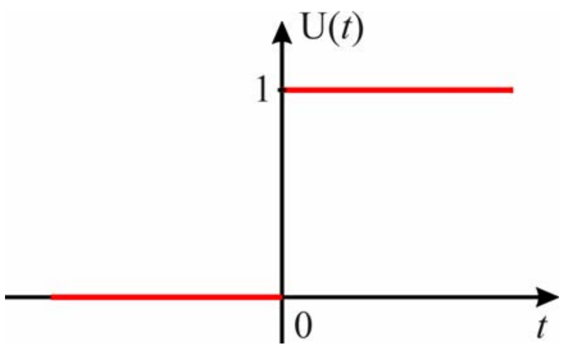
$$f(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$$

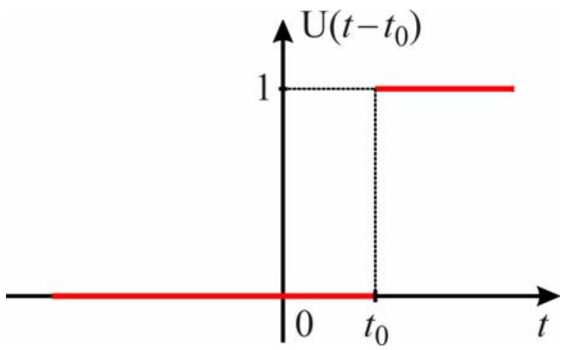
$$f(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t)$$

Gradino unitario

- Per esprimere in forma analitica funzioni con discontinuità di prima specie si può utilizzare la funzione **gradino unitario**

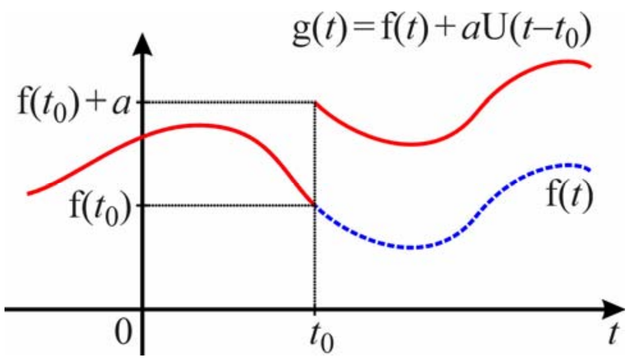
$$\mathrm{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



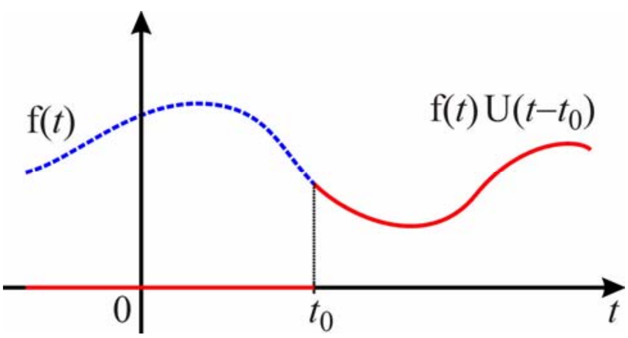


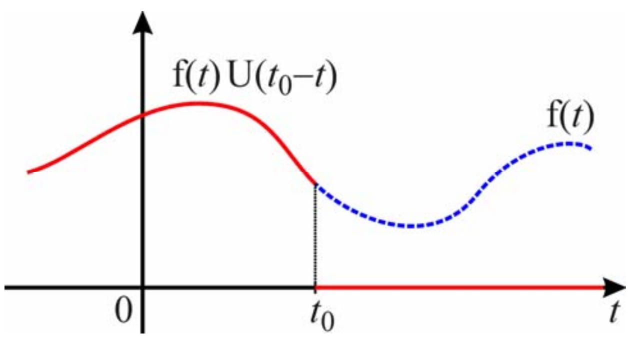
Gradino unitario - Esempi

- Una funzione $\mathrm{g}(t)$ discontinua per $t = t_0$ può essere espressa come somma di una funzione continua $\mathrm{f}(t)$ e di un termine proporzionale a un gradino unitario $\mathrm{U}(t - t_0)$

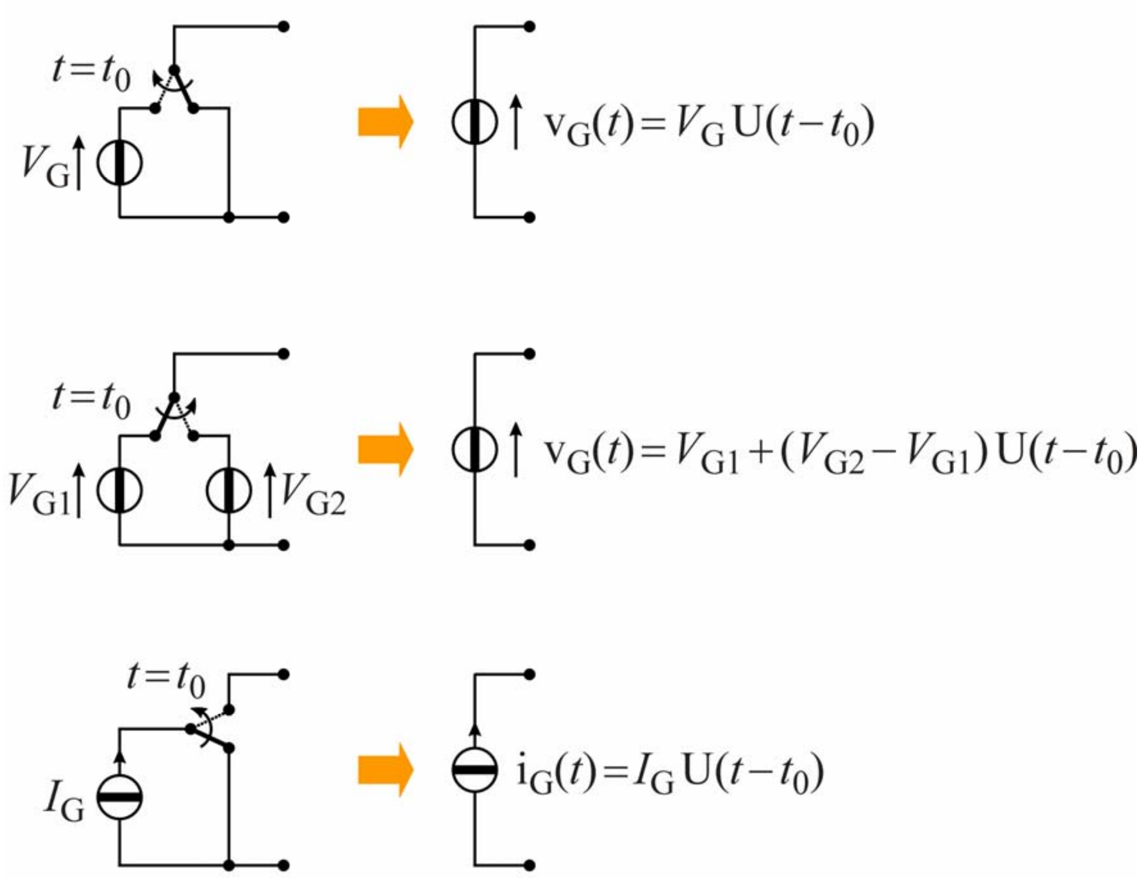


- Con $\mathrm{f}(t)\mathrm{U}(t - t_0)$ o $\mathrm{f}(t)\mathrm{U}(t_0 - t)$ si possono rappresentare funzioni uguali a $\mathrm{f}(t)$ per $t > t_0$ o per $t < t_0$ e nulle per i rimanenti valori di t





Gradino unitario - Esempi



Funzioni impulsive

- Nei punti di discontinuità la derivata non è definita
- ➡ Si possono presentare situazioni in cui non è possibile rappresentare mediante funzioni “ordinarie” gli andamenti di alcune tensioni o correnti
- Per superare questo inconveniente si introducono le **“funzioni impulsive”**
- Le funzioni impulsive non sono funzioni in senso ordinario, ma enti che sono definiti in termini rigorosi nell’ambito della **teoria delle distribuzioni**
- Di seguito, rinunciando al rigore matematico, le funzioni impulsive saranno introdotte mediante semplici considerazioni di tipo intuitivo

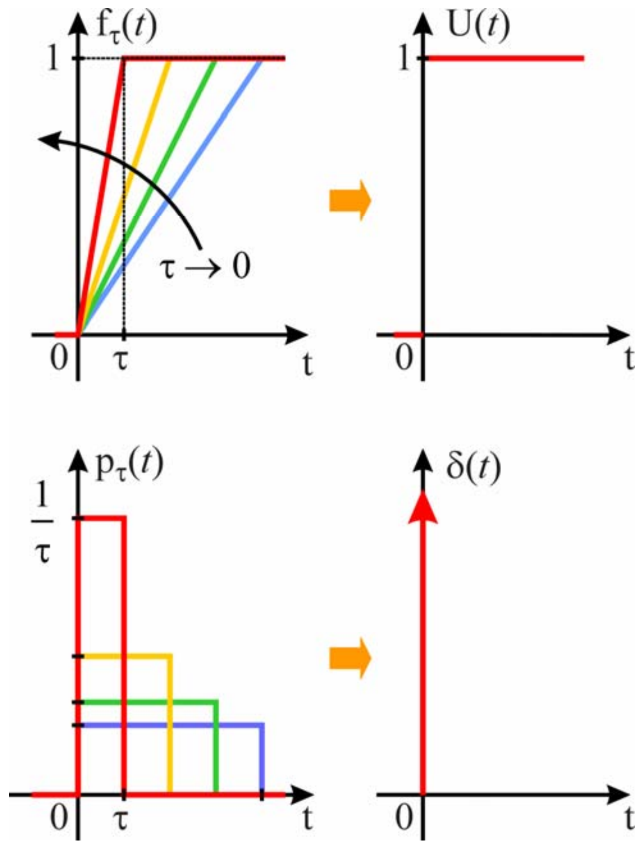
Impulso di Dirac

- Si considera la funzione $\mathrm{f}_\tau(t)$

$$\mathrm{f}_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{t}{\tau} & \text{per } 0 < t < \tau \\ 1 & \text{per } t > \tau \end{cases}$$

- Per $\tau \to 0$, $\mathrm{f}_\tau(t)$ tende a $\mathrm{U}(t)$
- La derivata di $\mathrm{f}_\tau(t)$ è un impulso rettangolare $\mathrm{p}_\tau(t)$ avente durata τ e ampiezza $1/\tau$ (e quindi area unitaria)

$$\mathrm{p}_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau} & \text{per } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{per } t > \tau \end{cases}$$



Impulso di Dirac (1)

- Intuitivamente, il limite per $\tau \to 0$ di $\mathrm{p}_\tau(t)$ è un impulso di area unitaria avente durata nulla e ampiezza infinita

➡ Il limite è rappresentato dall'**impulso di Dirac**, $\delta(t)$, caratterizzato dalle seguenti proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ \text{singolare} & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

- Queste proprietà non possono essere soddisfatte da una funzione ordinaria (per una funzione ordinaria la prima proprietà implica che l'integrale su un qualunque intervallo sia nullo)
- $\delta(t)$ non è una funzione ordinaria ma è una **distribuzione** (o **funzione generalizzata**)

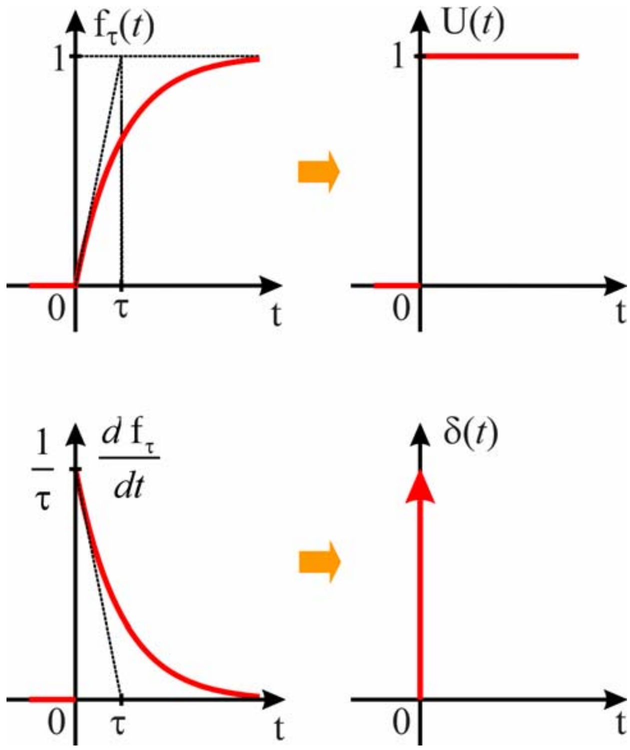
Impulso di Dirac (2)

- E' possibile introdurre l'impulso di Dirac anche mediante una diversa successione di funzioni $f_\tau(t)$ tendente a $U(t)$ per τ tendente a zero
- Ad esempio si può considerare la funzione

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\tau} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\, f_\tau}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



Impulso di Dirac (3)

- L'integrale dell'impulso di Dirac è il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = U(t)$$

- Quindi, formalmente, si può porre

$$\frac{d\, U}{dt} = \delta(t)$$

➡ L'impulso di Dirac è la **derivata generalizzata** del gradino unitario

Impulsi di ordine superiore (1)

- Considerando funzioni $f_\tau(t)$ dotate di derivate di ordine superiore, con un procedimento analogo a quello utilizzato per introdurre l'impulso di Dirac è possibile introdurre delle funzioni impulsive che rappresentano le derivate generalizzate dell'impulso di Dirac
- Per esempio, si può definire $f_\tau(t)$ raccordando i valori 0 e 1 mediante due archi di parabola disposti nell'intervallo tra 0 e τ

➡ La funzione $f_\tau(t)$ è derivabile due volte (in senso ordinario)
  - la derivata prima di $f_\tau(t)$ è un impulso triangolare di area unitaria
  - la derivata seconda è costituita da una coppia di impulsi rettangolari di segno opposto

Impulsi di ordine superiore (2)

- Passando al limite per $\tau \to 0$
  - $f_\tau(t)$ tende ad un gradino unitario
  - la derivata prima di $f_\tau(t)$ tende ad un impulso di Dirac
  - il limite della derivata seconda di $f_\tau(t)$ è rappresentato da una distribuzione $\delta^{(1)}(t)$ tale che

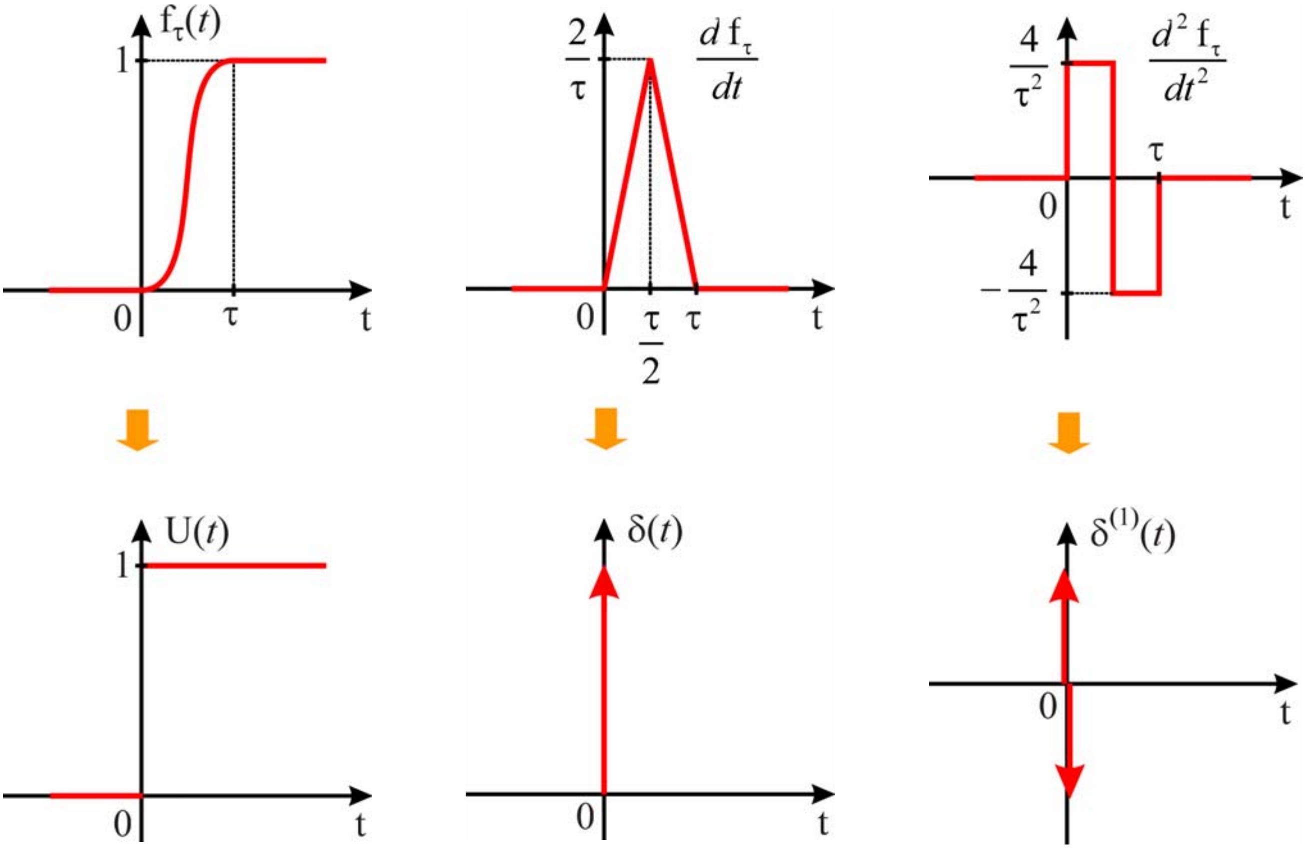
$$\int_{-\infty}^{t} \delta^{(1)}(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \delta^{(1)}(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}$$

Impulso di ordine 1

- In modo analogo si possono introdurre gli impulsi di ordine superiore, $\delta^{(n)}(t) \ \ (\forall n)$
- L'impulso di Dirac e il gradino unitario vengono indicati anche con i simboli

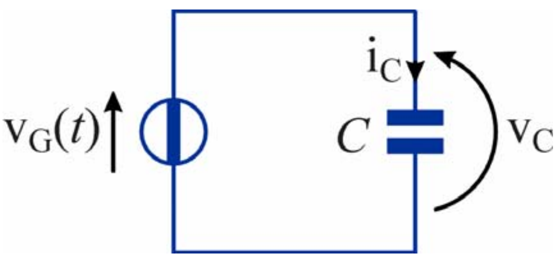
$$\delta^{(0)}(t) = \delta(t) \qquad \delta^{(-1)}(t) = \mathrm{U}(t)$$

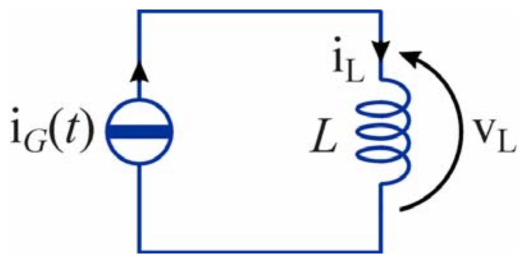
Impulso di ordine 1



Impulsi di corrente e di tensione

- In un condensatore a una discontinuità della tensione corrisponde un impulso di corrente (➡ corrente non limitata)
- In un induttore a una discontinuità della corrente corrisponde un impulso di tensione (➡ tensione non limitata)





$$v_G(t) = V_0\,U(t - t_0)$$
$$v_C(t) = v_G(t)$$
$$i_C(t) = C\frac{d\,v_C}{dt} = CV_0\delta(t - t_0)$$

$$i_G(t) = I_0\,U(t - t_0)$$
$$i_L(t) = i_G(t)$$
$$v_L(t) = L\frac{d\,i_L}{dt} = LI_0\delta(t - t_0)$$

Dati iniziali e condizioni iniziali

- Se è noto il comportamento di un circuito per $t < t_0$, passando al limite per $t \to t_0$ si possono determinare i valori delle tensione e correnti e delle loro derivate per $t = t_0^-$ (**dati iniziali**)
- Per determinare le risposte per $t > t_0$ occorrono i valori delle funzioni incognite e delle loro derivate all'istante t_0^+ (**condizioni iniziali**)
- All'istante t_0 le tensioni, le correnti e le loro derivate possono essere discontinue
  - ➡ i valori a t_0^+ in genere non coincidono con quelli a t_0^-

➡ Occorre determinare la relazione tra i dati iniziali e le condizioni iniziali

- Se il circuito non è degenere si può fare riferimento alla proprietà di continuità dello stato

Continuità dello stato nei circuiti non degeneri

- *In un circuito dinamico non degenere, se gli ingressi non contengono impulsi le variabili di stato sono funzioni continue di t*
  (anche in presenza di discontinuità degli ingressi)

Dimostrazione

- La proprietà si può dimostrare per assurdo
- Lo stato e gli ingressi sono legati dall'equazione

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- Se lo stato fosse discontinuo
  - $\mathbf{x}(t)$ dovrebbe contenere dei gradini unitari
  - $d\mathbf{x}/dt$ dovrebbe contenere degli impulsi di Dirac

➡ Per bilanciare gli impulsi, a primo membro anche $\mathbf{u}(t)$ dovrebbe contenere degli impulsi di Dirac

Note

- Nella dimostrazione si esclude la possibilità che, per bilanciare gli impulsi a primo membro, sia $\mathbf{x}(t)$ a contenere impulsi di Dirac
  - in questo caso $d\mathbf{x}/dt$ conterrebbe impulsi di ordine 1
  - quindi anche $\mathbf{x}(t)$ dovrebbe contenere impulsi di ordine 1
  - di conseguenza $d\mathbf{x}/dt$ conterrebbe anche impulsi di ordine 2
  - e così via ...
- Se $\mathbf{u}(t)$ contiene impulsi le variabili di stato non sono necessariamente discontinue (è possibile che nel calcolo di $\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t)$ i termini impulsivi si annullino)
- Se è $\mathbf{u}(t)$ discontinuo le derivate delle variabili di stato (e quindi le variabili coniugate) possono essere discontinue

Risposte di circuiti non degeneri

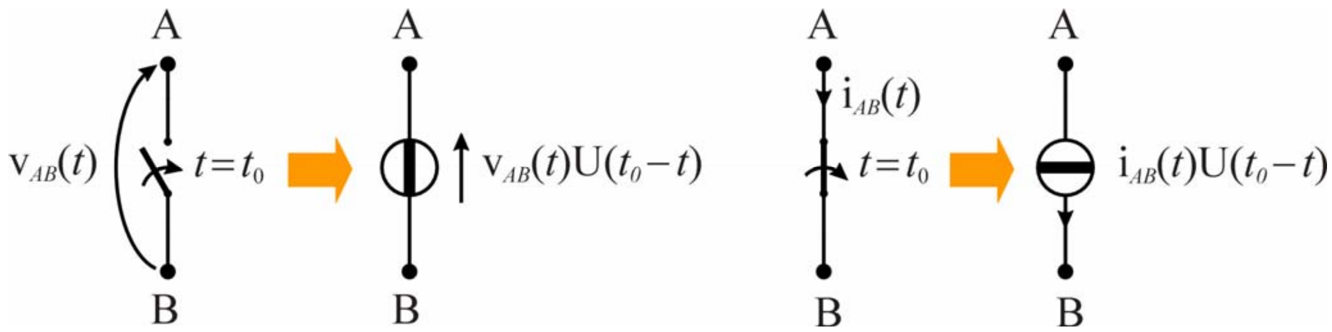
- La relazione tra risposte, stato e ingressi è

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- Se $\mathbf{u}(t)$ contiene al più gradini (ma non impulsi) $\mathbf{x}(t)$ è continuo
- ⇨ Le risposte $\mathbf{y}(t)$ non possono contenere impulsi, ma possono essere discontinue in presenza di discontinuità degli ingressi

Circuiti con interruttori (1)

- Un interruttore che si chiude all'istante $t = t_0$ può essere rappresentato mediante in generatore di tensione
  - uguale alla tensione ai terminali dell'interruttore aperto per $t < t_0$
  - nulla per $t > t_0$
- Un interruttore che si apre all'istante $t = t_0$ può essere rappresentato mediante in generatore di corrente
  - uguale alla corrente attraverso l'interruttore chiuso per $t < t_0$
  - nulla per $t > t_0$



Circuiti con interruttori (2)

- Se si rappresentano gli interruttori che commutano come ingressi fittizi (discontinui) e si indica $\mathbf{u}_F(t)$ il vettore che contiene le loro tensioni o correnti, si possono scrivere le equazioni di stato e di uscita nella forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_F\mathbf{u}_F(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_F\mathbf{u}_F(t)$$

- Si possono estendere ai circuiti con interruttori i risultati relativi ai circuiti con ingressi discontinui
- In un circuito non degenere, in presenza di interruttori che commutano
  - le variabili di stato sono continue
  - le risposte possono essere discontinue

Determinazione delle condizioni iniziali (1)

- **Calcolo dei valori per $t = t_0$ delle variabili di stato**
  - Si studia il circuito nella configurazione per $t < t_0$ e si determinano le espressioni delle variabili di stato
  - Si valuta il limite per $t \to t_0$
  - Per un circuito non degenere i valori ottenuti coincidono con i valori per $t = t_0^+$ (quindi si può parlare semplicemente di valori per $t = t_0$)
- **Calcolo dei valori per $t = t_0^+$ delle altre tensioni e correnti**
  - Si costruisce il circuito resistivo associato per $t > t_0$
  - Si scrivono le equazioni di stato e le equazioni di uscita
  - Queste equazioni valgono per ogni $t > t_0$ e quindi, passando al limite per $t \to t_0$, all'istante $t = t_0^+$
  - ⇨ Inserendo i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato nelle equazioni si ottengono i valori per $t = t_0^+$ delle variabili coniugate e delle risposte

Determinazione delle condizioni iniziali (2)

- **Calcolo dei valori per $t = t_0^+$ delle derivate delle variabili di stato**
  - Queste derivate si ottengono direttamente inserendo i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato nelle equazioni di stato (sono proporzionali ai valori per $t = t_0^+$ delle variabili coniugate)
- **Calcolo dei valori per $t = t_0^+$ delle altre derivate**
  - Si derivano rispetto a t le equazioni di stato e le equazioni uscita
  - Si inseriscono nelle equazioni così ottenute i valori per $t = t_0^+$ delle derivate delle variabili di stato
- **Calcolo dei valori all'istante t_0^+ delle derivate di ordine superiore**
  - Le derivate delle equazioni di stato forniscono le derivate seconde delle variabili di stato in funzione delle loro derivate prime
  - Derivando due volte le equazioni di stato si possono ottenere le derivate terze, e così via
  - Le altre derivate si ottengono mediante successive derivazioni delle equazioni di uscita

Riepilogo (1)

Analisi per $t < t_0$

$\mathbf{x}(t_0)$

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{t=t_0^+} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t_0^+)$$

$$\mathbf{y}(t_0^+) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t_0^+)$$

$$\hat{x}_i(t_0^+) = K_i \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=t_0^+} \qquad i = 1, \cdots, N$$

Equazioni di stato e di uscita

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{t=t_0^+} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right|_{t=t_0^+} = \mathbf{A}\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{t=t_0^+} + \mathbf{B}\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{t=t_0^+}$$

$$\left.\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right|_{t=t_0^+} = \mathbf{C}\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{t=t_0^+} + \mathbf{D}\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{t=t_0^+}$$

$$\left.\frac{d\hat{x}_i}{dt}\right|_{t=t_0^+} = K_i \left.\frac{d^2x_i}{dt^2}\right|_{t=t_0^+} \qquad i = 1, \ldots, N$$

Derivate delle equazioni di stato e di uscita

Riepilogo (2)

Calcolo dei valori a t_0^+ delle derivate di ordine superiore

$n = n+1$

$$n = 1 \Rightarrow \left.\frac{d^n\mathbf{x}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^{n+1}\mathbf{x}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} = \mathbf{A}\left.\frac{d^n\mathbf{x}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} + \mathbf{B}\left.\frac{d^n\mathbf{u}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+}$$

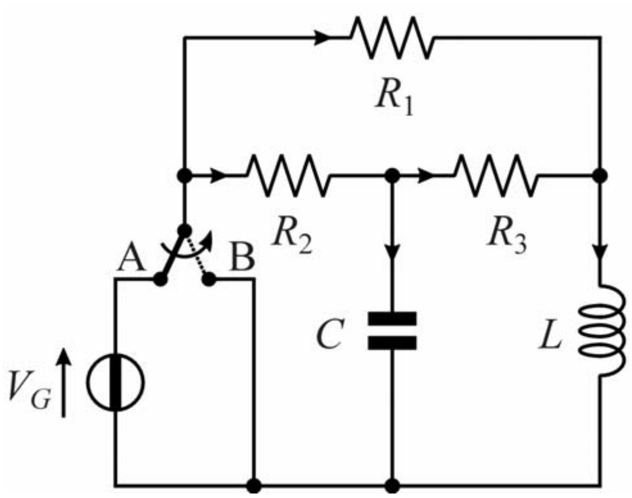
$$\left.\frac{d^n\mathbf{y}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} = \mathbf{C}\left.\frac{d^n\mathbf{x}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} + \mathbf{D}\left.\frac{d^n\mathbf{u}}{dt^n}\right|_{t=t_0^+}$$

$$\left.\frac{d^n\hat{x}_i}{dt^n}\right|_{t=t_0^+} = K_i \left.\frac{d^{n+1}x_i}{dt^{n+1}}\right|_{t=t_0^+} \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^{n+1}\mathbf{x}}{dt^{n+1}}\right|_{t=t_0^+}$$

Esempio 1 (1)

- Per $t < 0$ il circuito rappresentato in figura è in condizioni di regime stazionario
- All'istante $t = 0$ l'interruttore passa dalla posizione A alla posizione B
- Determinare i valori agli istanti 0^- e 0^+ di v_C, i_C, v_L, i_L, i_R1, i_R2, i_R3 e i valori all'istante 0^+ delle loro derivate



$$R_1 = 4\,\Omega$$
$$R_2 = 2\,\Omega$$
$$R_3 = 2\,\Omega$$
$$C = 0.5\,\mathrm{F}$$
$$L = 0.5\,\mathrm{H}$$
$$V_G = 12\,\mathrm{V}$$

Esempio 1 (2)

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^-$**
  - Per $t < 0$ Il circuito è in condizioni di regime stazionario
  - ➡ Si esegue un'analisi in continua
  - Dato che il circuito non è degenere, v_C e i_L sono continue per $t = 0$

$$i_L(0) = i_{R1}(0^-) + i_{R3}(0^-) = 6\ \mathrm{A}$$

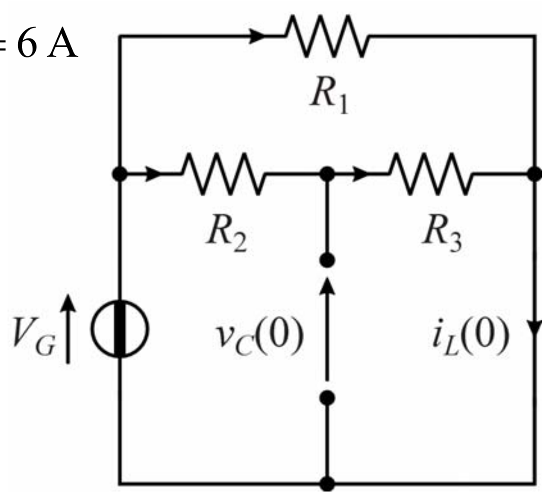
$$v_C(0) = \frac{V_G R_3}{R_2 + R_3} = 6\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_C(0^-) &= 0\ \mathrm{A} \\ v_L(0^-) &= 0\ \mathrm{V} \end{aligned}} \Rightarrow$$

$$i_{R1}(0^-) = \frac{V_G}{R_1} = 3\ \mathrm{A}$$

$$i_{R2}(0^-) = \frac{V_G}{R_2 + R_3} = 3\ \mathrm{A}$$

$$i_{R3}(0^-) = i_{R2}(0^-) = 3\ \mathrm{A}$$

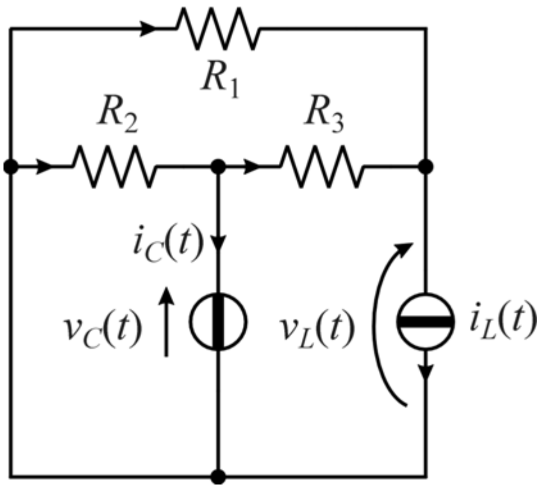


Esempio 1 (3)

- Facendo riferimento al circuito resistivo associato, si scrivono le equazioni di stato e di uscita per $t > 0$ (interruttore nella posizione B)

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{(R_1+R_2+R_3)}{R_2(R_1+R_3)}v_C(t) - \frac{R_1}{R_1+R_3}i_L(t)$$
$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{R_1+R_3}v_C(t) - \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}i_L(t)$$

$$i_{R1}(t) = -\frac{v_C(t)}{R_1+R_3} + \frac{R_3}{R_1+R_3}i_L(t)$$
$$i_{R2}(t) = -\frac{v_C(t)}{R_2}$$
$$i_{R3}(t) = \frac{v_C(t)}{R_1+R_3} + \frac{R_1}{R_1+R_3}i_L(t)$$



Esempio 1 (4)

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^+$**
- Si sostituiscono nelle equazioni di stato e nelle equazioni di uscita i valori delle variabili di stato per $t = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_C(0) = 6\ \text{V} \\ i_L(0) = 6\ \text{A} \end{array}} \Rightarrow$$

$$i_C(0^+) = -\frac{(R_1+R_2+R_3)}{R_2(R_1+R_3)}v_C(0) - \frac{R_1}{R_1+R_3}i_L(0) = -8\ \text{A}$$
$$v_L(0^+) = \frac{R_1}{R_1+R_3}v_C(0) - \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}i_L(0) = -4\ \text{V}$$
$$i_{R1}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_1+R_3} + \frac{R_3}{R_1+R_3}i_L(0) = 1\ \text{A}$$
$$i_{R2}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_2} = -3\ \text{A}$$
$$i_{R3}(0^+) = \frac{v_C(0)}{R_1+R_3} + \frac{R_1}{R_1+R_3}i_L(0) = 5\ \text{A}$$

Esempio 1 (5)

- I valori per $t = 0^+$ delle derivate delle variabili di stato si ottengono direttamente sostituendo $v_C(0)$ e $i_L(0)$ nelle equazioni di stato

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{(R_1+R_2+R_3)}{CR_2(R_1+R_3)} v_C(0) - \frac{R_1}{C(R_1+R_3)} i_L(0) = -16 \text{ V/s}$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{R_1}{L(R_1+R_3)} v_C(0) - \frac{R_1R_3}{L(R_1+R_3)} i_L(0) = -8 \text{ A/s}$$

- Le derivate di i_C e v_L si ottengono derivando le loro espressioni fornite dalle equazioni di stato e sostituendo i valori delle derivate delle variabili di stato

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{(R_1+R_2+R_3)}{R_2(R_1+R_3)} \cdot \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} - \frac{R_1}{R_1+R_3} \cdot \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = 16 \text{ A/s}$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{R_1}{R_1+R_3} \cdot \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} - \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} \cdot \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \text{ V/s}$$

Esempio 1 (6)

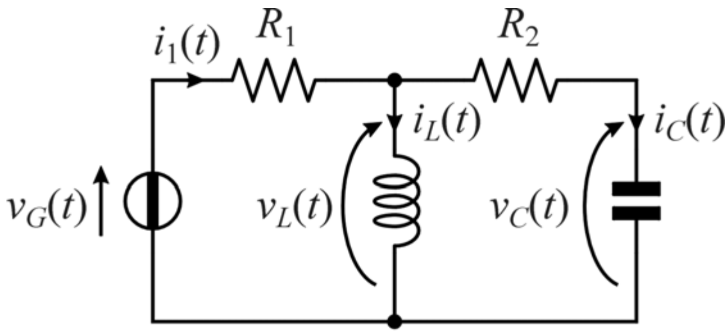
- Per calcolare derivate delle correnti dei resistori, si derivano rispetto al tempo le loro espressioni fornite dalle equazioni di equazioni di uscita e si inseriscono i valori delle derivate delle variabili di stato

$$\left.\frac{di_{R1}}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{R_1+R_3} \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} + \frac{R_3}{R_1+R_3} \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \text{A/s}$$

$$\left.\frac{di_{R2}}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{R_2} \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 8 \text{ A/s}$$

$$\left.\frac{di_{R3}}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{R_1+R_3} \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} + \frac{R_1}{R_1+R_3} \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = -8 \text{ A/s}$$

Esempio 2 (1)



$R_1 = 5\,\Omega$

$R_2 = 5\,\Omega$

$L = 10\text{ mH}$

$C = 100\,\mu\text{F}$

$$v_G(t) = 30\sqrt{2}\cdot[1 - 0.5\cdot \mathrm{U}(t)]\cdot\cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)\quad \text{V}$$

Per $t < 0$ il circuito è in condizioni di regime sinusoidale
Determinare i valori per $t = 0^+$ di i_L, v_C, i_1 e delle loro derivate

Esempio 2 (2)

- Per $t < 0$ la tensione del generatore vale

$$v_G(t) = 30\sqrt{2}\cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)\quad \text{V}$$

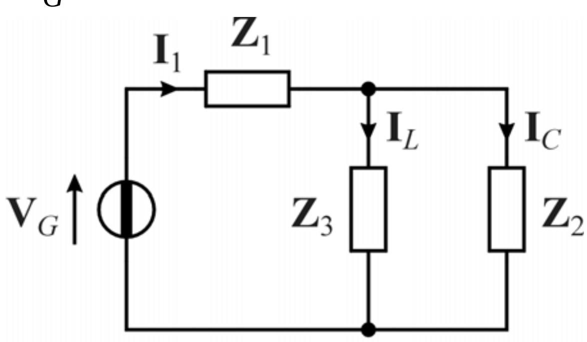
- Si analizza il circuito in regime sinusoidale con il metodo simbolico
- Si calcolano le impedenze e il fasore di v_G

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 = 5$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C} = 5 - 5j$$

$$\mathbf{Z}_3 = j\omega L = 10j$$

$$\mathbf{V}_G = 30\sqrt{2}\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) = 30 + 30j$$



Esempio 2 (3)

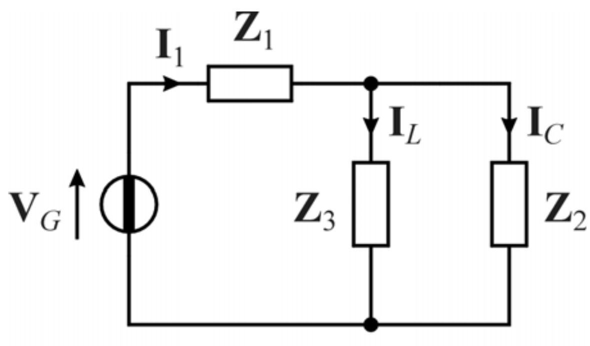
- Si determinano le correnti dei rami e la tensione del condensatore

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_\text{G}}{\mathbf{Z}_1 + \dfrac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}} = 2 + 2j$$

$$\mathbf{I}_\text{L} = \mathbf{I}_1 \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} = 2 - 2j$$

$$\mathbf{I}_\text{C} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_\text{L} = 4j$$

$$\mathbf{V}_\text{C} = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \mathbf{I}_\text{C} = 20$$



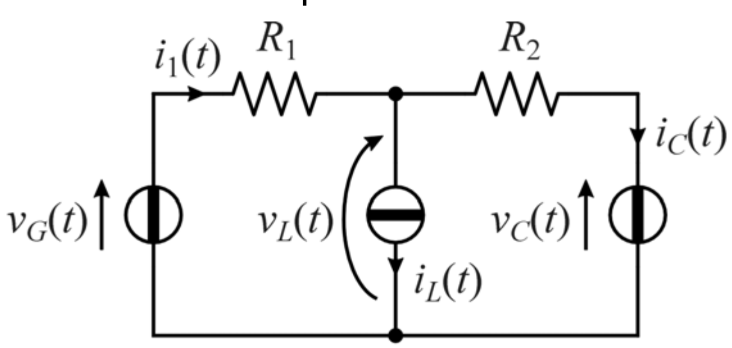
- Si calcolano i valori per $t = 0$ delle variabili di stato

$$i_\text{L}(t) = |\mathbf{I}_\text{L}| \cos[1000t + \arg(\mathbf{I}_\text{L})] \quad \Rightarrow \quad i_\text{L}(0) = |\mathbf{I}_\text{L}| \cos[\arg(\mathbf{I}_\text{L})] = 2\,\text{A}$$

$$v_\text{C}(t) = |\mathbf{V}_\text{C}| \cos[1000t + \arg(\mathbf{V}_\text{C})] \quad \Rightarrow \quad v_\text{C}(0) = |\mathbf{V}_\text{C}| \cos[\arg(\mathbf{V}_\text{C})] = 20\,\text{V}$$

Esempio 2 (4)

- Per $t > 0$ si scrivono le equazioni di stato e di uscita



Circuito resistivo associato

$$\frac{di_\text{L}}{dt} = \frac{1}{L}\left(-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} i_\text{L}(t) + \frac{R_1}{R_1+R_2} v_\text{C}(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2} v_\text{G}(t)\right)$$

$$\frac{dv_\text{C}}{dt} = \frac{1}{C}\left(-\frac{R_1}{R_1+R_2} i_\text{L}(t) - \frac{1}{R_1+R_2} v_\text{C}(t) + \frac{1}{R_1+R_2} v_\text{G}(t)\right)$$

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} i_\text{L}(t) - \frac{1}{R_1+R_2} v_\text{C}(t) + \frac{1}{R_1+R_2} v_\text{G}(t)$$

Esempio 2 (5)

- Per $t > 0$ la tensione del generatore vale

$$v_G(t) = 15\sqrt{2}\cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Quindi, passando al limite per $t \to 0$ si ottiene

$$v_G(0^+) = 15\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15\,\text{V}$$

$$\left.\frac{dv_G}{dt}\right|_{t=0^+} = \left[-15\sqrt{2}\cdot 1000\cdot \text{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{t=0^+} = -15000\,\text{V/s}$$

Esempio 2 (6)

- Per calcolare le derivate delle variabili di stato e la corrente i_1 all'istante $t = 0^+$ si inseriscono i valori per $t = 0$ delle variabili di stato nelle equazioni di stato e di uscita

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L}\left(-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L(0) + \frac{R_1}{R_1+R_2}v_C(0) + \frac{R_2}{R_1+R_2}v_G(0^+)\right) = 1250\,\text{A/s}$$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\left(-\frac{R_1}{R_1+R_2}i_L(0) - \frac{1}{R_1+R_2}v_C(0) + \frac{1}{R_1+R_2}v_G(0^+)\right) = -7500\,\text{V/s}$$

$$i_1(0^+) = \frac{R_2}{R_1+R_2}i_L(0) - \frac{1}{R_1+R_2}v_C(0) + \frac{1}{R_1+R_2}v_G(0^+) = 0.5\,\text{A}$$

- Per calcolare la derivata del corrente i_1 all'istante $t = 0^+$ si deriva l'equazione di uscita e si inseriscono i valori per $t = 0^+$ delle derivate variabili di stato

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} - \frac{1}{R_1+R_2}\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} + \frac{1}{R_1+R_2}\left.\frac{dv_G}{dt}\right|_{t=0^+} = -125\,\text{A/s}$$

Discontinuità dello stato nei circuiti degeneri

- Per un circuito degenere, si può dimostrare che le equazioni di stato e di uscita assumono la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

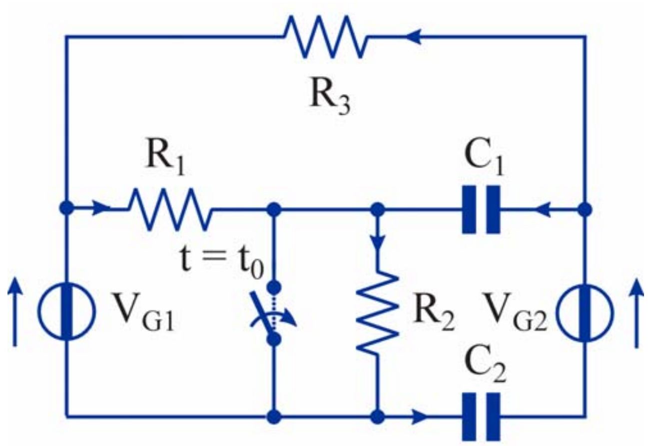
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}^{(1)}\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$\mathbf{B}^{(1)} =$ matrice $N \times N_I$

$\mathbf{D}^{(1)} =$ matrice $N_R \times N_I$

- Se $\mathbf{u}(t)$ è discontinua, $d\mathbf{u}/dt$ contiene degli impulsi di Dirac
- Per bilanciare gli impulsi a secondo membro delle due equazioni anche i termini a primo membro devono contenere impulsi
- ➡ Le risposte e le derivate delle variabili di stato possono contenere degli impulsi di Dirac
- ➡ Le variabili di stato possono contenere dei gradini (cioè possono essere discontinue)

Esempio



- La chiusura dell'interruttore dà origine ad una maglia di condensatori
- Se $v_{R2}(0^-) \neq 0\text{V}$, le tensioni $v_{C1}(0^-)$ e $v_{C2}(0^-)$ non possono soddisfare la LKV per $t = 0^+$
- ➡ Le tensioni dei condensatori devono essere discontinue
- ➡ Si ha un impulso di corrente nella maglia formata da C_1 C_2 e V_{G2}