Circuiti dinamici

Circuiti del primo ordine

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 9-11-2013)

Circuiti del primo ordine

- **Circuiti del primo ordine**: circuiti il cui stato è definito da una sola variabile $x(t)$
  - I circuiti non degeneri del primo ordine contengono un solo componente dinamico (condensatore o induttore)
  - L'equazione di stato è del tipo

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} - ax(t) = b(t)$$

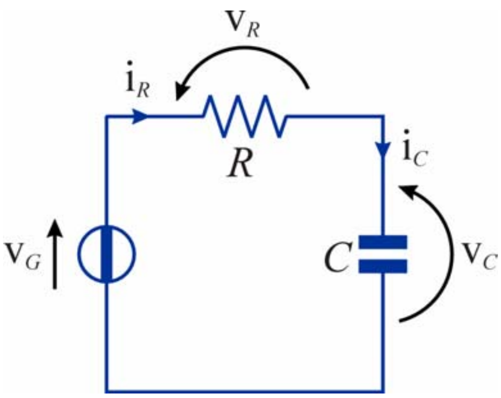
a scalare

$\mathbf{B} = \left[b_1, \cdots, b_{N_I}\right]$ matrice riga

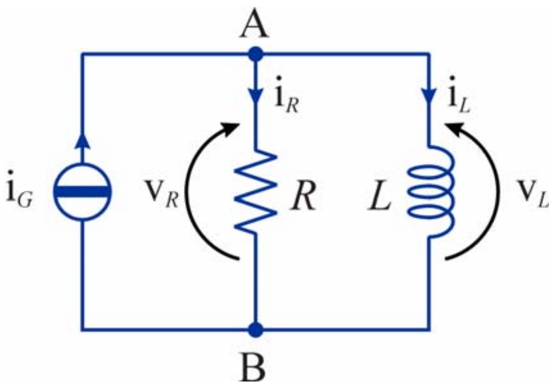
$b(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)$ combinazione lineare degli ingressi

Circuiti elementari del primo ordine (1)

Circuito RC



Circuito RL



Circuiti elementari del primo ordine (2)

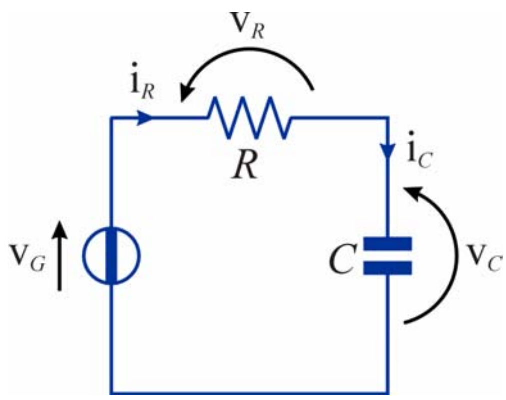
- Si assume che siano noti
  - gli andamenti degli ingressi (= grandezze impresse dai generatori indipendenti: $v_G(t)$ e $i_G(t)$) per $t > t_0$
  - i valori delle variabili di stato per $t = t_0$
    - $v_C(t_0) = V_{C0}$
    - $i_L(t_0) = I_{L0}$
- Si vogliono determinare le risposte dei circuiti per $t > t_0$
- Senza perdita di generalità, ci si può limitare a considerare il caso particolare in cui $t_0 = 0$
- Le espressioni delle tensioni e delle correnti nel caso $t_0 \neq 0$ si possono ottenere da quelle ricavate per $t_0 = 0$ sostituendo t con $t - t_0$

Circuito RC elementare

- **LKI**: $i_R(t) = i_C(t) = i(t)$
- **LKV**: $v_R(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti**:

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = RC\frac{dv_C}{dt}$$

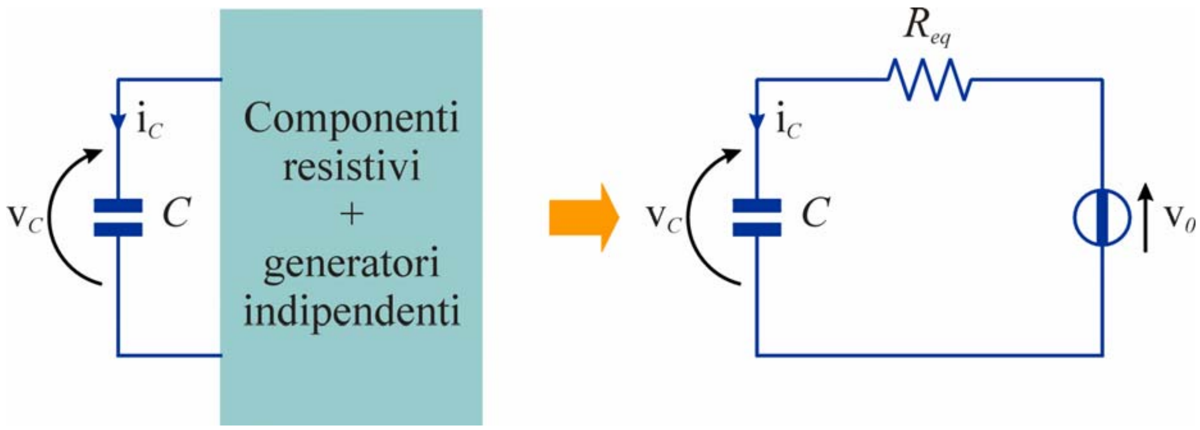


$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_G(t)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale
  $v_C(0) = V_{C0}$

Circuiti con un solo condensatore (1)

- Mediante il teorema di Thévenin è possibile ricondurre l'analisi del circuito al caso di un circuito RC elementare



➡ L'equazione di stato è

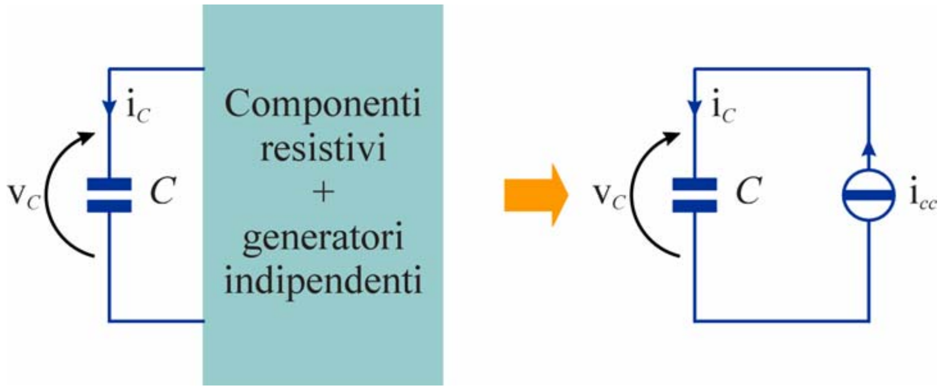
$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{1}{R_{eq}C}v_C(t) = \dfrac{1}{R_{eq}C}v_0(t) \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases}$$

(si esclude il caso $R_{eq} = 0$
➡ circuito degenere)

Circuiti con un solo condensatore (2)

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di corrente, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Thévenin (ma solo quella di Norton con $G_{eq} = 0$)
- In questo caso l'equazione di stato è

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_{cc}(t) \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \Rightarrow \quad v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i_{cc}(x)dx$$

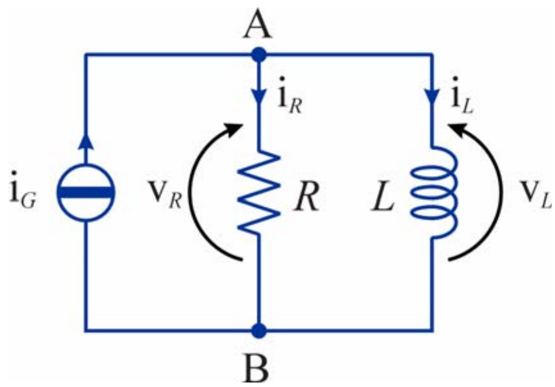


Circuito RL elementare

- **LKI**: $i_R(t) + i_L(t) = i_G(t)$
- **LKV**: $v_R(t) = v_L(t) = v(t)$
- **Componenti**:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$



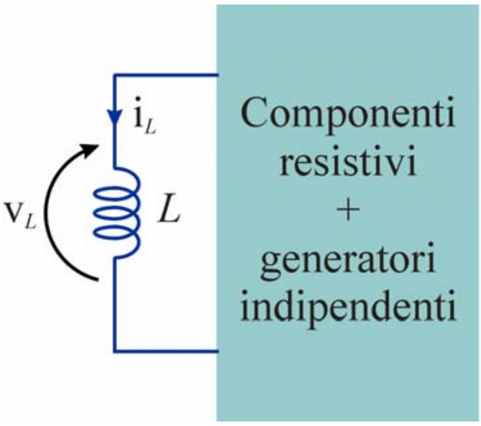
$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} i_G(t)$$

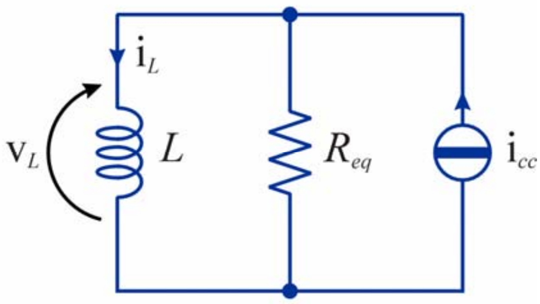
- All'equazione si deve associare la condizione iniziale

$$i_L(0) = I_{L0}$$

Circuiti con un solo induttore (1)

- Mediante il teorema di Norton è possibile ricondurre l'analisi del circuito al caso di un circuito RL elementare





➡ L'equazione di stato è

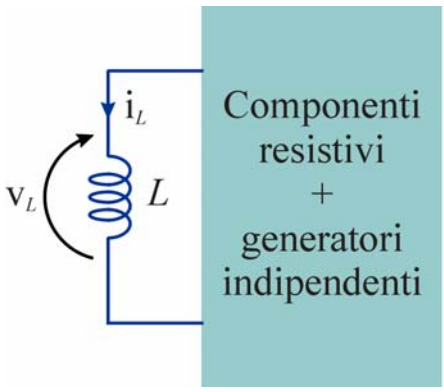
$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{R_{eq}}{L} i_L(t) = \dfrac{R_{eq}}{L} i_{cc}(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases}$$

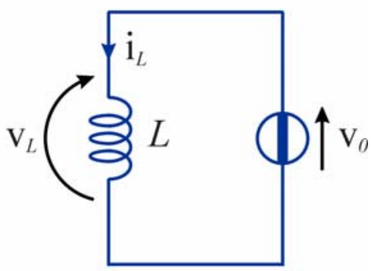
(si esclude il caso $R_{eq} \to \infty$ ➡ circuito degenere)

Circuiti con un solo induttore (2)

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di tensione, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Norton (ma solo quella di Thévenin con $R_{eq} = 0$)
- In questo caso l'equazione di stato è

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_0(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases} \Rightarrow \quad i_L(t) = I_{L0} + \frac{1}{L}\int_0^t v_0(x)dx$$





Equazione di stato

- In generale l'equazione di stato di un circuito del primo ordine è del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{\tau} x(t) = \dfrac{1}{\tau} \mathrm{f}(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

- $\mathrm{f}(t) =$ grandezza impressa del generatore indipendente
- $\tau =$ **costante di tempo**
  - circuito RC ➡ $\tau = RC$

$$[R][C] = \frac{[V]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[Q]}{[I]} = [T]$$

  - circuito RL ➡ $\tau = L/R = LG$

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{[\Phi]}{[I]} \times \frac{[I]}{[V]} = \frac{[\Phi]}{[V]} = [T]$$

Risoluzione dell'equazione di stato (1)

- L'integrale generale dell'equazione di stato può essere espresso come

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

  - $x_H(t) =$ integrale generale dell'equazione omogenea associata
  - $x_P(t) =$ soluzione particolare dell'equazione differenziale

- Per determinare $x_H(t)$ si risolve l'equazione caratteristica

$$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

- Quindi la soluzione omogenea è

$$x_H(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Risoluzione dell'equazione di stato (2)

- L'integrale generale dell'equazione di stato è

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)$$

- La costante k si determina imponendo che $x(t)$ soddisfi la condizione iniziale

$$x(0) = k + x_P(0^+) = X_0 \quad \Rightarrow \quad k = X_0 - x_P(0^+)$$

➡ L'espressione della soluzione (per $t > 0$) è

$$\boxed{x(t) = \left[X_0 - x_P(0^+)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)}$$

Espressioni delle altre risposte

- Ogni altra risposta del circuito $y(t)$ è legata alla variabile di stato da un'equazione di uscita del tipo

$$y(t) = cx(t) + g(t)$$

c costante
$g(t)$ combinazione lineare degli ingressi

- Tenendo conto dell'espressione di $x(t)$, si ricava che anche $y(t)$ è dato dalla combinazione di
  - una funzione esponenziale con costante di tempo τ
  - un termine dipendente dagli ingressi

➡ Ogni risposta del circuito ha un'espressione (per $t > 0$) del tipo

$$\boxed{y(t) = \left[Y_0 - y_P(0^+)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)}$$

$$Y_0 = y(0^+) = cX_0 + g(0^+)$$

$$y_p(t) = cx_p(t) + g(t)$$

con la stessa costante di tempo τ

Risposta con ingresso zero e nello stato zero

- Il valore iniziale della risposta Y_0 è costituito dalla somma di due termini
  $Y_0 = cX_0 + g(0^+)$
  - il primo termine dipende dal valore iniziale della variabile di stato
  - il secondo termine dipende dal valore iniziale degli ingressi
- Mettendo in evidenza il contributo di X_0, si può esprimere la risposta nel modo seguente

$$\mathrm{y}(t) = \underbrace{cX_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Risposta con ingresso zero}} + \underbrace{\left[g(0^+) - y_P(0^+)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)}_{\text{Risposta nello stato zero}}$$

- La risposta con ingresso zero dipende solo dallo stato iniziale
- La risposta nello stato zero dipende solo dagli ingressi

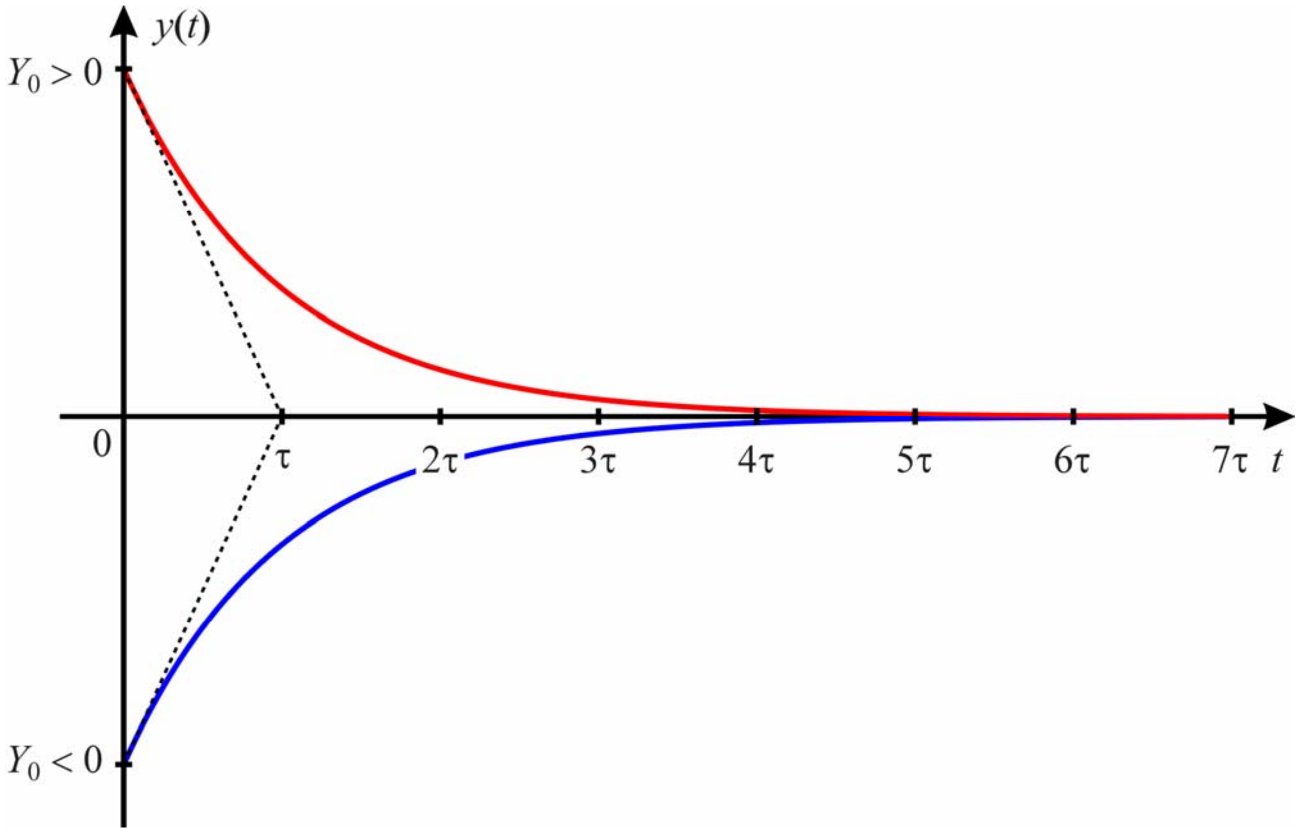
Risposta con ingresso zero

- Se gli ingressi sono nulli le risposte sono del tipo

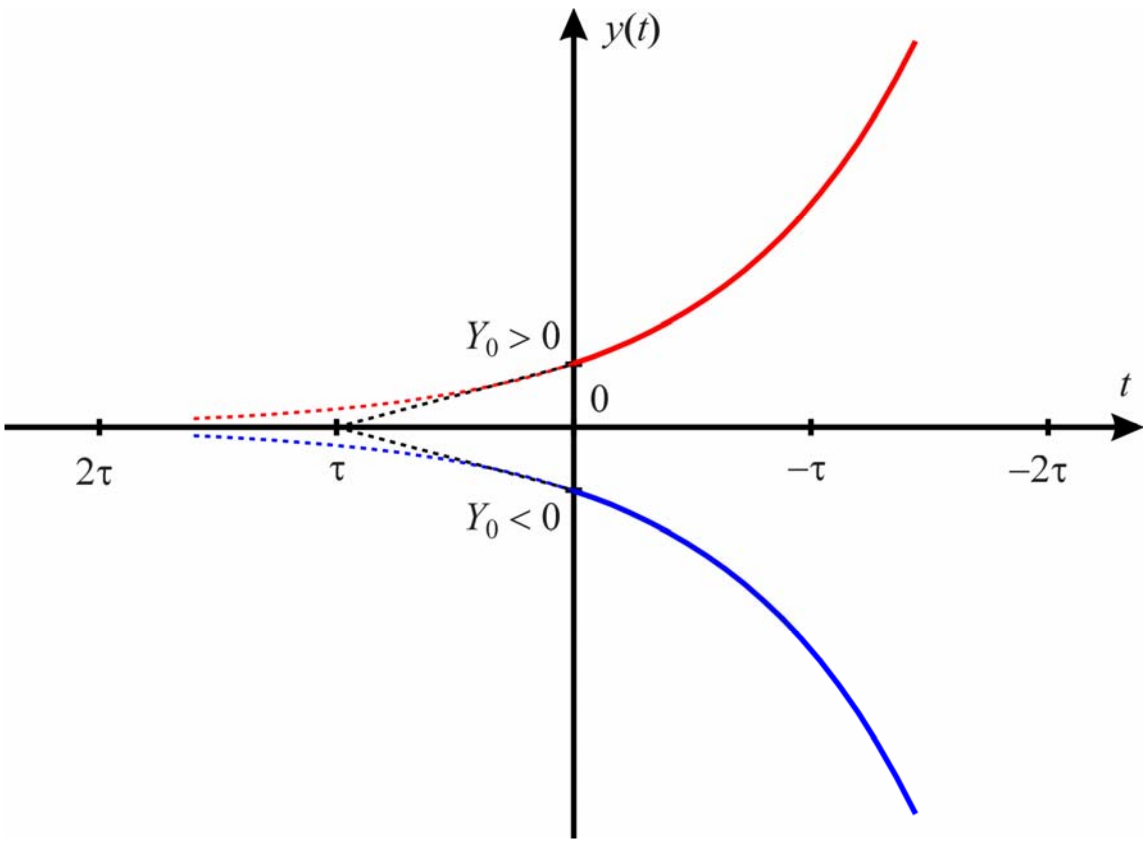
$$y(t) = Y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = cX_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Se $\tau > 0$ le risposte con ingresso zero tendono a zero per $t \to \infty$
  - Il circuito è **asintoticamente stabile**
  - Questa situazione si verifica se i parametri R, L e C sono positivi (➡ componenti passivi)
- Se $\tau < 0$ le risposte con ingresso zero (e quindi anche le risposte complete) divergono per $t \to \infty$
  - Il circuito è **instabile**
  - Questa condizione si verifica, ad esempio, se $R < 0$, come può accadere se R rappresenta la resistenza equivalente di un bipolo che contiene generatori dipendenti

Risposta con ingresso zero – $\tau > 0$



Risposta con ingresso zero – $\tau < 0$



Costante di tempo (1)

- La costante di tempo è un indice della velocità con cui la risposta con ingresso zero tende a zero
- In un tempo pari alla costante di tempo la risposta con ingresso zero si riduce al 37% circa del suo valore iniziale
- In un tempo pari a 5τ si riduce a meno dell'1% del valore iniziale
- In un tempo pari a 7τ si riduce a meno dello 0.1% del valore iniziale

➡ In pratica si può assumere che la risposta con ingresso zero si annulli in un tempo dell'ordine di 5-7 volte la costante di tempo

t	$e^{-t/\tau}$
0	1.0000
τ	0.3679
2τ	0.1353
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067
6τ	0.0025
7τ	0.0009

Costante di tempo (2)

- La retta tangente nel punto iniziale alla curva che rappresenta la risposta con ingresso zero intercetta l'asse delle ascisse per $t = \tau$
- Dato che

$$y(t) = Y_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- L'equazione della retta tangente nel punto $(0, Y_0)$ è

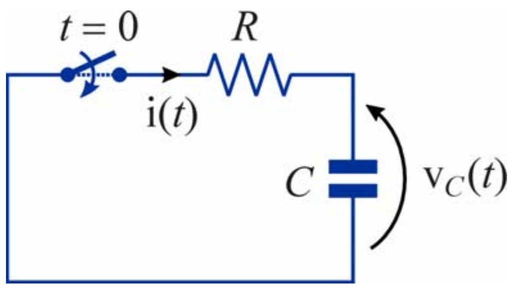
$$y_R(t) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \cdot t + Y_0 = -\frac{Y_0}{\tau} t + Y_0$$

➡ Quindi si ha $y_R(t) = 0$ per $t = \tau$

Esempio: Circuito RC – transitorio di scarica (1)

Ipotesi:

- Per $t < 0$ la tensione del condensatore vale $v_C(t) = V_{C0}$ e l'interruttore è aperto
- All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore

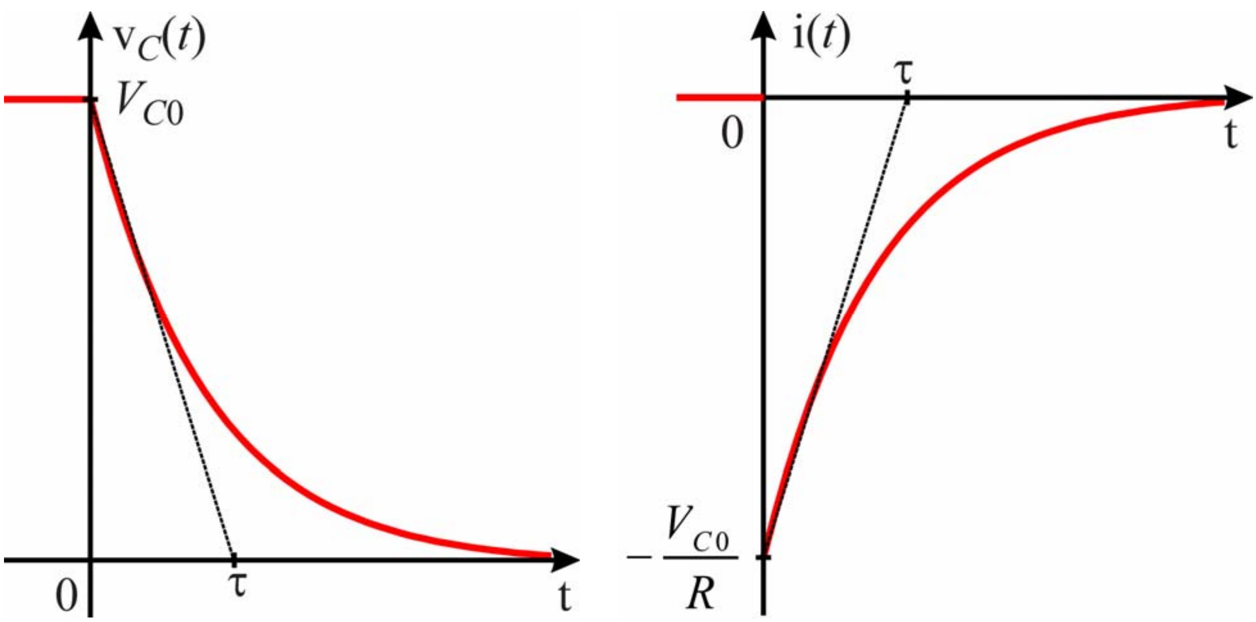


➡ Per $t > 0$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{1}{RC} v_C(t) = 0 \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = V_{C0} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{v_C(t)}{R} = -\frac{V_{C0} e^{-\frac{t}{RC}}}{R}$$

Esempio: Circuito RC – transitorio di scarica (2)



Esempio: Circuito RC – transitorio di scarica (3)

- Le potenze assorbite dal resistore e dal condensatore sono, rispettivamente

$$p_R(t) = Ri^2(t) = \frac{V_{C0}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \qquad p_C(t) = v_C(t)i(t) = -\frac{V_{C0}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

➡ L'energia dissipata dal resistore durante il transitorio è pari a quella erogata dal condensatore (che a sua volta coincide con l'energia accumulata nel condensatore per $t = 0$)

$$w_R(0,\infty) = \int_0^\infty \frac{V_{C0}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C V_{C0}^2 \left[-e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} C V_{C0}^2$$

$$w_C(0,\infty) = \int_0^\infty -\frac{V_{C0}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C V_{C0}^2 \left[e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2} C V_{C0}^2$$

Componente transitoria e di regime

- Se il circuito è asintoticamente stabile ($\tau > 0$), la soluzione omogenea e la soluzione particolare sono dette **componente transitoria** e **componente di regime** della risposta

$$y(t) = \underbrace{\left[Y_0 - y_P(0^+)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Componente transitoria}} + \underbrace{y_P(t)}_{\text{Componente di regime}}$$

- Il primo termine tende a zero per $t \to \infty$
- Per $t \to \infty$ la risposta si identifica con il secondo termine
- La componente transitoria dipende dallo stato iniziale e dagli ingressi
- La componente di regime dipende solo dagli ingressi

Risposta con ingresso costante (1)

- Ingressi costanti ➡ $f(t) = F$ (per $t > 0$)

➡ Si cerca una soluzione particolare costante: $x_P(t) = X_P$ (per $t > 0$)

- Si sostituisce $x_P(t)$ nell'equazione di stato

$$\frac{dx_P}{dt} + \frac{1}{\tau} x_P(t) = \frac{F}{\tau} \quad \Rightarrow \quad X_P = F$$

➡ La soluzione particolare coincide con
  - la tensione del generatore per il circuito RC
  - la corrente del generatore per il circuito RL

- L'espressione della soluzione completa è

$$x(t) = (X_0 - X_P)e^{-\frac{t}{\tau}} + X_P = (X_0 - F)e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

Risposta con ingresso costante (2)

- Sostituendo l'espressione della variabile di stato nelle equazioni di uscita, anche per le altre risposte si ottengono espressioni del tipo

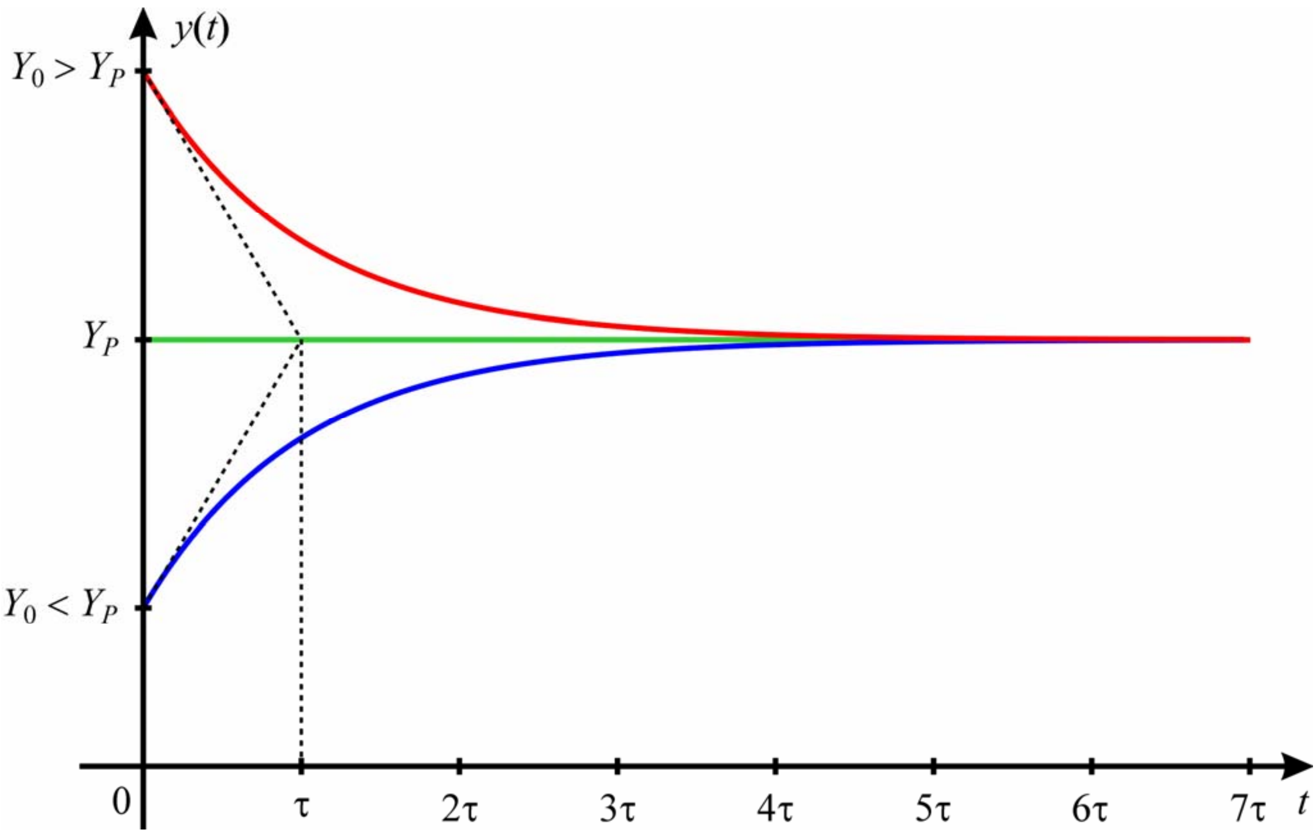
$$y(t) = (Y_0 - Y_P)e^{-\frac{t}{\tau}} + Y_P$$

dove Y_P è una combinazione lineare degli ingressi

- Se $\tau > 0$, per t sufficientemente grande (es. $t > 5\tau$) tutte le tensioni e le correnti sono praticamente costanti

➡ Il circuito tende a portarsi in una condizione di regime stazionario

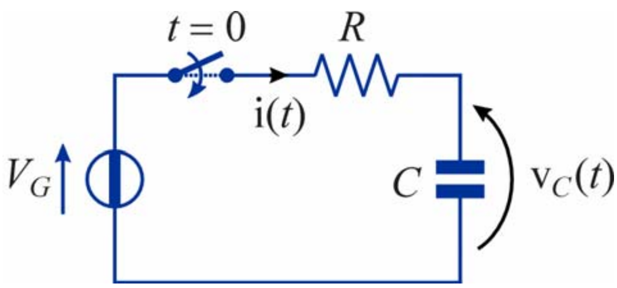
Risposta con ingresso costante (3)



Esempio: Circuito RC – transitorio di carica (1)

Ipotesi:

- La tensione del generatore è costante
- Per $t < 0$ il condensatore è scarico ($v_C(t) = 0$) e l'interruttore è aperto
- All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore

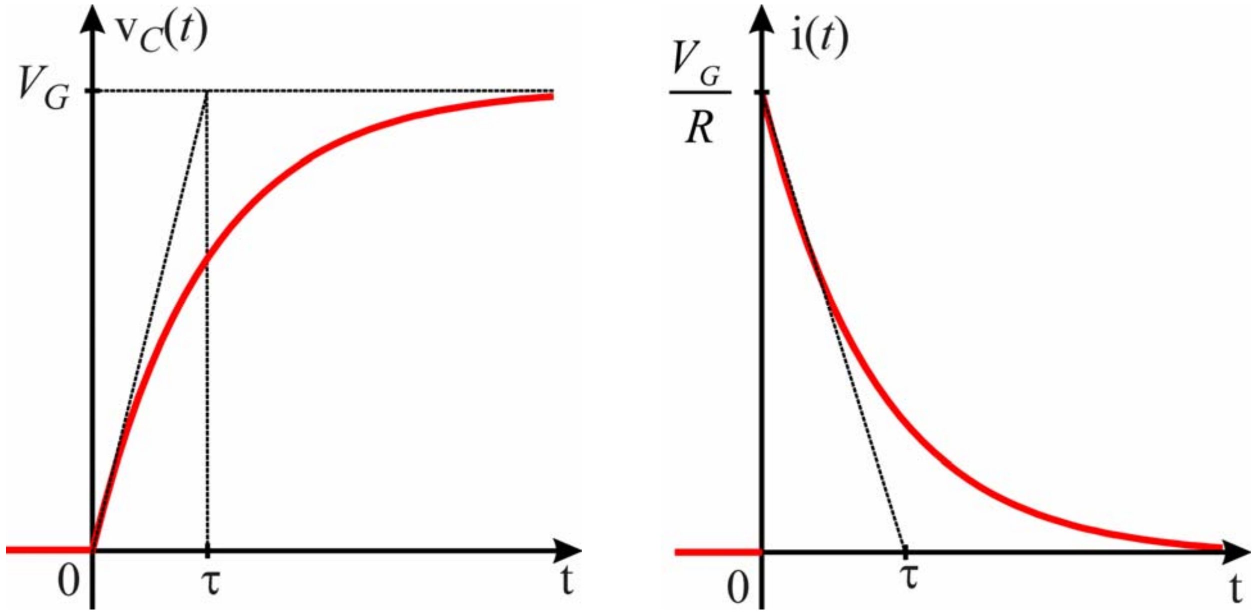


➡ Per $t > 0$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{1}{RC} v_C(t) = \dfrac{1}{RC} V_G \\ v_C(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = V_G\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = \frac{V_G - v_C(t)}{R} = \frac{V_G e^{-\frac{t}{RC}}}{R}$$

Esempio: Circuito RC – transitorio di carica (2)



Esempio: Circuito RC – transitorio di carica (3)

- La potenza erogata dal generatore è

$$p_G(t) = V_G i(t) = \frac{V_G^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Le potenze assorbite dal resistore e dal condensatore valgono, rispettivamente

$$p_R(t) = Ri^2(t) = \frac{V_G^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$p_C(t) = v_C(t) i(t) = \frac{V_G^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}} \right)$$

Esempio: Circuito RC – transitorio di carica (4)

- Integrando le potenze tra 0 e ∞ si ottiene:
  - energia erogata dal generatore

$$w_G(0,\infty) = \int_0^\infty \frac{V_G^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = CV_G^2 \left[-e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^\infty = CV_G^2$$

  - energia dissipata nel resistore

$$w_R(0,\infty) = \int_0^\infty \frac{V_G^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} CV_G^2 \left[-e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} CV_G^2$$

  - energia accumulata nel condensatore

$$w_C(0,\infty) = \int_0^\infty \frac{V_G^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}} \right) dt = CV_G^2 \left[-e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} CV_G^2$$

Esempio: Circuito RC – transitorio di carica (5)

- I risultati mostrano che:
  - L’energia erogata dal generatore durane il transitorio è pari al doppio dell’energia accumulata nel condensatore durante il transitorio stesso
  - L’energia dissipata nel resistore è uguale all’energia accumulata nel condensatore
  - ➡ L’energia dissipata nel resistore non dipende dal valore di R

Risposta con ingresso sinusoidale (1)

- Ingressi sinusoidali con pulsazione ω ➡ $\mathrm{f}(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$
- Si cerca una soluzione particolare sinusoidale con pulsazione ω

  $x_p(t) = X_M \cos(\omega t + \vartheta)$
- Si sostituisce $x_P(t)$ nell'equazione di stato

$$\frac{dx_P}{dt} + \frac{1}{\tau} x_P(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{f}(t)$$

- Si applica la trasformata di Steinmetz al primo e al secondo membro dell'equazione differenziale

$$j\omega \mathbf{X}_P + \frac{1}{\tau} \mathbf{X}_P = \frac{1}{\tau} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \mathfrak{S}\{\mathrm{f}(t)\} = F_M \, \mathrm{e}^{j\varphi}$$

$$\mathbf{X}_P = \mathfrak{S}\{x_P(t)\} = X_M \, \mathrm{e}^{j\vartheta}$$

- Si determina il fasore di $x_P(t)$

$$\mathbf{X}_p = \frac{\mathbf{F}}{1 + j\omega\tau}$$

Risposta con ingresso sinusoidale (2)

- Si antitrasforma

$$X_M = |\mathbf{X}_P| = \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

$$\vartheta = \arg(\mathbf{X}_P) = \arg(\mathbf{F}) - \arg(1 + j\omega\tau) = \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)$$

- La soluzione particolare è

$$x_p(t) = \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos[\omega t + \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)]$$

- Quindi l'espressione della soluzione completa è

$$x(t) = \left\{ X_0 - \frac{F_M \cos[\varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)]}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos[\omega t + \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)]$$

Risposta con ingresso sinusoidale (3)

- Sostituendo l'espressione della variabile di stato nelle equazioni di uscita, anche per le altre risposte si ottiene la combinazione di una funzione esponenziale e di una funzione sinusoidale di pulsazione ω
- Tutte le risposte sono del tipo

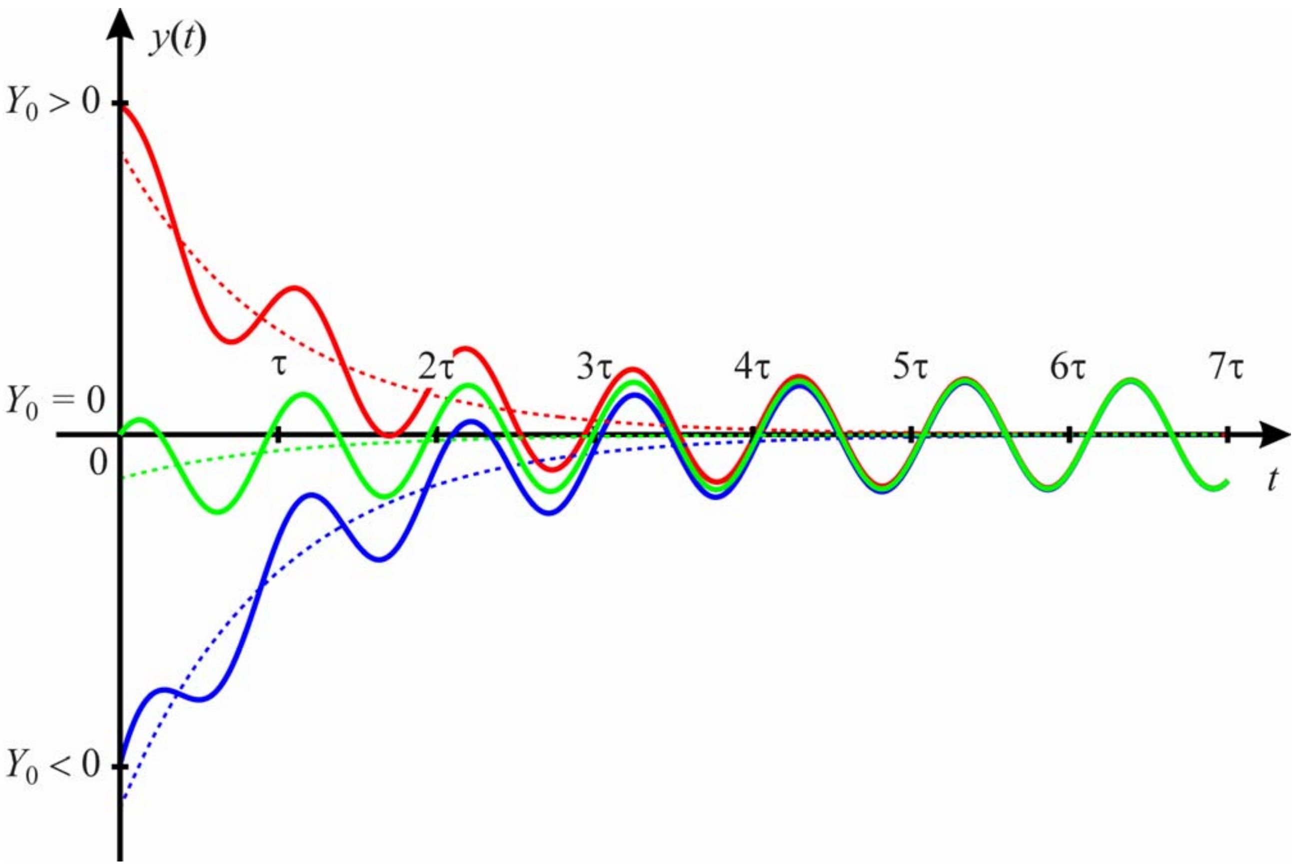
$$y(t) = \left[Y_0 - y_P(0^+)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t) =$$

$$= \left[Y_0 - Y_P \cos(\psi)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + Y_P \cos(\omega t + \psi)$$

- Se $\tau > 0$, per t sufficientemente grande (es. $t > 5\tau$) tutte le tensioni e le correnti tendono ad identificarsi con funzioni sinusoidale di pulsazione ω

➡ Il circuito tende a portarsi in una condizione di regime sinusoidale

Risposta con ingresso sinusoidale (4)



Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (1)

- Per determinare la risposta di un circuito del primo ordine

$$y(t) = \left[Y_0 - y_P(0^+)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)$$

  occorrono tre informazioni
  - il valore all'istante $t = 0^+$: Y_0
  - la costante di tempo: τ
  - la soluzione particolare: $y_P(t)$
- In molti casi di interesse pratico (es. circuiti con ingressi costanti o ingressi sinusoidali) queste informazioni possono essere ricavate direttamente senza, fare uso delle equazioni differenziali

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (2)

- **Determinazione di Y_0**
  - Mediante un'analisi per $t < 0$ si determina il valore iniziale della variabile di stato ($v_C(0)$ o $i_L(0)$)
  - Se la risposta $y(t)$ che si vuole determinare non coincide con la variabile di stato
    - Si costruisce il circuito resistivo associato per $t > 0$
    - Si scrive l'equazione di uscita relativa a $y(t)$
    - Si inserisce nell'equazione il valore per $t = 0$ della variabile di stato
- **Determinazione di τ**
  - Si calcola la resistenza equivalente della parte resistiva del circuito con i generatori indipendenti azzerati, quindi si pone
    - $\tau = R_{eq}C$ per i circuiti RC
    - $\tau = L/R_{eq}$ per i circuiti RL

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (3)

- **Determinazione della soluzione particolare**
  - **Ingressi costanti**
    - Si esegue un'analisi in continua del circuito per t > 0
    - Nell'analisi in continua
      - il condensatore è sostituito da un circuito aperto
      - l'induttore è sostituito da un cortocircuito
    - ➡ Nel caso della variabile di stato, il calcolo della soluzione particolare corrisponde
      - al calcolo della tensione del generatore equivalente di Thévenin della parte resistiva del circuito, per i circuiti RC
      - al calcolo della corrente del generatore equivalente di Norton della parte resistiva del circuito, per i circuiti RL
  - **Ingressi sinusoidali**
    - Si analizza il circuito per t > 0 con il metodo simbolico