

# Circuiti dinamici

## Circuiti del secondo ordine

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 9-11-2013)

### Circuiti del secondo ordine

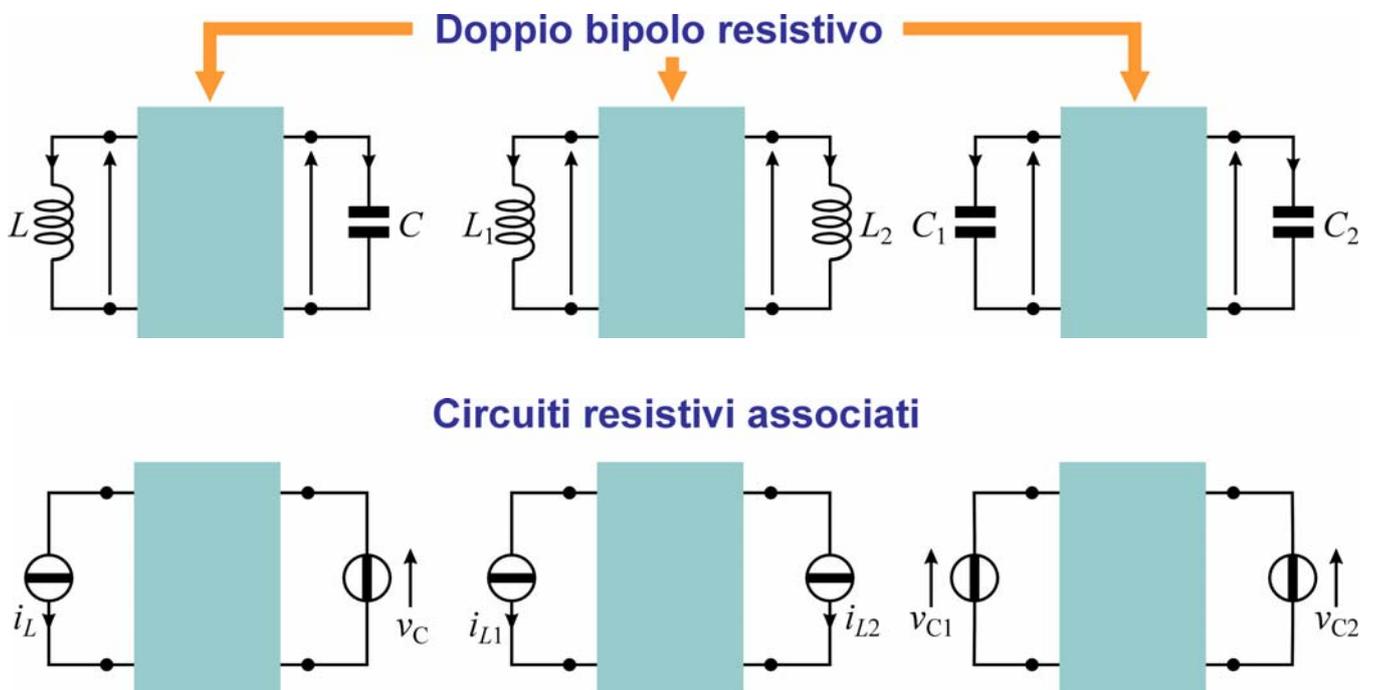
- **Circuiti del secondo ordine**: circuiti il cui stato è definito da due variabili  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$
- ➔ Per un circuito (non degenere) del secondo ordine le equazioni di stato hanno la forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + f_2(t) \end{cases}$$

- ◆  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sono delle combinazioni lineari degli ingressi

## Circuiti del secondo ordine

- I circuiti non degeneri del secondo ordine contengono due bipoli dinamici (condensatori o induttori) → si hanno tre possibilità:



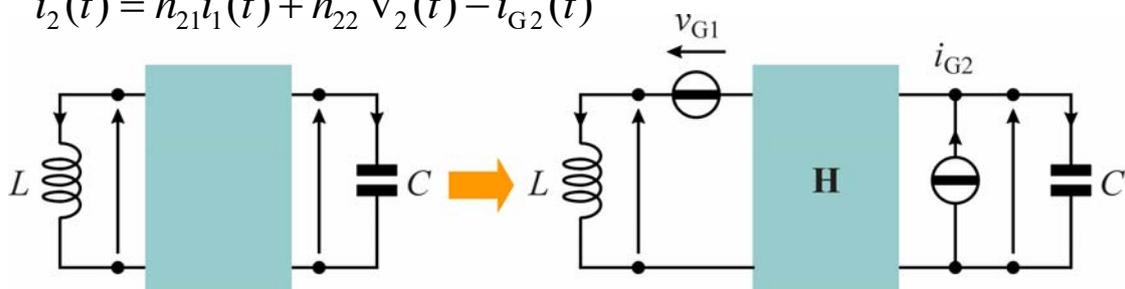
3

## Circuiti con un induttore e un condensatore (1)

- Il circuito è costituito da un doppio bipolo resistivo (formato da componenti lineari e generatori indipendenti) con le porte collegate a un induttore e un condensatore
- Se il circuito non è degenere il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione → è possibile fissare i valori di  $i_L$  e di  $v_C$ 
  - il doppio bipolo ammette la rappresentazione ibrida
  - Per il teorema di rappresentazione del doppio bipolo, le equazioni della parte resistiva del circuito sono

$$v_1(t) = h_{11}i_1(t) + h_{12}v_2(t) + v_{G1}(t)$$

$$i_2(t) = h_{21}i_1(t) + h_{22}v_2(t) - i_{G2}(t)$$



4

## Circuiti con un induttore e un condensatore (2)

- Inoltre si ha

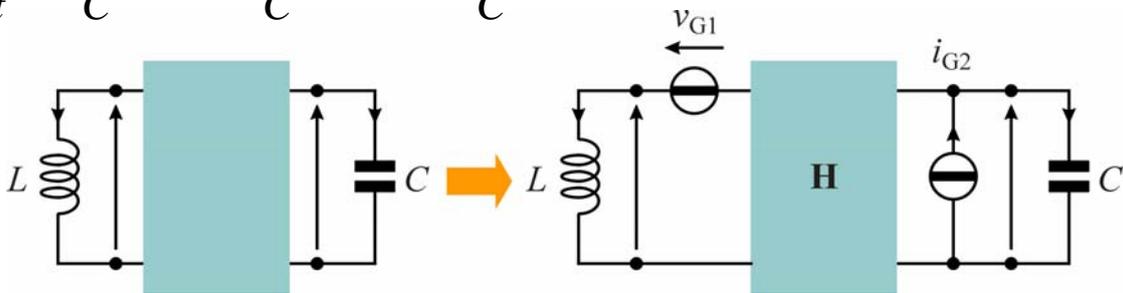
$$i_1 = -i_L \quad v_1 = v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_2 = v_C \quad i_2 = -i_C = -C \frac{dv_C}{dt}$$

- Quindi le equazioni di stato sono

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{h_{11}}{L} i_L(t) + \frac{h_{12}}{L} v_C(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L}$$

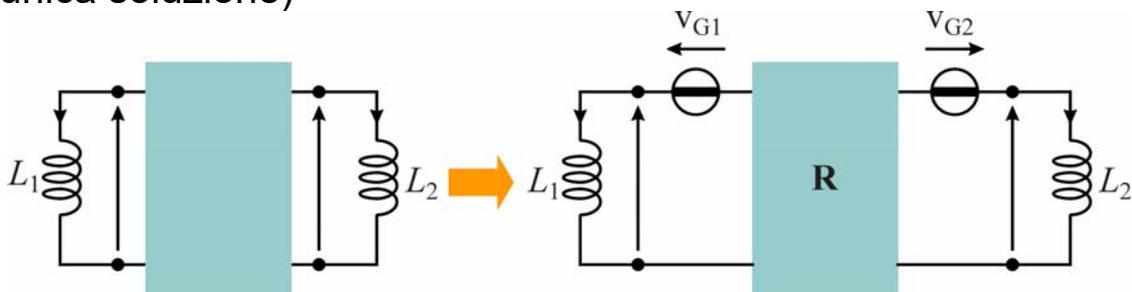
$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{h_{21}}{C} i_L(t) - \frac{h_{22}}{C} v_C(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C}$$



5

## Circuiti con due induttori

- Per un circuito non degenerare con due induttori, il doppio bipolo è comandato in corrente (→ il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione)



- Il doppio bipolo ammette la rappresentazione mediante di matrice di resistenza
- Le equazioni di stato sono

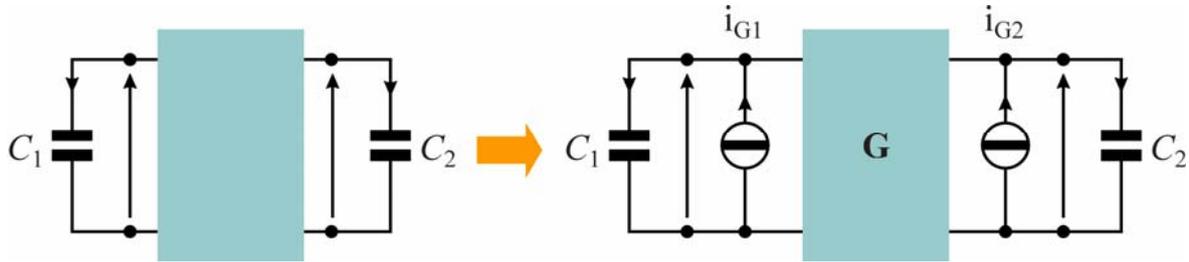
$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{r_{11}}{L_1} i_{L1}(t) - \frac{r_{12}}{L_1} i_{L2}(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L_1}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{r_{21}}{L_2} i_{L1}(t) - \frac{r_{22}}{L_2} i_{L2}(t) + \frac{v_{G2}(t)}{L_2}$$

6

## Circuiti con due condensatori

- Per un circuito non degenerare con due condensatori, il doppio bipolo è comandato in tensione (→ il circuito resistivo associato ammette un'unica soluzione)



- Il doppio bipolo ammette la rappresentazione mediante di matrice di conduttanza
- Le equazioni di stato sono

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{g_{11}}{C_1} v_{C1}(t) - \frac{g_{12}}{C_1} v_{C2}(t) + \frac{i_{G1}(t)}{C_1}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{g_{21}}{C_2} v_{C1}(t) - \frac{g_{22}}{C_2} v_{C2}(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C_2}$$

7

## Circuiti del 2° ordine reciproci

- Se il circuito è formato da componenti reciproci si ha

$$h_{12} = -h_{21} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d i_L}{dt} = -\frac{h_{11}}{L} i_L(t) - \frac{h_{21}}{L} v_C(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L} \\ \frac{d v_C}{dt} = \frac{h_{21}}{C} i_L(t) - \frac{h_{22}}{C} v_C(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C} \end{cases}$$

$$r_{12} = r_{21} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d i_{L1}}{dt} = -\frac{r_{11}}{L_1} i_{L1}(t) - \frac{r_{21}}{L_1} i_{L2}(t) + \frac{v_{G1}(t)}{L_1} \\ \frac{d i_{L2}}{dt} = -\frac{r_{21}}{L_2} i_{L1}(t) - \frac{r_{22}}{L_2} i_{L2}(t) + \frac{v_{G2}(t)}{L_2} \end{cases}$$

$$g_{12} = g_{21} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d v_{C1}}{dt} = -\frac{g_{11}}{C_1} v_{C1}(t) - \frac{g_{21}}{C_1} v_{C2}(t) + \frac{i_{G1}(t)}{C_1} \\ \frac{d v_{C2}}{dt} = -\frac{g_{21}}{C_2} v_{C1}(t) - \frac{g_{22}}{C_2} v_{C2}(t) + \frac{i_{G2}(t)}{C_2} \end{cases}$$

8

## Equazioni risolventi del secondo ordine (1)

- In generale la risoluzione del sistema delle equazioni di stato può essere ricondotta alla risoluzione di un'equazione del secondo ordine contenente una sola variabile di stato
- Per ottenere l'equazione risolvente si elimina una delle variabili dal sistema
  - ◆ Mediante una delle equazioni si esprime una delle variabili di stato in funzione dell'altra variabile e della derivata dell'altra variabile
  - ◆ Si sostituisce questa espressione nell'altra equazione

9

## Derivazione dell'equazione del secondo ordine in $x_1$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + f_2(t) \end{cases}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1(t) - \frac{1}{a_{12}} f_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{a_{12}} \frac{df_1}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = \frac{df_1}{dt} - a_{22} f_1(t) + a_{12} f_2(t)$$

10

## Nota

- Il procedimento non è applicabile se  $a_{12} = 0$  o  $a_{21} = 0$ 
  - ◆ Se  $a_{12} = 0$  nella prima equazione di stato non compare  $x_2(t)$ 
    - ➔  $x_1(t)$  soddisfa un'equazione differenziale del primo ordine
  - ◆ Se  $a_{21} = 0$  nella seconda equazione di stato non compare  $x_1(t)$ 
    - ➔  $x_2(t)$  soddisfa un'equazione differenziale del primo ordine
- Se il circuito è reciproco  $a_{12} = 0 \Leftrightarrow a_{21} = 0$ 
  - ➔ In questo caso il circuito si riduce a due circuiti del primo ordine disaccoppiati

11

## Equazioni risolventi del secondo ordine (2)

- Equazione risolvente in  $x_1$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = \frac{d f_1}{dt} - a_{22} f_1(t) + a_{12} f_2(t)$$

- Procedendo in modo analogo si trova l'equazione risolvente in  $x_2$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_2}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2(t) = \frac{d f_2}{dt} + a_{21} f_1(t) - a_{11} f_2(t)$$

- ➔ *Le equazioni del secondo ordine relative alle due variabili di stato differiscono solo per i termini noti*

12

## Equazioni risolventi del secondo ordine (3)

- Le due equazioni possono essere scritte nella forma

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_i}{dt} + \omega_0^2 x_i(t) = F_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

$$2\alpha = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{tr}(\mathbf{A})$$

$$\omega_0^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- ♦  $\alpha$  = **coefficiente di smorzamento**
- ♦  $\omega_0$  = **pulsazione naturale**

13

## Espressioni delle variabili di stato

- I primi membri delle equazioni in  $x_1$  e  $x_2$  sono uguali
  - ➔ per entrambe le variabili di stato l'equazione omogenea associata è la stessa
- Le variabili di stato possono essere espresse come
$$x_1(t) = x_{H1}(t) + x_{P1}(t)$$
$$x_2(t) = x_{H2}(t) + x_{P2}(t)$$
- $x_{P1}(t)$  e  $x_{P2}(t)$  rappresentano le soluzioni particolari
- $x_{H1}(t)$  e  $x_{H2}(t)$  derivano dall'integrale generale della stessa equazione omogenea
  - ➔ differiscono solo per i valori delle due costanti dipendenti dalle condizioni iniziali

14

## Condizioni iniziali

- Per determinare la soluzione occorre associare a ciascuna equazione differenziale due condizioni iniziali relative al valore all'istante  $t_0^+$  di  $x_j$  e della sua derivata
- I valori iniziali delle variabili di stato si ottengono studiando il comportamento del circuito per  $t = t_0^-$
- I valori all'istante  $t_0^+$  delle derivate delle variabili di stato si ottengono inserendo nelle equazioni di stato i valori delle variabili di stato all'istante  $t = t_0$

$$\begin{cases} \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t_0^+} = a_{11}x_1(t_0) + a_{12}x_2(t_0) + f_1(t_0^+) \\ \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t_0^+} = a_{21}x_1(t_0) + a_{22}x_2(t_0) + f_2(t_0^+) \end{cases}$$

15

## Determinazione della soluzione omogenea

- Per determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

- Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono dette **frequenze naturali** del circuito
- Si distinguono tre casi caratterizzati da valore positivo, nullo o negativo del discriminante  $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$ 
  - ◆ soluzioni reali distinte:  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$
  - ◆ soluzioni reali coincidenti:  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$
  - ◆ soluzioni complesse coniugate:  $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$

16

## Soluzioni reali distinte (1)

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta > 0$$

- Le frequenze naturali sono

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_d$$

- Se  $\alpha > 0$  e  $\omega_0^2 > 0$ , si ha  $\alpha_d < \alpha$  e quindi  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ 
  - Il circuito è asintoticamente stabile
  - In questo caso si dice che il circuito è **sovrasmorzato**

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$x_{Hi}(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t}$$

- Integrale generale dell'equazione completa:

$$x_i(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t} + x_{Pi}(t)$$

17

## Soluzioni reali distinte (2)

- Le costanti  $k_{1i}$  e  $k_{2i}$  si determinano imponendo le condizioni iniziali
- Assumendo, per semplicità,  $t_0 = 0$  si ha

$$\begin{cases} x_i(0) = k_{1i} + k_{2i} + x_{Pi}(0^+) \\ \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} = \lambda_1 k_{1i} + \lambda_2 k_{2i} + \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} \end{cases}$$



$$k_{1i} = \frac{\left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} - \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} - \lambda_2 [x_i(0) - x_{Pi}(0^+)]}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$k_{2i} = \frac{\left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} - \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} - \lambda_1 [x_i(0) - x_{Pi}(0^+)]}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

18

## Soluzioni reali coincidenti (1)

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

- Il valore comune delle due frequenze naturali è

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

- ◆ Se  $\alpha > 0$ , le soluzioni sono negative
- ➔ Il circuito è asintoticamente stabile
- ➔ In questo caso si dice che il circuito è **criticamente smorzato**

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$x_{Hi}(t) = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\alpha t} = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\omega_0 t}$$

- Integrale generale dell'equazione completa:

$$x_i(t) = (k_{1i} + k_{2i}t)e^{-\alpha t} + x_{Pi}(t)$$

19

## Soluzioni reali coincidenti (2)

- Le costanti  $k_{1i}$  e  $k_{2i}$  si determinano imponendo le condizioni iniziali
- Assumendo  $t_0 = 0$  si ha

$$\begin{cases} x_i(0) = k_{1i} + x_{Pi}(0^+) \\ \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} = -\alpha k_{1i} + k_{2i} + \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} \end{cases}$$



$$k_{1i} = x_i(0) - x_{Pi}(0^+)$$

$$k_{2i} = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} - \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} + \alpha [x_i(0) - x_{Pi}(0^+)]$$

20

## Soluzioni complesse coniugate (1)

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

- Le frequenze naturali sono

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

- Se  $\alpha > 0$ , le parti reali di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono negative
  - Il circuito è asintoticamente stabile
  - In questo caso si dice che il circuito è **sottosmorzato**
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:
$$x_{Hi}(t) = k_{1i}e^{(-\alpha+j\omega_d)t} + k_{2i}e^{(-\alpha-j\omega_d)t}$$
- Questa soluzione rappresenta la tensione di un condensatore o la corrente di un induttore, quindi ha significato fisico solo se assume valori reali per ogni  $t$

21

## Soluzioni complesse coniugate (2)

- Affinché  $x_{Hi}(t)$  sia reale occorre che sia  $k_{2i} = k_{1i}^*$

- Si può porre

$$k_{1i} = \frac{A_i}{2} e^{j\varphi_i} \quad (A_i, \varphi_i \in \mathbb{R}, \quad A_i \geq 0) \quad \Rightarrow \quad k_{2i} = \frac{A_i}{2} e^{-j\varphi_i}$$

- Utilizzando la formula di Eulero si ottiene

$$\begin{aligned} x_{Hi}(t) &= \frac{A_i}{2} e^{j\varphi_i} \cdot e^{(-\alpha+j\omega_d)t} + \frac{A_i}{2} e^{-j\varphi_i} \cdot e^{(-\alpha-j\omega_d)t} = \\ &= A_i e^{-\alpha t} \left[ \frac{e^{j(\omega_d t + \varphi_i)} + e^{-j(\omega_d t + \varphi_i)}}{2} \right] = A_i e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi_i) \end{aligned}$$

- Integrale generale dell'equazione completa:

$$x_i(t) = A_i e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi_i) + x_{Pi}(t)$$

- Anche in questo caso si devono determinare due costanti reali ( $A_i$  e  $\varphi_i$ ) imponendo le condizioni iniziali

22

## Soluzioni complesse coniugate (3)

- Assumendo  $t_0 = 0$ , si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_i(0) = A_i \cos(\varphi_i) + x_{Pi}(0^+) \\ \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} = -\alpha A_i \cos(\varphi_i) - \omega_d A_i \sin(\varphi_i) + \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_i \cos(\varphi_i) = x_i(0) - x_{Pi}(0^+) = a \\ A_i \sin(\varphi_i) = \frac{1}{\omega_d} \left\{ \left. \frac{dx_{Pi}}{dt} \right|_{0^+} - \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{0^+} - \alpha [x_i(0) - x_{Pi}(0^+)] \right\} = b \end{cases}$$



$$A_i = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \arctg(b/a) & a > 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(b) & a = 0 \\ \arctg(b/a) + \pi \cdot \text{sgn}(b) & a < 0 \end{cases}$$

23

## Espressioni delle risposte (1)

- Le altre risposte sono combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi

$$y_i(t) = c_{i1}x_1(t) + c_{i2}x_2(t) + g_i(t)$$

- ➔ La generica risposta  $y_i(t)$  può essere espressa come

$$y_i(t) = y_{Hi}(t) + y_{Pi}(t)$$

- $y_{Pi}(t)$  è un termine che dipende solo dagli ingressi
- $y_{Hi}(t)$  ha la stessa forma di  $x_{H1}(t)$  e  $x_{H2}(t)$
- Quindi tutte le tensioni e le correnti del circuito hanno, a seconda del valore di  $\Delta$ , espressioni del tipo

$$y_i(t) = k_{1i}e^{\lambda_1 t} + k_{2i}e^{\lambda_2 t} + y_{Pi}(t) \quad \text{per } \Delta > 0$$

$$y_i(t) = k_{1i}e^{-\alpha t} + k_{2i}te^{-\alpha t} + y_{Pi}(t) \quad \text{per } \Delta = 0$$

$$y_i(t) = A_i e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi_i) + y_{Pi}(t) \quad \text{per } \Delta < 0$$

24

## Espressioni delle risposte (2)

- Se il circuito è asintoticamente stabile, per  $t \rightarrow \infty$  le componenti  $y_{Hi}(t)$  tendono a zero (**componenti transitorie**)

- Per  $t$  abbastanza grande, cioè per

$$t \gg \max\left(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}\right) \quad \text{se } \Delta > 0$$

$$t \gg \frac{1}{\alpha} \quad \text{se } \Delta \leq 0$$

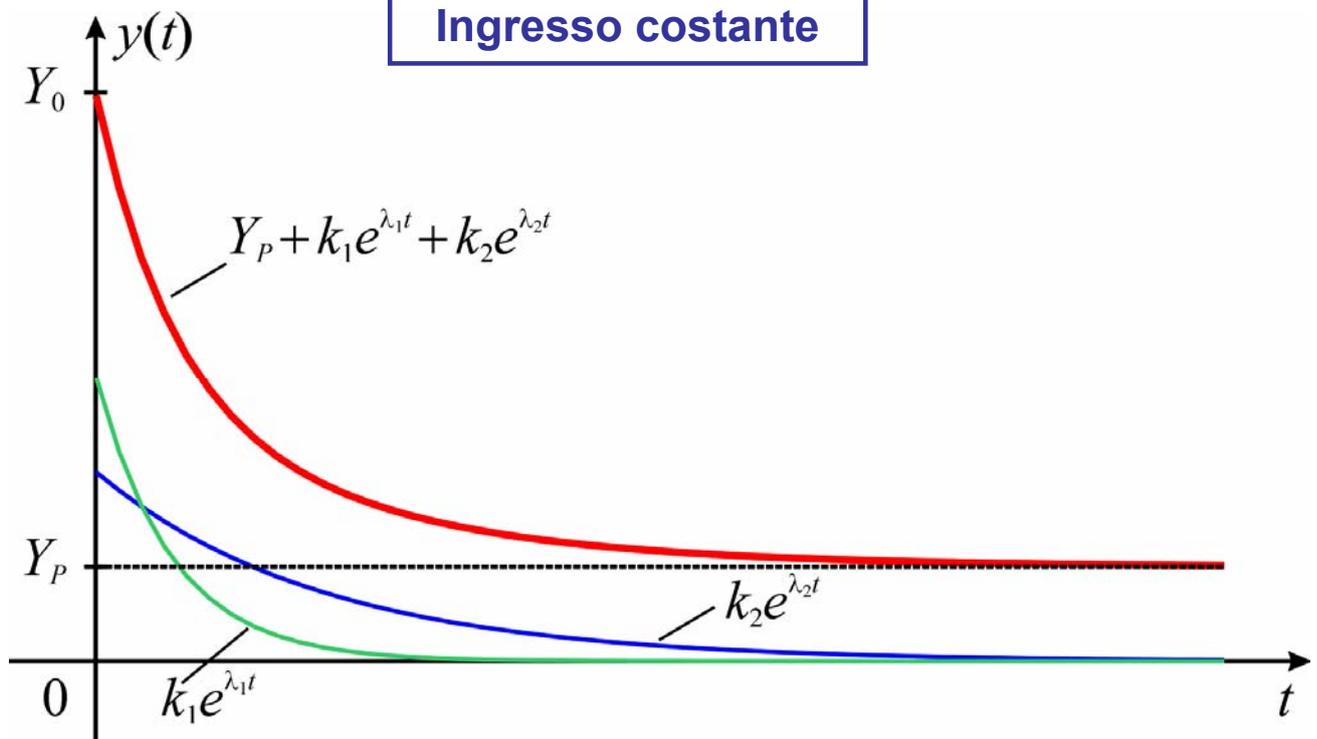
(dove  $\gg$  in pratica significa 5÷7 volte maggiore) le risposte si identificano con le componenti  $y_{Pi}(t)$  (**componenti di regime**) dipendenti solo dagli ingressi

- In particolare
  - ◆ se gli ingressi sono costanti il circuito si porta in regime stazionario
  - ◆ se gli ingressi sono sinusoidali e isofrequenziali il circuito si porta in regime sinusoidale

25

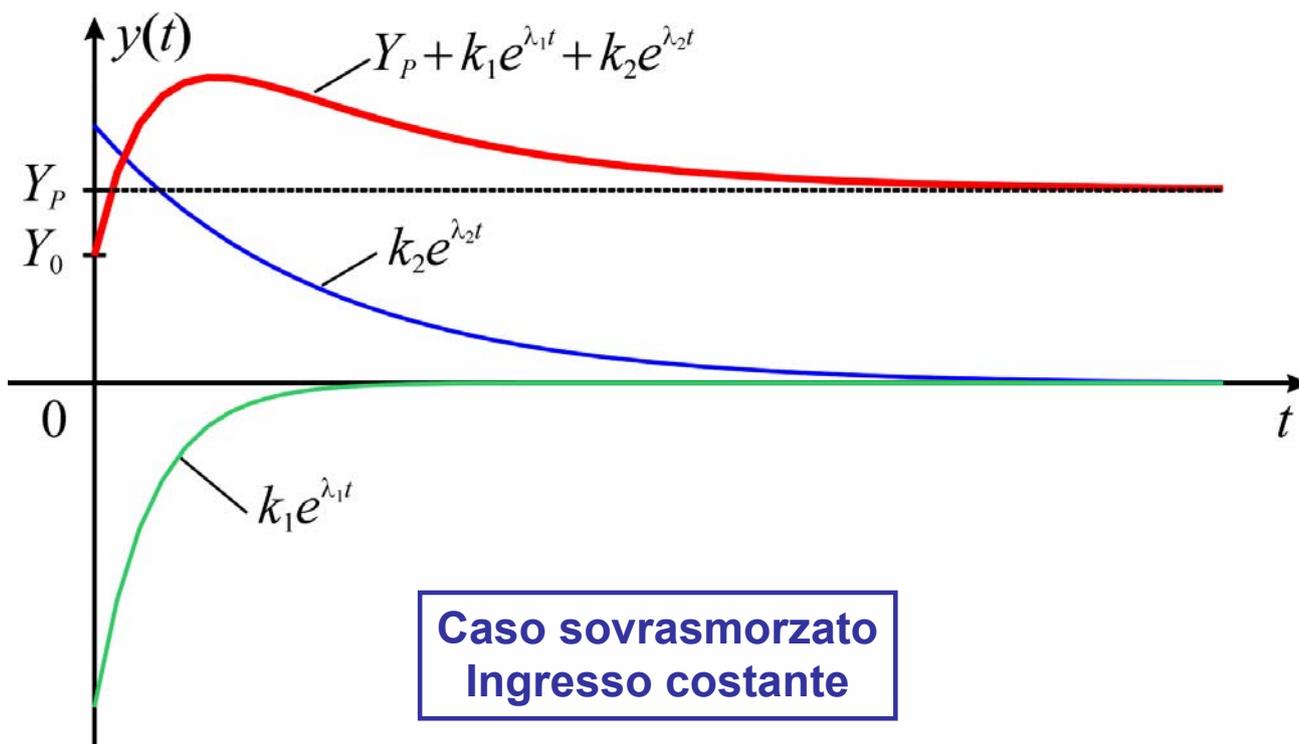
## Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sovrasmorzato  
Ingresso costante



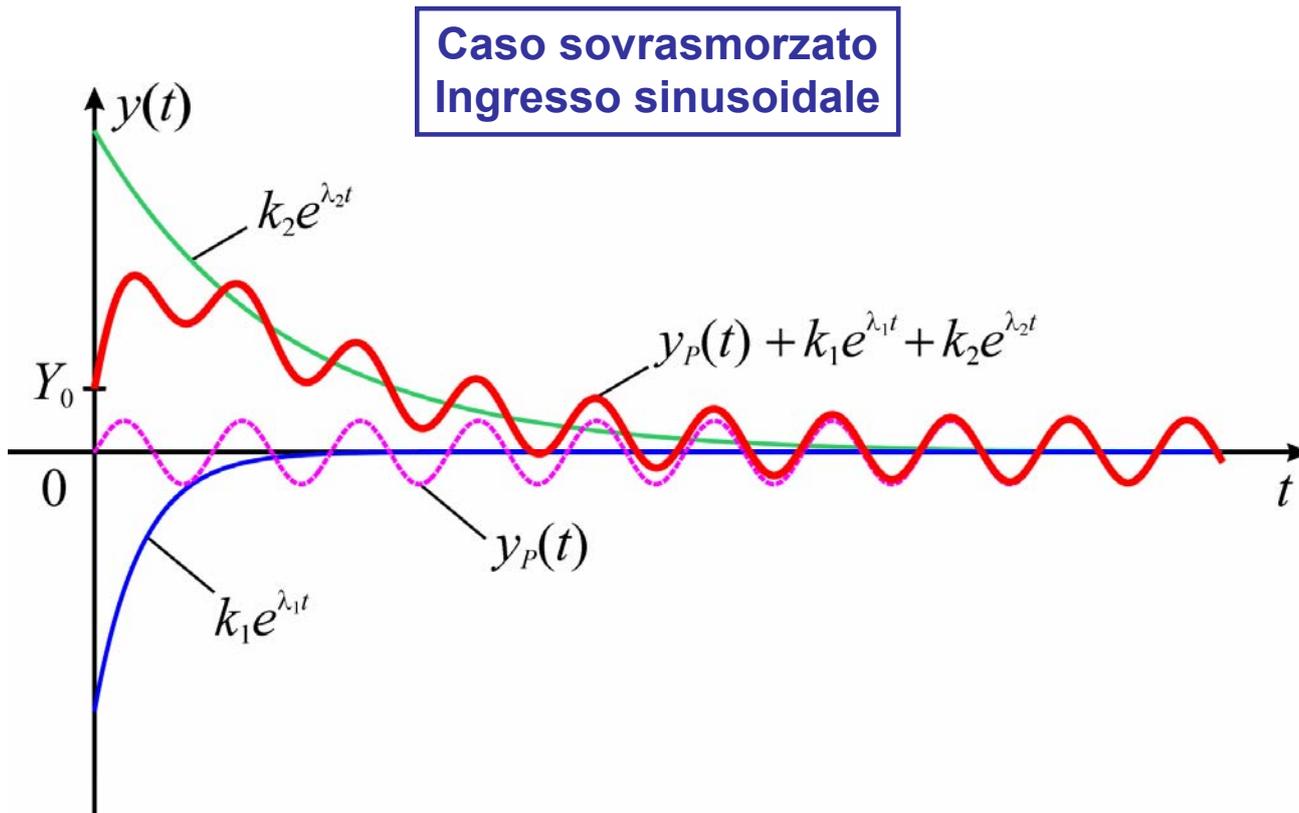
26

## Risposta di un circuito del secondo ordine



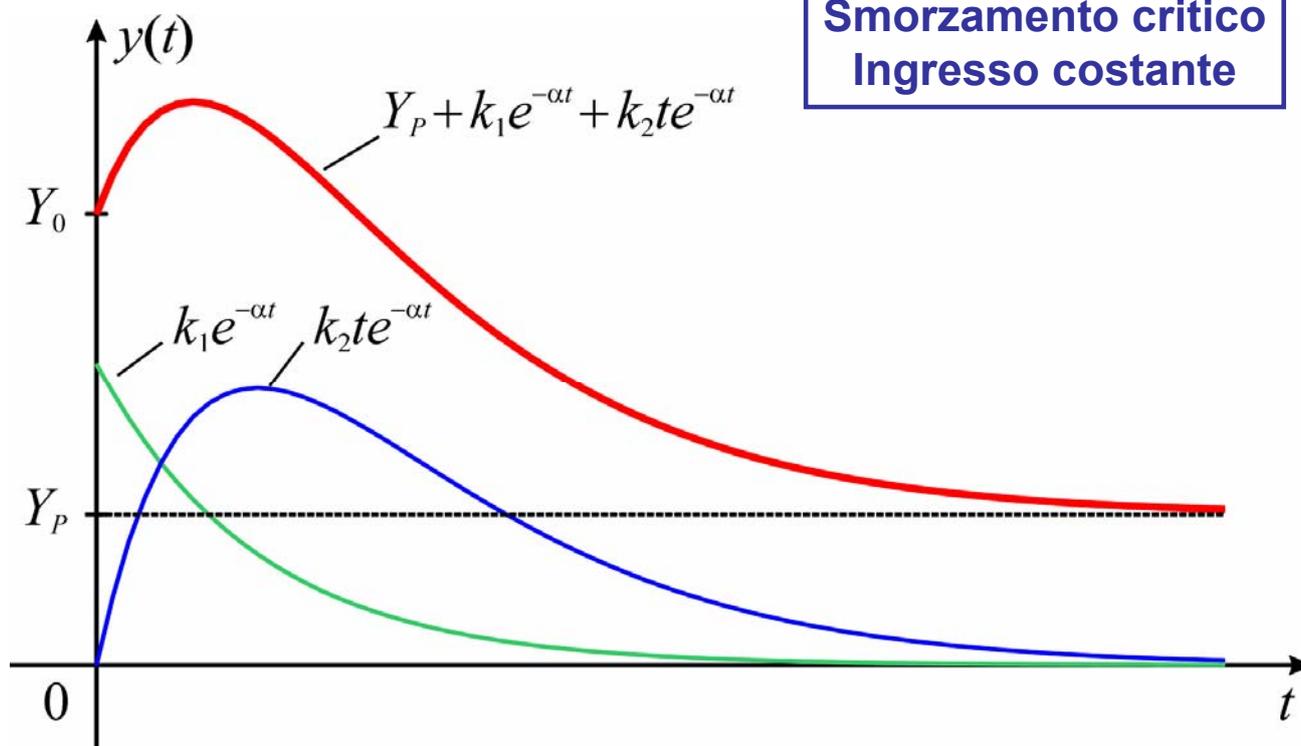
27

## Risposta di un circuito del secondo ordine



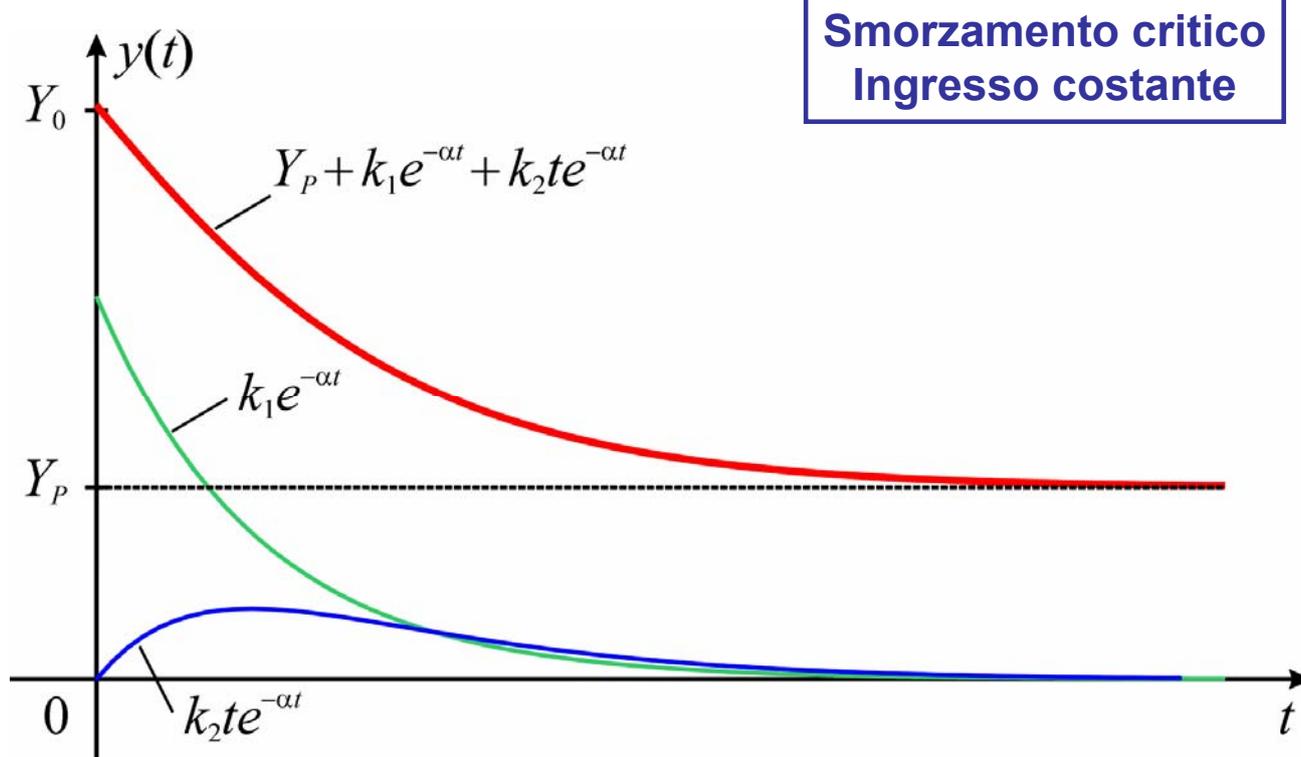
28

## Risposta di un circuito del secondo ordine



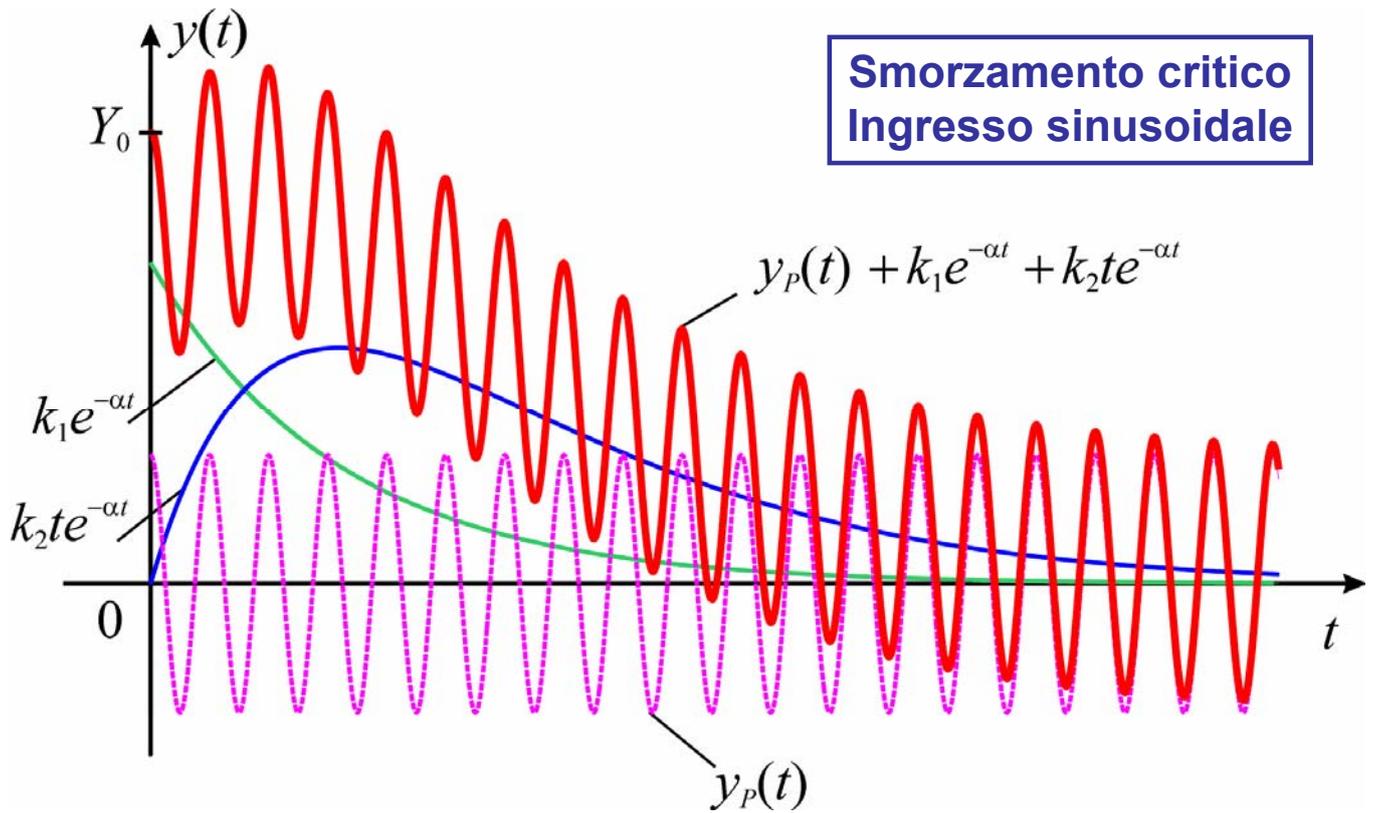
29

## Risposta di un circuito del secondo ordine



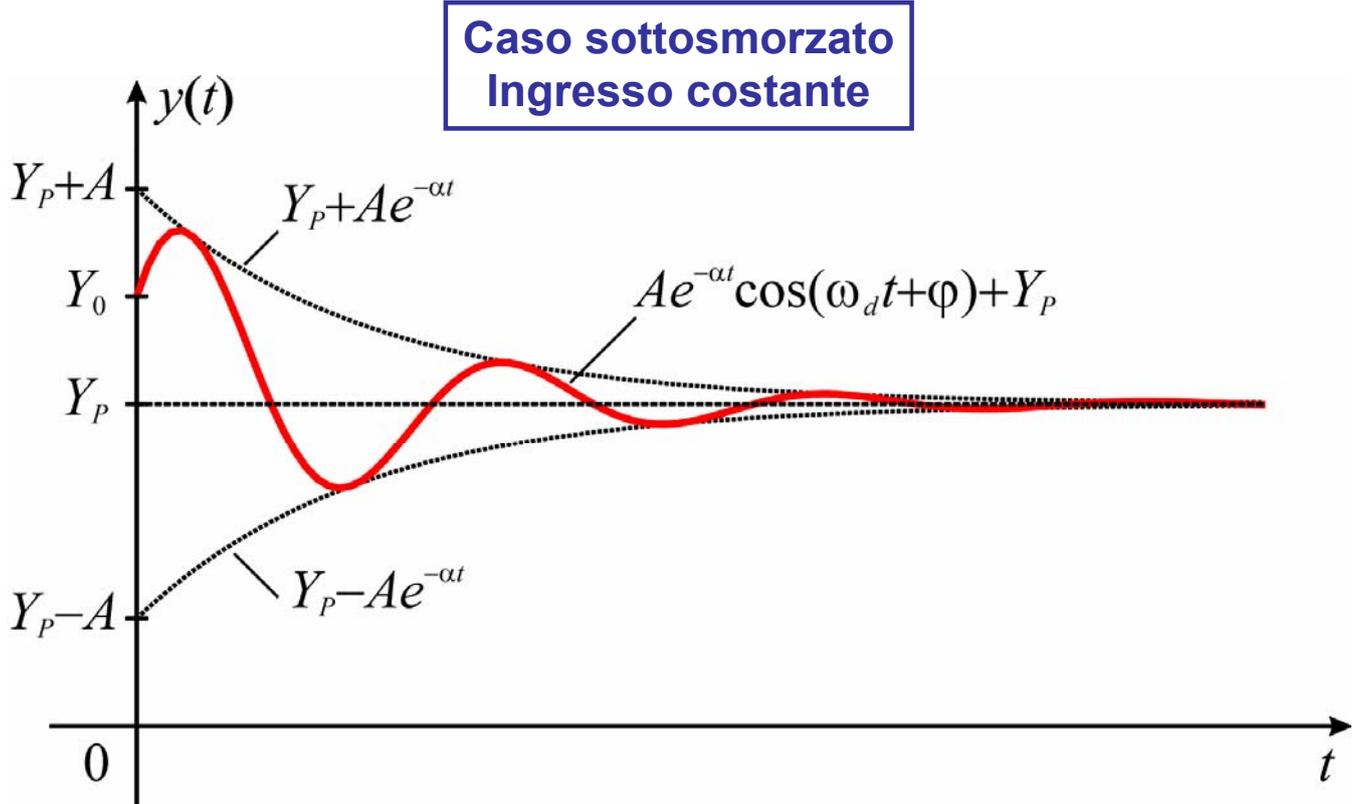
30

# Risposta di un circuito del secondo ordine



31

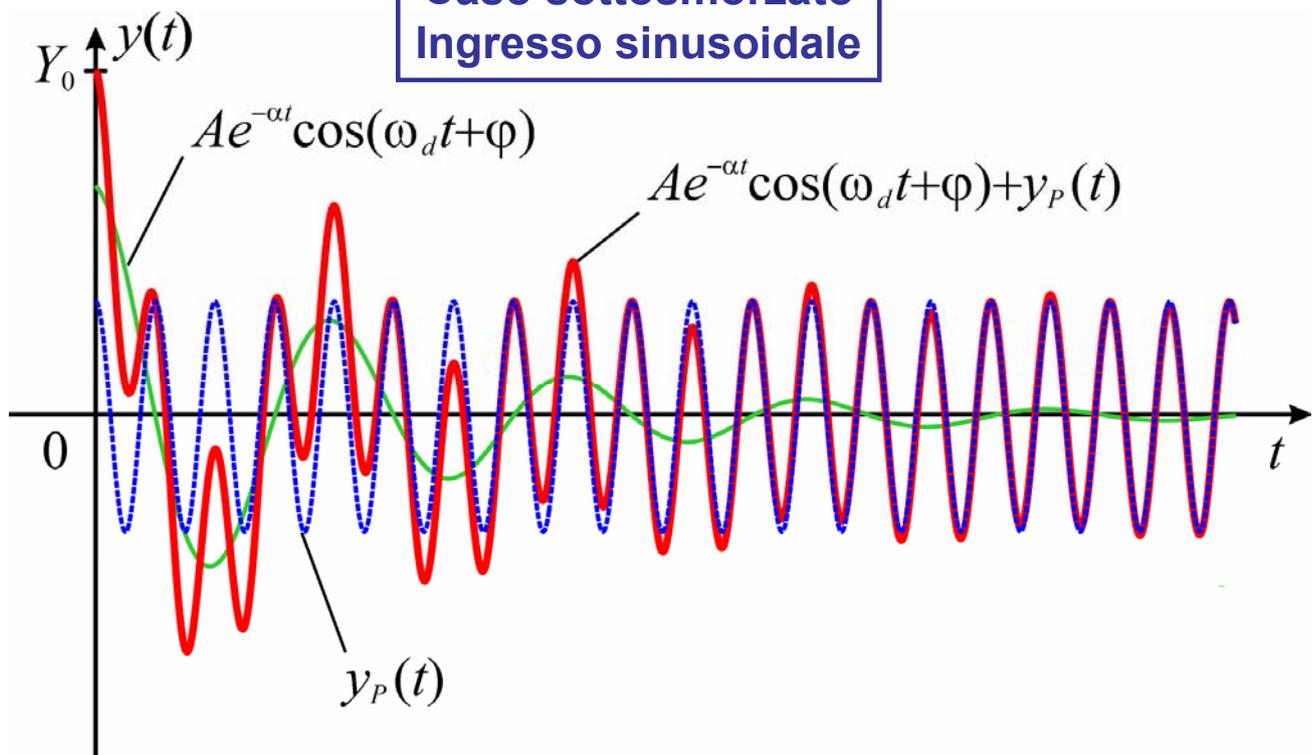
# Risposta di un circuito del secondo ordine



32

## Risposta di un circuito del secondo ordine

Caso sottosmorzato  
Ingresso sinusoidale



33

## Risposta di un circuito passivo (1)

- Un circuito formato da componenti passivi e generatori indipendenti è stabile
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni distinte con parte reale non positiva oppure due soluzioni coincidenti negative, quindi:
  - ◆ La somma delle soluzioni è non positiva
  - ◆ Il prodotto delle soluzioni è non negativo
- ➔ I coefficienti dell'equazione caratteristica soddisfano le condizioni

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = -2\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = \omega_0^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$$

34

## Risposta di un circuito passivo (2)

- Le condizioni precedenti possono essere ricavate anche a partire dalle proprietà delle matrici  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{H}$  di un due porte passivo
- Nei tre casi di circuito con due induttori, due condensatori o un condensatore e un induttore si ha, rispettivamente

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{r_{11}}{L_1} - \frac{r_{22}}{L_2}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{g_{11}}{C_1} - \frac{g_{22}}{C_2}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = -\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C}$$

- Se il circuito è passivo, gli elementi sulla diagonale principale delle matrici  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{H}$  sono non negativi, quindi

$$\text{tr}(\mathbf{A}) \leq 0$$

35

## Risposta di un circuito passivo (3)

- Per un doppio bipolo passivi valgono, inoltre le condizioni

$$r_{11}r_{22} \geq \left(\frac{r_{12} + r_{21}}{2}\right)^2 \quad g_{11}g_{22} \geq \left(\frac{g_{12} + g_{21}}{2}\right)^2 \quad h_{11}h_{22} \geq \left(\frac{h_{12} + h_{21}}{2}\right)^2$$

- Queste condizioni implicano che sia

$$a_{11}a_{22} \geq \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)^2$$

- Quindi si ha anche

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)^2 - a_{12}a_{21} = \left(\frac{a_{12} - a_{21}}{2}\right)^2$$

- E, di conseguenza,

$$\det(\mathbf{A}) \geq \left(\frac{a_{12} - a_{21}}{2}\right)^2 \geq 0$$

36

## Risposta di un circuito reciproco

- Se il circuito è reciproco si può avere  $\Delta \leq 0$  solo se i due componenti dinamici sono un induttore e un condensatore

### Dimostrazione:

- Il discriminante dell'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned}\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2 &= \frac{1}{4} \text{tr}^2(\mathbf{A}) - \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{4} (a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= \frac{1}{4} (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

- Per un circuito reciproco con due induttori o due condensatori  $a_{12}$  e  $a_{21}$  hanno lo stesso segno
  - ➔ il discriminante è positivo
- Per un circuito reciproco con un induttore e un condensatore  $a_{12}$  e  $a_{21}$  hanno segno opposto
  - ➔ il discriminante può essere positivo, nullo o negativo

37

## Analisi di circuiti del secondo ordine - Riepilogo (1)

- Si studia il circuito per  $t = t_0^-$  e si determinano i valori iniziali (all'istante  $t = t_0$ ) delle variabili di stato
- Si costruisce il circuito resistivo associato per  $t > t_0$
- Analizzando il circuito resistivo associato si ricavano
  - ◆ le equazioni di stato
  - ◆ le equazioni di uscita relative alle (eventuali) altre risposte richieste
- Si elimina una delle variabili di stato dalle equazioni di stato
  - ➔ Si ricava un'equazione differenziale del secondo ordine nell'altra variabile

38

## Analisi di circuiti del secondo ordine - Riepilogo (2)

- Si ricava la condizione iniziale relativa alla derivata inserendo i valori iniziali delle variabili di stato in una delle equazioni di stato
- Si risolve l'equazione differenziale e si determina l'andamento di una delle variabili di stato
- Si ricava l'altra variabile di stato mediante l'espressione che è stata utilizzata per eliminarla dal sistema
- Si determinano le altre risposte inserendo le espressioni delle variabili di stato nelle equazioni di uscita

(Le variabili coniugate possono essere calcolate anche sostituendo le espressioni delle variabili di stato nelle equazioni dei componenti dinamici)

39

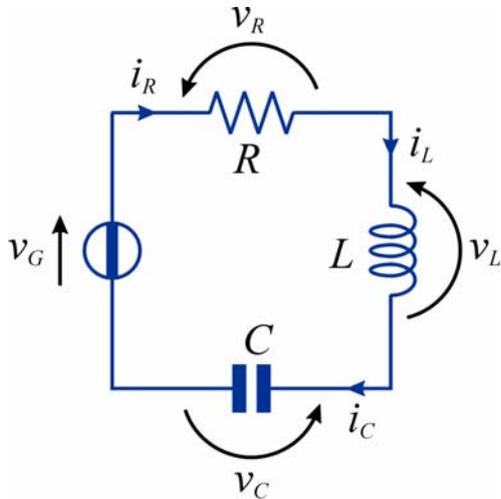
## Analisi di circuiti del 2° ordine – Metodo diretto

- Se la componente di regime  $y_{Pj}(t)$  può essere ricavata direttamente (es. regime stazionario o sinusoidale) è possibile calcolare le risposte con un procedimento semplificato:
  - ◆ Dalle equazioni di stato si ricava l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$$
  - ◆ Risolta l'equazione caratteristica, si ricava  $y_{Hi}(t)$
  - ◆ Si determinano le due costanti contenute in  $y_{Hi}(t)$  imponendo che  $y_i(t) = y_{Hi}(t) + y_{Pi}(t)$  soddisfi le condizioni iniziali
  - ◆ Se la risposta che si deve valutare non coincide con una variabile di stato, le condizioni iniziali si ottengono sostituendo
    - i valori iniziali delle variabili di stato nell'equazione di uscita
    - i valori iniziali delle derivate delle variabili di stato nell'equazione ottenuta derivando membro a membro l'equazione di uscita

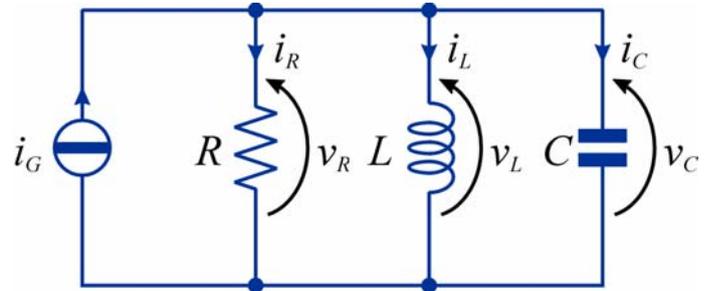
40

# Circuiti elementari del secondo ordine

## Circuito RLC serie



## Circuito RLC parallelo



41

## Circuito RLC serie

- **LKI:**  $i_C(t) = i_L(t) = i_R(t)$
- **LKV:**  $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti:**

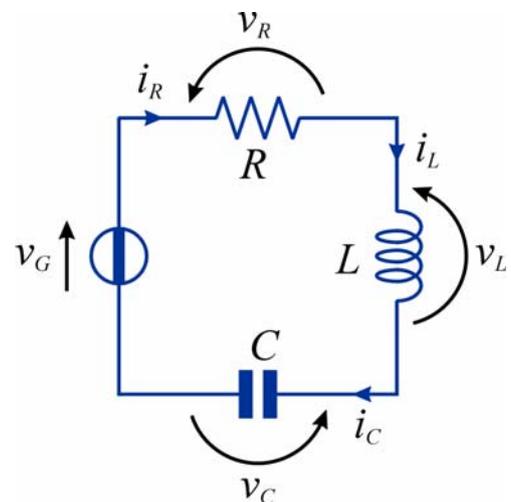
$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri_R(t) = RC \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = LC \frac{d^2v_C}{dt^2}$$



$$LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = v_G(t)$$



42

## Circuito RLC parallelo

- **LKI:**  $i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_G(t)$
- **LKV:**  $v_C(t) = v_L(t) = v_R(t)$
- **Componenti:**

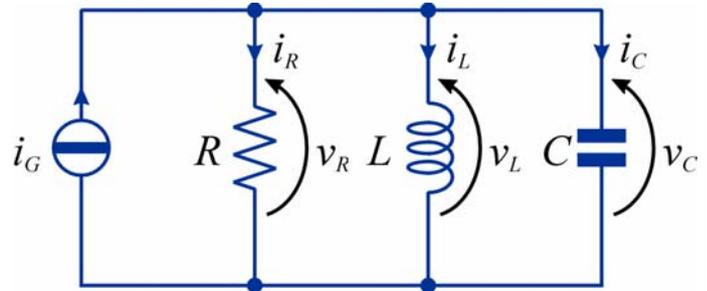
$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$



$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L(t) = i_G(t)$$



43

## Equazione risolvente

- Le due equazioni possono essere poste nella forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 f(t)$$

$f(t)$  = grandezza impressa del generatore

- Il coefficiente di smorzamento  $\alpha$  è

- ◆  $\alpha = \frac{R}{2L}$  per il circuito RLC serie

- ◆  $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{G}{2C}$  per il circuito RLC parallelo

- La pulsazione naturale  $\omega_0$  vale

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

➔  $\omega_0$  è pulsazione di risonanza del bipolo RLC

- Il rapporto  $Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha}$  è il fattore di merito del bipolo RLC

44

## Risposte di un circuito RLC (1)

- Per il circuito RLC serie, il discriminante dell'equazione caratteristica si annulla se

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$$

- ◆  $R_C$  è detta **resistenza critica**

- Per il circuito RLC parallelo, il discriminante si annulla se

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{G^2}{4C^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow G = 2\sqrt{\frac{C}{L}} = G_C$$

- ◆  $G_C$  è detta **conduttanza critica**

- In termini di fattore di merito, dato che  $\alpha$  e  $\omega_0$  per un circuito passivo non possono essere negativi, per entrambi i circuiti si ha

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \alpha = \omega_0 \Rightarrow Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

45

## Risposte di un circuito RLC (2)

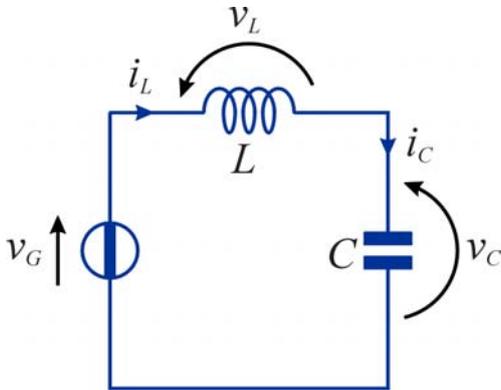
- Il circuito RLC serie è
  - ◆ sovrasmorzato per  $R > R_C$
  - ◆ criticamente smorzato per  $R = R_C$
  - ◆ sottosmorzato per  $R < R_C$
- Il circuito RLC parallelo è
  - ◆ sovrasmorzato per  $G > G_C$
  - ◆ criticamente smorzato per  $G = G_C$
  - ◆ sottosmorzato per  $G < G_C$
- In termini di fattore di merito, per entrambi i circuiti si ha
  - ◆ caso sovrasmorzato per  $Q_0 < 1/2$
  - ◆ caso criticamente smorzato per  $Q_0 = 1/2$
  - ◆ caso sottosmorzato per  $Q_0 > 1/2$

46

## Circuiti LC (1)

- Come casi limite per  $R \rightarrow 0$  per il circuito RLC serie e per  $G \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ) per il circuito RLC parallelo si ha

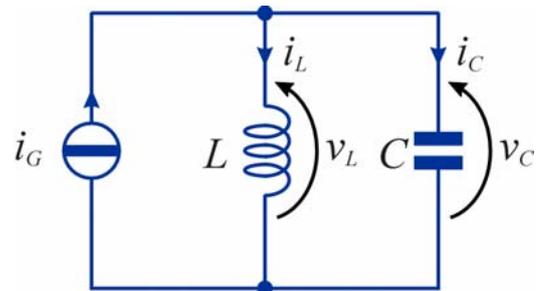
### Circuito LC serie



$$R \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} \rightarrow 0$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} \rightarrow \infty$$

### Circuito LC parallelo



$$G \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \frac{G}{2C} \rightarrow 0$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} \rightarrow \infty$$

47

## Circuiti LC (2)

- Le equazioni differenziali (rispettivamente in  $v_C$  e  $i_L$ ) diventano

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 f(t)$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie coniugate

$$\Delta = -\omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \pm j\omega_0$$

- ♦ In questo caso si dice che il circuito è **senza perdite**

- L'integrale generale dell'equazione omogenea è una funzione sinusoidale di pulsazione  $\omega_0$

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- ♦ non si annulla per  $t \rightarrow \infty$  ma rimane limitata

- ➔ il circuito è **semplicemente stabile**

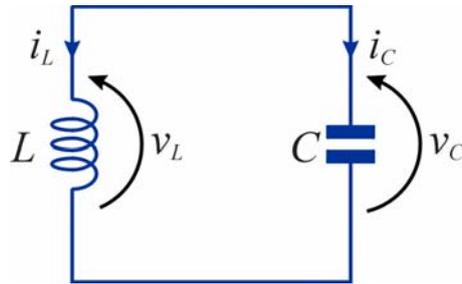
- L'espressione della risposta completa è

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_p(t)$$

48

## Oscillatore armonico (1)

- Se l'ingresso è nullo, i circuiti LC serie e parallelo si riducono al circuito seguente



**Oscillatore  
armonico**

- Considerando (per esempio) l'equazione in  $v_C$  si ottiene

$$v_C(t) = v_L(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Quindi si ha anche

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C \frac{dv_C}{dt} = \omega_0 C V_M \sin(\omega_0 t + \varphi_V) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_M \sin(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- ➔ La tensione e la corrente sono sinusoidali con pulsazione  $\omega_0$

49

## Oscillatore armonico (2)

- Energia accumulata nel condensatore

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Energia accumulata nell'induttore

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- ➔  $w_C(t)$  è massima quando  $w_L(t)$  si annulla e viceversa

- Energia totale

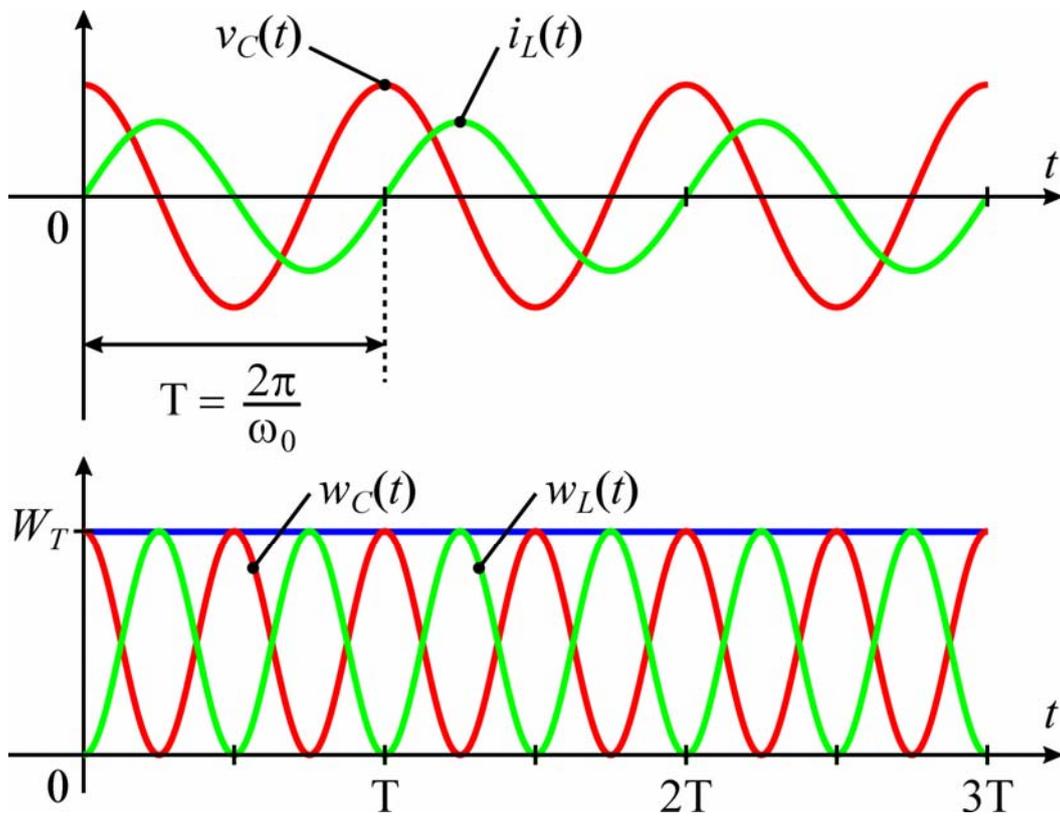
$$W_T = w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C V_M^2$$

- L'energia totale è costante e coincide con i valori massimi assunti da  $w_C(t)$  e da  $w_L(t)$

- ➔ Si ha uno scambio continuo di energia tra il condensatore e l'induttore

50

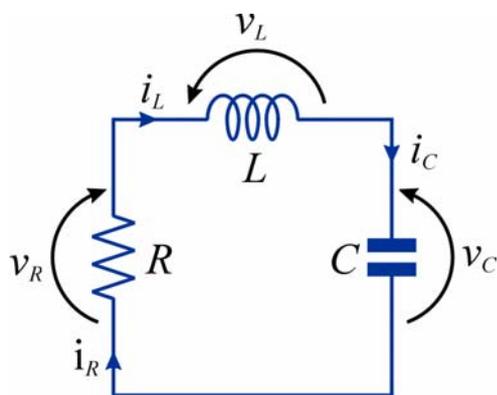
## Oscillatore armonico (3)



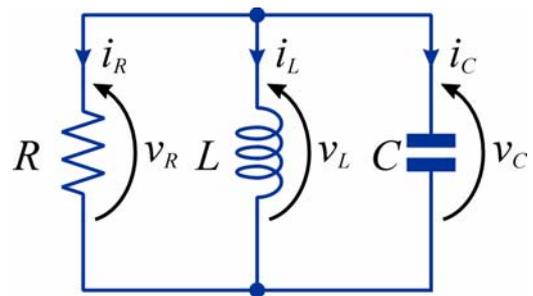
51

## Oscillatore smorzato (1)

- A partire dal valore 0, si incrementa la resistenza del resistore in serie a  $L$  e  $C$  o la conduttanza del resistore in parallelo a  $L$  e  $C$
- ➔ A causa della dissipazione nel resistore, l'energia accumulata nel circuito diminuisce progressivamente e tende a zero per  $t \rightarrow \infty$



$$R \uparrow \Rightarrow \alpha \uparrow \quad Q_0 \downarrow$$



$$G \uparrow \Rightarrow \alpha \uparrow \quad Q_0 \downarrow$$

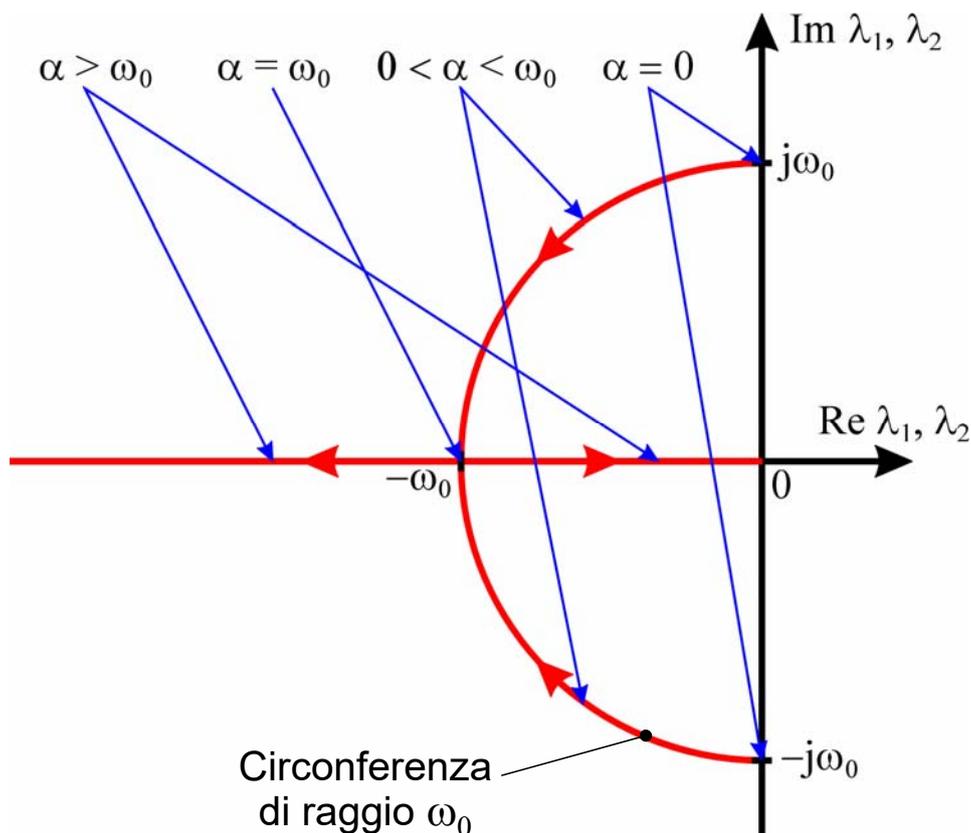
52

## Oscillatore smorzato (2)

- Inizialmente il circuito è sottosmorzato
  - ◆ l'ampiezza delle oscillazioni decresce come  $e^{-\alpha t}$
  - ◆ la pulsazione  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  diminuisce all'aumentare di  $\alpha$
- Aumentando  $\alpha$  si raggiunge la condizione di smorzamento critico per  $\alpha = \omega_0 \Rightarrow R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad G = G_c = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 
  - ◆ in queste condizioni la pulsazione  $\omega_d$  si annulla
  - ➔ a partire da questo punto nelle risposte dei circuiti non sono più presenti i termini oscillanti
- Aumentando ulteriormente  $\alpha$  il circuito diviene sovrasmorzato
  - ◆ al crescere di  $\alpha$  una delle soluzioni dell'equazione caratteristica tende a  $-\infty$  mentre l'altra tende a zero
  - ➔ per  $t \rightarrow \infty$  la risposta tende a zero sempre più lentamente

53

## Luogo delle soluzioni dell'equazione caratteristica



54

## Oscillatore smorzato (3)

- A parità di  $\omega_0$  la risposta con smorzamento critico è quella che tende a zero più rapidamente per  $t \rightarrow \infty$

- **Dimostrazione**

- ◆ In condizioni di smorzamento critico ( $\alpha = \omega_0$ ) le risposte del circuito sono del tipo

$$x_C(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\omega_0 t}$$

- ◆ caso sottosmorzato

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{con } \alpha < \omega_0 \Rightarrow \alpha - \omega_0 < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_C(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 t}{A \cos(\omega_0 t + \varphi)} \cdot e^{(\alpha - \omega_0)t} = 0$$

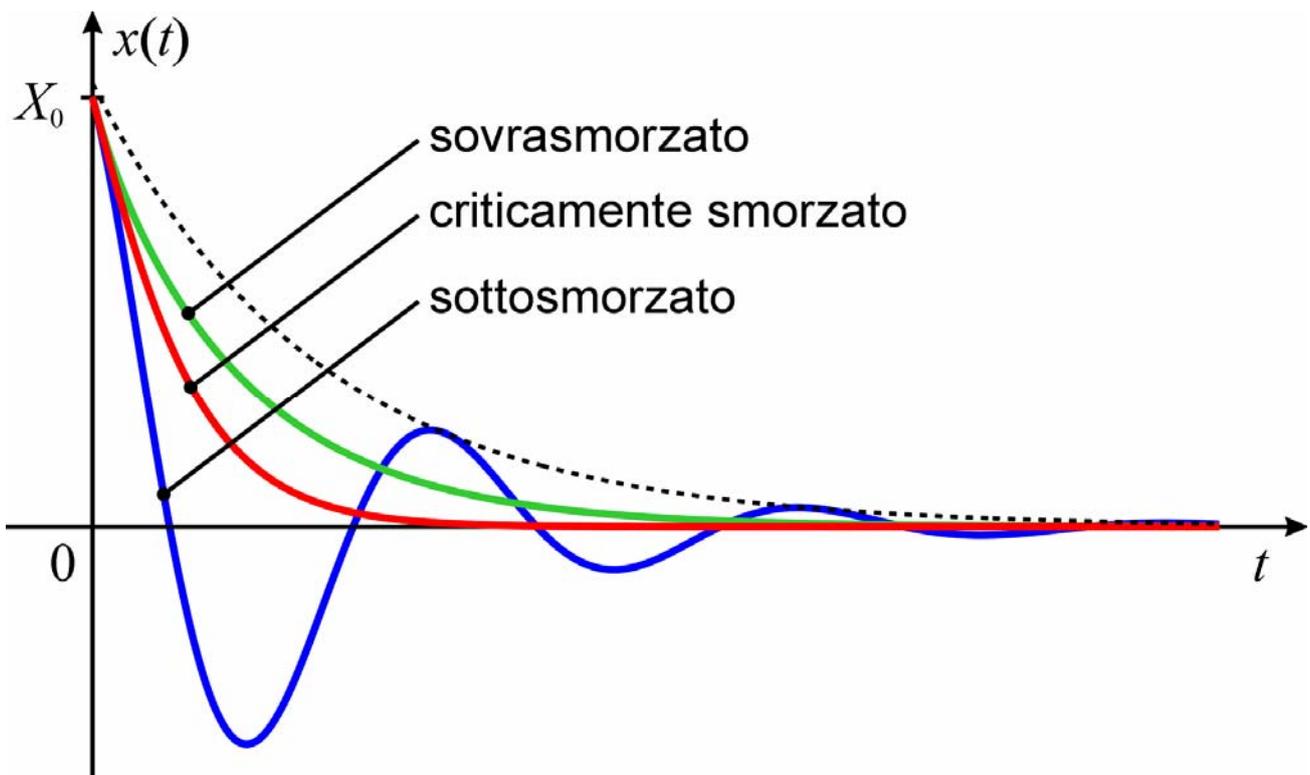
- ◆ caso sovrasmorzato

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \lambda_1 < -\omega_0 < \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \omega_0 < 0 \\ \lambda_2 + \omega_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_C(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 t}{k_1 e^{(\omega_0 + \lambda_1)t} + k_2 e^{(\omega_0 + \lambda_2)t}} = 0$$

55

## Oscillatore smorzato (4)



56

## Oscillatore armonico forzato (1)

- Si considera un circuito LC serie con un generatore di tensione sinusoidale

$$V_G(t) = V_{GM} \cos(\omega t + \vartheta)$$

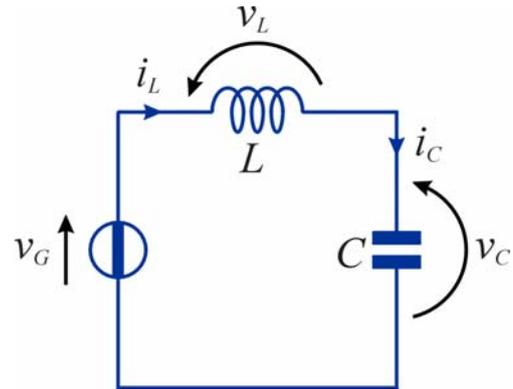
- Se  $\omega \neq \omega_0$ , l'equazione in  $v_C$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \omega_0^2 v_C(t) = \omega_0^2 V_{GM} \cos(\omega t + \vartheta)$$

ammette una soluzione particolare sinusoidale con pulsazione  $\omega$

- La soluzione particolare può essere determinata direttamente mediante il metodo simbolico

$$\mathbf{V}_{CP} = \mathbf{V}_G \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{\mathbf{V}_G}{1 - \omega^2 LC} = \frac{\omega_0^2 \mathbf{V}_G}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



57

## Oscillatore armonico forzato (2)

- Soluzione particolare

$$v_{CP}(t) = \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \vartheta)$$

- Integrale generale dell'equazione completa

$$v_C(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \vartheta)$$

- Per la corrente dell'induttore si ha

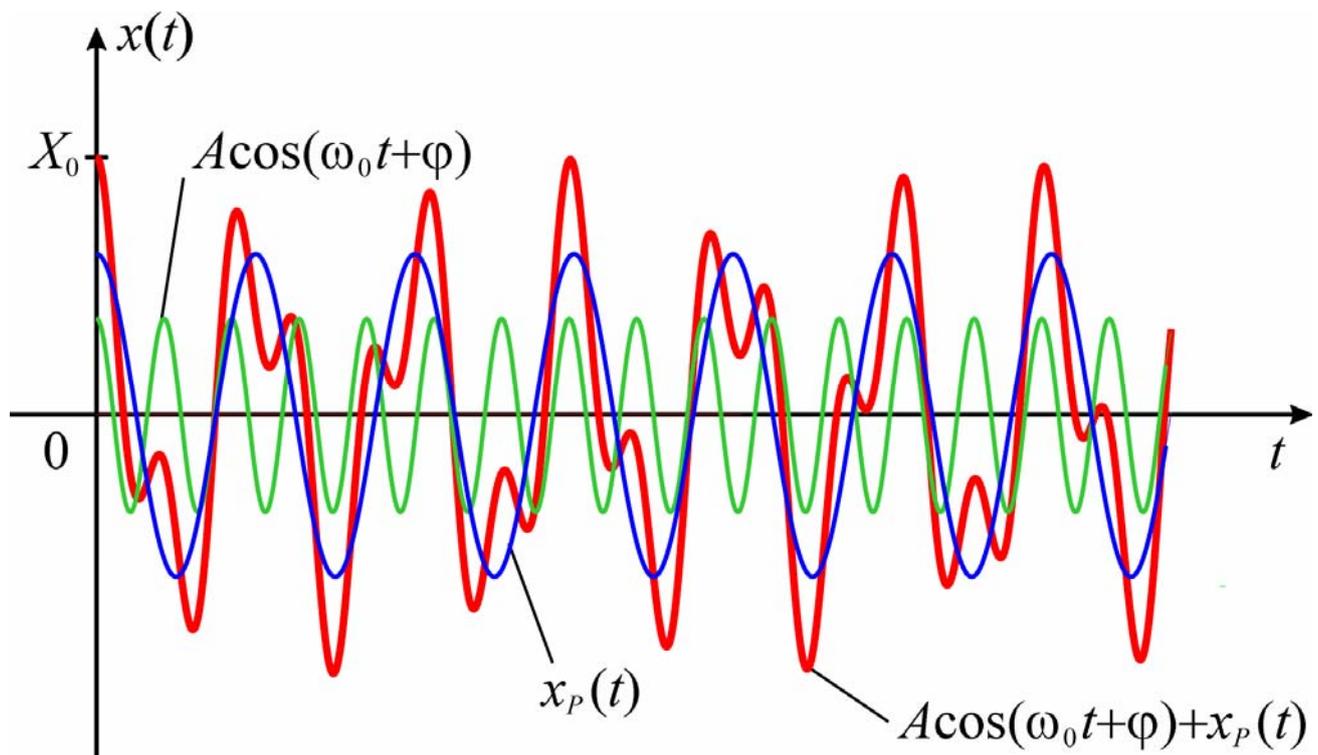
$$i_L(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -\omega_0 CA \sin(\omega_0 t + \varphi) - \omega C \frac{\omega_0^2 V_{GM}}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \vartheta)$$

- Le risposte del circuito sono combinazioni di due funzioni sinusoidali con pulsazioni diverse

- ➔ In generale le risposte sono aperiodiche

58

## Oscillatore armonico forzato (3)



59

## Oscillatore armonico forzato (4)

- Se  $\omega = \omega_0$  l'impedenza della serie L-C si annulla
- Nell'analisi con il metodo simbolico si ottiene un circuito assurdo (generatore di tensione in parallelo con un cortocircuito)
- L'equazione differenziale non ammette una soluzione particolare sinusoidale di pulsazione  $\omega_0$
- Si può verificare che in questo caso l'equazione ammette una soluzione particolare del tipo

$$v_{CP}(t) = Vt \operatorname{sen}(\omega_0 t + \gamma)$$

- Infatti, dato che  $\frac{d^2 v_{CP}}{dt^2} = 2\omega_0 V \cos(\omega_0 t + \gamma) - \omega_0^2 Vt \operatorname{sen}(\omega_0 t + \gamma)$

sostituendo  $v_{CP}(t)$  nell'equazione differenziale si ottiene

$$2\omega_0 V \cos(\omega_0 t + \gamma) = \omega_0^2 V_{GM} \cos(\omega_0 t + \vartheta) \Rightarrow \begin{cases} V = \frac{\omega_0 V_{GM}}{2} \\ \gamma = \vartheta \end{cases}$$

60

## Oscillatore armonico forzato (4)

- L'integrale generale è quindi

$$v_C(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_0 V_{GM}}{2} t \sin(\omega_0 t + \vartheta)$$

- Se si considera il caso particolare

$$\vartheta = 0$$

(→ fase di  $v_G(t)$  uguale a zero)

$$v_C(0) = 0 \text{ V}$$

(→ Risposta nello stato zero)

$$i_L(0) = 0 \text{ A} \Rightarrow \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{0^+} = 0 \text{ V/s}$$

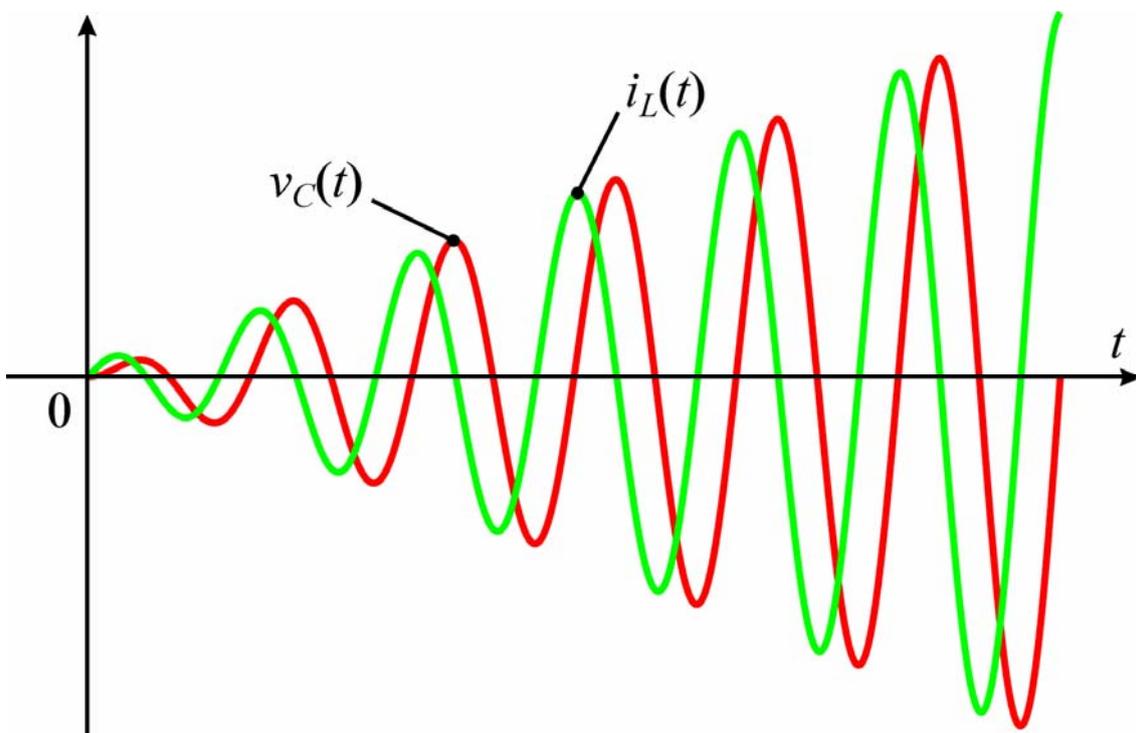
si ottiene

$$v_C(t) = \frac{\omega_0 V_{GM}}{2} t \sin(\omega_0 t)$$

$$i_L(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \frac{\omega_0 C V_{GM}}{2} \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 C V_{GM}}{2} t \cos(\omega_0 t)$$

61

## Oscillatore armonico forzato (5)



62