Circuiti in regime periodico non sinusoidale

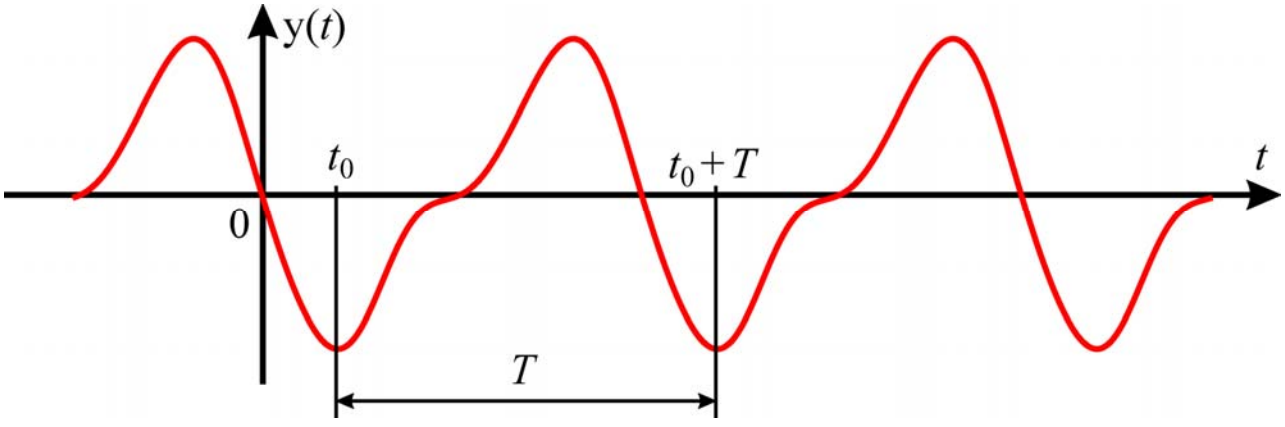
www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 22-3-2017)

Funzioni periodiche

- Si dice che una funzione $y(t)$ è periodica se esiste un $T > 0$ tale che per ogni t e per ogni k intero

  $$y(t + kT) = y(t)$$

- Il più piccolo valore di T per cui è soddisfatta la relazione precedente è detto **periodo** di $y(t)$



Valore medio e valore efficace

- **Valore medio** (nel periodo) di una funzione periodica $y(t)$

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)dt$$

- Se $Y_{med} = 0$, si dice che $y(t)$ è **alternata**
- Per le grandezze alternate si considera anche il valore medio del modulo

$$Y'_{med} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |y(t)|dt$$

- Il **valore efficace** o **valore r.m.s** (*root mean square*) di una grandezza periodica $y(t)$ è dato dalla radice quadrata del valore medio nel periodo del quadrato di $f(t)$

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)dt}$$

Funzioni sinusoidali

- Si considera una funzione sinusoidale di ampiezza Y_M

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t)$$

- Il valore medio è nullo
- Il valore medio del modulo è

$$Y'_{med} = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |Y_M \cos(\omega t)|dt = \frac{Y_M}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}Y_M \cong 0.637 Y_M$$

- Il valore efficace è

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} Y_M^2 \cos^2(\omega t)dt} = \sqrt{\frac{Y_M^2}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}[1+\cos(2\omega t)]d(\omega t)} = \frac{Y_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 Y_M$$

Serie di Fourier

- Si considera una funzione $y(t)$ periodica di periodo T che soddisfa le seguenti **condizioni di Dirichlet**
  - ha un numero finito di discontinuità all'interno di un periodo
  - ha un numero finito di massimi e di minimi, tutti di valore finito, all'interno di un periodo
  - l'integrale sul periodo del modulo di $y(t)$ è finito
- ➡ $y(t)$ può essere rappresentata dalla **serie di Fourier**

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\omega t)$$

- $\omega = 2\pi / T$ è detta **pulsazione fondamentale**
- I coefficienti a_0, a_k e b_k sono

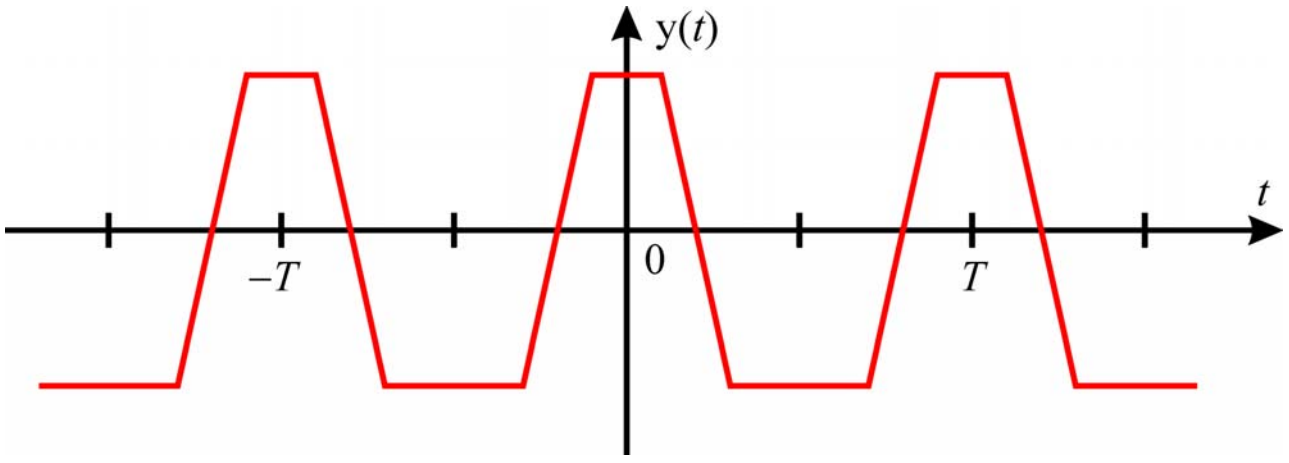
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)dt \qquad (= \text{valore medio})$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\cos(k\omega t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\operatorname{sen}(k\omega t)dt$$

Casi particolari

- $y(t)$ è **alternata** $\Leftrightarrow a_0 = 0$
- Se $y(t)$ è **pari**: $y(t) = y(-t)$
  - ➡ $b_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini coseno

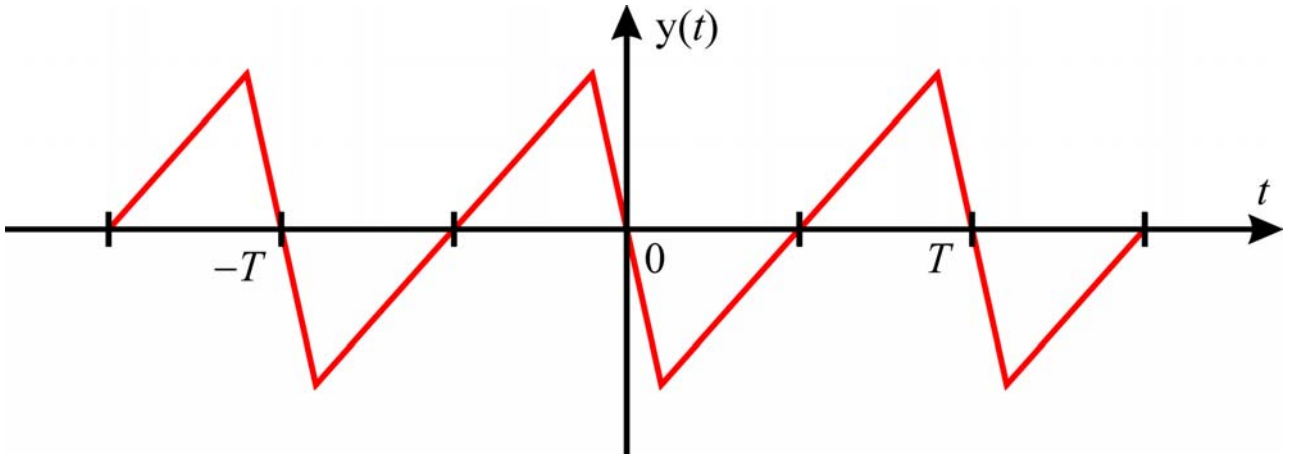
Funzione pari



Casi particolari

- Se $y(t)$ è **dispari**: $y(t) = -y(-t)$
  - $a_0 = 0$, $a_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini seno
  - una funzione dispari è sempre alternata

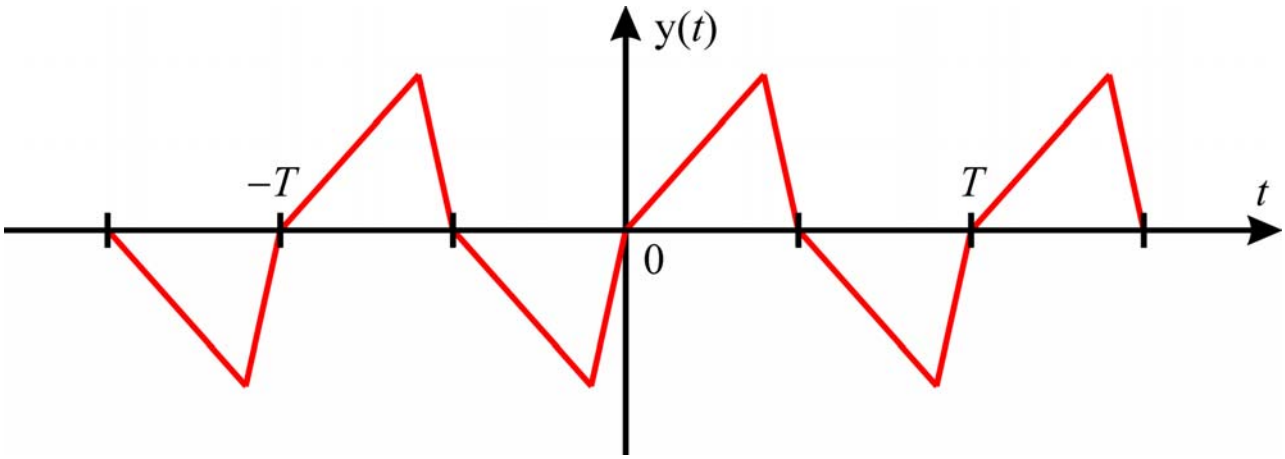
Funzione dispari



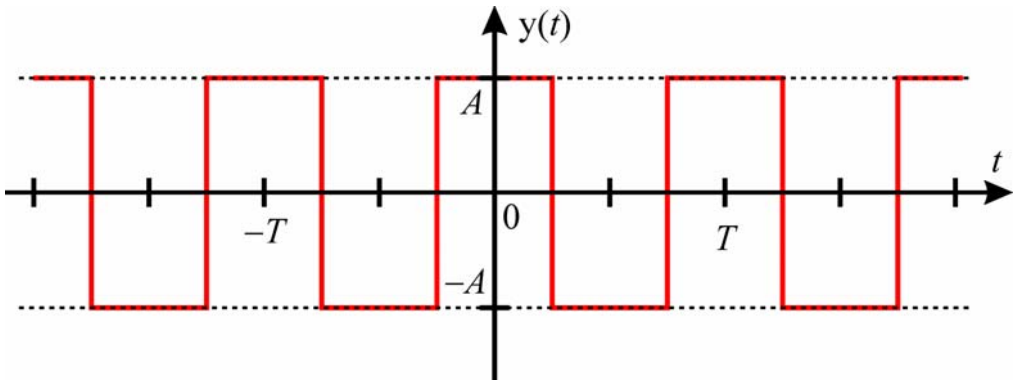
Casi particolari

- Se $y(t)$ ha **simmetria di semionda**: $y(t) = -y(t+T/2)$
  - $a_0 = 0$, $a_k = b_k = 0$ per k pari
  - la serie di Fourier contiene solo i termini di ordine dispari
  - una funzione con simmetria di semionda è sempre alternata

Funzione con simmetria di semionda



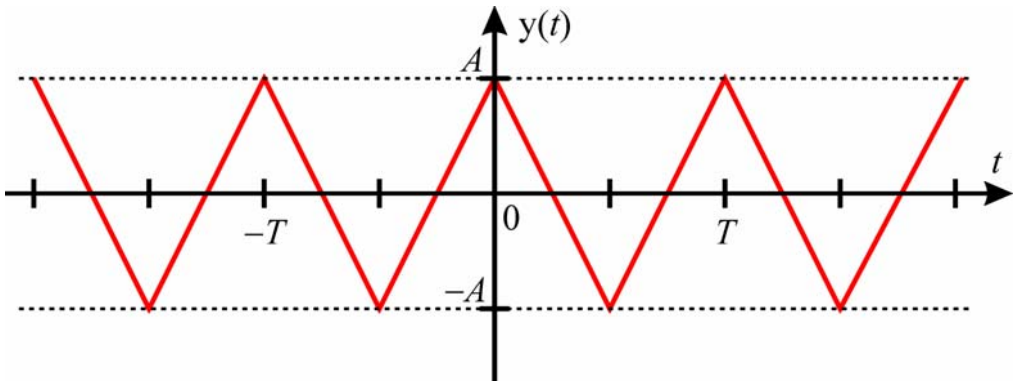
Esempio: onda rettangolare



$$y(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos[(2k-1)\omega t]}{2k-1}$$

$$Y'_{med} = A \qquad Y_{eff} = A$$

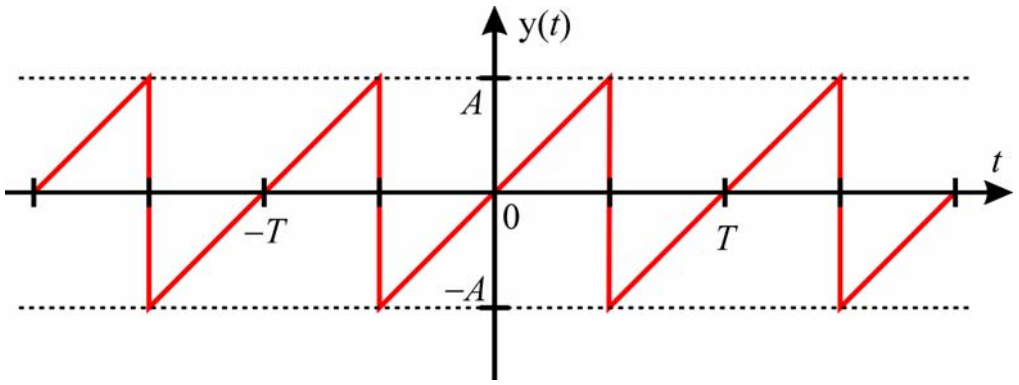
Esempio: onda triangolare



$$y(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)\omega t]}{(2k-1)^2}$$

$$Y'_{med} = \frac{A}{2} \qquad Y_{eff} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

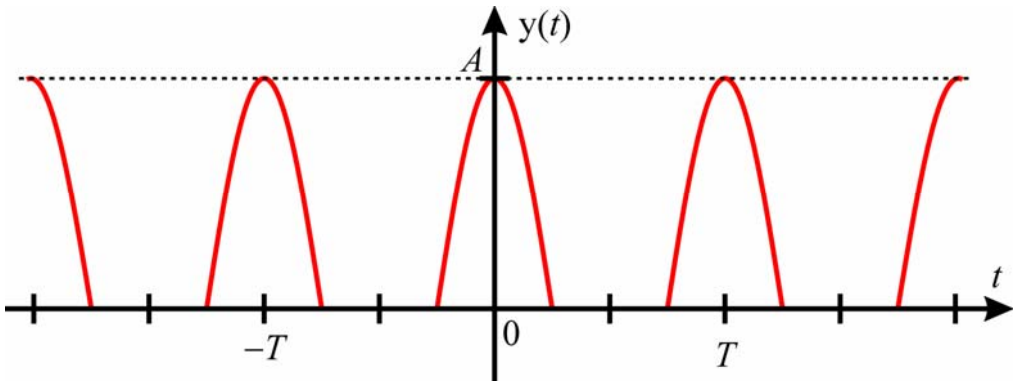
Esempio: onda a dente di sega



$$y(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sen}(k\omega t)$$

$$Y'_{med} = \frac{A}{2} \qquad Y_{eff} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

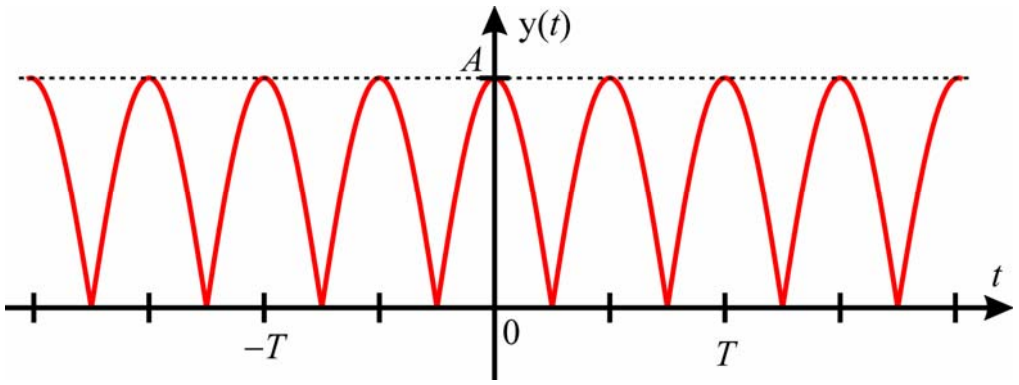
Esempio: sinusoide raddrizzata a semionda



$$y(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\cos(\omega t) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1}$$

$$Y_{med} = \frac{A}{\pi} \qquad Y_{eff} = \frac{A}{2}$$

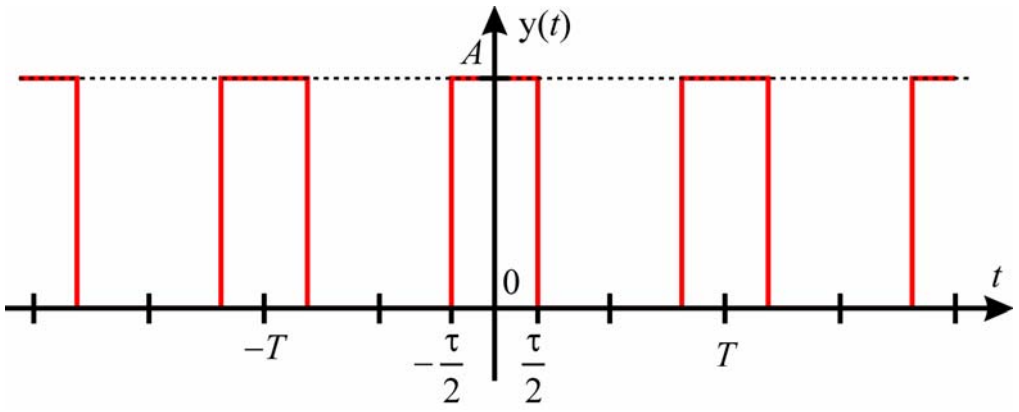
Esempio: sinusoide raddrizzata a onda intera



$$y(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(k\omega t)}{4k^2-1}$$

$$Y_{med} = \frac{2A}{\pi} \qquad Y_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Esempio: treno di impulsi rettangolari



$$y(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)\cos(k\omega t)$$

$$Y_{med} = \frac{A\tau}{T} \qquad Y_{eff} = A\sqrt{\frac{\tau}{T}}$$

Seconda forma della serie di Fourier

- Utilizzando l'identità

$$A_k \cos\varphi_k \cos(k\omega_0 t) - A_k \operatorname{sen}\varphi_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

è possibile esprimere la serie di Fourier nella forma

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

dove

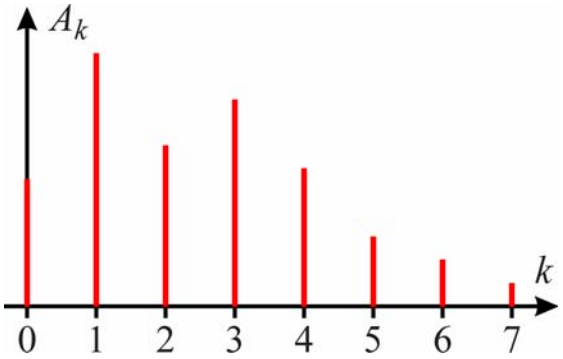
$$A_0 = a_0$$

$$A_k \cos\varphi_k = a_k \qquad A_k \operatorname{sen}\varphi_k = -b_k$$

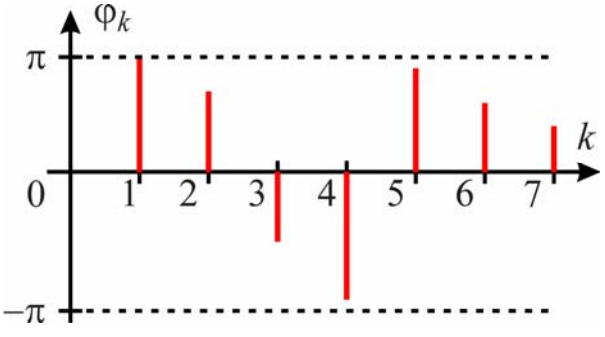
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \operatorname{tg}(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

Spettro di ampiezza e spettro di fase

- La costante A_0 è detta **componente continua** di $y(t)$
- La funzione sinusoidale $A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ è detta **componente fondamentale** o **prima armonica** di $y(t)$
- La funzione $A_k\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ è detta ***k*-esima armonica** di $y(t)$
- Gli andamenti di A_k e φ_k in funzione di k definiscono, rispettivamente lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase** di $y(t)$



spettro di ampiezza



spettro di fase

Valore efficace della serie di Fourier

- Per determinare il valore efficace occorre, in primo luogo, valutare il quadrato della serie

$$y^2(t) = \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) \right]^2 =$$

$$= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \cos^2(k\omega t + \alpha_k) + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{\infty} A_k A_h \cos(k\omega t + \alpha_k) \cos(h\omega t + \alpha_h)$$

- Il secondo addendo della somma precedente può essere posto nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos(2k\omega t + 2\alpha_k)$$

Valore efficace della serie di Fourier

- Nell'espressione precedente tutti i termini oscillanti hanno valore medio nullo
- ➡ Il valore efficace è determinato dai termini costanti presenti nei primi due addendi, quindi si ha

$$Y_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \right] dt} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k\,\text{eff}}^2}$$

dove

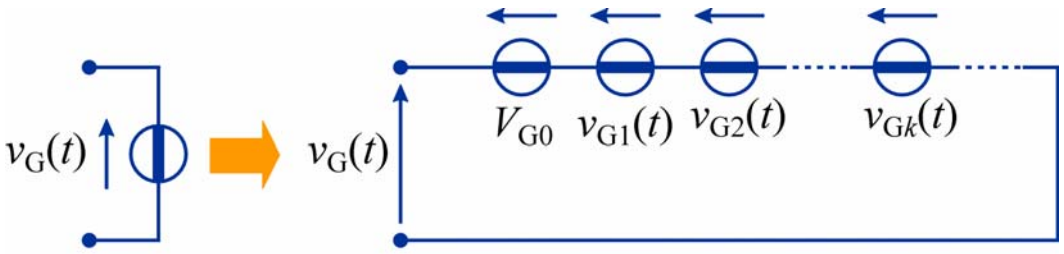
$$A_{k\,\text{eff}} = \frac{A_k}{\sqrt{2}}$$

- ➡ *Il valore efficace di una grandezza periodica è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle sue componenti armoniche* (**teorema di Parseval**)

Generatori periodici

- Un generatore di tensione $v_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in serie
  - un generatore di tensione costante V_{G0} pari al valore medio di $v_G(t)$
  - infiniti generatori di tensione sinusoidale, $v_{Gk}(t)$ $(k = 1,...,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

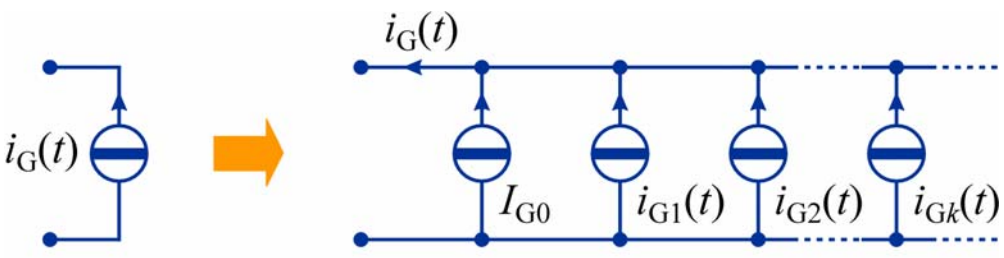
$$v_G(t) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{Gk}\cos(k\omega t + \alpha_k) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{Gk}(t)$$



Generatori periodici

- Un generatore di corrente $i_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in parallelo
  - un generatore di tensione costante I_{G0} pari al valore medio di $i_G(t)$
  - infiniti generatori di corrente sinusoidale, $i_{Gk}(t)$ $(k = 1,...,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

$$i_G(t) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} I_{Gk}\cos(k\omega t + \beta_k) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} i_{Gk}(t)$$

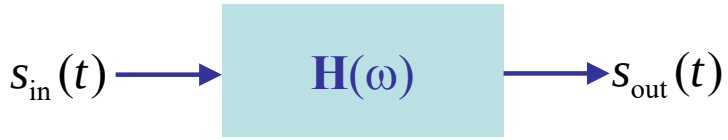


Circuiti lineari in regime periodico

- Si considera un circuito lineare alimentato da generatori periodici con periodo T
- Se il circuito è asintoticamente stabile, in condizioni di regime tutte le tensioni e le correnti sono periodiche con periodo T
  (➡ **regime periodico**)
- Se si rappresentano nel modo appena visto i generatori, è possibile determinare la risposta a regime mediante il principio di sovrapposizione
  - ➡ Si valutano separatamente i contributi dovuti ai generatori che hanno la stessa pulsazione
- Normalmente è possibile approssimare le funzioni periodiche utilizzando un numero limitato N di componenti armoniche
  - ➡ La determinazione della riposta periodica richiede
    - un'analisi in continua
    - N analisi di risposte in regime sinusoidale

Funzioni di trasferimento

- Si considera un circuito lineare con un solo ingresso e una sola uscita in condizioni di regime periodico



$$s_{in}(t) = S_{in\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{in\,k} \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_{in\,k}\right)$$

$$s_{out}(t) = S_{out\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{out\,k} \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_{out\,k}\right)$$

- I fasori delle k-esime armoniche dell'ingresso e dell'uscita sono

$$\mathbf{S}_{in\,k} = S_{in\,k} e^{j\varphi_{in\,k}} \qquad \mathbf{S}_{out\,k} = S_{out\,k} e^{j\varphi_{out\,k}}$$

Funzioni di trasferimento

- La relazione tra $\mathbf{S}_{\text{in}k}$ e $\mathbf{S}_{\text{out}k}$ può essere espressa nella forma

$$\mathbf{S}_{\text{out}\,k} = \mathbf{H}(k\omega_0)\mathbf{S}_{\text{in}\,k}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ = funzione di trasferimento

- Quindi si ha

$$S_{\text{out}\,k} = |\mathbf{S}_{\text{out}\,k}| = |\mathbf{H}(k\omega_0)| \cdot |\mathbf{S}_{\text{in}\,k}| = |\mathbf{H}(k\omega_0)| S_{\text{in}\,k}$$

$$\varphi_{\text{out}\,k} = \arg(\mathbf{S}_{\text{out}\,k}) = \arg(\mathbf{S}_{\text{in}\,k}) + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)] = \varphi_{\text{in}\,k} + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)]$$

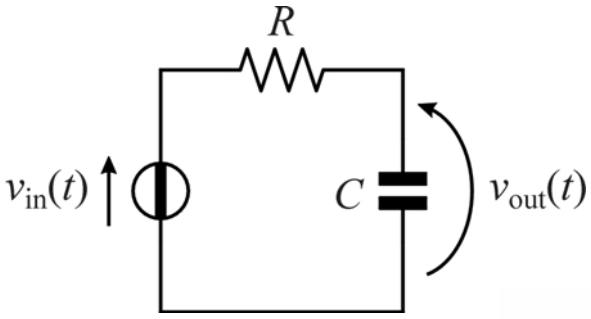
- Inoltre, per le componenti continue vale la relazione

$$S_{\text{out}\,k} = \mathrm{H}(0) S_{\text{in}\,k}$$

➡ La serie di Fourier dell'uscita si ottiene sovrapponendo i contributi dovuti alle singole armoniche dell'ingresso

$$s_{\text{out}}(t) = \mathrm{H}(0) S_{\text{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{H}(k\omega_0)| S_{\text{in}\,k} \cos\{k\omega_0 t + \varphi_{\text{in}\,k} + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)]\}$$

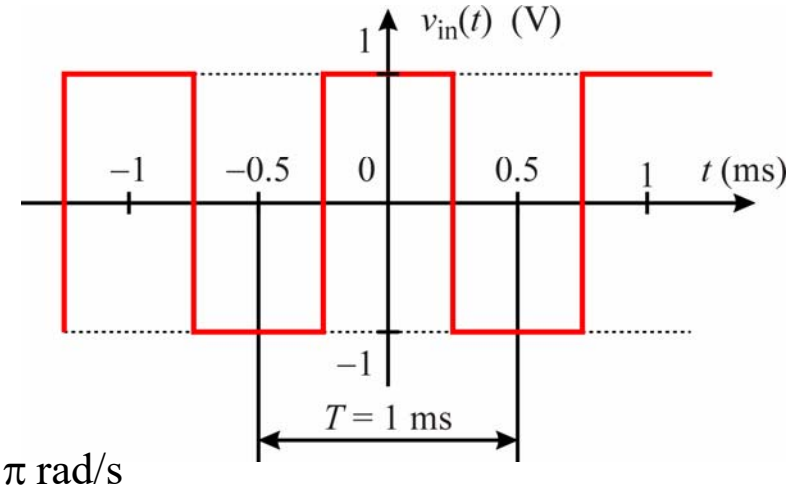
Esempio



$R = 1000\ \Omega$

$C = 100\ \text{nF}$

Si vuole determinare la risposta del circuito a un ingresso avente questo andamento



$T = 1\ \text{ms} \Rightarrow \begin{aligned} f_0 &= 1\ \text{kHz} \\ \omega_0 &= 2000\,\pi\ \text{rad/s} \end{aligned}$

Esempio

- Si esegue l'analisi in regime sinusoidale del circuito per ω generico
- Il fasore della tensione di uscita è legato al fasore della tensione di ingresso dalla relazione

$$\mathbf{V}_{out} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \mathbf{V}_{in} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \mathbf{V}_{in} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \mathbf{V}_{in} \qquad \tau = RC = 0.1\,\text{ms}$$

- In particolare per $\omega = 0$ (analisi in continua) si ha

$$V_{out} = V_{in}$$

- La funzione di trasferimento del circuito è quindi

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\arg[\mathbf{H}(\omega)] = -\text{arctg}(\omega\tau)$$

Esempio

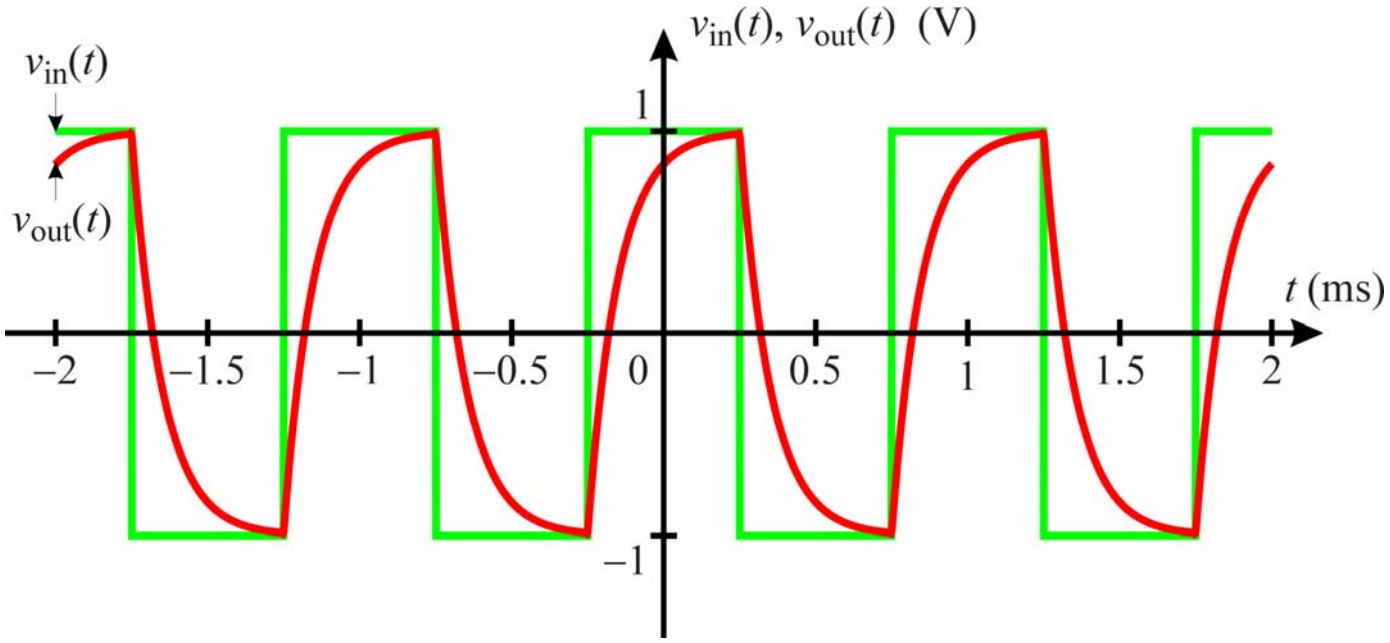
- Lo sviluppo in serie di Fourier dell'ingresso è

$$v_{in}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos[(2k-1)\omega_0 t]$$

- Lo sviluppo di Fourier della risposta si ottiene moltiplicando le ampiezze delle armoniche per $|\mathbf{H}(\omega)|$ e sommando, per ciascuna armonica, $\arg[\mathbf{H}(\omega)]$ all'argomento del coseno

$$v_{out}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cdot \sqrt{1 + [(2k-1)\omega_0\tau]^2}} \cos\{(2k-1)\omega_0 t - \text{arctg}[(2k-1)\omega_0\tau]\}$$

Esempio – Tensioni in ingresso e in uscita

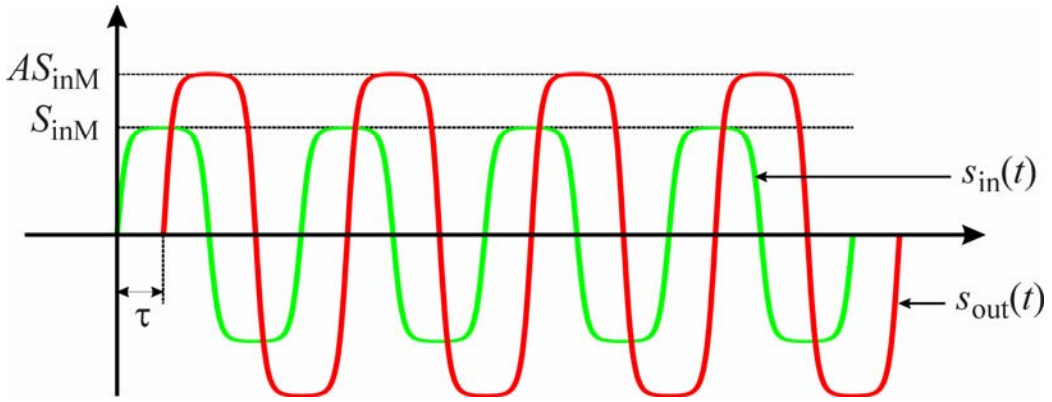


Condizioni di non distorsione

- In un circuito lineare resistivo la risposta è proporzionale all'ingresso
- ➡ L'ingresso e la risposta hanno la stessa "forma"
- Nel caso di un circuito lineare dinamico la forma d'onda della risposta può essere diversa da quella dell'ingresso
- Questa distorsione in alcuni casi può rappresentare un effetto desiderato, cioè una particolare elaborazione che si vuole compiere sul segnale
- In altri casi la distorsione rappresenta un effetto indesiderato
  - in particolare i circuiti resistivi costituiscono un caso ideale
  - in tutti i circuiti sono presenti effetti dinamici (reattivi) che in molti casi possono essere resi trascurabili, ma non possono essere completamente eliminati

Condizioni di non distorsione

- La forma d'onda dell'ingresso è ancora riconoscibile in uscita se i segnali differiscono al più per
  - un fattore di proporzionalità A
  - una traslazione nel tempo (ritardo) τ



$$s_{out}(t) = As_{in}(t-\tau)$$

Condizioni di non distorsione

- Se l'ingresso è rappresentato mediante la serie di Fourier

$$s_{in}(t) = S_{in\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{in\,k} \cos\left[k\omega_0 t + \varphi_{in\,k}\right]$$

affinché la risposta non sia distorta deve essere

$$s_{out}(t) = AS_{in\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} AS_{in\,k} \cos\left[k\omega_0 (t-\tau) + \varphi_{in\,k}\right]$$

- Ingresso e uscita sono legati dalla relazione

$$s_{out}(t) = \mathrm{H}(0)S_{in\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| S_{in\,k} \cos\left\{k\omega_0 t + \varphi_{in\,k} + \arg\left[\mathbf{H}(k\omega_0)\right]\right\}$$

- La funzione di rete deve soddisfare le condizioni

$$\left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| = \frac{S_{out\,k}}{S_{in\,k}} = |A|$$

$$\arg\left[\mathbf{H}(k\omega_0)\right] = \varphi_{out\,k} - \varphi_{in\,k} = \begin{cases} -k\omega_0\tau & A > 0 \\ -k\omega_0\tau + \pi & A < 0 \end{cases}$$

Componenti non lineari

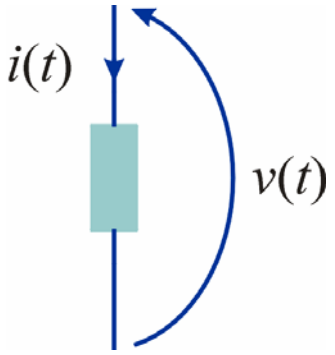
- Un componente non lineare alimentato con tensioni o correnti sinusoidali genera armoniche

Esempio: conduttanza non lineare

- Si considera un bipolo avente equazione caratteristica del tipo

$$i(t) = \mathrm{f}[v(t)]$$

dove f è una generica funzione non lineare



- Si rappresenta f mediante uno sviluppo in serie di Taylor

$$\mathrm{f}(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + c_4 v^4 + \ldots$$

Componenti non lineari

- Si assume che $v(t)$ sia sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t)$$

- Si sostituisce $v(t)$ nell'espressione di f

$$i(t) = c_0 + c_1 V_\mathrm{M} \cos(\omega t) + c_2 V_\mathrm{M}^2 \cos^2(\omega t) + c_3 V_\mathrm{M}^3 \cos^3(\omega t) + c_4 V_\mathrm{M}^4 \cos^4(\omega t) + \ldots =$$

$$= c_0 + c_1 V_\mathrm{M} \cos(\omega t) + \frac{c_2 V_\mathrm{M}^2}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + \frac{c_3 V_\mathrm{M}^3}{4}\left[3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right] +$$

$$+ \frac{c_4 V_\mathrm{M}^4}{8}\left[3 + 4\cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)\right] + \ldots$$

- Le potenze di v di grado n dispari danno origine ad armoniche dispari di ordine $\leq n$
- Le potenze di v di grado n pari danno origine ad armoniche pari di ordine $\leq n$ e a termini costanti
- ➡ La corrente è periodica con pulsazione fondamentale ω

Circuiti non lineari in regime periodico

- In condizioni di regime, in un circuito non lineare alimentato da generatori sinusoidali isofrequenziali, o più in generale periodici con la stessa pulsazione fondamentale ω, tutte le tensioni e le correnti sono periodiche con la stessa pulsazione fondamentale
- Mentre le risposte di un circuito lineare possono contenere solo componenti armoniche presenti nella tensione o corrente di almeno uno dei generatori, le risposte dei circuiti non lineari possono contenere armoniche non presenti negli ingressi
- In genere, se gli ingressi sono sinusoidali, le risposte sono periodiche, e quindi distorte
- A differenza dei circuiti lineari, i circuiti non lineari possono introdurre distorsione anche se sono puramente resistivi

Distorsione armonica totale

- L'entità della distorsione della forma d'onda di una tensione o di una corrente rispetto all'andamento sinusoidale è rappresentata mediante un parametro detto **distorsione armonica totale** o **THD** (*total harmonic distortion*)
- Per una funzione periodica

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

la THD è definita come rapporto tra la radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle armoniche superiori e il valore efficace della componente fondamentale

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_{k\,\mathrm{eff}}^2}}{A_{1\,\mathrm{eff}}} \qquad \left(A_{keff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)$$

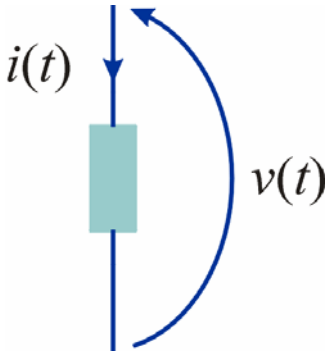
$$\mathrm{THD}\,\% = 100 \cdot \mathrm{THD}$$

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- Condizioni di regime periodico con pulsazione fondamentale ω

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik})$$



- Si indica con

$$\varphi_k = \varphi_{Vk} - \varphi_{Ik}$$

lo sfasamento tra le k-esime componenti armoniche della tensione e della corrente

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- La potenza istantanea assorbita dal bipolo è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk}) \cos(k\omega t + \varphi_{Ik}) +$$
$$+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik}) + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{\infty} V_k I_h \cos(k\omega t + \varphi_{Vk}) \cos(h\omega t + \varphi_{Ih})$$

- Il secondo addendo può essere posto anche nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_{Vk} - \varphi_{Ik}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(2k\omega t + \varphi_{Vk} + \varphi_{Ik})$$

➡ La potenza istantanea è costituita da un termine costante pari a

$$V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos \varphi_k$$

e da un termine oscillante avente valore medio nullo

Potenza attiva

- La **potenza attiva** è definita come valore medio nel periodo della potenza istantanea (e quindi coincide con il termine costante)

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)i(t)dt = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2}\cos\varphi_k =$$

$$= V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \cos\varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

- Nell'espressione compaiono solo prodotti tra armoniche della tensione e della corrente dello stesso ordine k
- *La potenza attiva è pari alla somma delle potenze attive associate alle singole componenti armoniche*

Potenza apparente e fattore di potenza

- La **potenza apparente** è definita, come in regime sinusoidale, come prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente

$$S = V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\left(V_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\mathrm{eff}}^2\right)\left(I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{k\,\mathrm{eff}}^2\right)}$$

- Si può dimostrare che risulta sempre $S \geq |P|$ e che $S = P$ se e solo se il bipolo è un resistore lineare
- Si può definire il **fattore di potenza** rapporto tra la potenza attiva e la potenza apparente

$$PF = \cos\Phi = \frac{P}{S}$$

  - La definizione dell'angolo Φ è puramente convenzionale
  - L'angolo Φ non rappresenta uno sfasamento tra una tensione e una corrente

Traccia della dimostrazione

- La dimostrazione di basa sul fatto il valore medio del prodotto di due funzioni periodiche ha proprietà analoghe al prodotto interno tra due vettori

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)dt = < x(t), y(t) >$$

- Quindi il valore efficace corrisponde alla norma di un vettore

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T x(t)x(t)dt} = \|x(t)\|$$

- Il fattore di potenza PF è analogo al coseno dell'angolo tra due vettori

$$PF = \frac{< v(t), i(t) >}{\|v(t)\| \cdot \|i(t)\|} = \cos\Phi$$

e quindi assume valore unitario se e solo se i due vettori sono paralleli, cioè legati da una costante scalare

Potenza non attiva

- In regime periodico non sinusoidale la quantità

$$P_{\mathrm{NA}} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

è indicata con il nome di **potenza non attiva**

- La potenza non attiva assorbita da un bipolo si annulla se e solo se il bipolo è lineare e puramente resistivo
- In questo caso si ha

$$V_k = RI_k \qquad \varphi_k = 0 \qquad \forall k$$

e quindi

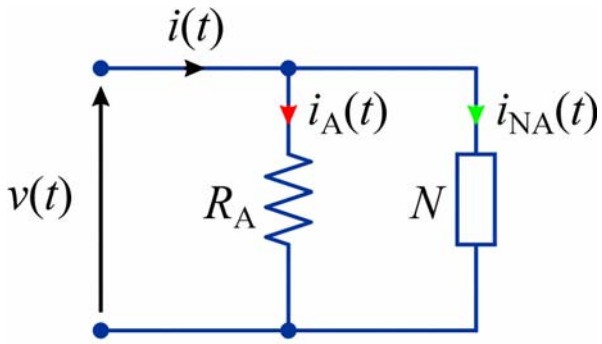
$$S = P = \frac{V_{\mathrm{eff}}^2}{R} = RI_{\mathrm{eff}}^2$$

Potenza non attiva

- Un bipolo generico che assorbe potenza attiva P e potenza non attiva P_{NA}, può essere rappresentato collegando in parallelo un resistore

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{V_{\mathrm{eff}}^2}{P}$$

e un bipolo N che assorbe solo potenza non attiva



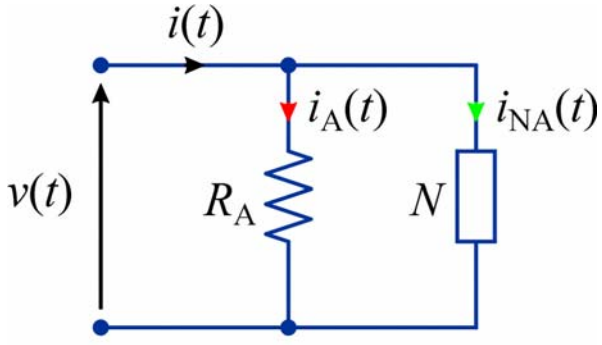
Corrente attiva e non attiva

- La corrente nel resistore R_{A} è detta **corrente attiva**

$$i_{\mathrm{A}}(t) = \frac{v(t)}{R_{\mathrm{A}}}$$

- La corrente nei bipolo N è detta **corrente non attiva**

$$i_{\mathrm{NA}}(t) = i(t) - i_{\mathrm{A}}(t)$$



Potenza istantanea attiva e non attiva

- La potenza istantanea associata ad $i_A(t)$ è detta **potenza istantanea attiva**

$$p_A(t) = v(t)i_A(t) = \frac{v^2(t)}{R_A} = P\frac{v^2(t)}{V_{eff}^2}$$

- La potenza istantanea associata ad $i_{NA}(t)$ è detta **potenza istantanea non attiva**

$$p_{NA}(t) = v(t)i_{NA}(t) = v(t)\left[i(t) - i_A(t)\right]$$

- ➡ Quindi si ha

$$p(t) = p_A(t) + p_{NA}(t)$$

- $p_A(t)$ è sempre ≥ 0, quindi corrisponde a un flusso unidirezionale di energia
- Il valore medio sul periodo di $p_A(t)$ vale P e quindi coincide con il valore medio sul periodo di $p(t)$
- ➡ Il valore medio sul periodo di $p_{NA}(t)$ è nullo

Ortogonalità delle componenti della corrente

- I valori efficaci della corrente e delle componenti attiva e non attiva sono legati dalla relazione

$$I_{eff} = \sqrt{I_{Aeff}^2 + I_{NAeff}^2}$$

- Infatti si ha

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[i_A^2(t) + i_{NA}^2(t) + 2i_A(t)i_{NA}(t)\right]dt =$$

$$= I_{Aeff}^2 + I_{NAeff}^2 + \frac{1}{T}\int_0^T 2\frac{v(t)}{R_A}i_{NA}(t)dt =$$

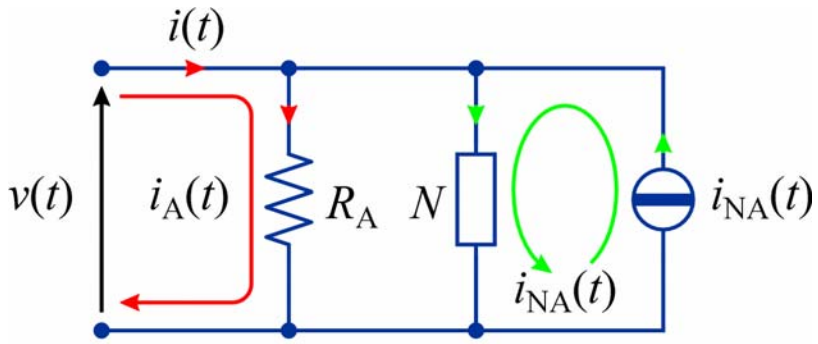
$$= I_{Aeff}^2 + I_{NAeff}^2 + \frac{2}{TR_A}\int_0^T p_{NA}(t)dt = I_{Aeff}^2 + I_{NAeff}^2$$

- Quindi valgono anche le relazioni

$$P = V_{eff}I_{Aeff} \qquad P_{NA} = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\left(V_{eff}I_{eff}\right)^2 - \left(V_{eff}I_{Aeff}\right)^2} = V_{eff}I_{NAeff}$$

Compensazione di un carico distorcente

- Nel caso periodico non sono sufficienti le tecniche di rifasamento viste nel caso sinusoidale
- Per ridurre la potenza non attiva (*compensazione del carico*) è possibile
  - utilizzare filtri passivi per eliminare le armoniche
  - collegare in parallelo al carico un bipolo (realizzato mediante un circuito elettronico) che eroghi una corrente uguale alla corrente non attiva
    - in questo modo la corrente $i(t)$ si identifica con la corrente attiva



Potenza reattiva e potenza deformante

- Per la **potenza reattiva** in regime periodico non sinusoidale è stata introdotta la seguente definizione formale

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \operatorname{sen} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \operatorname{sen} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

  ➡ Q è definita come somma delle potenze reattive associate alle singole armoniche

- Diversamente del caso sinusoidale, con questa definizione risulta

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \leq S$$

- Per chiudere il bilancio delle potenze, si introduce un ulteriore termine detto **potenza deformante**

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

Potenza reattiva e potenza deformante

- Si può dimostrare che l'espressione della potenza deformante in termini di armoniche di tensione e di corrente è

$$D = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{\infty} \left[V_{k\,\mathrm{eff}}^2 I_{h\,\mathrm{eff}}^2 + V_{h\,\mathrm{eff}}^2 I_{k\,\mathrm{eff}}^2 - 2 V_{k\,\mathrm{eff}} I_{h\,\mathrm{eff}} V_{h\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \cos(\varphi_k - \varphi_h) \right]}$$

- D si annulla se sono verificate le condizioni

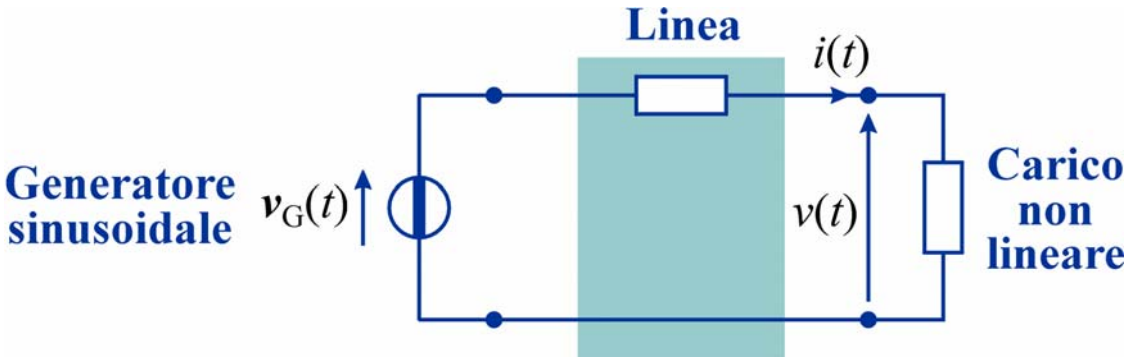
$$\frac{V_k}{I_k} = \frac{V_h}{I_h} \qquad \varphi_k = \varphi_h \qquad \forall h,k$$

  e quindi, in particolare, nel caso di un resistore lineare
  - in questo caso la tensione e la corrente del bipolo non sono deformate l'una rispetto all'altra

Potenza reattiva e potenza deformante

- Le definizioni di potenza reattiva e potenza deformante possono risultare prive di significato e quindi di scarsa utilità pratica in presenza di regimi fortemente distorti
- La potenza reattiva si annulla anche se le potenze associate alle diverse armoniche non sono nulle, ma i loro valori si compensano
- La potenza deformante non risulta strettamente correlata alla deformazione della corrente rispetto alla tensione
  - può annullarsi anche in presenza di distorsione o assumere valori diversi da zero con tensioni e correnti solo sfasate tra loro

Linee con carichi non lineari



- Se il carico non è lineare, in generale la tensione e la corrente sono distorte
- Se le cadute di tensione lungo la linea sono trascurabili, la tensione può essere considerata praticamente sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik}) \qquad \text{(si assume che sia } I_0 = 0\text{)}$$

Fattore di potenza di un carico non lineare

- Se la tensione è sinusoidale, le armoniche superiori della corrente non danno contributo alla potenza attiva che vale

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos\varphi_1 \qquad \varphi_1 = \varphi_V - \varphi_{I1}$$

- Il valore efficace della corrente nella linea, e quindi la potenza dissipata dipende anche dalle armoniche superiori della corrente

➡ La potenza dissipata nella linea aumenta

  - all'aumentare dello sfasamento tra la tensione e la componete fondamentale della corrente
  - all'aumentare del contenuto armonico della corrente

- Il fattore di potenza può essere espresso nel modo seguente

$$\cos\Phi = \frac{P}{S} = \frac{V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}}}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} \cdot \cos\varphi_1 = \cos\theta \cdot \cos\varphi_1$$

Fattore di sfasamento e di distorsione

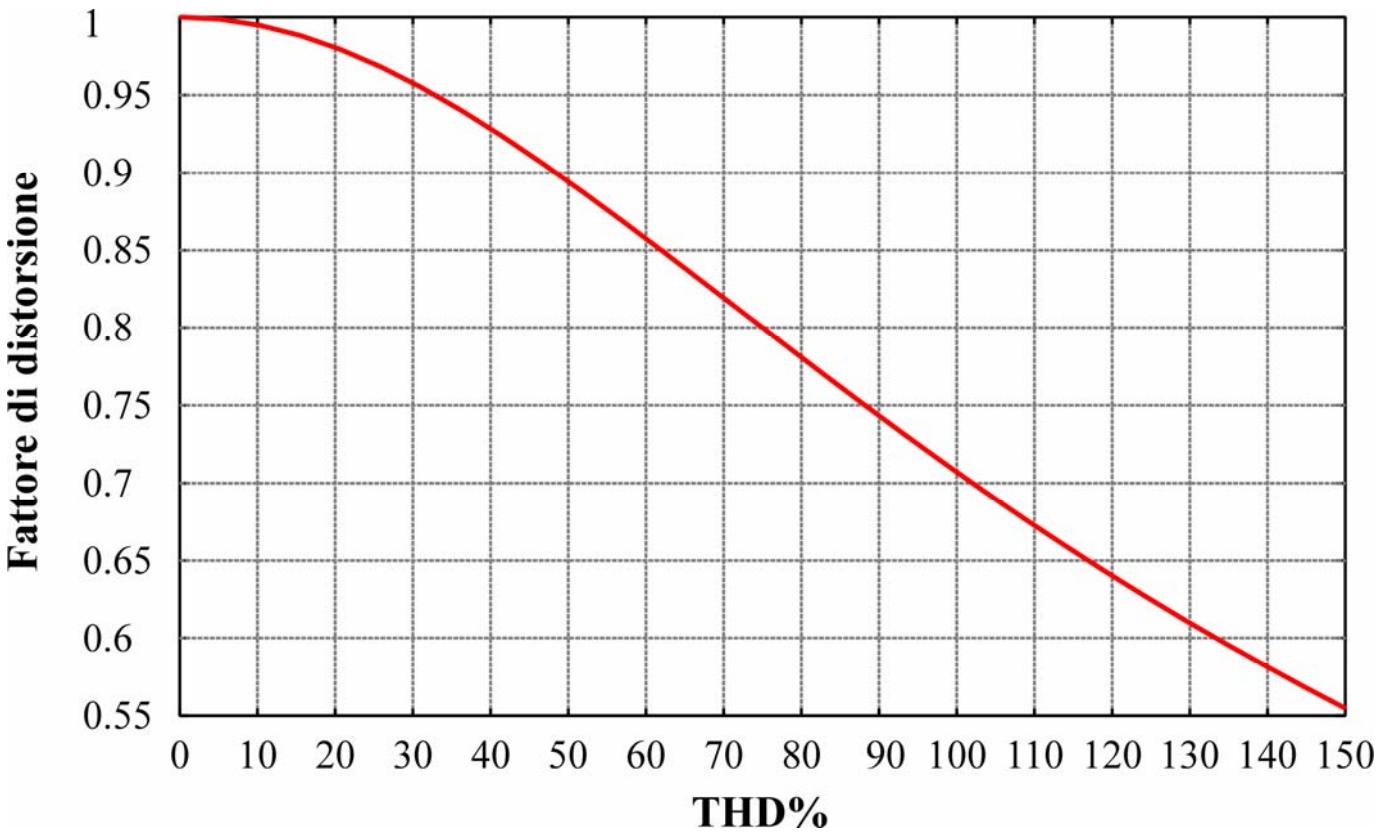
- Il fattore $\cos\varphi_1$, che ha significato analogo al fattore di potenza definito in regime sinusoidale, è detto **fattore di sfasamento**
- Il primo termine è detto **fattore di distorsione** ed è definito dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$$

- Dato che è sempre compreso tra 0 e 1 è possibile rappresentarlo come coseno di un angolo θ detto **angolo di distorsione**
- Il fattore di distorsione è legato alla distorsione armonica totale della corrente THD_I, dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{THD}_\text{I}^2}} \qquad \left(I_0 = 0 \Rightarrow \text{TDH}_\text{I} = \sqrt{\frac{I_{\text{eff}}^2 - I_{1\text{eff}}^2}{I_{1\text{eff}}^2}} \Rightarrow \text{TDH}_\text{I}^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right)$$

Fattore di distorsione



Potenza reattiva e potenza deformante

- Se la tensione del carico è sinusoidale
  - la potenza reattiva è dovuta solo allo sfasamento tra la tensione e la componente fondamentale della corrente

$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \operatorname{sen} \varphi_1$$

    ➡ ha significato analogo a quello visto in regime sinusoidale

  - la potenza deformante e dovuta solo alla presenza di armoniche nella corrente

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = V_{\text{eff}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{k\text{eff}}^2}$$

  - inoltre si ha

$$D = V_{\text{eff}} \sqrt{I_{\text{eff}}^2 - I_{1\text{eff}}^2} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \operatorname{sen} \theta$$

Relazioni tra le potenze

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos \varphi_1$$
$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \operatorname{sen} \varphi_1$$
$$S_1 = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

⬇

$$P = S_1 \cos \varphi_1$$

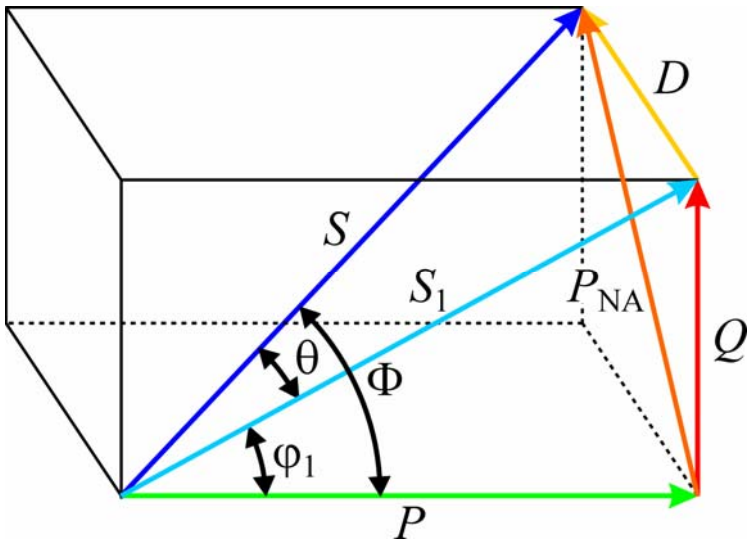
$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + P_{NA}^2}$$

⬇

$$S_1 = S \cdot \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = S \cos \theta$$

⬇

$$P = S \cos \theta \cdot \cos \varphi_1 = S \cos \Phi$$

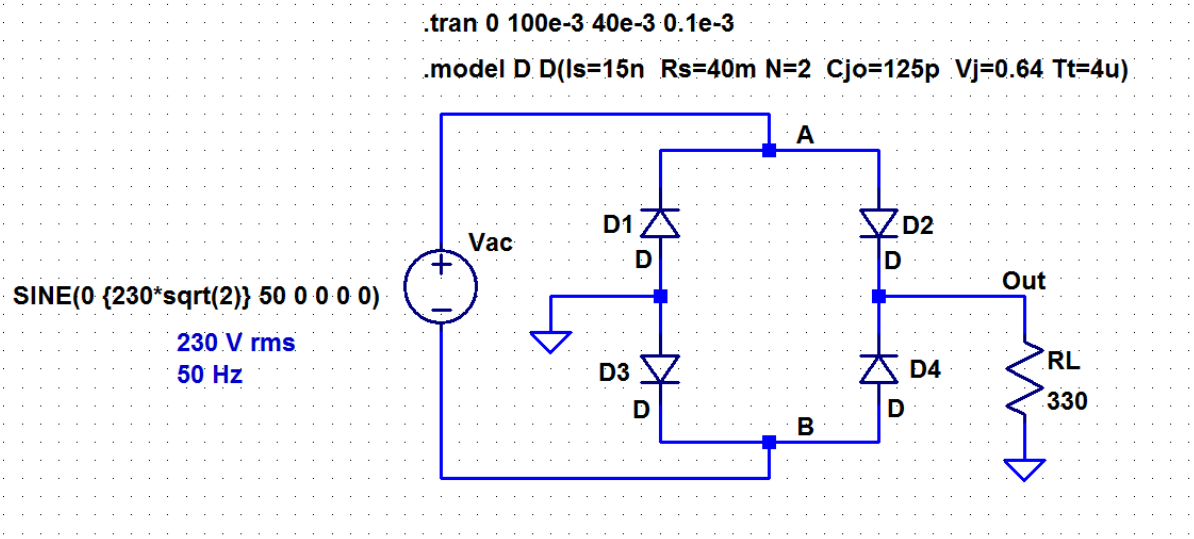


$$D = S \operatorname{sen} \theta$$

$$P_{NA} = \sqrt{Q^2 + D^2} = S \operatorname{sen} \Phi$$

Esempio 1

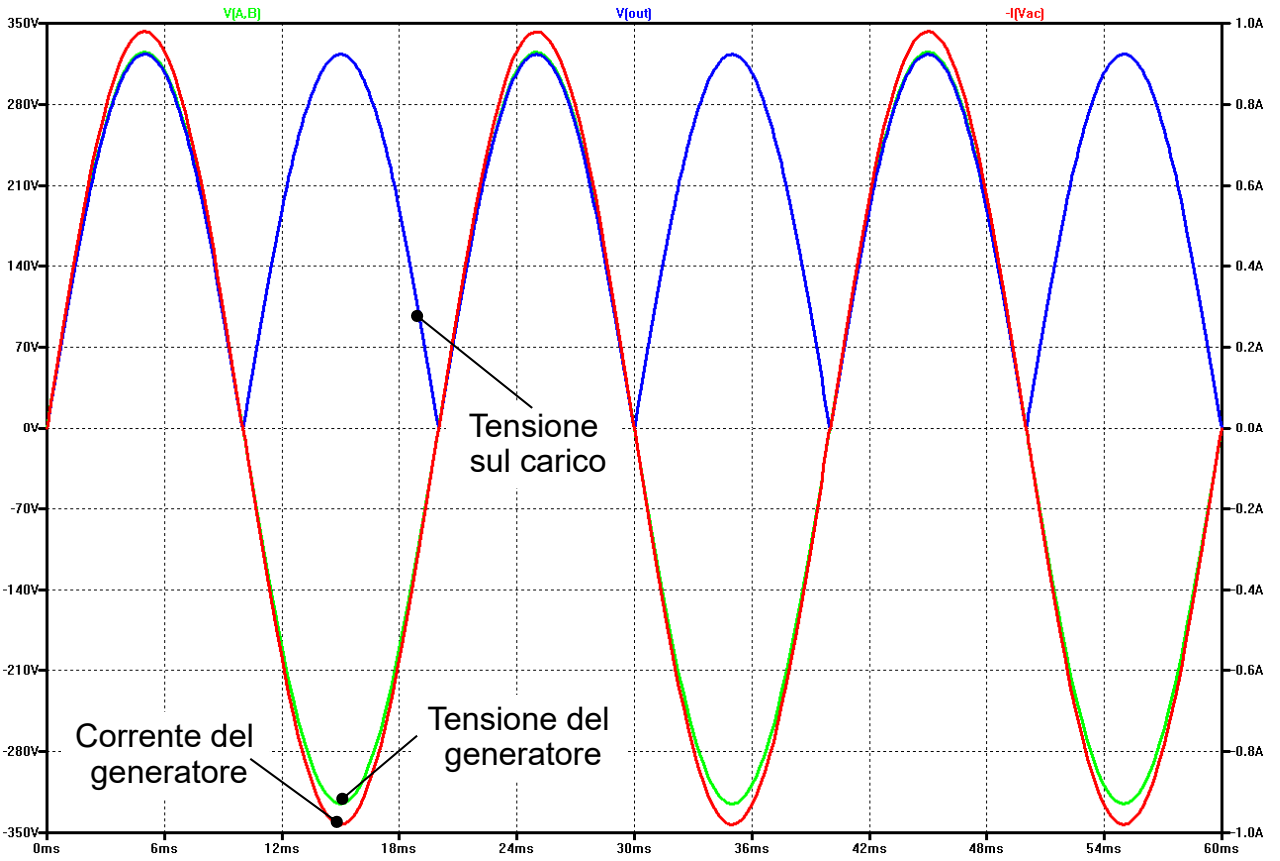
Raddrizzatore a ponte collegato a un carico puramente resistivo R_L



Esempio 1

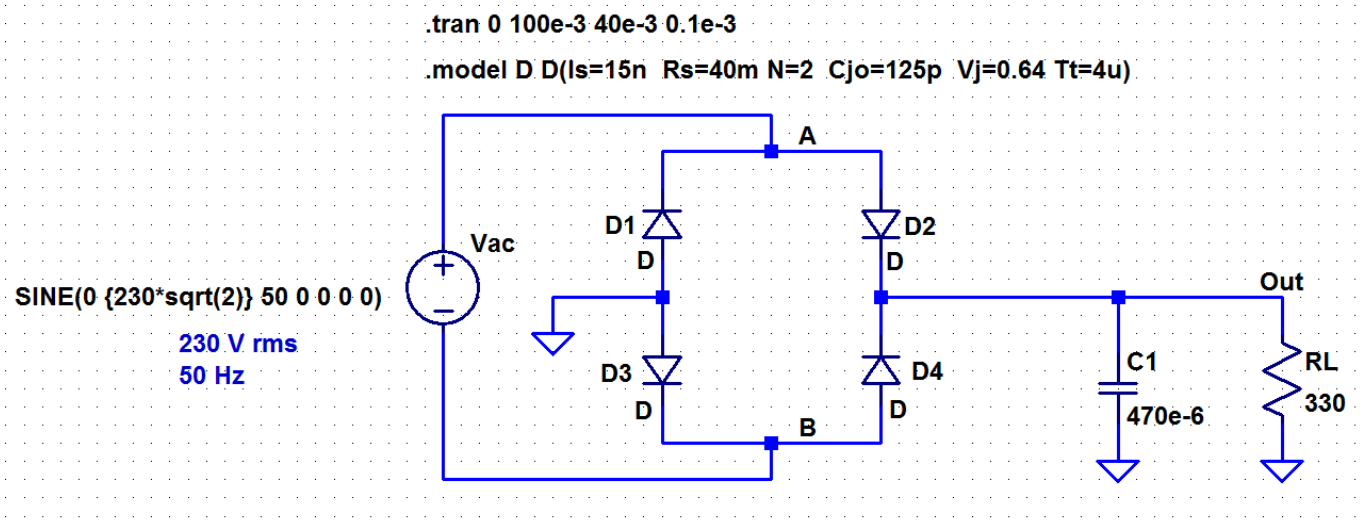
- Durante le semionde positive della tensione del generatore V_{ac} i diodi D_2 e D_3 sono in conduzione e i diodi D_1 e D_4 sono interdetti
- Durante le semionde negative della tensione del generatore V_{ac} i diodi D_1 e D_4 sono in conduzione e i diodi D_2 e D_3 sono interdetti
- La tensione di R_L (a meno delle cadute di tensione sui diodi) è pari al valore assoluto della tensione V_{ac}
- La corrente del generatore è praticamente sinusoidale ed è in fase con la tensione V_{ac}
- ➡ In queste condizioni sia il fattore di sfasamento $\cos\varphi$ che il fattore di distorsione $\cos\theta$ sono praticamente uguali a 1
- ➡ La potenza erogata dal generatore è, in pratica, puramente attiva

Tensione e corrente del generatore



Esempio 2

Raddrizzatore a ponte con capacità di filtro

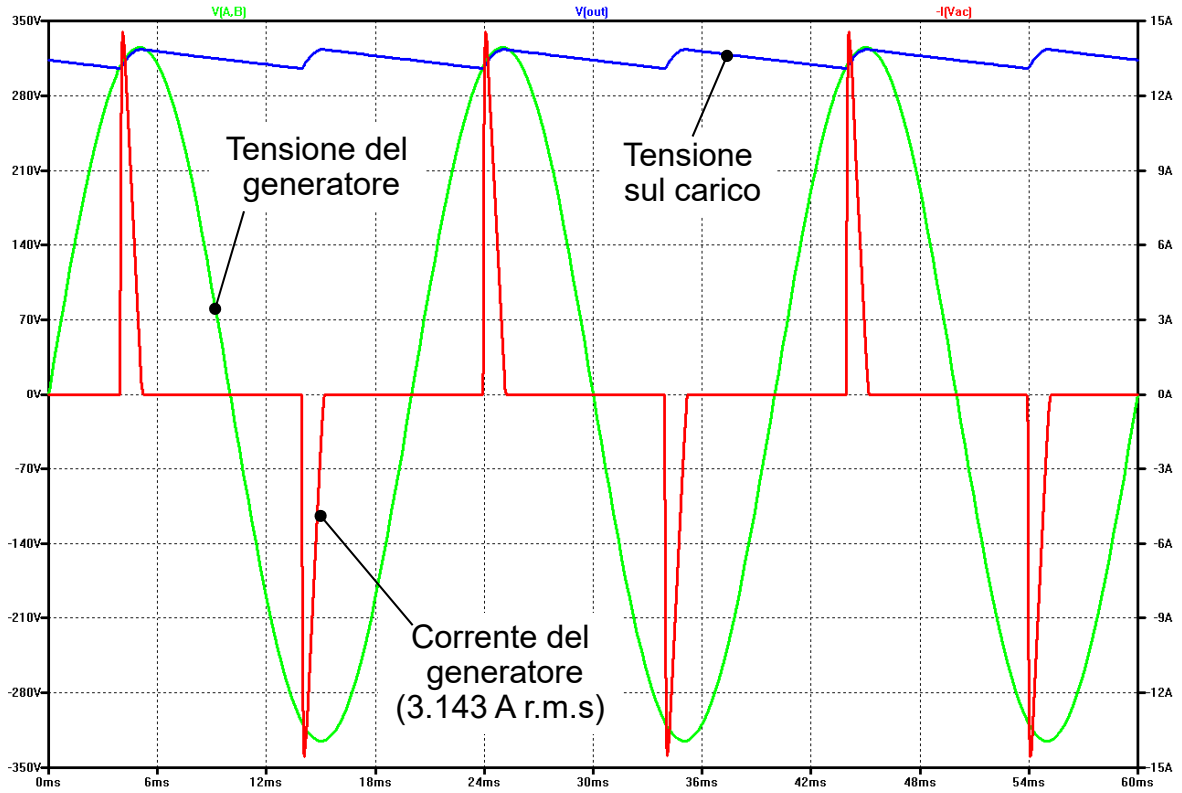


Esempio 2

- Il condensatore si carica attraverso i diodi e la sua tensione raggiunge un valore massimo pari all'ampiezza di V_{ac} (a meno delle cadute di tensione sui diodi) in corrispondenza dei picchi positivi e negativi di V_{ac}
- Quando la tensione del condensatore è maggiore del valore assoluto di V_{ac} tutti i diodi sono interdetti, quindi il condensatore può scaricarsi solo attraverso la resistenza R_L
- Quando la tensione del condensatore scende al di sotto del valore assoluto di V_{ac}, una coppia di diodi (D_2 e D_3 durante le semionde positive di V_{ac}, D_1 e D_4 durante le semionde negative di V_{ac}) entra in conduzione per un breve intervallo di tempo permettendo al condensatore di ricaricarsi

➡ La corrente del generatore è costituita da una sequenza di brevi impulsi positivi e negativi

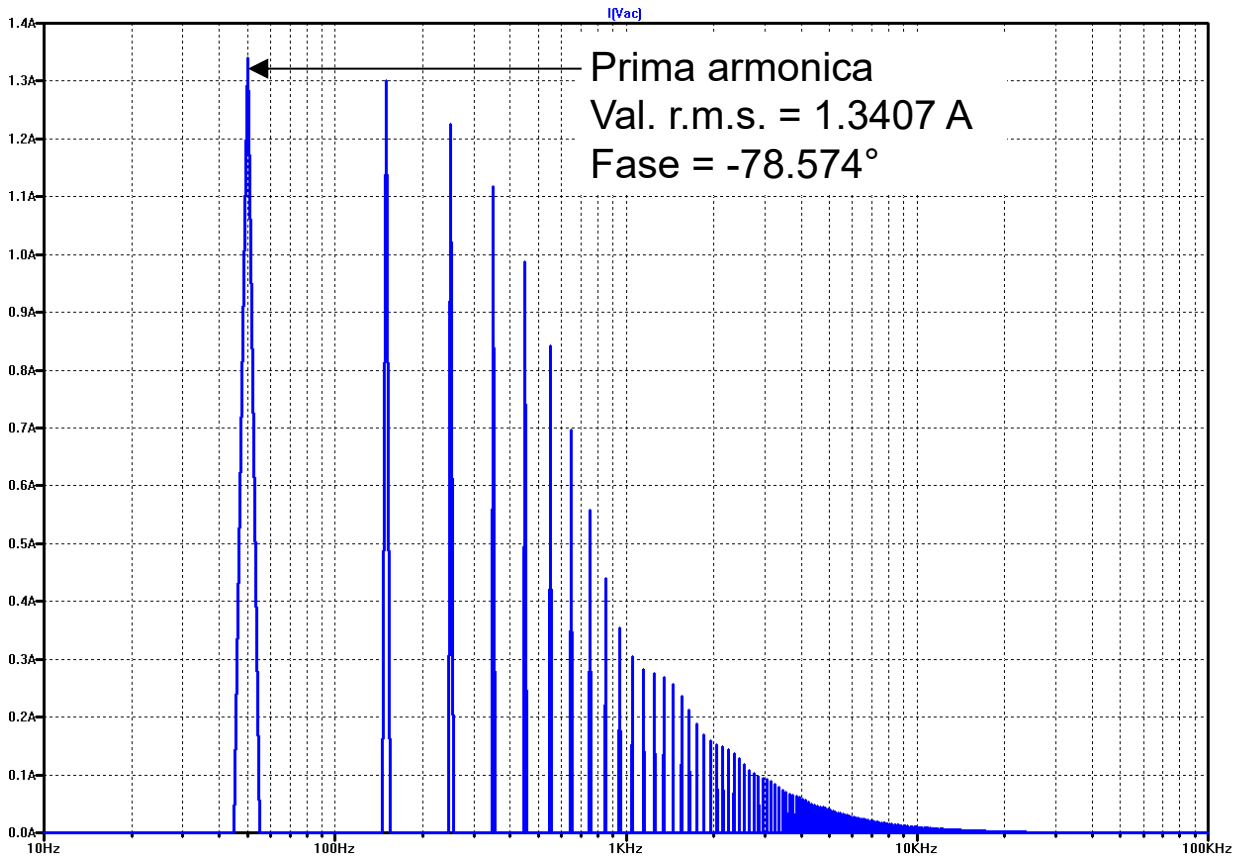
Tensione e corrente del generatore



Esempio 2

- La corrente del generatore presenta un forte contenuto armonico
- In particolare, dato che si ha una simmetria di semionda, sono presenti solo armoniche dispari (con frequenze corrispondenti ai multipli dispari di 50 Hz)
- In queste condizioni si ha un valore molto elevato della distorsione armonica totale e quindi un basso valore del fattore di distorsione $\cos\theta$
- L'angolo di sfasamento tra la tensione e la prima armonica della corrente è relativamente piccolo (-11.4°) quindi il fattore si sfasamento $\cos\varphi$ è prossimo a 1

Spettro di ampiezza della corrente del generatore



Calcolo delle potenze

- Tensione del generatore: $V_{eff} = 230\ V,\ \varphi_V = -90°$
- Corrente del generatore: $I_{eff} = 3.143\ A$
- Prima armonica di I: $I_{1eff} = 1.4307\ A \quad \varphi_{I1} = -78.574°$
- Angolo di sfasamento: $\varphi = \varphi_V - \varphi_{I1} = -11.426°$
- Fattore di sfasamento: $\cos\varphi = 0.98$
- Fattore di distorsione: $\cos\theta = I_{1eff} / I_{eff} = 0.427$
- Tasso di distorsione armonica: $THD = \sqrt{(I^2 - I_1^2)/I_1^2} \cdot 100 = 212.031\%$
- Fattore di potenza: $\cos\Phi = \cos\varphi \cdot \cos\theta = 0.418$
- Potenza attiva: $P = V_{eff} I_{1eff} \cos\varphi = 302.25\ W$
- Potenza reattiva: $Q = V_{eff} I_{1eff} \operatorname{sen}\varphi = -61.07\ VAR$
- Potenza deformante: $D = V_{eff} \sqrt{I_{eff}^2 - I_{1eff}^2} = 653.822\ VA$
- Potenza apparente: $S = V_{eff} I_{1eff} = 722.89\ VA$