

# Elettromagnetismo quasi stazionario

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 16-12-2013)

## Elettromagnetismo quasi stazionario

- Equazioni fondamentali

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Equazioni di legame materiale per un mezzo lineare isotropo

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

## Elettromagnetismo quasi stazionario

- Se le variazioni temporali delle grandezze elettromagnetiche sono *sufficientemente lente* è possibile che, in determinate regioni dello spazio, alcune delle derivate rispetto al tempo che compaiono nelle equazioni fondamentali siano trascurabili
- Quando si verifica questa condizione è possibile descrivere, in via approssimata, l'evoluzione nel tempo di un sistema elettromagnetico facendo uso, istante per istante, di risultati che a rigore valgono solo in condizioni stazionarie
- ➔ In questo caso si dice che il sistema in oggetto è in condizioni **quasi stazionarie**

3

## Elettromagnetismo quasi stazionario

- Un sistema elettromagnetico in condizioni quasi stazionarie viene descritto mediante equazioni ottenute trascurando alcune delle derivate rispetto al tempo nelle equazioni fondamentali
- Per precisare in cosa consiste l'approssimazione quasi stazionaria è necessario
  - ◆ specificare cosa si intende per variazioni "sufficientemente lente"
  - ◆ indicare in quali casi le derivate rispetto al tempo possono essere considerate nulle e in quali non possono essere trascurate
- Per ottenere indicazioni riguardo ai punti precedenti, può essere utile confrontare i potenziali elettrico e magnetico dovuti a distribuzioni volumetriche di cariche e di correnti nel caso stazionario e nel caso non stazionario

4

## Potenziale vettore magnetico

- Il vettore induzione magnetica è solenoidale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- ➔ È possibile esprimere  $\mathbf{B}$  come rotore di un vettore  $\mathbf{A}$  detto **potenziale vettore magnetico** (unità di misura T·m)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- La condizione precedente non definisce  $\mathbf{A}$  in modo univoco: infatti se si considera un vettore  $\mathbf{A}'$  definito come

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi \quad (\varphi = \text{generica funzione scalare})$$

risulta

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \varphi}_{= 0} = \nabla \times \mathbf{A}$$

5

## Potenziale vettore magnetico

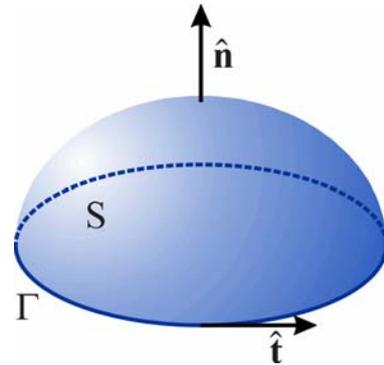
- Si può dimostrare (**teorema di Clebsh**) che un campo vettoriale è univocamente determinato se si assegnano in ogni punto i valori del suo rotore e della sua divergenza
- ➔ Per definire univocamente  $\mathbf{A}$ , si deve assegnare anche il valore della divergenza
- Questo grado di libertà verrà utilizzato in seguito, quindi per il momento non si fanno ipotesi sul valore di  $\nabla \cdot \mathbf{A}$

6

## Potenziale vettore magnetico

- Per il teorema di Stokes si ha

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



- La circuitazione di  $\mathbf{A}$  lungo una linea chiusa  $\Gamma$  è pari al flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con la linea  $\Gamma$

7

## Potenziale scalare elettrico

- Dalla legge di Faraday si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Si può esprimere il vettore  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$  come gradiente di un potenziale scalare  $V$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

- Il campo elettrico non stazionario può essere espresso come somma di un componente conservativo e uno non conservativo

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc}$$

8

## Determinazione dei potenziali

- In un mezzo lineare isotropo omogeneo la legge di Ampere-Maxwell può essere posta nella forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Si inseriscono le espressioni di  $\mathbf{B}$  e di  $\mathbf{E}$  in funzione dei potenziali  $\mathbf{A}$  e  $V$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$



$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial \nabla V}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J}$$

9

## Determinazione dei potenziali

- Per definire in modo univoco il potenziale vettore si deve ancora assegnare il valore della sua divergenza
- In questo caso conviene imporre la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{Scelta di Lorentz}$$

- In questo modo si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \underbrace{\nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)}_{=0} = -\mu \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

- Il potenziale vettore magnetico soddisfa un'equazione delle onde non omogenea

10

## Determinazione dei potenziali

- In un mezzo lineare isotropo omogeneo la legge di Gauss può essere posta nella forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon}$$

- Si inserisce nell'equazione l'espressione di  $\mathbf{E}$  in funzione dei potenziali  $\mathbf{A}$  e  $V$ , quindi, tenendo conto della scelta di Lorentz, si ottiene

$$\nabla \cdot \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_c}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon}$$

- ➔ Anche il potenziale scalare elettrico soddisfa un'equazione delle onde non omogenea

11

## Determinazione dei potenziali

- Si può dimostrare che le soluzioni delle equazioni delle onde sono

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon}$$

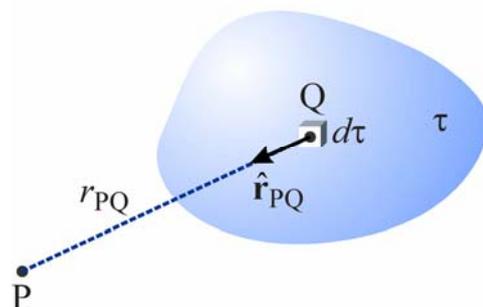
$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

- La costante  $c$  rappresenta la **velocità della luce** nel mezzo in cui ha sede il campo elettromagnetico

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- In particolare nel vuoto si ha

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$$

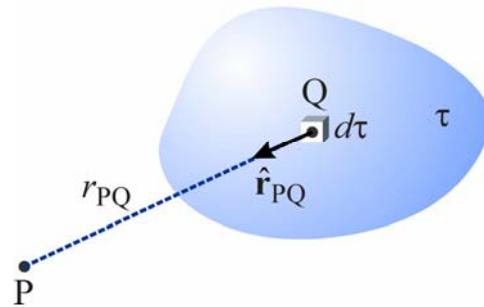


12

## Potenziali ritardati

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$



- $\mathbf{A}$  e  $V$  sono costituiti dalla somma di infiniti contributi ciascuno dei quali rappresenta un'onda sferica generata in un punto  $Q$  che si propaga con velocità  $c$
- ➔ Il campo elettrico e il campo magnetico nel punto  $P$  all'istante  $t$  non sono determinati dai valori allo stesso istante  $t$  di  $\mathbf{J}$  e  $\rho_c$
- ➔ L'effetto dovuto ad una densità di corrente o di carica in un punto  $Q$  viene avvertito nel punto  $P$  con un ritardo proporzionale alla distanza tra i punti considerati

13

## Potenziali in condizioni stazionarie

- In condizioni stazionarie anche i potenziali sono costanti nel tempo
  - ➔ I potenziali sono soluzioni di equazioni di Poisson

### Condizioni non stazionarie

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

### Condizioni stazionarie

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q})}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q})}{r_{PQ}} d\tau$$

14

## Approssimazione quasi stazionaria

- Si identifica il campo elettromagnetico all'istante  $t$  con il campo stazionario che produrrebbero delle distribuzioni di cariche e di correnti con densità costanti pari ai valori assunti all'istante  $t$

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) \cong \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t)}{r_{\mathbf{PQ}}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t)}{r_{\mathbf{PQ}}} d\tau$$

- ➔ L'approssimazione è accettabile se i ritardi di propagazione sono trascurabili
- ➔ E' necessario che in un intervallo di tempo pari al massimo ritardo di propagazione che si può avere all'interno del sistema le grandezze elettromagnetiche siano praticamente costanti

15

## Approssimazione quasi stazionaria

- Si considera il caso in cui le grandezze elettromagnetiche variano nel tempo con legge sinusoidale e quindi si ha

$$\rho_c(\mathbf{Q}, t) = \rho_M(\mathbf{Q}) \cos[\omega t + \varphi_\rho(\mathbf{Q})]$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t) = \mathbf{J}_M(\mathbf{Q}) \cos[\omega t + \varphi_J(\mathbf{Q})]$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$\omega$  = pulsazione  
 $f$  = frequenza  
 $T$  = periodo

- Variazioni di tipo più generale possono essere espresse mediante sovrapposizione di funzioni sinusoidali (**serie o integrali di Fourier**)
- ➔ Le considerazioni relative al caso sinusoidale possono essere estese a situazioni più generali riferendole alla massima frequenza che occorre considerare

16

## Approssimazione quasi stazionaria

- Se  $\rho_c$  varia con legge sinusoidale si ha

$$\begin{aligned}\rho_c\left(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}\right) &= \rho_M(Q) \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_{PQ}}{c}\right) + \varphi_\rho(Q)\right] = \\ &= \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \cos\left(\frac{\omega r_{PQ}}{c}\right) + \rho_M(Q) \text{sen}[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \text{sen}\left(\frac{\omega r_{PQ}}{c}\right) = \\ &= \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \cos\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) + \rho_M(Q) \text{sen}[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \text{sen}\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right)\end{aligned}$$

- $T$  indica il periodo e  $t_D$  il tempo di ritardo dal punto  $Q$  al punto  $P$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad t_D = \frac{r_{PQ}}{c}$$

- Un'espressione analoga vale per  $\mathbf{J}$

17

## Approssimazione quasi stazionaria

- Se in tutti i punti del sistema vale la condizione

$$T \gg t_D = \frac{r_{PQ}}{c} \quad \forall P \forall Q$$

risulta

$$\begin{aligned}\cos\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) &\cong 1 & \rho_c\left(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}\right) &\cong \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] = \rho_c(Q, t) \\ \text{sen}\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) &\cong 0 & \mathbf{J}\left(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}\right) &\cong \mathbf{J}_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_J(Q)] = \mathbf{J}(Q, t)\end{aligned}$$

- Quindi si ha

$$\mathbf{A}(P, t) \cong \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(P, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(Q, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

In ogni istante  $t$  il campo elettromagnetico coincide con il campo stazionario generato da distribuzioni di carica e di corrente costanti con densità  $\mathbf{J}(Q, t)$  e  $\rho_c(Q, t)$

18

## Limiti di validità

- Se la massima distanza tra due punti del sistema è  $d_{\max}$ , il massimo ritardo di propagazione è

$$t_{D\max} = \frac{d_{\max}}{c}$$

- ➔ L'approssimazione quasi stazionaria è valida se, alla massima frequenza che interessa considerare, il periodo della variazione delle grandezze elettromagnetiche è molto grande rispetto al massimo ritardo di propagazione

$$T \gg t_{D\max}$$

- La condizione può essere posta nella forma

$$d_{\max} \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda \quad \lambda = \text{lunghezza d'onda}$$

- ➔ La massima dimensione del sistema deve essere molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda corrispondente alla massima frequenza che interessa considerare

19

## Derivate di B e D

- In condizioni quasi stazionarie si approssimano i potenziali con le soluzioni delle equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{A}(t) = -\mu \mathbf{J}(t) \quad \nabla^2 V(t) = -\frac{\rho_c(t)}{\epsilon}$$

- ➔ Le derivate seconde rispetto a  $t$  dei potenziali devono essere trascurabili

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \cong 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cong 0$$

- La presenza di queste derivate dipende dalla presenza simultanea delle derivate temporali di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  nelle equazioni di Maxwell

- ➔ Se si annulla almeno una di queste derivate si annullano anche le derivate seconde di  $\mathbf{A}$  e  $V$

- ➔ Le derivate seconde di  $\mathbf{A}$  e  $V$  sono trascurabili se in ogni punto del sistema è verificata almeno una delle condizioni

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0$$

20

## Derivate di **B** e **D**

- Si considera il caso in cui **B** e **D** sono funzioni sinusoidali del tempo

$$\mathbf{B}(P, t) = \mathbf{B}_M(P) \cos[\omega t + \varphi_B(P)]$$

$$\mathbf{D}(P, t) = \mathbf{D}_M(P) \cos[\omega t + \varphi_D(P)]$$

- In questo caso le loro derivate sono funzioni sinusoidali del tempo con ampiezza proporzionale all'ampiezza di **B** e **D**

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\omega \mathbf{B}_M(P) \sin[\omega t + \varphi_B(P)] = \omega \mathbf{B}_M(P) \cos\left[\omega t + \varphi_B(P) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\omega \mathbf{D}_M(P) \sin[\omega t + \varphi_D(P)] = \omega \mathbf{D}_M(P) \cos\left[\omega t + \varphi_D(P) + \frac{\pi}{2}\right]$$

- ➔ In queste condizioni si può assumere che le derivate siano trascurabili nelle regioni in cui **B** e **D** sono trascurabili

21

## Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- In generale, in condizioni non stazionarie il modello circuitale non è utilizzabile
- **E** non è conservativo
  - ➔ Non si può definire in modo univoco la tensione tra due terminali di un componente
  - ➔ Non vale la legge di Kirchhoff per le tensioni
- **J** non è solenoidale
  - ➔ La corrente attraverso la sezione trasversale di un tubo di flusso di **J** non è costante
  - ➔ Non vale la legge di Kirchhoff per le correnti
- Le interazioni tra i componenti di un sistema elettromagnetico non possono essere descritte in termini di tensioni e correnti
- In particolare, non è possibile esprimere la potenza assorbita o erogata da un componente mediante le tensioni e le correnti ai terminali

22

## Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- Se la frequenza è sufficientemente bassa, si può assumere che nelle regioni in cui  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  sono trascurabili siano trascurabili anche le loro derivate

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{negli induttori}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{nelle rimanenti regioni}$$

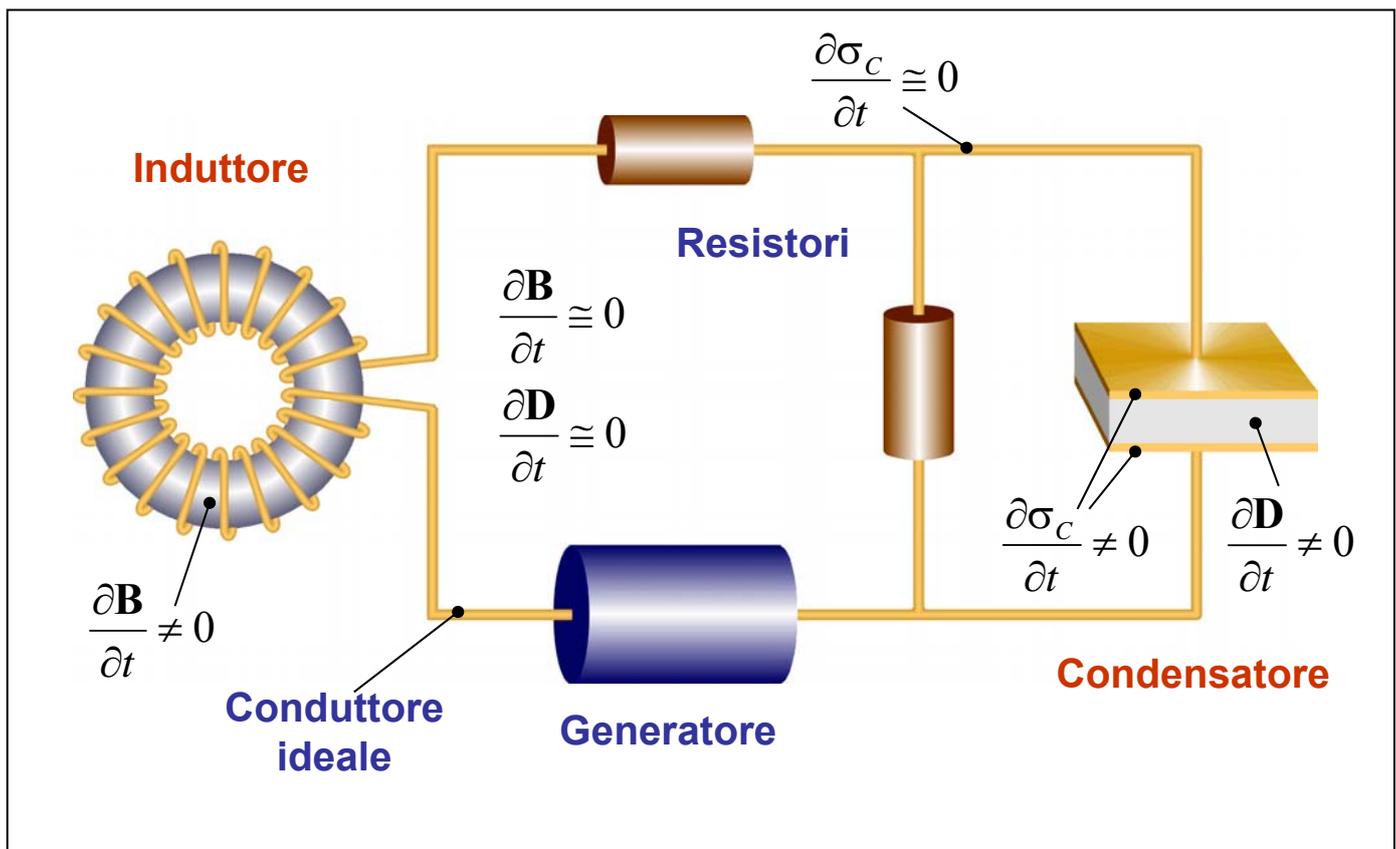
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{nei condensatori}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{nelle rimanenti regioni}$$

- Il sistema può essere ancora descritto mediante un modello circuitale se le superfici limite dei componenti vengono definite in modo che derivate di  $\mathbf{B}$  e di  $\mathbf{D}$  siano diverse da zero solo al loro interno (Ad esempio, non si può racchiudere in una superficie limite una sola armatura di un condensatore)
- In questo modo, anche le derivate dei flussi di  $\mathbf{B}$  e di  $\mathbf{D}$  attraverso le superfici limite sono nulle

23

## Esempio



24

## Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- In condizioni non stazionarie è solenoidale la densità di corrente totale  $\mathbf{J}_T$  costituita dalla somma delle densità di corrente di conduzione e di spostamento

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$$

- Nelle regioni in cui la derivata di  $\mathbf{D}$  è trascurabile (e in particolare all'esterno delle superfici limite dei componenti) si ha

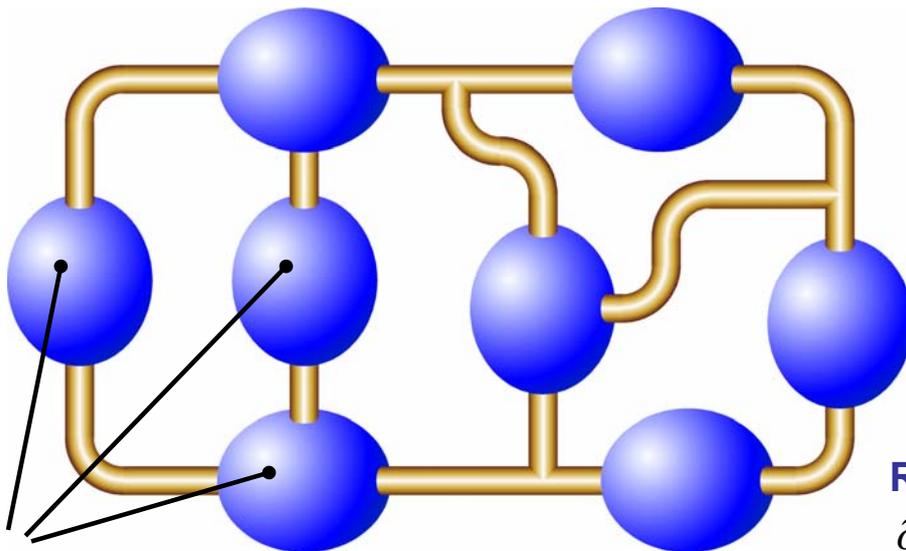
$$\nabla \cdot \mathbf{J} \cong 0$$

- Quindi, dall'equazione di continuità si ricava che in queste regioni vale anche la condizione

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \cong 0$$

25

## Circuiti in condizioni quasi stazionarie



### Componenti:

All'interno delle superfici limite, in ogni punto è verificata almeno una delle condizioni

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0$$

Regione esterna:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0$$

26

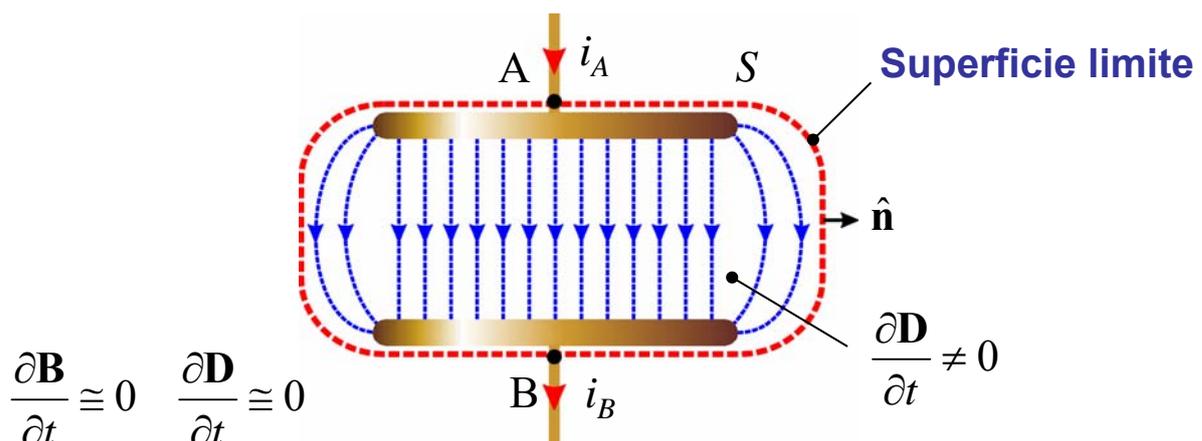
## Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- Nella regione esterna e sulle superfici limite  $\mathbf{E}$  è conservativo e  $\mathbf{J}$  è solenoidale
- ➔ Si possono definire in modo univoco le tensioni e le correnti ai terminali dei componenti
- ➔ Valgono le leggi di Kirchhoff (se si considerano linee chiuse e superfici chiuse interamente contenute nella regione esterna ai componenti)
- ➔ Sono ancora valide le espressioni delle potenze scambiate dai componenti in funzione delle tensioni e delle correnti che sono state ricavate nel caso stazionario

27

## Condensatore

- **Ipotesi:**
  - ◆ La derivata di  $\mathbf{D}$  rispetto a  $t$  assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo all'interno della superficie chiusa  $S$
  - ◆ La densità di carica assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo sulle armature del condensatore
  - ◆ La derivata di  $\mathbf{B}$  rispetto a  $t$  può essere considerata ovunque nulla



28

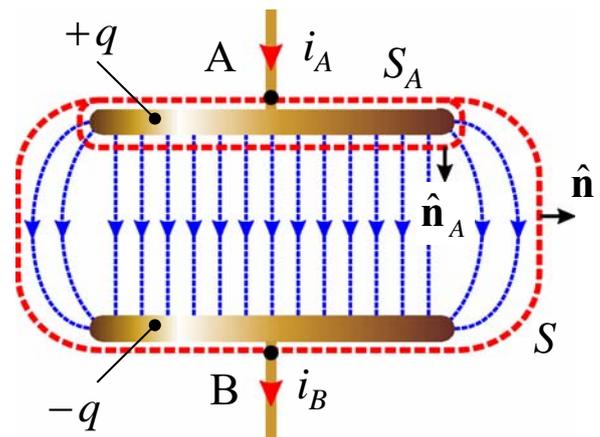
## Condensatore

- La corrente di spostamento attraverso la superficie  $S$  è nulla
  - Su  $S$   $\mathbf{J}$  è solenoidale
  - La corrente  $i_A$  è uguale in ogni istante alla corrente  $i_B$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -i_A + i_B = 0 \quad \Rightarrow \quad i_A = i_B = i$$

- All'interno della superficie  $S$  il campo elettrico è identico, in ogni istante, ad un campo stazionario
  - Vale la relazione

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = v(t) = \frac{q(t)}{C}$$



29

## Condensatore

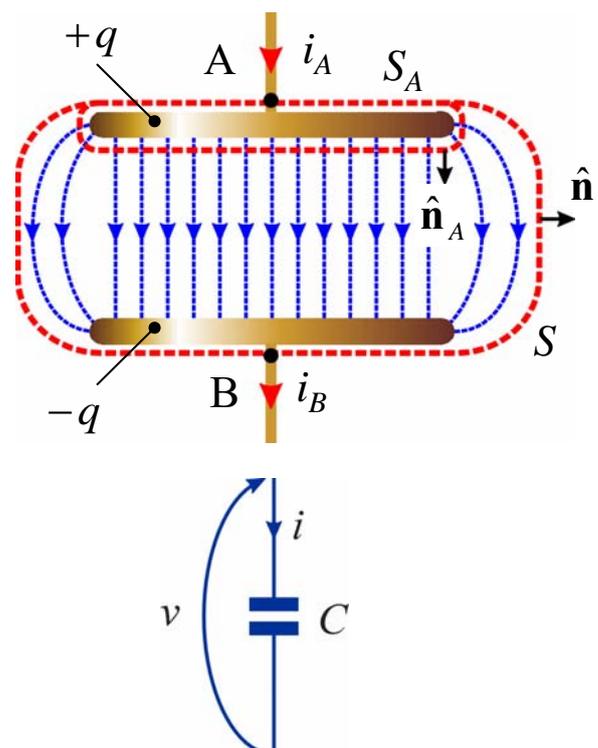
- Dall'equazione di continuità, considerando la superficie  $S_A$ , si ha

$$i = - \oint_{S_A} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \frac{dq}{dt}$$

- Combinando le due ultime equazioni si ottiene la relazione costitutiva del condensatore

$$q(t) = Cv(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \frac{dv}{dt}$$



30

## Energia di un condensatore

- La potenza assorbita da un condensatore può essere espressa come

$$p = vi = v \frac{dq}{dt}$$

- Si assume che per  $t = 0$   $v$  e  $q$  siano nulle
- Nell'intervallo  $[0 t_0]$  si fa variare  $v$  da 0 a un valore finale  $V$ 
  - ➔ la carica varia da 0 a un valore finale  $Q$
- L'energia assorbita dal condensatore nell'intervallo  $[0 t_0]$  è

$$W_E = \int_0^{t_0} v \frac{dq}{dt} dt = \int_0^Q v dq$$

31

## Energia di un condensatore

- Se la relazione tra  $v$  e  $q$  è biunivoca, il valore di  $W_E$  non dipende dall'andamento di  $v$  e  $q$  durante l'intervallo  $[0 t_0]$ , ma solo dal valore finale della carica  $Q$
- Se la tensione (e quindi la carica) vengono riportate a 0, l'energia  $W_E$  viene restituita integralmente
  - ➔  $W_E$  rappresenta un'energia di tipo conservativo
  - ➔ **energia accumulata nel campo elettrico del condensatore**
- Per un condensatore lineare (➔  $q = Cv$ ) l'energia del campo elettrico può essere espressa nelle forme

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2$$

32

## Energia del campo elettrico

- L'energia di un condensatore può essere espressa anche in funzione dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$

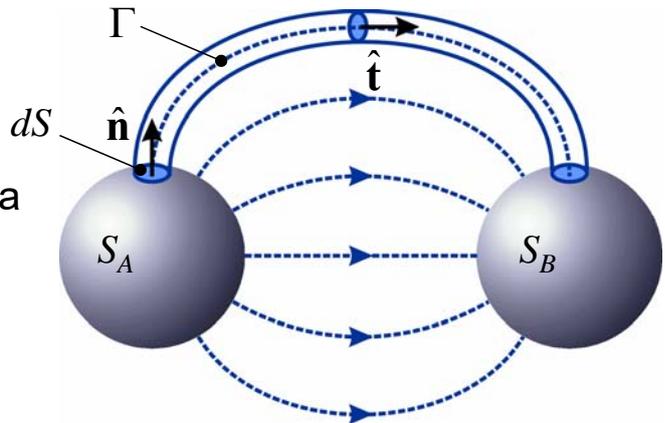
$$W_E = \int_0^Q v dq$$

- La carica sull'armatura  $S_A$  è data da

$$Q = \int_{S_A} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} D \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area  $dS$  individua un tubo di flusso di  $\mathbf{D}$  che collega le due armature del condensatore
- Si può esprimere la differenza di potenziale  $v$  tra le armature come integrale di  $\mathbf{E}$  lungo una linea di campo  $\Gamma$  di  $\mathbf{D}$  coincidente con l'asse del tubo di flusso

$$v = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

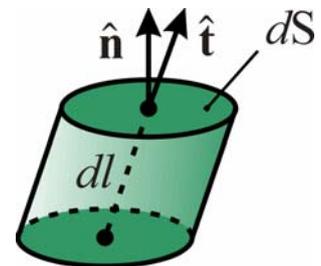


33

## Energia del campo elettrico

- Utilizzando le espressioni di  $v$  e  $Q$  e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è  $d\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS$  si ha

$$\begin{aligned} v dq &= \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \int_{S_A} dD \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_{S_A} \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS = \int_{\tau_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} d\tau \end{aligned}$$



- Quindi l'espressione dell'energia è

$$W_E = \int_0^Q v dq = \int_{\tau_c} \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{D} \text{ e } \mathbf{E} \text{ sono diversi da zero})$$

- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  sia biunivoca
- Si può dimostrare che queste espressioni dell'energia del campo elettrico, ottenute nel caso di un condensatore, hanno validità generale

34

## Densità di energia del campo elettrico

- ➔ Si può interpretare come **densità di energia del campo elettrico** la quantità

$$w_E = \frac{dW_E}{d\tau} = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$$

- Per un mezzo isotropo si ha

$$w_E = \int_0^E E dD$$

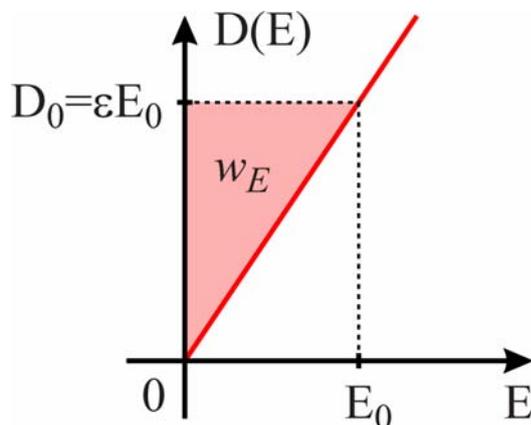
- Se il mezzo è anche lineare ( $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ) la densità di energia può essere espressa come

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon}$$

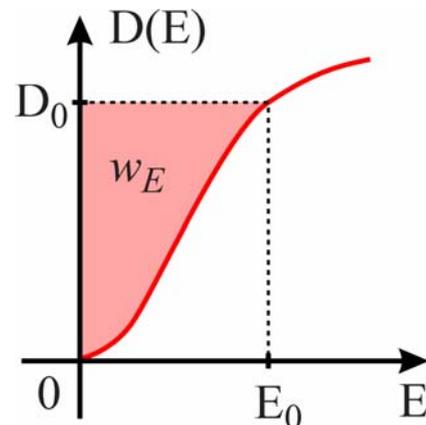
35

## Densità di energia del campo elettrico

- $w_E$  corrisponde all'area compresa tra la curva  $D(E)$  e l'asse delle ordinate



Mezzo lineare

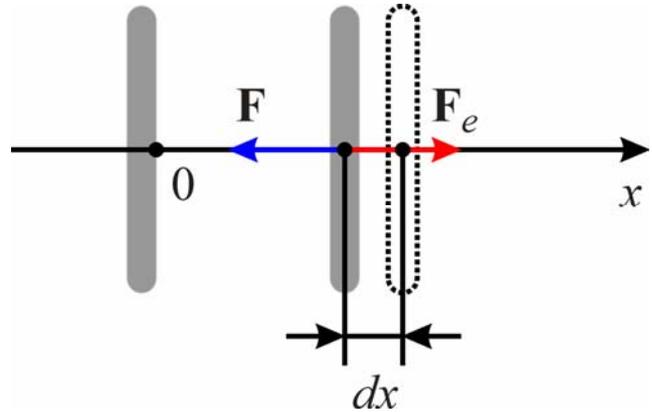


Mezzo non lineare

36

## Forza tra le armature di un condensatore

- $\mathbf{F}$  = risultante delle forze agenti su un'armatura
- $\mathbf{F}_e$  = forza esterna necessaria a mantenere in equilibrio l'armatura
- Si può valutare  $\mathbf{F}_e$  ( e quindi  $\mathbf{F}$ ) applicando uno spostamento virtuale  $dx$  (nella direzione di  $\mathbf{F}_e$ ) all'armatura
- Si assume che il condensatore sia isolato → carica  $Q$  costante
- Il lavoro fornito da  $\mathbf{F}_e$  deve essere uguale alla variazione dell'energia accumulata nel condensatore



$$F_e dx = dW_E$$

- Quindi si ottiene

$$F = F_e = \frac{dW_E}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

37

## Forza tra le armature di un condensatore

- Lo stesso risultato si ottiene nel caso in cui il condensatore non è elettricamente isolato ma interagisce con altri dispositivi (ad es. con un generatore)
  - ◆ In questo caso la carica del condensatore può variare
  - ◆ Il lavoro necessario per produrre una variazione  $dQ$  della carica è

$$dL_E = VdQ$$

- In queste condizioni il bilancio energetico diviene

$$dL_M + dL_E = dW_E \quad \Rightarrow \quad F_e dx + VdQ = d\left(\frac{1}{2} CV^2\right)$$

( $L_M$  = lavoro meccanico,  $L_E$  = lavoro elettrico)

- Quindi, dato che  $Q = CV$ , si ha

$$F_e dx + V(CdV + VdC) = CVdV + \frac{1}{2} V^2 dC \quad \Rightarrow \quad F_e dx = -\frac{1}{2} V^2 dC$$

38

## Forza tra le armature di un condensatore

- Nel caso di un condensatore a facce piane parallele la capacità vale

$$C = \varepsilon \frac{S}{x}$$

- Quindi la forza agente sulle armature è

$$F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{V^2 S}{x^2} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 S$$

dove  $E$  rappresenta il modulo del campo elettrico (uniforme) all'interno del condensatore

$$E = \frac{V}{x}$$

- La forza è data dal prodotto dell'area dell'armatura per la quantità

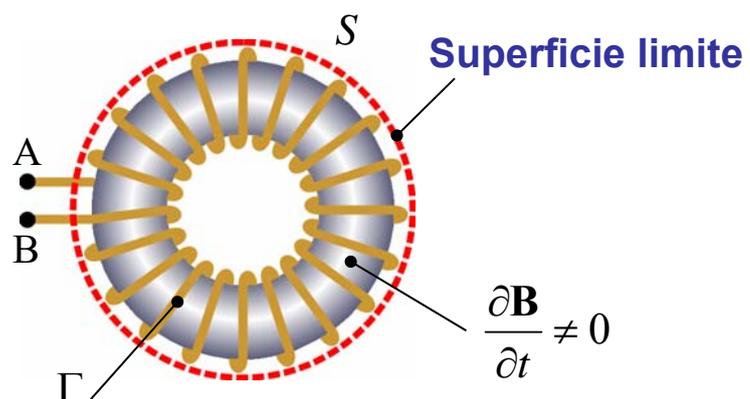
$$P_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (\text{pressione elettrostatica})$$

39

## Induttore

- **Ipotesi:**

- ◆ Avvolgimento costituito da un conduttore filiforme  $\Gamma$  con sezione  $\Delta s$  e conducibilità  $\sigma$
- ◆ La derivata di  $\mathbf{B}$  rispetto a  $t$  assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo all'interno della superficie chiusa  $S$
- ◆ La derivata di  $\mathbf{D}$  rispetto a  $t$  può essere considerata ovunque nulla



$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0$$

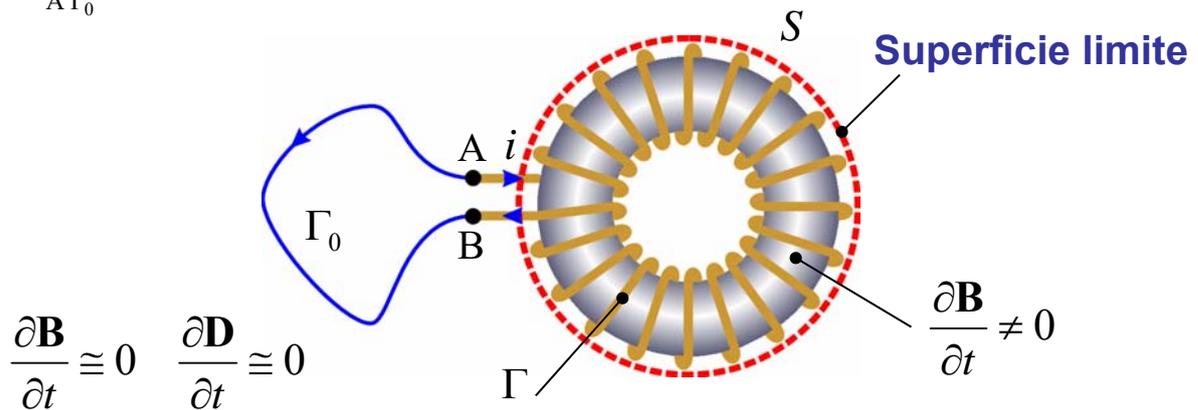
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$$

40

# Induttore

- $\mathbf{J}$  è ovunque solenoidale  $\rightarrow$  la corrente ha lo stesso valore  $i = J\Delta s$  in ogni sezione del conduttore
- All'esterno di  $S$   $\mathbf{E}$  è irrotazionale  $\rightarrow$  la tensione tra i terminali A e B dell'induttore può essere valutata integrando il campo elettrico lungo una linea arbitraria  $\Gamma_0$  esterna alla superficie  $S$

$$v_{AB} = \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



41

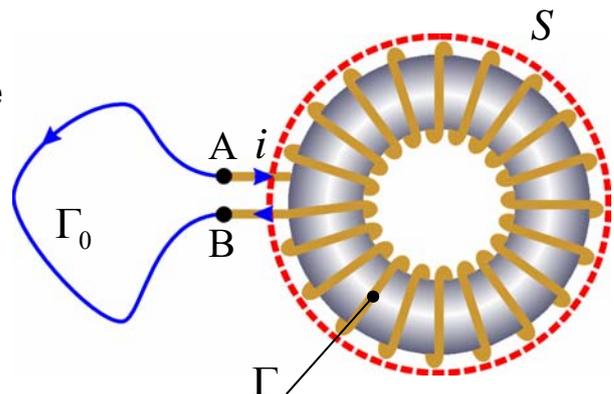
# Induttore

- Per il conduttore  $\Gamma$  vale la relazione

$$R = \frac{\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_{\Delta s} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS} = \frac{\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{i} \Rightarrow \int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

dove  $R$  è la resistenza del conduttore

- Dato che all'interno della superficie  $S$   $\mathbf{E}$  non è irrotazionale, l'integrale a primo membro non è la differenza di potenziale tra i terminali A e B



42

## Induttore

- Si sottrae e si somma a primo membro l'integrale di  $\mathbf{E}$  su  $\Gamma_0$

$$\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

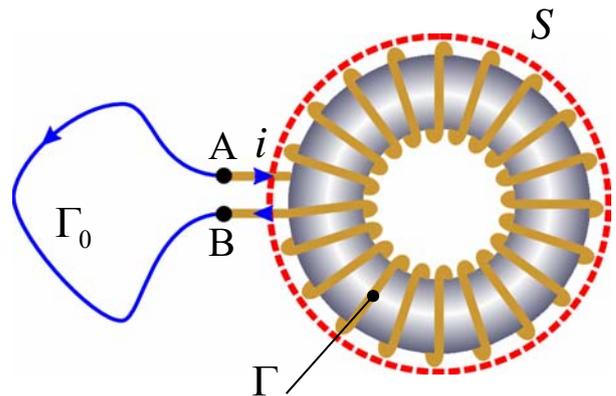
- I primi due termini della rappresentano la circuitazione di  $\mathbf{E}$  sulla linea chiusa formata da  $\Gamma$  e  $\Gamma_0$

$$\oint_{\Gamma \cup \Gamma_0} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

- Per la legge di Faraday

$$\oint_{\Gamma \cup \Gamma_0} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$\varphi =$  flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con la linea  $\Gamma \cup \Gamma_0$



43

## Induttore

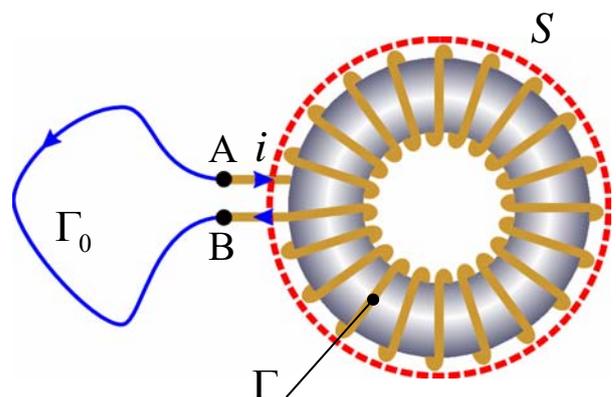
- ➔ Quindi si ottiene

$$-\frac{d\varphi}{dt} + v_{AB} = Ri \quad \Rightarrow \quad v_{AB} = Ri + \frac{d\varphi}{dt}$$

- All'esterno di  $S$   $\mathbf{B}$  e la sua derivata rispetto a  $t$  sono trascurabili
- ➔ Il valore del flusso e della sua derivata non dipendono dalla particolare linea  $\Gamma_0$  considerata
- Se il nucleo è realizzato con un materiale lineare, l'equazione si può porre nella forma

$$v_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$L = \frac{\varphi}{i} \quad \text{induttanza dell'avvolgimento } \Gamma$$

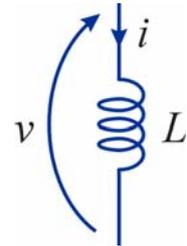


44

# Induttore

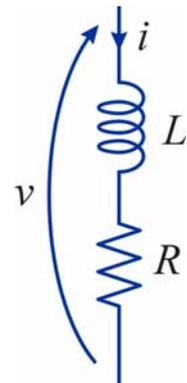
- Se la resistenza dell'avvolgimento,  $R$ , è trascurabile è possibile rappresentare il componente con un **induttore ideale**

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$



- Se la resistenza non è trascurabile si può rappresentare il componente mediante un bipolo equivalente formato da un induttore ideale e un resistore collegati in serie

$$v = Ri + L \frac{di}{dt}$$



45

# Energia di un induttore

- La potenza assorbita da un induttore può essere espressa come

$$p = vi = i \frac{d\phi}{dt}$$

- Si assume che per  $t = 0$   $i$  e  $\phi$  siano nulli
- Nell'intervallo  $[0 t_0]$  si fa variare  $i$  da 0 a un valore finale  $I$ 
  - ➔ Il flusso varia da 0 a un valore finale  $\Phi$
- L'energia assorbita dall'induttore nell'intervallo  $[0 t_0]$  è

$$W_M = \int_0^{t_0} i \frac{d\phi}{dt} dt = \int_0^{\Phi} i d\phi$$

46

## Energia di un induttore

- Se la relazione tra  $i$  e  $\varphi$  è biunivoca (cioè se non si ha isteresi) il valore di  $W_M$  non dipende dall'andamento di  $i$  e  $\varphi$  durante l'intervallo  $[0, t_0]$ , ma solo dal valore finale del flusso  $\Phi$
- Se la corrente (e quindi il flusso) vengono riportati a 0, l'energia  $W_M$  viene restituita integralmente
- ➔  $W_M$  rappresenta un'energia di tipo conservativo
  - ➔ **energia accumulata nel campo magnetico dell'induttore**
- Per un induttore lineare (➔  $\varphi = Li$ ) l'energia magnetica può essere espressa nelle forme

$$W_M = \int_0^{\Phi} \frac{\varphi}{L} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2$$

47

## Energia degli induttori accoppiati

- Procedendo in modo simile, si può dimostrare che nel caso di un sistema costituito da  $N$  induttori accoppiati l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i d\varphi$$

- Se gli induttori sono lineari si ha

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N M_{kj} i_k i_j$$

- Nel caso di due soli induttori accoppiati l'espressione dell'energia è

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

48

## Energia del campo magnetico

- L'energia magnetica di un circuito filiforme può essere espressa anche in funzione dei campi  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$

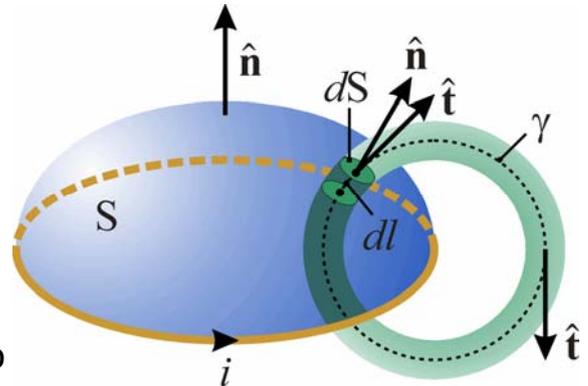
$$W_M = \int_0^\Phi i d\phi$$

- Il flusso concatenato con il circuito è

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S B \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area  $dS$  individua un tubo di flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con il circuito
- Si può esprimere la corrente  $i$  in funzione di  $\mathbf{H}$  applicando la legge di Ampere ad una linea di campo  $\gamma$  di  $\mathbf{B}$  coincidente con l'asse del tubo di flusso

$$i = \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



49

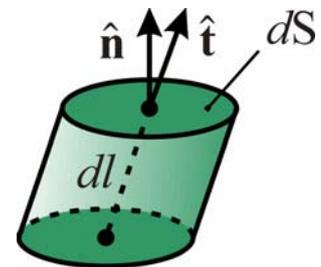
## Energia del campo magnetico

- Utilizzando le espressioni di  $i$  e  $\Phi$  e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è  $d\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS$  si ha

$$\begin{aligned} i d\phi &= \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \int_S dB \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_S \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot dB \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS = \int_{\tau_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \end{aligned}$$

- Quindi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \int_0^\Phi i d\phi = \int_{\tau_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{H} \text{ sono diversi da zero})$$



- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sia biunivoca (mezzi privi di isteresi)
- Si può dimostrare che queste espressioni, ottenute per un circuito filiforme, valgono anche per distribuzioni di corrente più generali

50

## Densità di energia del campo magnetico

- ➔ Si può interpretare come **densità di energia del campo magnetico** la quantità

$$w_M = \frac{dW_M}{d\tau} = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

- Per un mezzo isotropo si ha

$$w_M = \int_0^B H dB$$

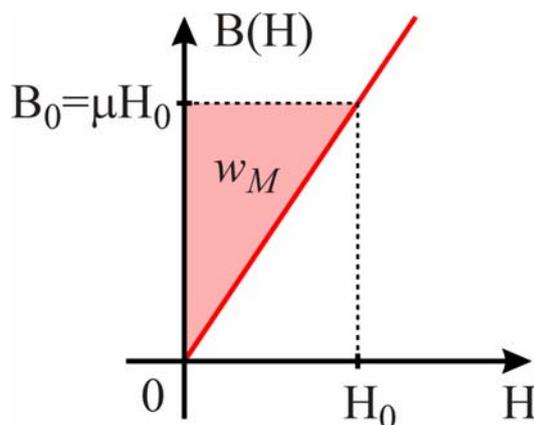
- Se il mezzo è anche lineare ( $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ) la densità di energia può essere espressa come

$$w_M = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

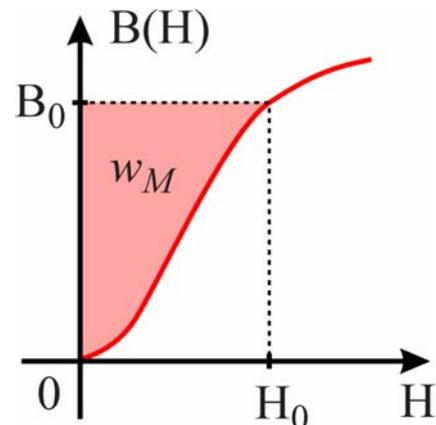
51

## Densità di energia del campo magnetico

- $w_M$  corrisponde all'area compresa tra la curva  $B(H)$  e l'asse delle ordinate



**Mezzo lineare**



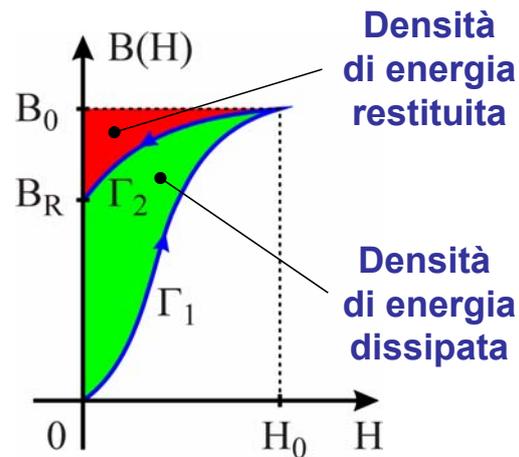
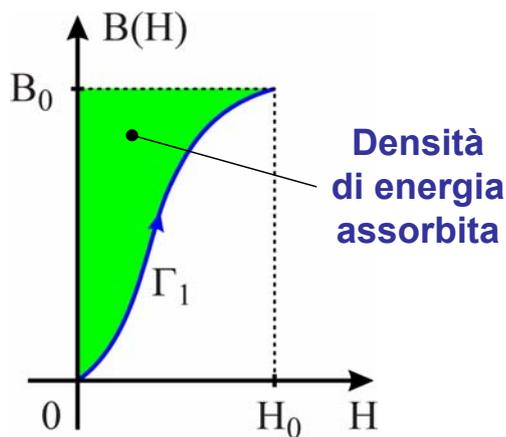
**Mezzo non lineare**

52

## Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Nel caso di un mezzo con isteresi, l'energia spesa per creare il campo (partendo da  $i$  e  $\mathbf{H}$  nulli) è maggiore di quella che viene restituita se la corrente  $i$ , e quindi  $\mathbf{H}$ , sono riportati a zero
- ➔ Viene assorbita in modo irreversibile, e quindi dissipata, l'energia per unità di volume

$$w_D = \int_0^{B_0} H dB + \int_{B_0}^{B_R} H dB$$



53

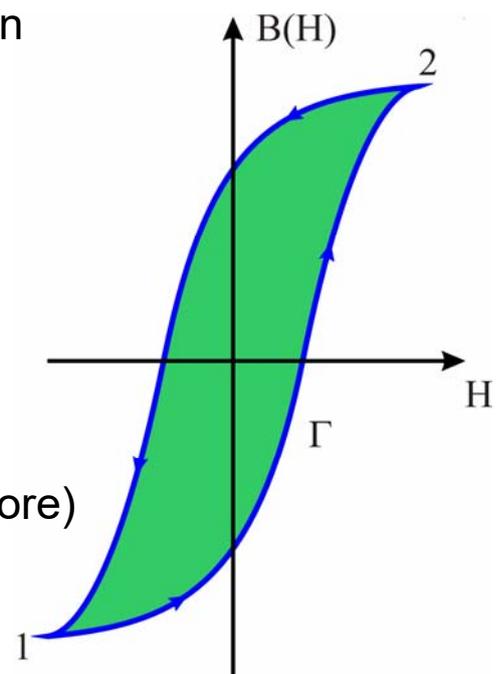
## Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Si fa variare periodicamente la corrente in modo che il materiale ferromagnetico sia soggetto a cicli di isteresi
- Complessivamente in ogni ciclo viene assorbita, per unità di volume, l'energia

$$w_D = \oint_{\Gamma} H dB$$

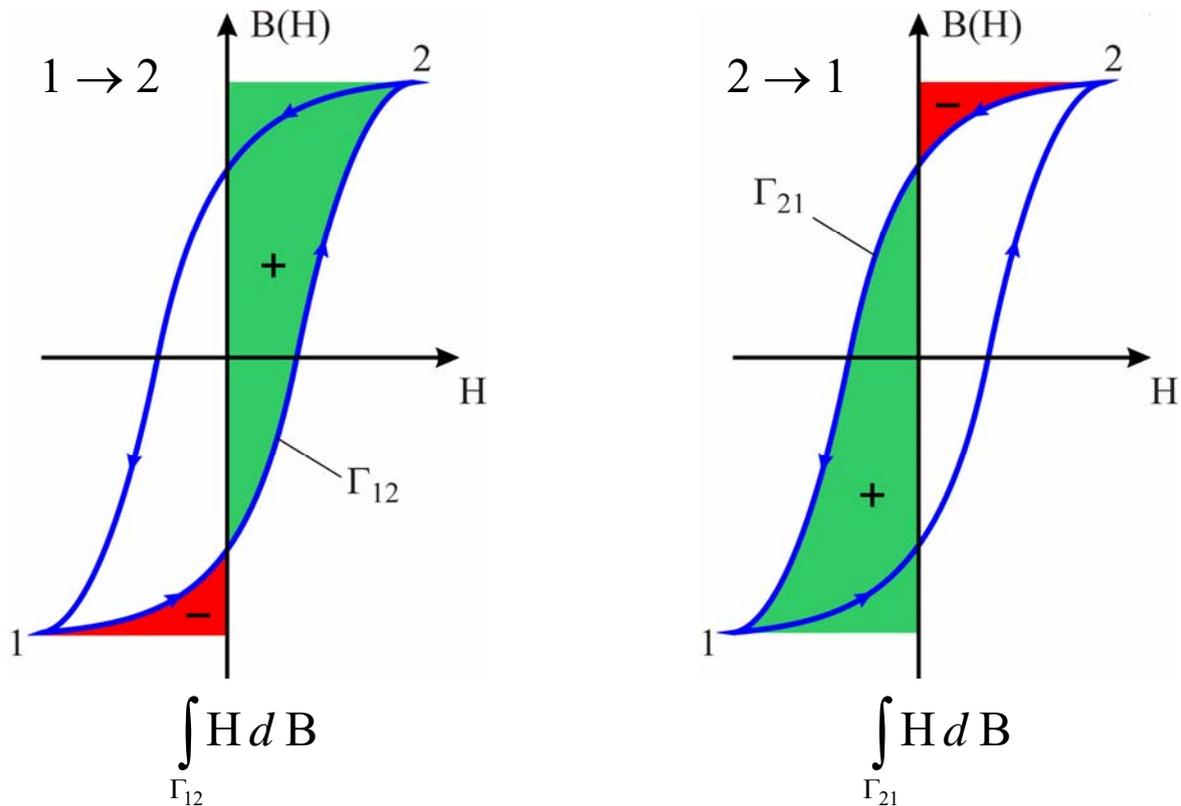
- ➔ Dissipazione di energia (convertita in calore)

- *L'energia per unità di volume dissipata in un ciclo corrisponde all'area delimitata dal ciclo di isteresi*



54

## Energia dissipata in un ciclo di isteresi



55

## Forza di un elettromagnete

- $\mathbf{F}$  = risultante delle forze agenti sull'ancora dovute all'elettromagnete
- $\mathbf{F}_e$  = forza esterna necessaria a mantenere l'ancora in equilibrio
- Si può valutare  $\mathbf{F}_e$  (e quindi  $\mathbf{F}$ ) applicando uno spostamento virtuale  $dx$  (nella direzione di  $\mathbf{F}_e$ ) all'ancora
- Bilancio energetico:

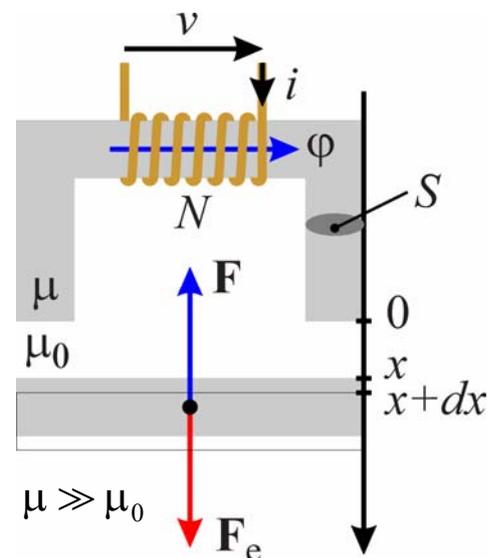
$$dL_m + dL_E = dW_M$$

$dL_m$  = lavoro meccanico compiuto da  $F_e$

$dL_E = vidt = id\Phi$  = lavoro elettrico  
(fornito da generatori esterni)

$\Phi = N\phi$  = flusso concatenato

$dW_M$  = variazione dell'energia magnetica



56

## Forza di un elettromagnete

- Quindi si ha

$$F_e dx + id\Phi = dW_M$$

- Per calcolare  $F_e$  (e quindi  $F$ ) si può considerare una trasformazione infinitesima nella quale il flusso viene mantenuto costante ( $d\Phi = 0$ )

$$F = F_e = \frac{dW_M}{dx} \Big|_{\Phi=\text{cost}} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L^2} \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

- Il risultato non dipende dalla particolare trasformazione considerata, infatti nel caso generale si ottiene

$$F_e dx + id\Phi = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$$

$$F_e dx + i(Ldi + idL) = Lidi + \frac{1}{2} i^2 dL \quad \rightarrow \quad F = F_e = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

57

## Forza di un elettromagnete

- Facendo uso della legge di Hopkinson

$$\mathcal{R}\phi = Ni$$

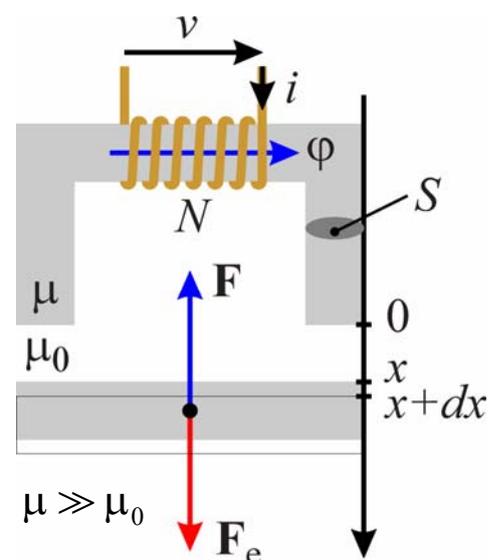
( $\mathcal{R}$  = riluttanza del circuito magnetico)

e della definizione di induttanza

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

si può esprimere la forza agente sull'ancora nella forma

$$F = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}$$



58

## Forza di un elettromagnete

- Se è possibile trascurare la riluttanza dei tratti formati dal materiale ad alta permeabilità,  $\mathcal{R}$  è data la somma delle riluttanze dei due traferri

$$\mathcal{R} = \frac{2x}{\mu_0 S} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{\varphi^2}{\mu_0 S} = \frac{N^2 i^2 \mu_0 S}{4x^2}$$

- Se il campo magnetico è uniforme si ha

$$\frac{\varphi}{\mu_0 S} = \frac{B}{\mu_0} = H$$

- Quindi si può esprimere  $F$  come

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \cdot 2S$$

- La forza è data dal prodotto dell'area dei traferri ( $2S$ ) per la quantità

$$P_M = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{pressione magnetica})$$