

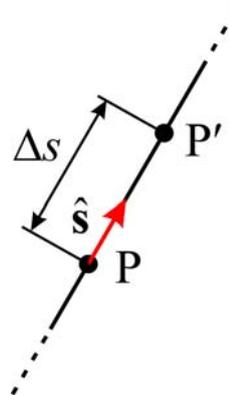
Operatori differenziali

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 5-4-2018)

Derivata direzionale

- Dato un punto P appartenente a una regione in cui è definito un campo scalare $f(P)$, si considera la retta passante per P individuata da un versore \hat{s} e si indica con P' un punto sulla retta a distanza Δs da P
- La **derivata direzionale** del campo scalare f nella direzione individuata da \hat{s} è definita dal limite

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(P') - f(P)}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(P + \Delta s \hat{s}) - f(P)}{\Delta s}\end{aligned}$$



Gradiente di un campo scalare

- Il **gradiente** di un campo scalare $f(P)$ è un vettore la cui proiezione nella direzione individuata da un versore \hat{s} è uguale alla derivata direzionale di f nella direzione di \hat{s}

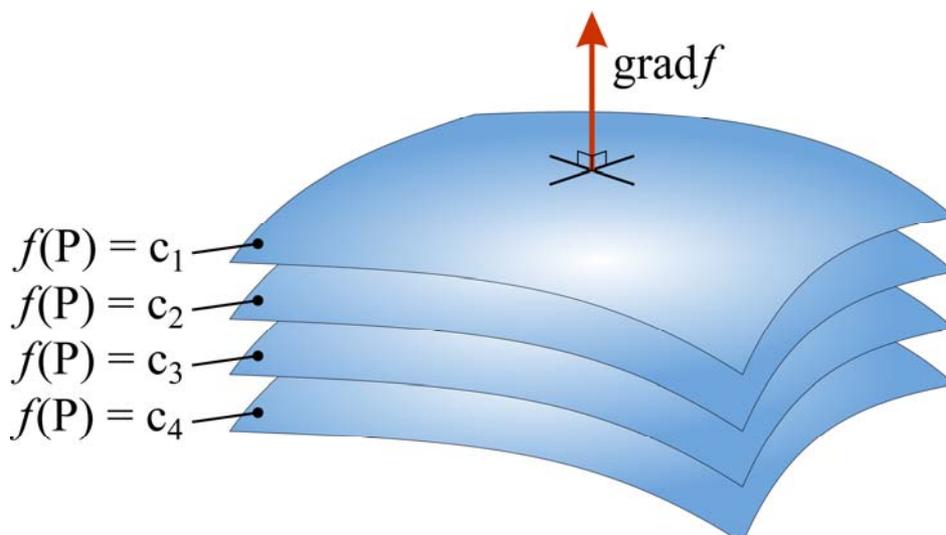
$$\frac{df}{ds} = \text{grad} f \cdot \hat{s}$$

- ➔ La direzione e il verso del gradiente sono quelli del versore \hat{s} con cui si ottiene il massimo valore della derivata direzionale e, quindi, il massimo incremento di f
- ➔ Il modulo del gradiente coincide con il valore massimo della derivata

3

Gradiente di un campo scalare

- Se si considera una generica direzione \hat{s} ortogonale al gradiente, la derivata direzionale lungo \hat{s} risulta uguale a zero
- ➔ Il gradiente è ortogonale alle superfici di livello di $f(P)$, cioè alle superfici sulle quali $f(P) = \text{costante}$



4

Gradiente in coordinate cartesiane

- La definizione che è stata data per il gradiente è **intrinseca**, cioè non dipende dal tipo di coordinate utilizzate
- Nel caso di un sistema di coordinate cartesiane, considerando i prodotti scalari del gradiente con i versori degli assi coordinati, si ricava

$$\text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{df}{dx} \quad \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{df}{dy} \quad \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{df}{dz}$$

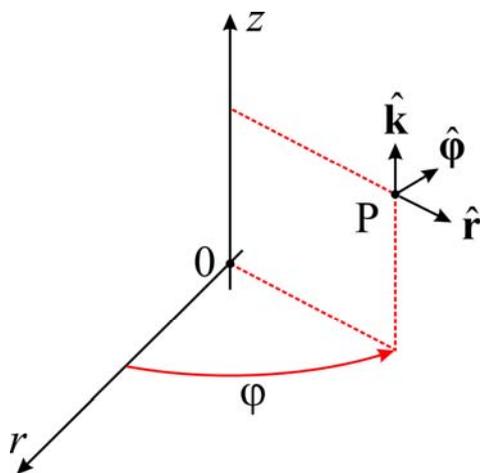
- ➔ Quindi l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane è

$$\text{grad} f = \frac{df}{dx} \hat{\mathbf{i}} + \frac{df}{dy} \hat{\mathbf{j}} + \frac{df}{dz} \hat{\mathbf{k}}$$

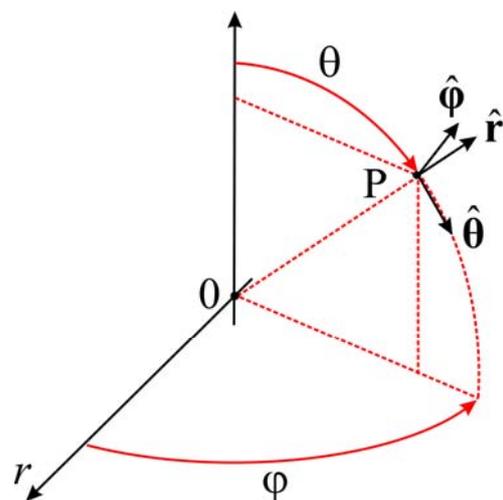
5

Coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane, è possibile ricavare le espressioni dell'operatore gradiente in altri sistemi di coordinate, come le coordinate cilindriche e le coordinate sferiche



Coordinate cilindriche



Coordinate sferiche

6

Gradiente in coordinate cilindriche e sferiche

- Nel caso delle **coordinate cilindriche**, gli spostamenti infinitesimi nelle direzioni dei versori coordinati sono: dr , $r \cdot d\varphi$ e dz
- Quindi l'espressione del gradiente è

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Nel caso delle **coordinate sferiche**, gli spostamenti infinitesimi nelle direzioni dei versori coordinati sono: dr , $r \cdot d\theta$ e $r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi$
- Quindi l'espressione del gradiente è

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

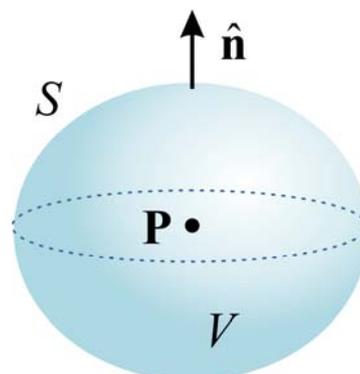
7

Divergenza di un campo vettoriale

- Dato un punto P contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$, si considera una superficie chiusa S che delimita un volume V nell'intorno di P
- Si indica con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale alla superficie S diretto verso l'esterno
- La **divergenza** di \mathbf{A} nel punto P è una grandezza scalare definita dal limite

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{V}$$

(Definizione intrinseca)



8

Divergenza in coordinate cartesiane (1)

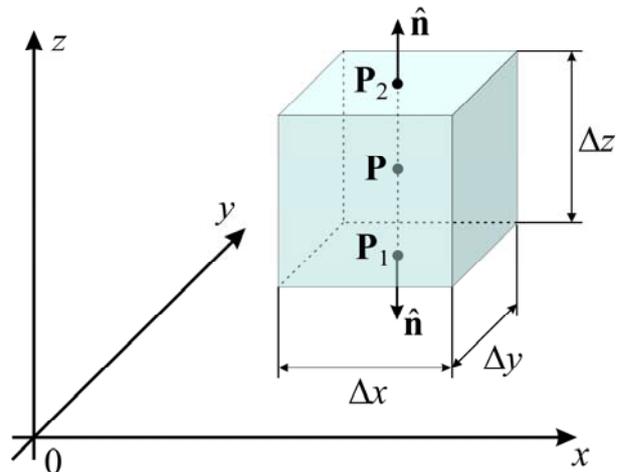
- Si considera un parallelepipedo infinitesimo ΔV con centro nel punto P e facce parallele ai piani coordinati
- Il flusso di \mathbf{A} uscente dalle facce S_1 e S_2 parallele al piano coordinato xy può essere espresso come

$$\int_{S_1 \cup S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = [A_z(P_2) - A_z(P_1)] \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

dove

$$A_z(P_1) = A_z(P) - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

$$A_z(P_2) = A_z(P) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$



9

Divergenza in coordinate cartesiane (2)

- Procedendo in modo analogo con le altre due coppie di facce parallele ai piani coordinati, si può ricavare che il flusso totale attraverso la superficie del parallelepipedo è

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Quindi, dalla definizione di divergenza si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

10

Divergenza in coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane si possono ricavare le seguenti espressioni:

- ♦ **Coordinate cilindriche**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

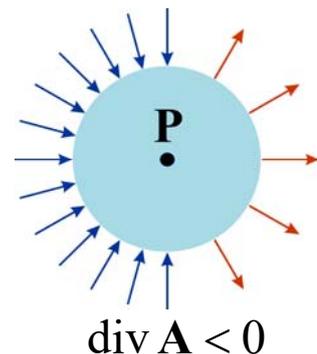
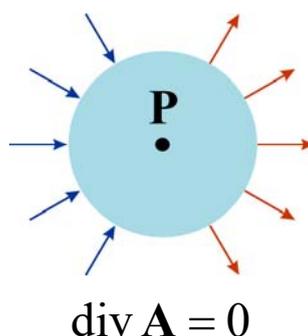
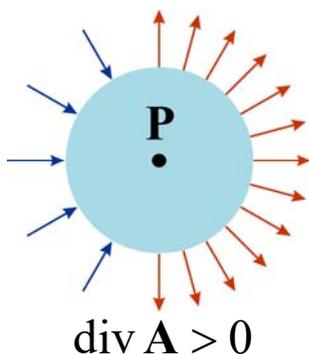
- ♦ **Coordinate sferiche**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

11

Significato della divergenza

- Un valore positivo della divergenza nel punto P indica che le linee di campo tendono a divergere dal punto P
 - ➔ Il flusso uscente attraverso una superficie infinitesima nell'intorno di P prevale su quello entrante
- Un valore negativo della divergenza indica che le linee di campo tendono a convergere nel punto P
 - ➔ Il flusso entrante prevale su quello uscente



12

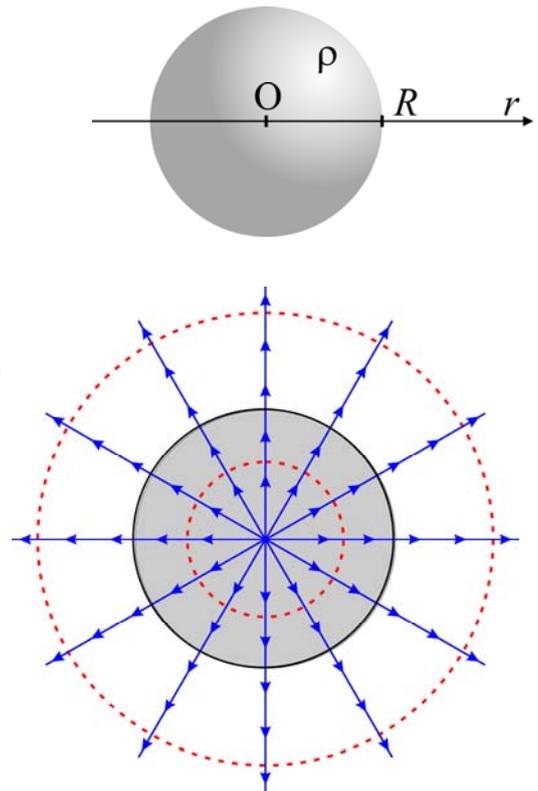
Esempio – sfera uniformemente carica (1)

- Si considera una carica Q distribuita con densità uniforme ρ all'interno di una sfera di raggio R

$$\int_{V_R} \rho dV = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

- Per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto in senso radiale, quindi facendo uso di un sistema di coordinate sferiche con origine nel centro della sfera, si ha $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$

dove E_r è funzione solo di r (e quindi è costante su ogni superficie sferica con centro nell'origine)



13

Esempio – sfera uniformemente carica (2)

- Se si indica con $S(r)$ la superficie della una sfera di raggio r con centro in O e con $V(r)$ il volume delimitato da $S(r)$, per la legge di Gauss si ha

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(r)} \rho dV$$

dove $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$

- All'interno della sfera ($r < R$) dalla relazione precedente si ottiene

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{r \rho}{3 \epsilon_0}$$

- All'esterno della sfera ($r > R$) si ottiene

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

- ➔ Quindi all'esterno della sfera il campo elettrico è identico a quello prodotto da una carica puntiforme Q posta nell'origine

14

Esempio – sfera uniformemente carica (3)

- Dall'espressione della divergenza in coordinate sferiche ottiene che la divergenza del campo elettrico vale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}$$

- ➔ Quindi, all'interno della sfera risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^3 \rho}{3 \epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

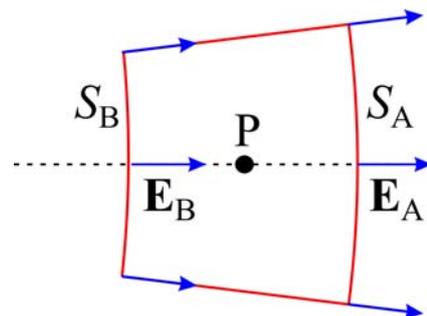
- ➔ Mentre all'esterno si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0$$

15

Esempio – sfera uniformemente carica (4)

- Su considera una superficie chiusa nell'intorno di un punto P costituita da un tratto infinitesimo di un tubo di flusso di \mathbf{E} delimitato da due calotte sferiche
- Si indicano con S_A e S_B le aree delle due calotte sferiche e con E_A ed E_B i valori del modulo del campo elettrico sulle due superfici
- Il flusso di \mathbf{E} uscente dalla superficie vale $E_A S_A - E_B S_B$
- L'area delle calotte è proporzionale a r^2
- All'interno della sfera carica il campo è proporzionale a r
 - ➔ $E_A S_A - E_B S_B > 0$
- All'esterno il campo è inversamente proporzionale a r^2
 - ➔ $E_A S_A - E_B S_B = 0$

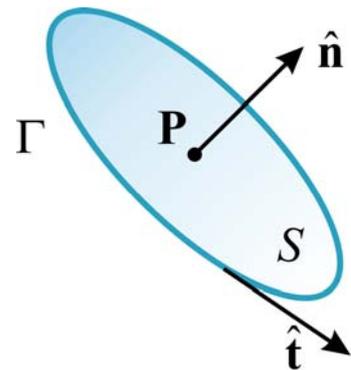


16

Rotore di un campo vettoriale

- Dato un punto P contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$, si considera una linea chiusa Γ che delimita un'area piana S nell'intorno di P
- Si orientano il versore tangente a Γ e il versore normale a S secondo la regola della mano destra
- Il **rotore** di \mathbf{A} nel punto P è un vettore definito dal limite

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{S} \quad (\text{Definizione intrinseca})$$



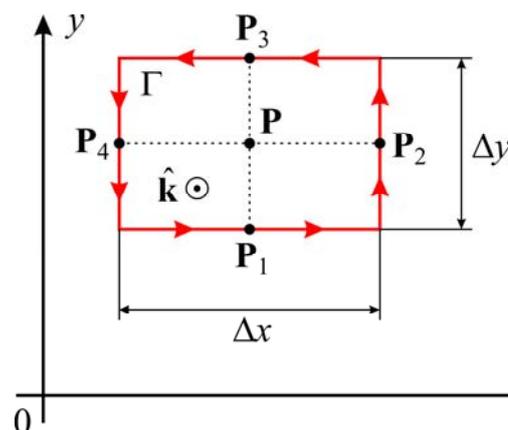
- ➔ La direzione e il verso del rotore sono individuati dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ per cui il tale limite è massimo
- ➔ Il modulo del rotore coincide con il valore massimo del limite

17

Rotore in coordinate cartesiane (1)

- Per determinare la componente nella direzione dell'asse z del rotore di \mathbf{A} nel punto P , si considera un rettangolo infinitesimo con centro in P e contenuto nel piano parallelo al piano coordinato xy
- La circuitazione di \mathbf{A} lungo la linea Γ che costituisce il perimetro del rettangolo può essere espressa come

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = A_x(P_1)\Delta x + A_y(P_2)\Delta y - A_x(P_3)\Delta x - A_y(P_4)\Delta y$$



18

Rotore in coordinate cartesiane (2)

- I valori di A_x e A_y nei punti medi dei lati del rettangolo sono

$$\begin{aligned}
 A_x(P_1) &= A_x(P) - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} & A_y(P_4) &= A_y(P) - \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\
 A_x(P_3) &= A_x(P) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} & A_y(P_2) &= A_y(P) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}
 \end{aligned}$$

- Di conseguenza la circuitazione lungo Γ vale

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

- Quindi, facendo uso della definizione di rotore, si ottiene

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

19

Rotore in coordinate cartesiane (3)

- In modo analogo, considerando i rettangoli contenuti nei piani paralleli ai piani coordinati yz e xz , si possono determinare le componenti del rotore nella direzione dell'asse x e dell'asse y

- Quindi, complessivamente, l'espressione del rotore risulta

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

- Si può notare che questa espressione può essere ottenuta sviluppando il determinante simbolico

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

20

Rotore in coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane si possono ricavare le seguenti espressioni:

- ◆ **Coordinate cilindriche**

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

- ◆ **Coordinate sferiche**

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

21

Significato del rotore (1)

- Il termine *rotore* richiama il concetto di *rotazione* e, infatti, un valore diverso da zero del rotore in un punto P indica che le linee di campo tendono a ruotare intorno al punto
- Per comprendere il significato del rotore di un campo vettoriale può essere utile considerare il moto di un corpo rigido
- Se G è il baricentro del corpo rigido, la velocità \mathbf{v} di un generico punto Q del corpo rigido può essere espressa come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} - \mathbf{G})$$

dove \mathbf{v}_G rappresenta la velocità del baricentro e $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}}$$

22

Significato del rotore (2)

- Se si indicano con (x, y, z) le coordinate di Q e con (x_0, y_0, z_0) le coordinate del baricentro si ha

$$\mathbf{Q}-\mathbf{G}=(x-x_0)\hat{\mathbf{i}}+(y-y_0)\hat{\mathbf{j}}+(z-z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

- Quindi la velocità del punto Q è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_G + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{v}_G + [\omega_y(z-z_0) - \omega_z(y-y_0)]\hat{\mathbf{i}} + [\omega_z(x-x_0) - \omega_x(z-z_0)]\hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + [\omega_x(y-y_0) - \omega_y(x-x_0)]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

23

Significato del rotore (3)

- Il rotore della velocità vale

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (\omega_x + \omega_x)\hat{\mathbf{i}} + (\omega_y + \omega_y)\hat{\mathbf{j}} + (\omega_z + \omega_z)\hat{\mathbf{k}} = 2\boldsymbol{\omega}$$

- ➔ Quindi per il campo di velocità dei punti del corpo rigido il rotore coincide, a meno di un fattore 2, con il vettore velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

24

Significato del rotore (4)

- Il significato del rotore può essere illustrato interpretando il campo vettoriale \mathbf{A} come il campo di velocità di un fluido in movimento
- Si considera una particella rigida infinitesima con baricentro posto in un punto P all'interno del fluido
 - ◆ Se il rotore di \mathbf{A} nel punto P è diverso da zero, la particella, trascinata dal fluido, ruota attorno al suo baricentro
 - ◆ Se il rotore di \mathbf{A} è uguale a zero si ha solo moto di traslazione
- ➔ Quindi un valore diverso da zero del rotore indica che la distribuzione di velocità del fluido è tale da produrre un moto di rotazione

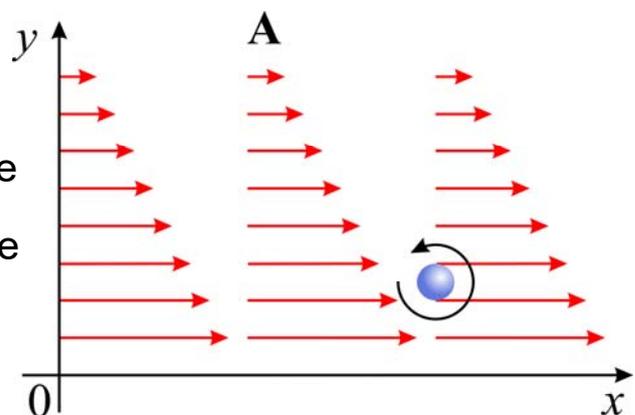
25

Esempio 1 (1)

- Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} = (a - by) \hat{\mathbf{i}}$$
dove a e b sono due costanti positive

- Il rotore di \mathbf{A} è diretto lungo l'asse z e vale

$$\text{rot} \mathbf{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{\mathbf{k}} = b \hat{\mathbf{k}}$$



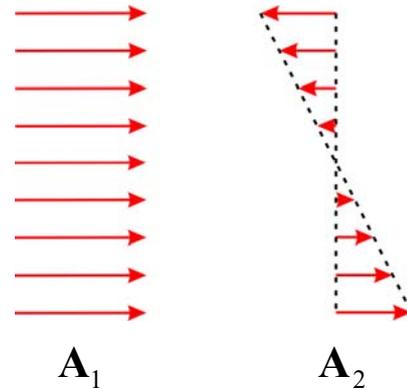
- Si può vedere che, se \mathbf{A} è interpretato come la velocità di un fluido, una particella rigida infinitesima posta nel fluido ruota in senso positivo (cioè antiorario) attorno ad un asse parallelo all'asse z

26

Esempio 1 (2)

- Se y_0 rappresenta l'ordinata del baricentro della particella, è possibile rappresentare il campo vettoriale come somma di due contributi

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (a - by_0)\hat{\mathbf{i}} + b(y_0 - y)\hat{\mathbf{i}}$$



- Il primo termine rappresenta un campo uniforme (quindi ha rotore nullo) e determina un moto di traslazione
- Il secondo termine (il cui rotore coincide con $\text{rot}\mathbf{A}$) determina il moto di rotazione

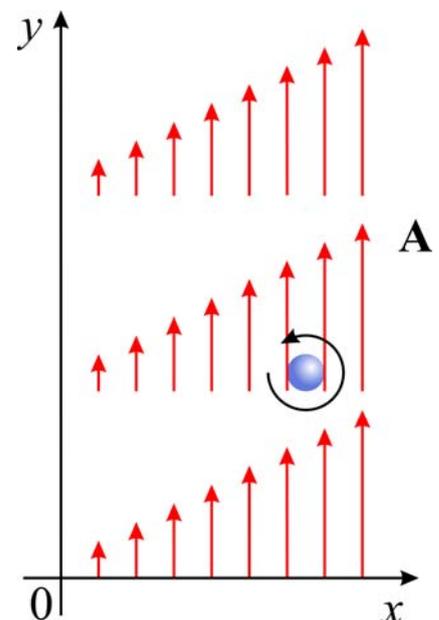
27

Esempio 2

- Si consideri il campo vettoriale
 $\mathbf{A} = A_y \hat{\mathbf{j}} = cx \hat{\mathbf{i}}$
dove c è una costante positiva
- Il rotore di \mathbf{A} è diretto lungo l'asse z e vale

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} = c \hat{\mathbf{k}}$$

- Anche in questo caso, se si rappresenta \mathbf{A} come la velocità di un fluido, si ottiene che la distribuzione di velocità determina una rotazione in senso antiorario attorno a un asse parallelo all'asse z



28

Nota

- I due esempi mostrano che per ottenere una rotazione in senso positivo attorno a un asse parallelo all'asse z occorre che
 - ◆ la componente A_x diminuisca al crescere y
 - ◆ la componente A_y aumenti al crescere x
- Questo è coerente con il fatto che la componente lungo l'asse z del rotore è data da

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

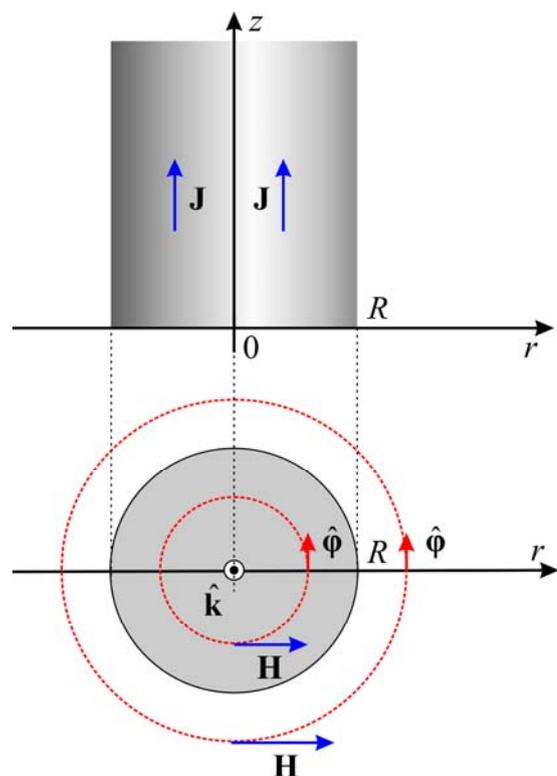
29

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (1)

- Si considera un conduttore cilindrico di raggio R e lunghezza infinita diretto lungo l'asse z e percorso da corrente con densità \mathbf{J} uniforme nella sezione
 - $\mathbf{J} = J_z \hat{\mathbf{k}}$
- Si indica con i la corrente attraverso la sezione del conduttore
 - $i = \pi R^2 J_z$
- Per ragioni di simmetria le linee di campo sono circonferenze concentriche con il cilindro e risulta

$$\mathbf{H} = H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

con H_ϕ dipendente solo da r



30

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (2)

- E' possibile determinare il campo magnetico utilizzando la legge di Ampere

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- Se Γ è una circonferenza concentrica con il cilindro e S una sua sezione trasversale, risulta

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$$

- Per una linea di campo interna al conduttore ($r < R$) si ottiene

$$2\pi r H_{\phi} = \pi r^2 J_z \Rightarrow H_{\phi} = \frac{r}{2} J_z$$

- Mentre all'esterno del conduttore ($r > R$) si ha

$$2\pi r H_{\phi} = \pi R^2 J_z = i \Rightarrow H_{\phi} = \frac{i}{2\pi r}$$

quindi il campo magnetico all'esterno è identico a quello prodotto da un conduttore filiforme percorso da corrente i e disposto lungo l'asse z

31

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (3)

- Dall'espressione del rotore in coordinate cilindriche si ottiene che il rotore di \mathbf{H} è diretto lungo l'asse z e vale

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_{\phi})}{\partial r} \hat{\mathbf{k}}$$

- Quindi all'interno del conduttore si ha

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} J_z \right) \hat{\mathbf{k}} = J_z \hat{\mathbf{k}}$$

- Mentre all'esterno risulta

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{i}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

32

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (4)

- Se si interpreta il campo \mathbf{H} come la velocità di un fluido, una particella infinitesimale posta a una distanza $r > R$ dall'origine ruota intorno all'origine con velocità angolare

$$\omega = \frac{|\mathbf{H}|}{r} = \frac{i}{2\pi r^2}$$

- ◆ Dato che $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ la particella non ruota su sé stessa

- Una particella posta a distanza $r < R$ ruota intorno all'origine con velocità angolare

$$\omega = \frac{|\mathbf{H}|}{r} = \frac{J_z}{2}$$

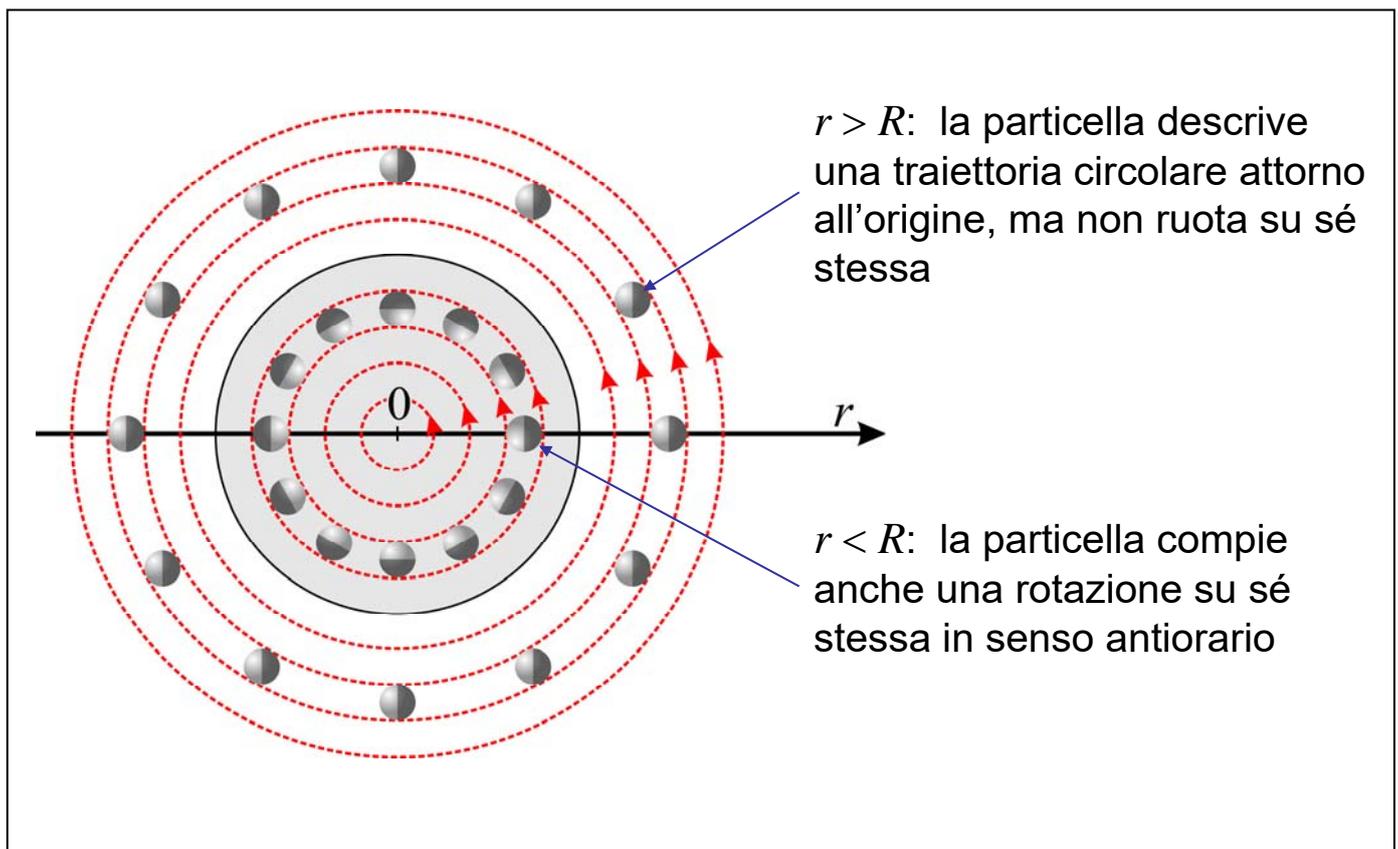
- Inoltre la particella ruota su se stessa con velocità angolare

$$\omega' = \left| \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{H} \right| = \frac{J_z}{2}$$

- ◆ Dato che, in questo caso, le due velocità angolari ω e ω' sono uguali, la particella rivolge sempre la stessa faccia verso l'origine

33

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (5)



34

Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (6)

- L'andamento del vettore \mathbf{H} è tale per cui è possibile ottenere una circuitazione diversa da zero anche su una linea chiusa contenuta nella regione esterna al conduttore
- Se però si considera una linea chiusa infinitesima nell'intorno di un punto P si ottiene circuitazione nulla se P è all'esterno del conduttore e circuitazione diversa da zero solo se P è all'interno
- Il rotore descrive il comportamento della circuitazione "a livello locale", quindi risulta nullo all'esterno del conduttore e diverso da zero all'interno

35

Operatore nabla

- L'**operatore nabla** (∇) è un vettore formale, definito come

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Mediante questo operatore è possibile esprimere gradiente, divergenza e rotore come prodotti formali:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

36

Operatore nabla e coordinate non cartesiane

- L'operatore nabla è definito solo in coordinate cartesiane
- I simboli ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{A}$ e $\nabla \times \mathbf{A}$ sono utilizzati per indicare gradiente, divergenza e rotore anche nel caso di sistemi di coordinate non cartesiane
- In questo caso però non è possibile definire un vettore simbolico che permetta di esprimere gradiente, divergenza e rotore come prodotti formali

37

Esempio

- Per esempio, dall'espressione del gradiente in coordinate cilindriche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

non è lecito ricavare per l'operatore nabla l'espressione

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Utilizzando questa espressione per calcolare la divergenza come prodotto scalare formale si otterrebbe

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Formula errata})$$

mentre l'espressione corretta è

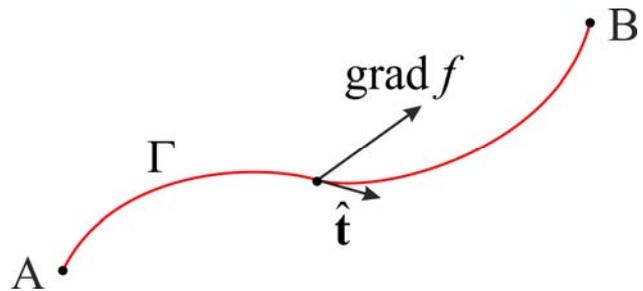
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

38

Teorema del gradiente

- Si considera una linea Γ che unisce due punti A e B di una regione in cui è definito un campo scalare f
- Per ogni f , l'integrale di linea del gradiente da A a B non dipende dalla linea Γ ma solo dal valore di f nei punti A e B

$$\int_{A,\Gamma}^B \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = f(B) - f(A)$$



- ➔ Di conseguenza, l'integrale del gradiente lungo una linea chiusa è sempre nullo

39

Teorema del gradiente - dimostrazione

- Il vettore tangente può essere espresso come

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\partial x}{\partial l} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial l} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial l} \hat{\mathbf{k}}$$

- Utilizzando l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane si ha

$$\text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{df}{dl}$$

- ➔ Di conseguenza risulta

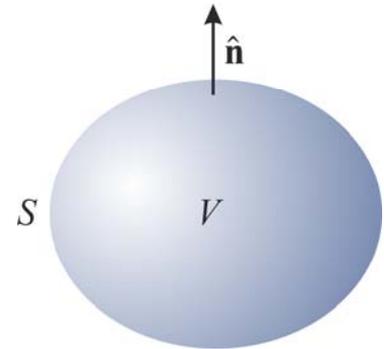
$$\int_{A,\Gamma}^B \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{A,\Gamma}^B \frac{df}{dl} dl = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

40

Teorema di Gauss (o della divergenza)

- Si considera una superficie chiusa S che delimita un volume V contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale \mathbf{A}
- Si indica con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale alla superficie diretto verso l'esterno
- ➔ Vale la relazione:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



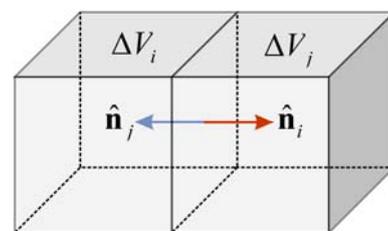
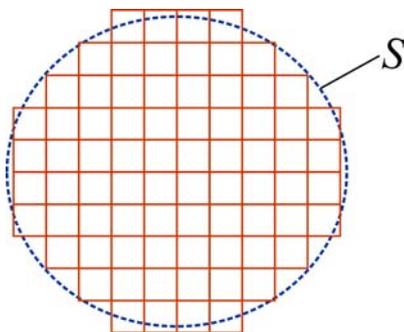
- L'integrale esteso al volume V della divergenza di \mathbf{A} è uguale al flusso di \mathbf{A} uscente dalla superficie chiusa che delimita V

41

Teorema di Gauss – dimostrazione (1)

Una dimostrazione non rigorosa può essere ottenuta nel modo seguente:

- Si approssima il volume V in N elementi di volume ΔV_i ($i = 1, \dots, N$) (per semplicità si considerano elementi cubici)



- Si può ottenere un'approssimazione del flusso \mathbf{A} attraverso la superficie S sommando i flussi attraverso le superfici degli elementi di volume
 - ◆ infatti i contributi delle facce comuni a due elementi sono uguali e opposti e si elidono, quindi rimangono i soli contributi delle facce esterne che approssimano la superficie S

42

Teorema di Gauss – dimostrazione (2)

- L'espressione approssimata del flusso di \mathbf{A} attraverso S è

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i \right) \Delta V_i$$

- Se si fa tendere a infinito il numero degli elementi, e quindi a zero il loro volume, la sommatoria tende all'integrale di volume su V , mentre il termine tra parentesi tende alla divergenza di \mathbf{A} , quindi

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i \right) \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$$

43

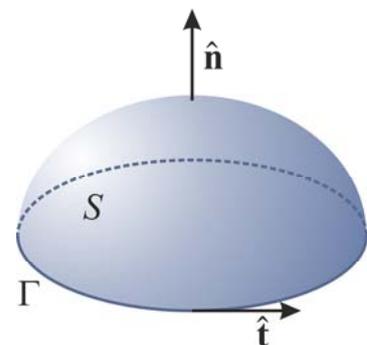
Teorema di Stokes (o del rotore)

- Si considera una linea chiusa Γ contenuta in una regione τ in cui è definito un campo vettoriale \mathbf{A}
- Si considera inoltre una generica superficie S contenuta in τ avente come contorno la linea Γ
- Si orientano il versore tangente a Γ e il versore normale a S secondo la regola della mano destra

➔ Vale la relazione

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- Il flusso del rotore di \mathbf{A} attraverso una generica superficie avente la linea Γ come contorno è uguale alla circuitazione di \mathbf{A} lungo la linea Γ

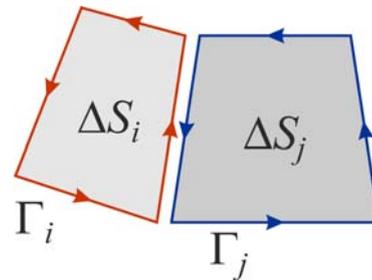
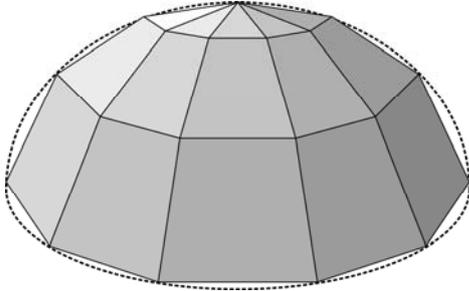


44

Teorema di Stokes – dimostrazione (1)

Una dimostrazione non rigorosa può essere ottenuta nel modo seguente:

- Si approssima la superficie S mediante N elementi di superficie piani di area ΔS_i ($i = 1, \dots, N$)



- E' possibile ottenere un'approssimazione della circuitazione di \mathbf{A} lungo il contorno Γ della superficie sommando le circuitazioni di \mathbf{A} lungo i contorni delle superfici ΔS_i
 - ♦ infatti i contributi dei lati comuni a due elementi sono uguali e opposti e si elidono, quindi rimangono i soli contributi dei lati esterni che approssimano la curva Γ

45

Teorema di Stokes – dimostrazione (2)

- L'espressione approssimata della circuitazione di \mathbf{A} è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \approx \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl \right) \Delta S_i$$

- Se si fa tendere a infinito il numero degli elementi di superficie, e quindi a zero la loro area, la sommatoria tende all'integrale di superficie su S , mentre il termine tra parentesi tende al rotore di \mathbf{A} , quindi

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl \right) \Delta S_i = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

46

Rotore del gradiente (1)

- Per il teorema del gradiente, l'integrale di linea del gradiente di un generico campo scalare f dipende solo dai punti iniziale e finale
- ➔ Di conseguenza, l'integrale del gradiente lungo una linea chiusa è sempre nullo
- ➔ Quindi, dalla definizione di rotore, si ottiene che per ogni campo scalare f deve risultare

$$\text{rot grad } f = 0$$

47

Rotore del gradiente (2)

- Lo stesso risultato può essere ottenuto a partire dall'espressione del rotore in coordinate cartesiane

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

- Sostituendo ad \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

si ottiene

$$\text{rot grad } f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

(A rigore, la dimostrazione richiede che le derivate seconde di f siano continue)

48

Divergenza del rotore (1)

- Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore di un generico campo vettoriale \mathbf{A} dipende solo dal contorno della superficie S
- ➔ Di conseguenza, il flusso del rotore attraverso una superficie chiusa è sempre nullo
- ➔ Quindi, dalla definizione di divergenza, si ottiene che per ogni campo vettoriale \mathbf{A} deve risultare
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$

49

Divergenza del rotore (2)

- Lo stesso risultato può essere ottenuto partendo dall'espressione in coordinate cartesiane della divergenza

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

- Sostituendo a \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

(e assumendo che le derivate seconde di \mathbf{A} siano continue) si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

50

Connessione lineare e superficiale

- Una regione τ è detta **a connessione lineare semplice** se per ogni linea chiusa Γ contenuta in τ esiste almeno una superficie S contenuta in τ avente Γ come contorno
 - ◆ Se questa proprietà non è verificata si dice che τ è **a connessione lineare multipla**
- Una regione τ è detta **a connessione superficiale semplice** se per ogni superficie chiusa S contenuta in τ il volume delimitato da S è contenuto in τ
 - ◆ Se questa proprietà non è verificata si dice che τ è **a connessione superficiale multipla**

51

Connessione lineare e superficiale - Esempi

- **Esempi**
 - ◆ Regione racchiusa da una superficie sferica:
 - connessione lineare semplice
 - connessione superficiale semplice
 - ◆ Regione racchiusa da una superficie toroidale:
 - connessione lineare multipla
 - connessione superficiale semplice
 - ◆ Regione compresa tra due superfici sferiche concentriche:
 - connessione lineare semplice
 - connessione superficiale multipla

52

Campi conservativi e campi irrotazionali (1)

Si consideri un campo vettoriale definito in una regione τ

- Il campo si dice **conservativo** se la sua circuitazione lungo una generica curva chiusa contenuta in τ è uguale a zero
- Il campo si dice **irrotazionale** se il suo rotore è nullo in ogni punto di τ
- Un campo conservativo è sempre irrotazionale
 - ◆ questa proprietà deriva direttamente dalla definizione del rotore
- Un campo irrotazionale nella regione τ è conservativo se la regione τ è a connessione lineare semplice

53

Campi conservativi e campi irrotazionali (2)

- Si assume che \mathbf{A} sia un campo vettoriale tale che $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ in una regione τ
- Si considera la circuitazione di \mathbf{A} su una curva chiusa Γ
- Se la regione τ è a connessione lineare semplice, è possibile individuare una superficie S contenuta in τ che ha Γ come contorno
- ➔ Quindi, mediante il teorema di Stokes, si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

- Se la regione τ non è a connessione lineare semplice esiste almeno una curva chiusa Γ' tale che ogni superficie che ha Γ' come contorno non è interamente contenuta in τ
- ➔ Quindi la relazione precedente non vale e la circuitazione su Γ' è diversa da zero

54

Esempio (1)

- Si riconsideri l'esempio relativo al calcolo del campo magnetico di un conduttore lineare omogeneo
- Come si è visto, nella regione esterna al conduttore il campo magnetico è irrotazionale
- La regione esterna al conduttore non è a connessione lineare semplice, quindi non si può affermare che il campo magnetico all'esterno del conduttore è conservativo:
 - ◆ Per una linea chiusa Γ_1 che non circonda il conduttore la circuitazione risulta nulla
 - ◆ Per una linea chiusa Γ_2 che circonda il conduttore la circuitazione è diversa da zero: in questo caso una superficie S_2 avente la linea come contorno deve contenere punti nella regione in cui $\text{rot}\mathbf{H}$ è diverso da zero quindi

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{S_2} \text{rot}\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \neq 0$$

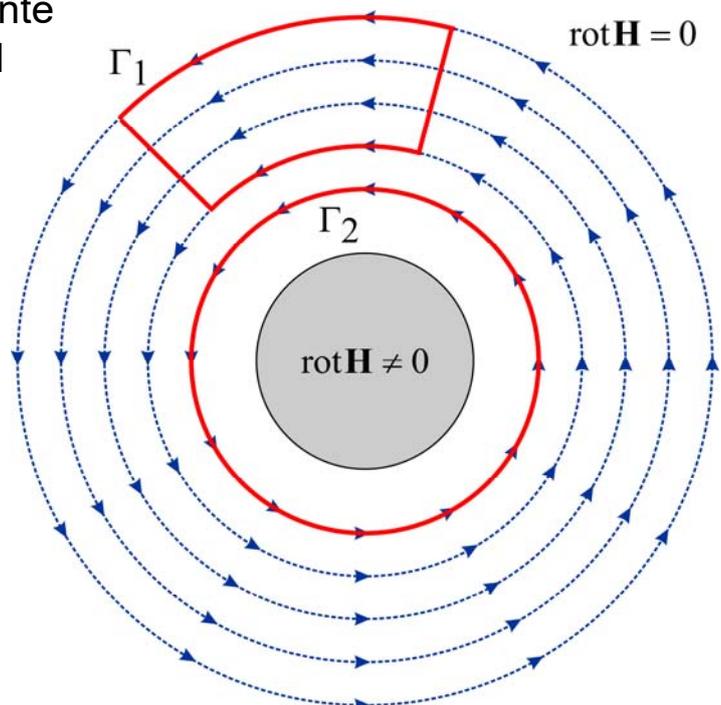
55

Esempio (2)

- Le linee Γ_1 e Γ_2 sono interamente contenute nella regione in cui il rotore di \mathbf{H} è nullo

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \neq 0$$



56

Potenziale (1)

- Dal teorema del gradiente si ottiene che il gradiente di un campo scalare φ è un campo vettoriale conservativo
- Si può dimostrare che vale anche la proprietà simmetrica, cioè ogni campo vettoriale conservativo \mathbf{A} può essere espresso come gradiente di un campo scalare φ
$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$$
- Il campo scalare φ è detto **potenziale** del campo vettoriale \mathbf{A}
- Il potenziale è definito a meno di una costante
 - ◆ infatti se $\psi = \varphi + \text{cost}$ si ha
$$\text{grad } \psi = \text{grad } \varphi$$

57

Potenziale (2)

- Per dimostrare che un campo conservativo \mathbf{A} può essere espresso come gradiente di un potenziale, si osserva che, scelto arbitrariamente un punto O (punto di riferimento), al campo \mathbf{A} si può associare la funzione scalare definita da
$$\varphi(P) = \varphi_0 + \int_O^P \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove l'integrale è valutato su una linea arbitraria che unisce i punti O e P e φ_0 rappresenta una costante arbitraria
- Dato che l'integrale di linea di \mathbf{A} tra due punti P e Q non dipende dal percorso, è possibile valutarlo considerando un percorso passante per il punto O

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_P^O \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^Q \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

58

Potenziale (3)

- Per due punti posti a distanza infinitesima la relazione precedente si riduce a

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = d\varphi$$

che può essere scritta come

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Quindi, utilizzando l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane si ha

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \text{grad } \varphi$$

e, di conseguenza, si riconosce che φ è il potenziale di \mathbf{A}

- Per definire in modo univoco il potenziale occorre fissare il valore della costante φ_0 , che corrisponde al valore del potenziale nel punto di riferimento

59

Potenziale - Nota

- Di solito, nello studio dei campi elettromagnetici il potenziale viene definito come

$$\varphi(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{O}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

cioè con segno opposto rispetto a quello considerato nella trattazione precedente

- Con questa convenzione risulta

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$$

- Di conseguenza l'integrale di linea del campo vettoriale da un punto P a un punto Q è dato da

$$\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \varphi(\mathbf{P}) - \varphi(\mathbf{Q})$$

60

Campi solenoidali e campi indivergenti (1)

Si consideri un campo vettoriale definito in una regione τ

- Il campo si dice **solenoidale** se il suo flusso attraverso una generica superficie chiusa contenuta in τ è uguale a zero
- Il campo si dice **indivergente** se la sua divergenza è nulla in ogni punto di τ
- Un campo solenoidale è sempre indivergente
 - ◆ questa proprietà deriva direttamente dalla definizione della divergenza
- Un campo indivergente nella regione τ è solenoidale se la regione τ è a connessione superficiale semplice

61

Campi solenoidali e campi indivergenti (2)

- Si assume che \mathbf{A} sia un campo vettoriale tale che $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ in una regione τ
- Si considera il flusso di \mathbf{A} uscente da una superficie chiusa S
- Se la regione τ è a connessione superficiale semplice, il volume racchiuso da S è contenuto in τ

➔ Quindi, mediante il teorema di Gauss, si ottiene

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = 0$$

- Se la regione τ non è a connessione superficiale semplice esiste almeno una superficie chiusa S' tale che il volume delimitato da S' non è interamente contenuto in τ
- ➔ Quindi non è possibile applicare il teorema di Gauss e il flusso attraverso S' in generale è diverso da zero

62

Esempio

- Si riconsideri l'esempio del campo elettrico prodotto da una distribuzione sferica omogenea di carica
- All'esterno della sfera il campo elettrico è indivergente
- Dato che la regione all'esterno della sfera non è a connessione superficiale semplice, non si può affermare che il campo elettrico all'esterno della sfera è solenoidale:
 - ◆ il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S_1 che non racchiude la sfera carica è nullo
 - ◆ il flusso attraverso una superficie chiusa S_2 che racchiude la sfera carica è diverso da zero dato che nel volume interno a S_2 la divergenza del campo elettrico non è ovunque nulla

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{V_2} \operatorname{div} \mathbf{E} dV \neq 0$$

63

Flusso concatenato con una linea chiusa

- Si considera un campo vettoriale solenoidale \mathbf{A} definito in una regione τ
- Si considerano, inoltre, due superfici S_1 e S_2 contenute in τ e aventi come bordo la stessa linea chiusa Γ

- I flussi di \mathbf{A} attraverso S_1 e S_2 sono

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

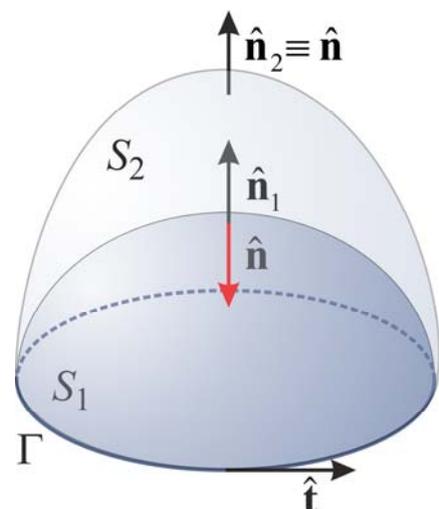
- L'unione di S_1 e S_2 forma una superficie chiusa, attraverso la quale si ha

$$\oint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

- Quindi risulta $\Phi_1 = \Phi_2$

- ➔ Il flusso di \mathbf{A} non dipende dalla superficie, ma solo dalla linea Γ che ne costituisce il bordo

- ➔ Per questo si parla di flusso concatenato con la linea Γ



64

Potenziale vettore (1)

- Si consideri il un campo vettoriale \mathbf{B} definito come rotore di un altro campo vettoriale \mathbf{A}
- Per il teorema di Stokes, il campo \mathbf{B} risulta solenoidale
- Si può dimostrare che vale anche la proprietà simmetrica, cioè ogni campo vettoriale solenoidale \mathbf{B} può essere espresso come rotore di un altro campo vettoriale \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

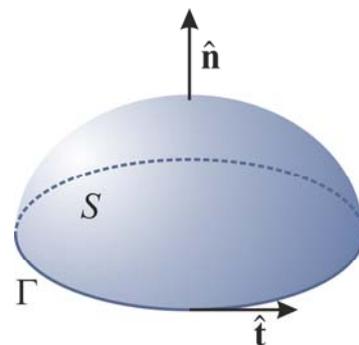
- Il campo vettoriale \mathbf{A} è detto **potenziale vettore** del campo vettoriale \mathbf{B}
- Il potenziale è definito a meno del gradiente di un campo scalare
 - ◆ infatti se $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \varphi$ si ha
 $\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \varphi = \text{rot } \mathbf{A}$

65

Potenziale vettore (2)

- Se \mathbf{B} è un campo vettoriale e \mathbf{A} è il suo potenziale vettore, dal teorema di Stokes di ottiene direttamente

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



- Il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie S è uguale alla circuitazione del suo potenziale vettore sulla linea Γ che costituisce il contorno della superficie

66

Operatori del secondo ordine (1)

- Il gradiente di un campo scalare f è un vettore, quindi è possibile calcolarne il rotore e la divergenza
 - ◆ Come si è visto, per ogni f risulta
$$\text{rot grad } f = 0$$
 - ◆ La divergenza del gradiente definisce un nuovo operatore detto **laplaciano**, indicato con
$$\nabla^2 f = \text{div grad } f$$
 - ◆ In alcuni testi il laplaciano di f è indicato anche col simbolo Δf

67

Laplaciano di uno scalare in coordinate cartesiane

- A partire dalla definizione

$$\nabla^2 f = \text{div grad } f$$

e facendo uso delle espressioni del gradiente e della divergenza in coordinate cartesiane si ricava

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

68

Operatori del secondo ordine (2)

- Al rotore di un campo vettoriale \mathbf{A} si possono applicare gli operatori divergenza e rotore
- Alla divergenza di un campo vettoriale \mathbf{A} si può applicare l'operatore gradiente
 - ◆ Come si è visto, per ogni \mathbf{A} risulta
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$$
 - ◆ A partire dagli operatori $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ e $\operatorname{grad} \operatorname{div}$ si definisce il **laplaciano di un vettore** tramite la relazione
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

69

Laplaciano di un vettore in coordinate cartesiane

- A partire dalla definizione
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$
e facendo uso delle espressioni degli operatori gradiente divergenza e rotore in coordinate cartesiane si può verificare che l'espressione del laplaciano di un vettore è
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{k}}$$
- Quindi il laplaciano di un vettore \mathbf{A} è un vettore avente come componenti i laplaciani scalari delle componenti di \mathbf{A}
 - ◆ Questo giustifica il fatto che si utilizzi nel caso vettoriale lo stesso simbolo impiegato per il laplaciano di uno scalare, anche se i due operatori hanno significato diverso
 - ◆ Questa proprietà vale solo nel caso delle coordinate cartesiane

70

Laplaciano in coordinate cilindriche

- Laplaciano di uno scalare

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Laplaciano di un vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{k}}$$

71

Laplaciano in coordinate sferiche

- Laplaciano di uno scalare

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- Laplaciano di un vettore

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta}{r^2 \tan \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \\ & + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

72

Identità notevoli (1)

Proprietà di linearità:

- Gradiente, divergenza, rotore e laplaciano sono operatori lineari
- ➔ Se c_1 e c_2 indicano due costanti, φ e ψ due campi scalari, \mathbf{A} e \mathbf{B} due campi vettoriali, valgono le relazioni

$$\nabla(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\nabla\varphi + c_2\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla \cdot \mathbf{A} + c_2\nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla \times \mathbf{A} + c_2\nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla^2(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\nabla^2\varphi + c_2\nabla^2\psi$$

$$\nabla^2(c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla^2\mathbf{A} + c_2\nabla^2\mathbf{B}$$

73

Identità notevoli (2)

Operatori del secondo ordine:

- Se φ indica un campo scalare e \mathbf{A} un campo vettoriale, valgono le relazioni

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$$

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

74

Identità notevoli (3)

- Se φ e ψ indicano due campi scalari e \mathbf{A} e \mathbf{B} due campi vettoriali, valgono le relazioni

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \times \mathbf{A} + \varphi\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\nabla^2\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla^2\varphi + 2(\nabla\varphi \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

75

Identità notevoli - Nota

- In alcune delle relazioni precedenti compaiono termini del tipo $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- Facendo uso dell'espressione dell'operatore nabla in coordinate cartesiane, si può verificare che

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} &= \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A} = \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(B_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + \left(B_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla A_x) \hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{B} \cdot \nabla A_y) \hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{B} \cdot \nabla A_z) \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

76