

# Richiami di teoria dell'elettromagnetismo

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 15-4-2018)

## Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$
Legge di Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Legge di Ampere-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Legge di Gauss elettrica	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$
Legge di Gauss magnetica	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$

## Grandezze fondamentali

- $\rho_c$  = densità di carica elettrica [C/m<sup>3</sup>]
- $\mathbf{E}$  = campo elettrico [V/m]
- $\mathbf{H}$  = campo magnetico [A/m]
- $\mathbf{D}$  = induzione elettrica (spostamento elettrico) [C/m<sup>2</sup>]
- $\mathbf{B}$  = induzione magnetica [T]
- $\mathbf{J}$  = densità di corrente elettrica [A/m<sup>2</sup>]

3

## Carica elettrica

- I fenomeni **elettromagnetici** sono i fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche
- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare [unità di misura coulomb, C]
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
  - ◆ tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
  - ◆ tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

4

## Densità di carica

- Se si considerano fenomeni osservabili su scala macroscopica si può prescindere dalla natura granulare della carica e assumere che la carica si è distribuita con continuità nello spazio

- ➔ **Densità volumetrica di carica** [C/m<sup>3</sup>]

$$\rho_c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \Delta q = \text{carica contenuta nel volume } \Delta V$$

- In alcuni casi si hanno distribuzioni di carica che si sviluppano prevalentemente in una o due dimensioni

- ➔ **Densità superficiale di carica** [C/m<sup>2</sup>]

$$\sigma_c = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \Delta q = \text{carica associata alla superficie } \Delta S$$

- ➔ **Densità lineare di carica** [C/m]

$$\lambda_c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \Delta q = \text{carica associata al segmento } \Delta l$$

5

## Cariche libere e cariche di polarizzazione

- **Cariche libere:** cariche che possono compiere spostamenti macroscopici e dare luogo a separazioni macroscopiche di carica
- **Cariche di polarizzazione:** cariche legate alla struttura atomica o molecolare che possono compiere solo spostamenti microscopici (conseguenti a deformazione o orientamento di atomi o molecole)
- **Conduttore:** mezzo materiale nel quale sono presenti cariche in grado di compiere spostamenti macroscopici
- **Dielettrico:** mezzo materiale nel quale tutte le cariche possono compiere solo spostamenti microscopici
- In seguito quando si parlerà di cariche senza ulteriori indicazioni si farà riferimento alle cariche libere

6

## Corrente elettrica

- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata  $S$  in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo [unità di misura ampere, A]
- In generale si possono avere cariche positive e negative che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
  - ➔ La carica che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
  - ◆ Il segno del contributo di ciascuna carica dipende dal segno della carica stessa e dal verso del moto

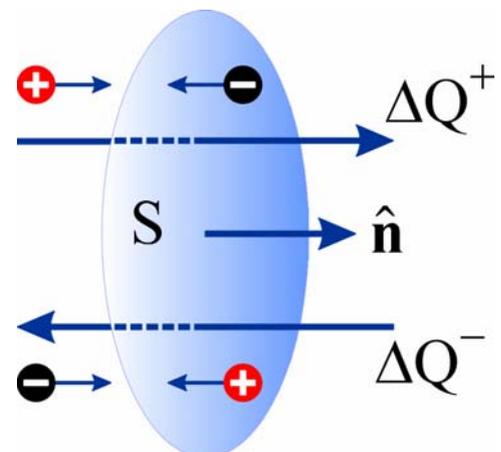
7

## Definizione della corrente elettrica

- Si indica con  $\Delta Q$  la carica che attraversa la superficie  $S$  in senso concorde con la normale  $\hat{n}$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$

$$\Delta Q = \Delta Q^+ - \Delta Q^-$$

- ◆ Contributo positivo ( $\Delta Q^+$ )
  - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
- ◆ Contributo negativo ( $-\Delta Q^-$ )
  - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



8

## Definizione della corrente elettrica

- La corrente,  $i(t)$ , è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- ➔ La corrente è la derivata della funzione  $Q(t)$  che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso  $S$  a partire da un certo istante iniziale fino all'istante  $t$
- $Q(t)$  non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante  $t$ 
  - ◆ è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a  $Q(t)$

9

## Densità di corrente

- La densità di **densità di corrente**  $\mathbf{J}$  [ $A/m^2$ ] è un vettore definito in modo che la sua componente lungo la normale ad una superficie orientata  $S$  rappresenti la corrente per unità di superficie che fluisce attraverso  $S$

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS}$$

- ➔ La corrente attraverso una superficie orientata  $S$  è uguale al flusso del vettore  $\mathbf{J}$  attraverso  $S$

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

10

## Definizione della densità di corrente

- Si considera una superficie orientata infinitesima  $dS$  attraversata da corrente elettrica
- Si assume che le cariche in moto abbiano densità  $\rho_c$  e velocità  $\mathbf{v}$
- Nell'intervallo di tempo  $dt$  le cariche percorrono la distanza  $\mathbf{v}dt$
- La carica che attraversa la superficie  $dS$  nell'intervallo  $dt$  è pari alla carica totale contenuta nel volume  $dV$

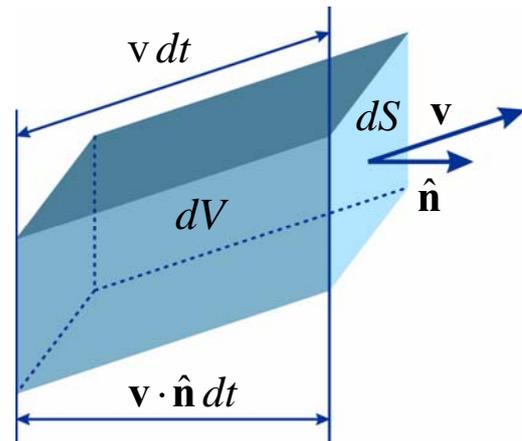
$$dQ = \rho_c dV = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dS$$

- La corrente attraverso  $dS$  è

$$di = \frac{dQ}{dt} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- quindi si ha

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



11

## Definizione della densità di corrente

- ➔ La densità di corrente è definita dalla relazione

$$\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$$

- Nel caso più generale, in cui le cariche non si muovono tutte con la stessa velocità  $\mathbf{v}$  e sono presenti sia cariche positive sia cariche negative (con densità  $\rho^+$  e  $\rho^-$ ), la densità di corrente si definisce come

$$\mathbf{J} = \rho_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle + \rho_- \langle \mathbf{v}_- \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}_+ \rangle, \langle \mathbf{v}_- \rangle = \text{velocità medie}$$

12

## Forza di Lorentz

- Una carica puntiforme  $q$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in una regione sede di un campo elettromagnetico è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{Forza di Lorentz}$$

- Questa relazione può essere assunta come definizione delle due funzioni vettoriali del punto e del tempo dette
  - ♦ **campo elettrico**  $\mathbf{E}$  [unità di misura volt/metro, V/m]
  - ♦ **induzione magnetica**  $\mathbf{B}$  [unità di misura tesla, T]

- Se si ha una distribuzione di carica con densità  $\rho_c$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$ , la forza per unità di volume  $\mathbf{f}$  è

$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

13

## Campo elettrico

- Si dice che una regione è sede di un **campo elettrico** se una carica di prova  $\Delta q$  puntiforme posta in quiete in un punto P della regione è soggetta ad una forza  $\mathbf{F}_e$  proporzionale al valore della carica
- Il vettore campo elettrico nel punto P è definito come

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{\Delta q}$$

- ♦ Il passaggio al limite indica che la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non perturbare il campo presente nella regione considerata

14

## Induzione magnetica

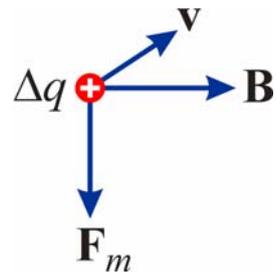
- Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova  $\Delta q$  puntiforme in moto con velocità istantanea  $\mathbf{v}$  in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza  $\mathbf{F}_e$  dovuta al campo elettrico) ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Il vettore **induzione magnetica**  $\mathbf{B}$  ha
  - ◆ direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza  $\mathbf{F}_m$  è nulla
  - ◆ verso tale che  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{F}_m$  formino una terna destra
  - ◆ modulo dato da

$$B = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{F_{m\max}}{\Delta q v}$$

dove  $F_{m\max}$  indica il valore massimo del modulo di  $\mathbf{F}_m$  (che si ottiene quando  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\mathbf{B}$ )



15

## Induzione elettrica e campo magnetico

- Come si vedrà in seguito, i vettori  $\mathbf{D}$  (**induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [ $\text{C}/\text{m}^2$ ]) e  $\mathbf{H}$  (**campo magnetico** [ $\text{A}/\text{m}$ ]) vengono introdotti per tenere conto di fenomeni che avvengono, in presenza di campi elettromagnetici, nei mezzi materiali
- Nel vuoto valgono le relazioni
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
- La costante  $\varepsilon_0$  ( $= 1/(c_0^2 \mu_0) \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$ ) è detta **permittività elettrica** (o **costante dielettrica**) del vuoto
- La costante  $\mu_0$  ( $= 4\pi \cdot 10^{-7} \cong 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H}/\text{m}$ ) è detta **permeabilità magnetica** del vuoto

( $c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m}/\text{s}$  è la velocità della luce nel vuoto)

16

# Equazioni fondamentali

## Leggi primarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\end{aligned}$$

(Assunte come postulati)

## Leggi secondarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_c \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

(Derivano dalle leggi primarie)

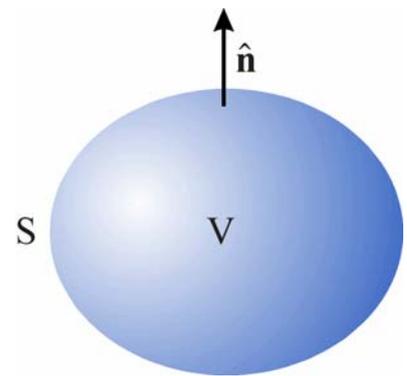
17

## Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

### • Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Per ricavare la forma integrale si considera una superficie chiusa  $S$  che delimita un volume  $V$
- Si orienta il versore normale a  $S$  verso l'esterno
- Si integrano primo e secondo membro sul volume  $V$  e si applica il teorema di Gauss (si possono scambiare l'integrale di volume e la derivata rispetto al tempo se  $S$ , e quindi  $V$ , non varia)



$$\left. \begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS\end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$$

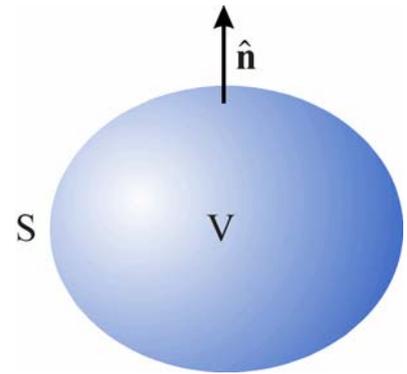
18

## Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_i = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho_c dV}_Q$$

- ◆  $i$  = corrente uscente dalla superficie  $S$
- ◆  $Q$  = carica contenuta nel volume  $V$



- *La corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*

- ➔ La carica elettrica non può essere né creata né distrutta, ma può essere solo spostata
- ➔ Nel caso di un sistema isolato ( $i = 0$ ) la carica è costante nel tempo

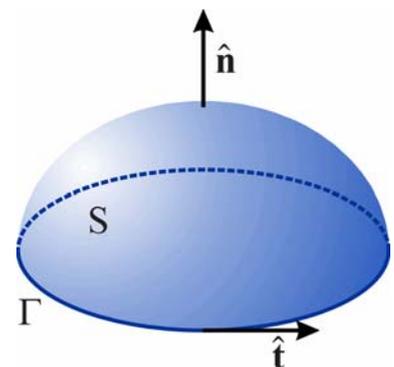
19

## Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- **Forma locale**

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa  $\Gamma$  e una generica superficie  $S$  avente  $\Gamma$  come contorno
- Si orientano il vettore tangente a  $\Gamma$  e il vettore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra
- Si valutano i flussi attraverso  $S$  del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se  $\Gamma$ , e quindi  $S$ , non varia)



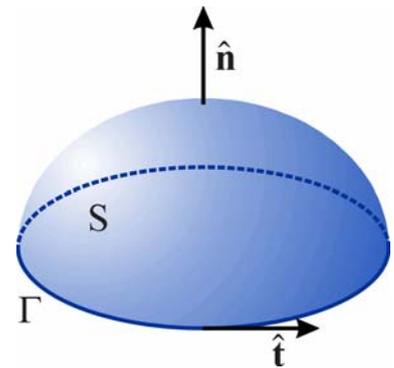
$$\left. \begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

20

## Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}_e = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{\Phi}$$



- ◆  $e$  = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
- ◆  $\Phi$  = flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie arbitraria avente  $\Gamma$  come contorno (**flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con  $\Gamma$** )

- *La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa*

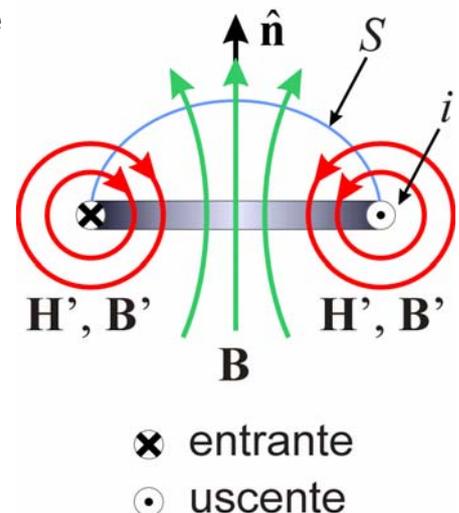
21

## Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- A causa del segno del termine a secondo membro, *la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che la ha generata* (**legge di Lenz**)

- **Esempio:**

- ◆ Si considera il caso in cui la linea  $\Gamma$  coincide con un conduttore
- ◆ In presenza di f.e.m. indotta, nel conduttore circola corrente
- ◆ Un incremento del flusso di  $\mathbf{B}$  dà origine a una corrente indotta che risulta positiva se si assume il verso di riferimento indicato in figura
- ◆ Questa corrente genera un campo magnetico  $\mathbf{H}'$ , diretto in modo tale da produrre un flusso di induzione magnetica negativo attraverso  $S$



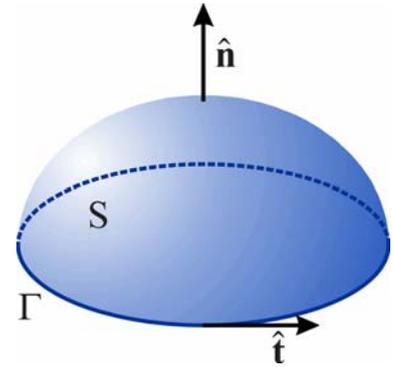
22

## Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma locale**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa  $\Gamma$  e una generica superficie  $S$  avente  $\Gamma$  come contorno
- Si orientano il vettore tangente a  $\Gamma$  e il vettore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra
- Si valutano i flussi attraverso  $S$  del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se  $\Gamma$ , e quindi  $S$ , non varia)



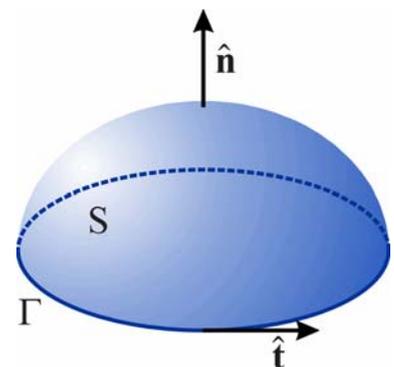
$$\left. \begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\ \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

23

## Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma integrale**

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS}_{i_c}$$



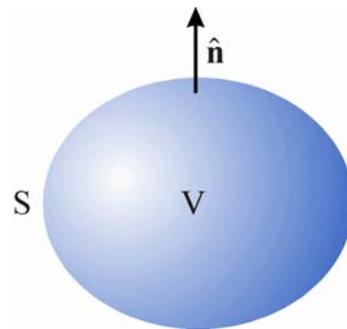
- ◆  $i_c$  = **corrente di conduzione** che attraversa  $S$
- ◆  $i_s$  = **corrente di spostamento** che attraversa  $S$
- ◆  $i_T = i_s + i_c$  = **corrente totale** concatenata con  $\Gamma$
- *La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa*

24

## Corrente di conduzione e di spostamento

- La corrente totale  $i_T$  non dipende dalla superficie  $S$ , ma solo dalla linea di contorno  $\Gamma$
- Attraverso superfici diverse aventi lo stesso contorno  $\Gamma$  i valori della corrente di conduzione  $i_c$  e della corrente di spostamento  $i_s$  possono risultare diversi, ma la loro somma  $i_T$  non varia
- ➔ Di conseguenza, la somma dei flussi attraverso una superficie chiusa della corrente di conduzione e della corrente di spostamento è sempre nullo

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c} + \underbrace{\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} = 0$$



25

## Corrente di conduzione e di spostamento

- Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right)$$

- Dato che la divergenza del rotore è sempre nulla si ha

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Se si considera una superficie chiusa  $S$  e che delimita un volume  $V$ , applicando il teorema di Gauss si ricava

$$\int_V \left( \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) dV = \oint_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

26

## Esempio

- Si considera una linea  $\Gamma$  che circonda un terminale di un condensatore
- Attraverso  $S_1$  si ha solo corrente di conduzione

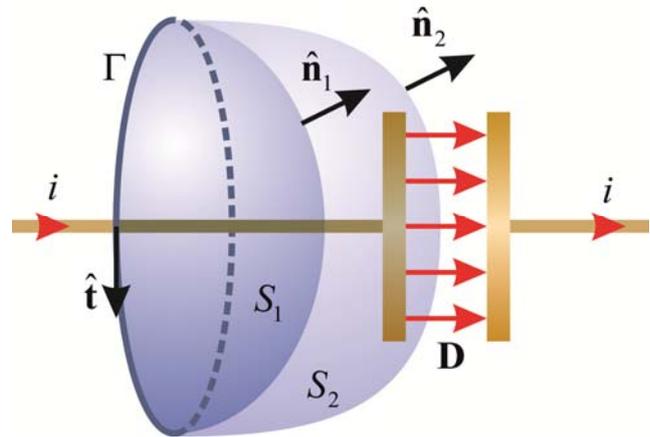
$$i_T = i_c = i = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS$$

- Attraverso  $S_2$  si ha solo corrente di spostamento

$$i_T = i_s = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

- Quindi risulta

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$



27

## Derivazione della legge di Gauss elettrica

- Come si è visto, applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell si ottiene

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Combinando questa relazione con l'equazione di continuità, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = \text{cost}$$

- L'esperienza mostra che in una generica regione dello spazio è possibile realizzare le condizioni  $\mathbf{D} = 0$  e  $\rho_c = 0$
- In tali condizioni risulta  $\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = 0$
- ➔ Quindi la costante deve valere zero e, di conseguenza, vale la relazione  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$

28

## Legge di Gauss elettrica

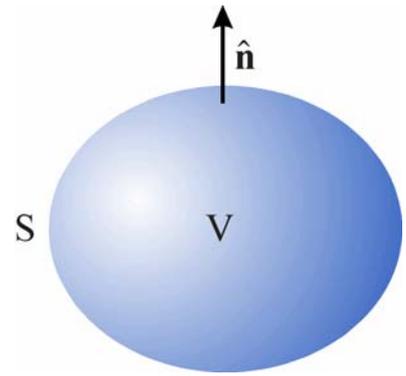
- **Forma locale**

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

- **Forma integrale**

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV = Q$$

- ◆  $V$  = regione delimitata da una superficie chiusa  $S$
- ◆ Si orienta il vettore normale a  $S$  verso l'esterno
- ◆ La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss
- *Il flusso uscente da una superficie chiusa del vettore induzione elettrica è uguale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*



29

## Derivazione della legge di Gauss magnetica

- Si applica l'operatore divergenza a primo e secondo membro dell'equazione di Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

- Dato che la divergenza di un rotore è nulla si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost}$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione  $\mathbf{B} = 0$ , si deduce che la costante deve essere nulla

➔  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

30

## Legge di Gauss magnetica

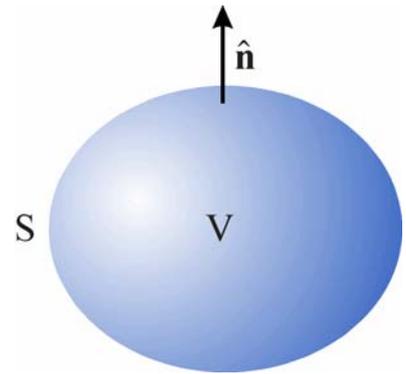
- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

- ◆  $V$  = regione delimitata da una superficie chiusa  $S$
  - ◆ Si orienta il versore normale a  $S$  verso l'esterno
  - ◆ La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss
- *Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è nullo*



31

## Equazioni di legame materiale

- Le equazioni fondamentali non dipendono dalle proprietà dei mezzi materiali in cui ha sede il campo elettromagnetico
- L'effetto dei mezzi materiali sui campi elettromagnetici viene espresso mediante un insieme di equazioni dette **equazioni di legame materiale** o **relazioni costitutive**
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico le relazioni costitutive hanno la forma
  - ◆  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$
  - ◆  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
  - ◆  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$
- Le relazioni costitutive possono dipendere, inoltre, da altre grandezze fisiche che definiscono lo stato del materiale (es. temperatura, pressione, ecc. )

32

# Equazioni di legame materiale

- **Materiali omogenei:**

Le relazioni costitutive  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{E})$  non dipendono dal punto considerato

- **Materiali isotropi:**

Le relazioni costitutive  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{E})$  non dipendono dalle direzioni dei vettori

- **Materiali lineari:**

Le relazioni costitutive sono espresse da equazioni lineari del tipo

$$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \quad \mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} \quad \mathbf{J} = [\sigma]\mathbf{E}$$

in cui  $[\varepsilon]$ ,  $[\mu]$  e  $[\sigma]$  rappresentano delle matrici

- **Materiali lineari isotropi:**

Le relazioni costitutive si riducono a relazioni di proporzionalità

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

in cui  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti scalari

33

# Dipolo elettrico

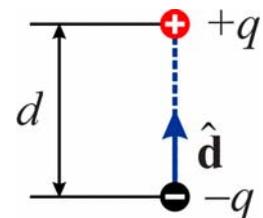
- Si considerano due cariche puntiformi uguali e opposte  $\pm q$  poste a distanza  $d$

- Si definisce **momento di dipolo elettrico**  $[\text{C}\cdot\text{m}]$  la quantità

$$\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{d}} = qd \hat{\mathbf{d}}$$

$\hat{\mathbf{d}}$  = versore diretto dalla carica negativa alla carica positiva

- A una distanza dalle cariche molto grande rispetto a  $d$  il campo elettrico dipende solo da  $\mathbf{p}$  (non separatamente da  $d$  e  $q$ )
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui  $d \rightarrow 0$  (sistema praticamente puntiforme) e  $q \rightarrow \infty$  in modo tale che il prodotto  $qd$  tenda a un valore finito  $p \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo elettrico**



34

## Polarizzazione dei dielettrici

- Dal punto di vista macroscopico, si può ritenere che, in assenza di perturbazioni esterne, in un dielettrico siano presenti due distribuzioni continue di carica, una positiva (densità  $\rho_+$ ) e una negativa (densità  $\rho_-$ ), uguali e opposte in ogni punto

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

- In un elemento di volume  $\Delta V$  sono contenute due cariche uguali e opposte  $\rho_+\Delta V$  e  $\rho_-\Delta V$  i cui baricentri coincidono
  - ➔ carica totale e momento di dipolo nulli
- Un campo elettrico esterno può produrre *piccoli* spostamenti  $\mathbf{l}_+$  e  $\mathbf{l}_-$  delle cariche positive e delle cariche negative (➔ **polarizzazione del dielettrico**)
- ➔ All'interno dell'elemento di volume  $\Delta V$ , lo spostamento relativo  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$  tra i baricentri delle cariche positive e negative dà origine a un momento di dipolo elettrico
$$\Delta \mathbf{p} = \rho_+ \Delta V (\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-) = \rho_+ \mathbf{l} \Delta V$$

35

## Polarizzazione per deformazione e orientamento

- Materiali **non polari**: le molecole non possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - ◆ In presenza di un campo elettrico esterno si ha una **polarizzazione per deformazione**
    - deformazione della distribuzione elettronica
    - spostamenti relativi degli atomi costituenti la molecola
- Materiali **polari**: le molecole possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - ◆ In assenza di campi esterni, a causa dell'agitazione termica i dipoli sono orientati in modo aleatorio
    - ➔ i dipoli si compensano e l'effetto macroscopico è nullo
  - ◆ Un campo esterno, oltre a produrre una polarizzazione per deformazione, tende ad allineare i dipoli (➔ **polarizzazione per orientamento**)

36

## Vettore polarizzazione elettrica

- Lo stato di un dielettrico polarizzato può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **polarizzazione elettrica** [C/m<sup>2</sup>]

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho_+ \mathbf{l}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli elettrici equivale ad una distribuzione volumetrica di carica con densità

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{densità di carica di polarizzazione}$$

- Se il campo elettrico varia nel tempo si ha una variazione di  $\mathbf{P}$  che equivale alla presenza di una **densità di corrente di polarizzazione elettrica**

$$\mathbf{J}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

37

## Induzione elettrica

- Legge di Gauss nel vuoto

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c$$

- In un dielettrico polarizzato, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche della carica di polarizzazione

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c + \rho_p$$

- Si esprime la carica di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

- Si definisce **induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m<sup>2</sup>] il vettore

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- ➔ Si ottiene un'espressione della legge di Gauss, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di carica libera  $\rho_c$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

38

## Costante dielettrica

- In generale  $\mathbf{P}$ , e quindi  $\mathbf{D}$ , sono funzioni del campo elettrico  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

- In un materiale lineare isotropo  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{D}$  sono proporzionali a  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$



$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$\chi_e =$  **suscettività elettrica** del mezzo

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e =$  **costante dielettrica relativa** del mezzo

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r =$  **permittività** o **costante dielettrica** del mezzo [F/m]

39

## Costanti dielettriche relative di alcuni materiali

	$\varepsilon_r$		$\varepsilon_r$
Titanato di bario	$10^3 \div 10^4$	Nylon	$3.7 \div 5.5$
Ossido di titanio	$86 \div 173$	Quarzo	$4.3 \div 5$
Acqua distillata	80	Gomma	3
Alcool etilico	28	Polistirene	$2.4 \div 3$
Germanio	16	Ebanite	$2 \div 3$
Silicio	12	Porcellana	$2.7 \div 2.9$
Vetro	$4 \div 10$	Carta	$2 \div 2.5$
Allumina	9.5	Teflon	2.1
Bachelite	$5.7 \div 7$	Polietilene	$1.6 \div 2.4$
Mica	$5.7 \div 6.5$	Aria (1 atm)	1.0006

(Valori a 20 °C)

40

## Dipolo magnetico

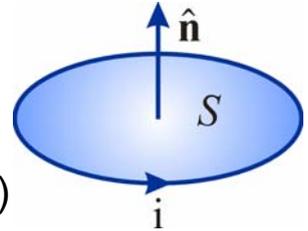
- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente  $i$

- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [ $A \cdot m^2$ ] la quantità

$$\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{n}} = i S \hat{\mathbf{n}}$$

$S$  = area della superficie piana delimitata dalla spira

$\hat{\mathbf{n}}$  = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)



- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico dipende solo da  $\mathbf{m}$
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui  $S \rightarrow 0$  (sistema praticamente puntiforme) e  $i \rightarrow \infty$  in modo tale che il prodotto  $Si$  tenda a un valore finito  $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**

41

## Vettore magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume  $\Delta V$  diviene sede di un momento di dipolo magnetico  $\Delta \mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [ $A/m$ ]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli magnetici equivale alla presenza nella materia di una **densità di corrente di polarizzazione magnetica**

$$\mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

42

## Campo magnetico

- Legge di Ampere - Maxwell nel vuoto

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Nella materia, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche delle correnti di polarizzazione elettrica e magnetica

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}$$

- Si esprimono le correnti di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

43

## Campo magnetico

- Nell'espressione precedente, a secondo membro, la somma delle derivate rispetto al tempo fornisce la derivata dell'induzione elettrica

- Si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- ➔ Si ottiene un'espressione della legge di Ampere - Maxwell, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di corrente  $\mathbf{J}$  associata alle cariche libere

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} + \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

44

## Equazione di continuità nei mezzi materiali

- Tenendo conto delle cariche e delle correnti di polarizzazione, l'equazione di continuità assume la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}) = -\frac{\partial(\rho_c + \rho_p)}{\partial t}$$

- Si esprimono le cariche e le correnti di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M})}_{=0} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t}$$

- ➔ Anche in presenza di cariche e correnti di polarizzazione si ottiene una relazione che coinvolge solo le cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

45

## Permeabilità magnetica

- In generale  $\mathbf{M}$ , e quindi  $\mathbf{B}$ , sono funzioni del campo magnetico  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

- In un materiale lineare isotropo  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}$  sono proporzionali a  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

↓

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$\chi_m$  = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$  = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0 \mu_r$  = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

46

## Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
  - ➔ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)
- ➔ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato
  - ➔ suscettività magnetica  $\chi_m < 0$   
(valori tipici dell'ordine di  $-10^{-5}$ )
  - ➔ permeabilità magnetica relativa  $\mu_R = (1 + \chi_m) < 1$   
(valori tipici leggermente inferiori a 1)
- $\chi_m$  e  $\mu_R$  risultano indipendenti dalla temperatura

47

## Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
  - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - ◆ non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
  - ➔ suscettività magnetica  $\chi_m > 0$  (valori tipici dell'ordine di  $10^{-4} \div 10^{-5}$ )
  - ➔ permeabilità magnetica relativa  $\mu_R = (1 + \chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
  - ➔  $\chi_m$  e  $\mu_R$  diminuiscono all'aumentare della temperatura  $T$

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (C = \text{costante}) \quad \text{Legge di Curie}$$

48

## Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

Materiali diamagnetici	$\chi_m$	Materiali paramagnetici	$\chi_m$
Bismuto	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	Uranio	$4 \cdot 10^{-4}$
Mercurio	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	Platino	$2.6 \cdot 10^{-4}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	Cesio	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	Alluminio	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Grafite	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	Litio	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di sodio	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	Sodio	$7.2 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	Ossigeno (1 atm)	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Azoto (1 atm)	$-5 \cdot 10^{-9}$	Aria (1 atm)	$4 \cdot 10^{-7}$

(Valori a 20 °C)

49

## Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**
  - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - ◆ si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra **B** e **H** è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico  $T_C$  della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (C = \text{costante})$$

**Legge di Curie-Weiss**

50

# Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di  $10^{-6}$ - $10^{-3}$  m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno  $\mathbf{H}$  i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di  $\mathbf{H}$  si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di  $\mathbf{H}$  produce un incremento di  $\mathbf{B}$  uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto:  $\Delta\mathbf{B} = \mu_0\Delta\mathbf{H}$

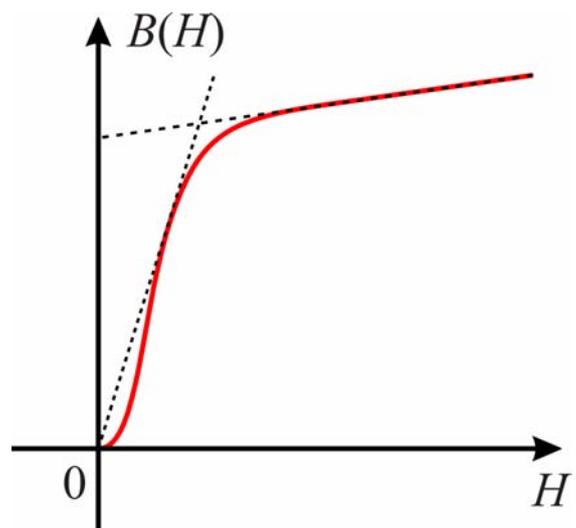
51

## Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato  $H = 0, B = 0$ , inizialmente si ha un tratto con pendenza elevata
  - ➔ Valori elevati della permeabilità relativa differenziale
- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

$$\mu_{r(d)}(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



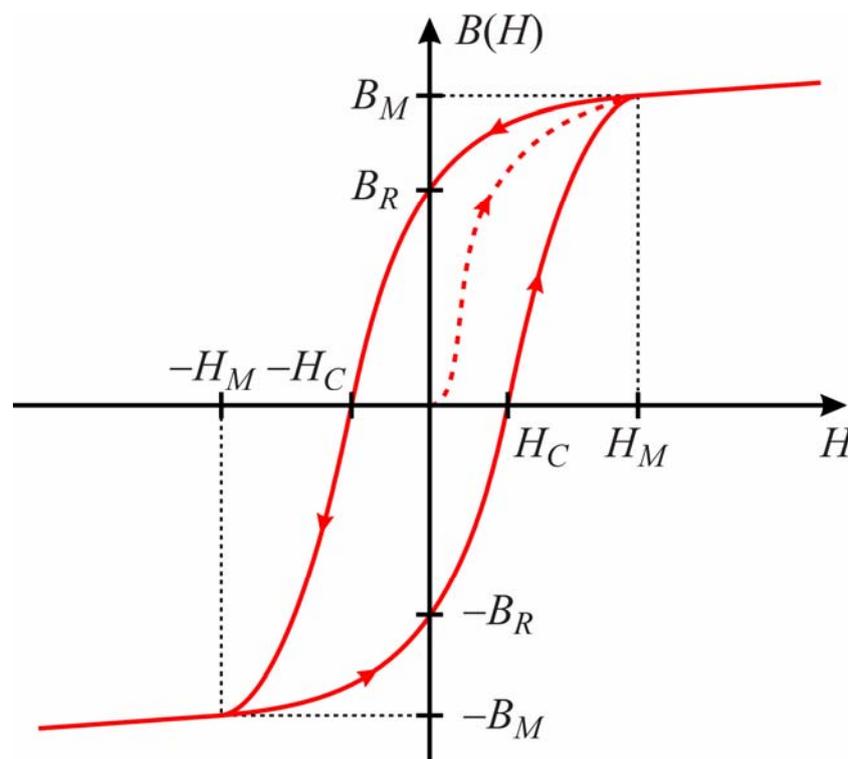
52

## Isteresi magnetica

- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso
- ➔ Riportando  $H$  a zero  $B$  non si annulla ma si porta ad un valore  $B_R$  (**induzione residua**)
- Per annullare  $B$  occorre applicare un campo magnetico inverso  $-H_C$  (**campo magnetico coercitivo**)
- Se  $H$  viene fatto variare ciclicamente tra due valori  $\pm H_M$  l'andamento di  $B$  è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

53

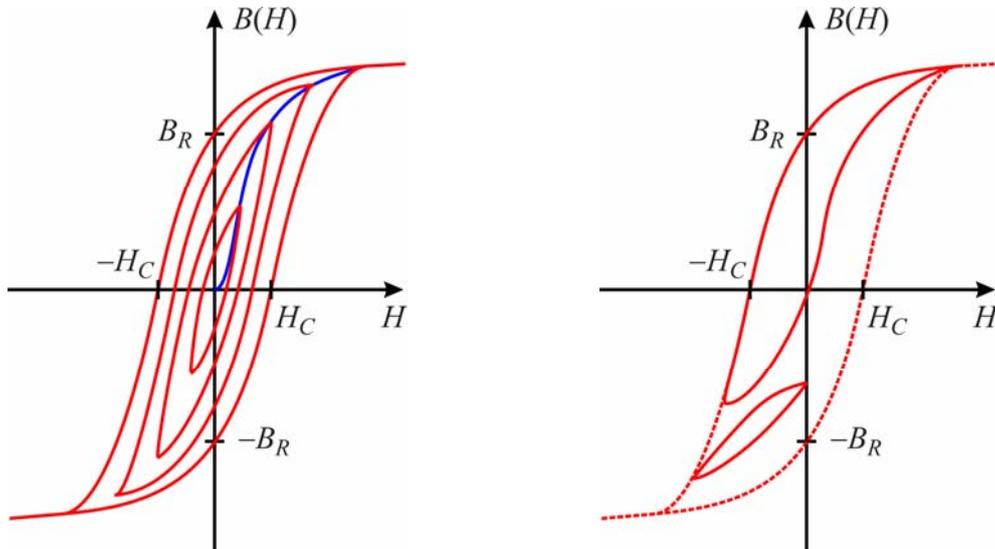
## Ciclo di isteresi



54

## Ciclo di isteresi

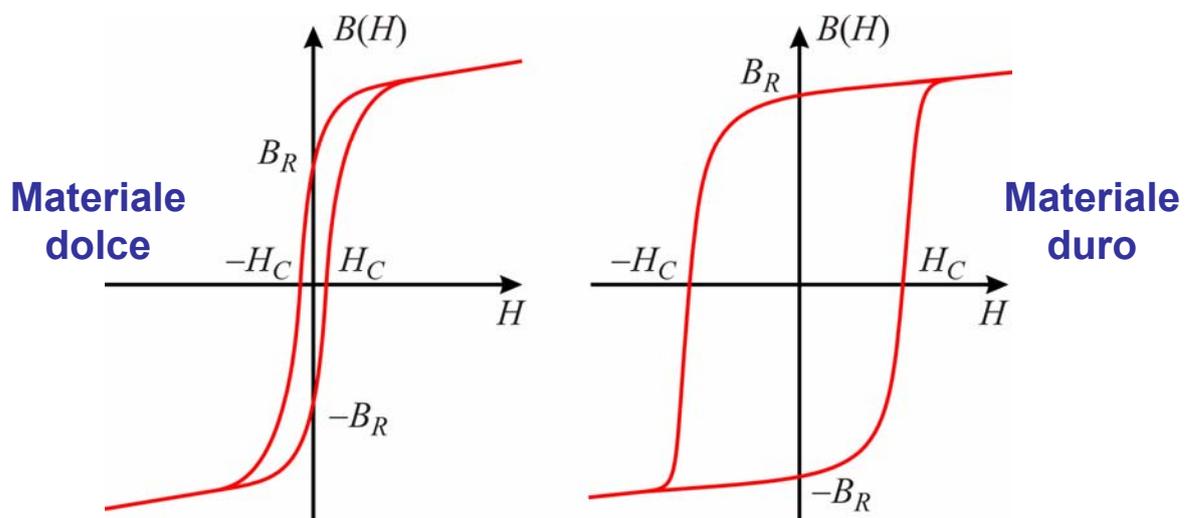
- Riducendo il valore di  $H_M$  si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici



55

## Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
  - ◆ **Materiali dolci** ➔ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
  - ◆ **Materiali duri** ➔ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo



56

## Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali dolci	$\mu_{r(d)}$ iniziale	$\mu_{r(d)}$ massima	$B_R$ [T]	$H_C$ [A/m]
Cobalto	10	175	0.31	1000
Nichel	400	1100	0.33	130
Ferro puro	$10^4$	$2 \cdot 10^5$	1.2	4
Ferro commerciale	200	5000	1.2	80
Ghisa	70	600	1.4	500
Ferro-silicio 4%	500	7000	0.8	40
Permalloy (Ni, Fe 22%)	$10^4$	$5 \cdot 10^4$	0.6	4
Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%)	$10^5$	$3 \cdot 10^5$	0.6	0.4
Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)	$2.5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	0.6	1.2

(Valori a 20 °C)

57

## Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali duri	$B_R$ [T]	$H_C$ [kA/m]
Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)	1.05	5.6
Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)	1.28	51
Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)	1.05	120
Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)	0.54	44
Ferrite di bario ( $BaFe_{12}O_{19}$ )	0.43	170
Samario-cobalto ( $SmCo_5$ )	0.87	640
Neodimio-ferro-boro ( $Nd_2Fe_{14}B$ )	1.23	880

(Valori a 20 °C)

58

## Legge di Ohm

- Per una vasta classe di materiali il legame tra la densità di corrente e il campo elettrico è lineare e isotropo ed è espresso dalla **legge di Ohm** (in forma locale)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

- ◆  $\sigma =$  **conducibilità** [siemens/metro, S/m]
- ◆  $\rho = 1/\sigma =$  **resistività** [ohm·metro,  $\Omega \cdot \text{m}$ ]
- Buoni conduttori →  $\rho$  dell'ordine di  $10^{-7} \div 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
- Conduttore ideale →  $\rho = 0, \sigma \rightarrow \infty$
- Isolanti →  $\rho$  dell'ordine di  $10^7 \div 10^{18} \Omega \cdot \text{m}$
- Isolante ideale →  $\rho \rightarrow \infty, \sigma = 0$

59

## Dipendenza della resistività dalla temperatura

- La resistività e la conducibilità sono in generale funzioni della temperatura
- Per variazioni di temperatura di ampiezza limitata la dipendenza può essere considerata praticamente lineare

$$\rho(\theta) = \rho_0 (1 + \alpha \theta)$$

$\rho_0 =$  resistività valutata alla temperatura di riferimento  $T_0$  [ $\Omega \cdot \text{m}$ ]

$\theta = T - T_0 =$  variazione di temperatura rispetto a  $T_0$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]

$\alpha =$  coefficiente di temperatura [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]

60

## Resistività di alcuni materiali

Conduttori	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	$\alpha$ [ $^{\circ}C^{-1}$ ]
Argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Oro	$2.36 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
Alluminio	$2.82 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Stagno	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
Piombo	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Costantana (Cu-Ni)	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Manganina (Cu-Ni-Mn)	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$9.6 \cdot 10^{-7}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$
Grafite	$3 \cdot 10^{-5} \div 6 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$

(Valori a 20 °C)

61

## Resistività di alcuni materiali

Semiconduttori	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	$\alpha$ [ $^{\circ}C^{-1}$ ]
Germanio	0.47	$-4.8 \cdot 10^{-2}$
Silicio	$6.4 \cdot 10^2$	$-7.5 \cdot 10^{-2}$
Isolanti	$\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]	$\alpha$ [ $^{\circ}C^{-1}$ ]
Carta	$10^7 \div 10^{10}$	
Bachelite	$10^9 \div 10^{10}$	
Porcellana	$10^9 \div 10^{13}$	
Polietilene	$10^{13}$	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
Mica	$10^{12} \div 10^{14}$	
Gomma	$10^{12} \div 10^{14}$	
Ebanite	$10^{16}$	
Quarzo fuso	$10^{18}$	

(Valori a 20 °C)

62

## Campo elettrico impresso

- Oltre alle forze elettromagnetiche, sulle cariche possono agire anche forze di natura non elettrica (ad es. meccanica o chimica)
- In questo caso la forza per unità di carica viene detta **campo elettrico impresso**,  $\mathbf{E}_i$ 
  - ➔  $\mathbf{E}_i$  è dimensionalmente omogeneo a un campo elettrico (forza per unità di carica), ma a rigore non è un campo elettrico
- In presenza di campi impressi la legge di Ohm assume la forma
$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

da cui si ottiene anche

$$\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J} + \mathbf{J}_i)$$

avendo posto:  $\mathbf{J}_i = -\sigma\mathbf{E}_i$  (**densità di corrente impressa**)

63

## Effetto Joule

- Si considera una densità di carica  $\rho_c$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in un mezzo di conducibilità  $\sigma$ 
  - ➔ densità di corrente  $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$
- In presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di un campo impresso  $\mathbf{E}_i$ , la forza per unità di volume che agisce sulla carica è
$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$
- La legge di Ohm indica che se la forza dovuta a  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{E}_i$  è costante, la velocità delle cariche è costante
  - ➔ sulle cariche devono agire delle forze frenanti (analoghe a forze di attrito viscoso)
  - ➔ dissipazione di energia

64

## Effetto Joule

- Il lavoro per unità di volume compiuto nell'intervallo  $dt$  dalle forze del campo elettrico e del campo impresso vale

$$\delta L = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{v} dt = \underbrace{\rho_c \mathbf{v}}_{=\mathbf{J}} \cdot \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)}_{=\mathbf{J}/\sigma} dt = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

- Questo lavoro deve essere uguale all'energia dissipata per unità di volume
- In effetti l'esperienza mostra che in un conduttore di conducibilità  $\sigma$ , in presenza di una densità di corrente  $\mathbf{J}$ , nell'intervallo di tempo  $dt$  viene prodotta per unità di volume la quantità di calore

$$\delta Q = \frac{J^2}{\sigma} dt \quad \text{Legge di Joule}$$

65

## Fenomeni stazionari

- Fenomeni elettromagnetici stazionari:** fenomeni nei quali le grandezze elettromagnetiche non variano nel tempo
  - tutte le derivate rispetto al tempo nelle equazioni fondamentali sono identicamente nulle
- Equazioni fondamentali in condizioni stazionarie**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

Le equazioni relative al campo elettrico e al campo magnetico sono "disaccoppiate"

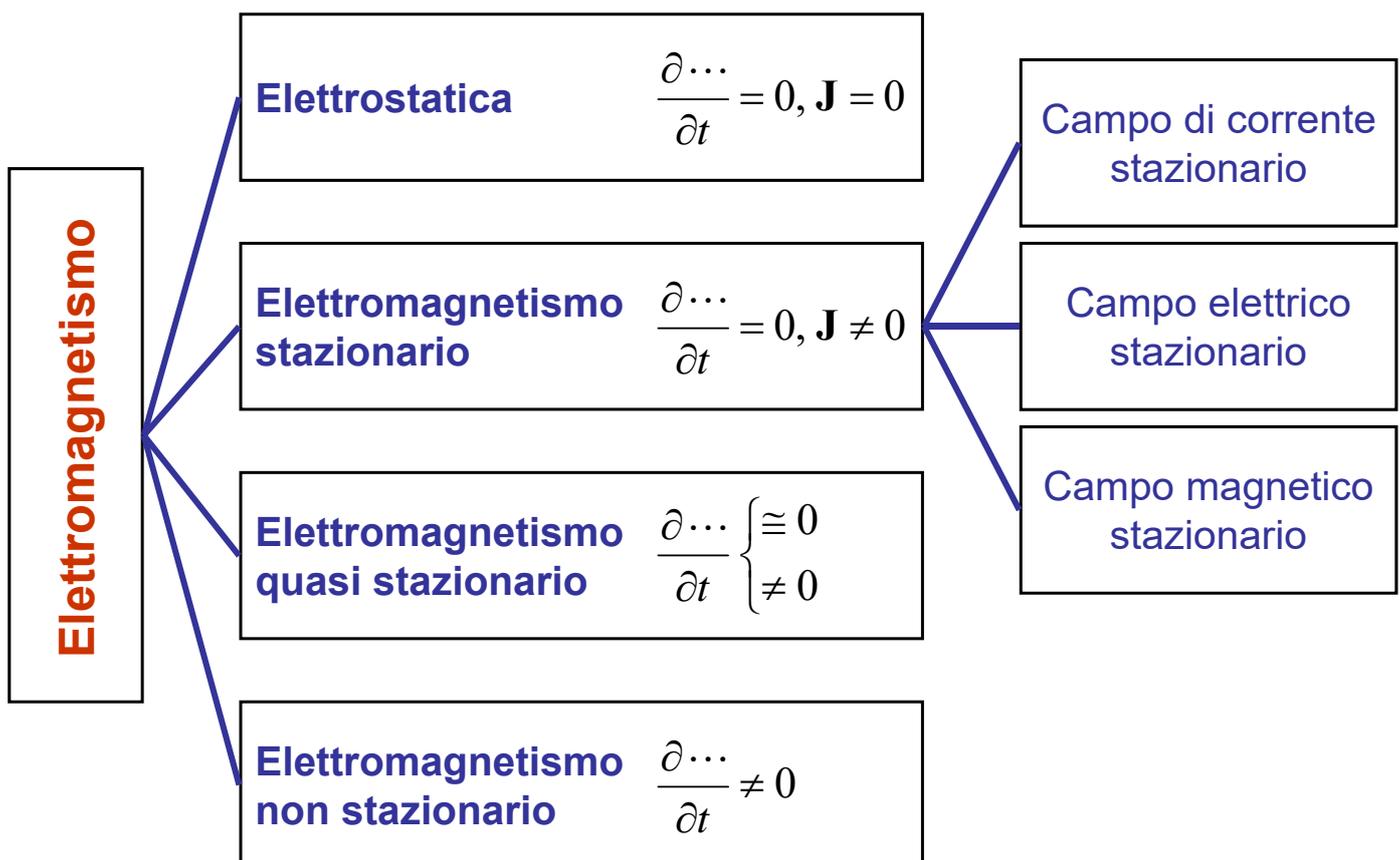
66

# Quadro generale dell'elettromagnetismo

- **Elettrostatica**
  - ◆ studio dei fenomeni stazionari in assenza di moto di cariche
  - ◆  $\mathbf{J} = 0$  ovunque
- **Elettromagnetismo stazionario**
  - ◆ studio dei fenomeni stazionari in presenza di moto di cariche
  - ◆  $\mathbf{J} \neq 0$  almeno in qualche regione del sistema considerato
- **Elettromagnetismo non stazionario**
  - ◆ studio dei fenomeni elettromagnetici non stazionari
- **Elettromagnetismo quasi stazionario**
  - ◆ studio approssimato di fenomeni nei quali le grandezze elettromagnetiche variano *lentamente* nel tempo
  - ◆ si assume che alcune delle derivate rispetto al tempo siano praticamente trascurabili
  - ➔ occorre specificare cosa significa “lentamente” e in base a quale criterio una derivata rispetto al tempo può essere trascurata

67

# Quadro generale dell'elettromagnetismo



68