

Elettromagnetismo stazionario

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 15-4-2018)

Campi statici e stazionari

- **Campo di corrente stazionario**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0\end{aligned}\quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

- **Campo elettrostatico**
Campo elettrico stazionario

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_c\end{aligned}\quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

- **Campo magnetico stazionario**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Campi statici e stazionari

- Nello studio dei campi statici e stazionari si incontrano comunemente situazioni in cui sono verificate le seguenti condizioni:
 - ◆ Il campo in una regione τ è descritto mediante due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ localmente proporzionali (la costante di proporzionalità in generale dipende dal punto)
 $\mathbf{b} = \kappa \mathbf{a} \quad \kappa = \kappa(P)$
 - ◆ Il vettore $\mathbf{a}$ è irrotazionale nella regione τ
 $\nabla \times \mathbf{a} = 0$
 - ◆ Il vettore $\mathbf{b}$ è indivergente nella regione τ
 $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$

3

Campi statici e stazionari

- Queste condizioni sono verificate
 - ◆ nelle regioni in cui non sono presenti campi elettrici impressi per il **campo stazionario di corrente**
 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$
 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{E} \quad \mathbf{b} = \mathbf{J} \quad \kappa = \sigma$
 - ◆ nelle regioni in cui non sono presenti cariche elettriche per il **campo elettrostatico** e il **campo elettrico stazionario**
 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$
 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{E} \quad \mathbf{b} = \mathbf{D} \quad \kappa = \varepsilon$
 - ◆ nelle regioni in cui è nulla la densità di corrente per il **campo magnetico stazionario**
 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$
 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{H} \quad \mathbf{b} = \mathbf{B} \quad \kappa = \mu$

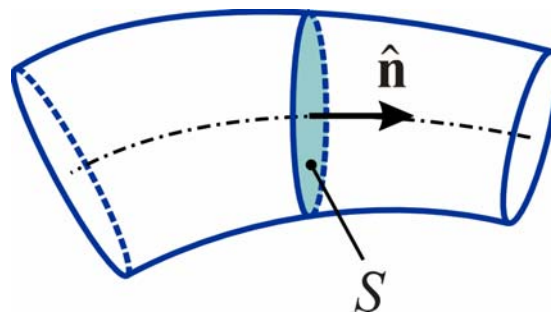
4

Proprietà dei vettori solenoidali

- Si assume che $\mathbf{b}$ sia indivergente all'interno una regione a connessione superficiale semplice τ (e quindi solenoidale nella regione τ)
- *Nella regione τ , il flusso di $\mathbf{b}$ attraverso ogni sezione trasversale di un tubo di flusso ha lo stesso valore*

$$\Phi = \int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \text{costante}$$

- ➔ Per un vettore solenoidale si può parlare di flusso associato al tubo di flusso (**portata del tubo di flusso**)



5

Costanza del flusso - dimostrazione

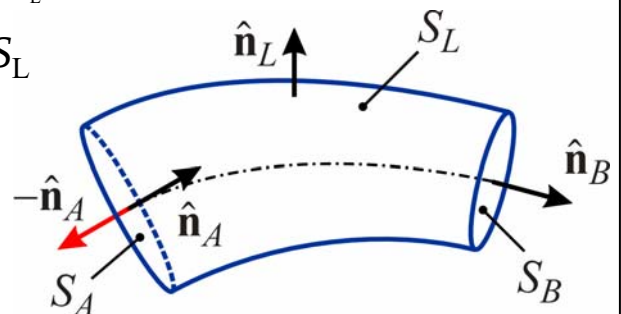
- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{b}$ delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B
- Se $\mathbf{b}$ è solenoidale è nullo il suo flusso attraverso la superficie chiusa S_T formata da S_A , S_B e dalla superficie laterale S_L

$$\oint_{S_T} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} \mathbf{b} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_A) dS + \int_{S_B} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS + \int_{S_L} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dS = 0$$

- Le linee di flusso di $\mathbf{b}$ sono tangenti a S_L
 - ➔ Il flusso di $\mathbf{b}$ attraverso S_L è nullo

- ➔ I flussi attraverso S_A e S_B sono uguali

$$\int_{S_A} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \int_{S_B} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS = \Phi$$



- ➔ Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A e S_B si può affermare che il flusso ha lo stesso valore Φ su tutte le superfici trasversali

6

Vettori ovunque solenoidali

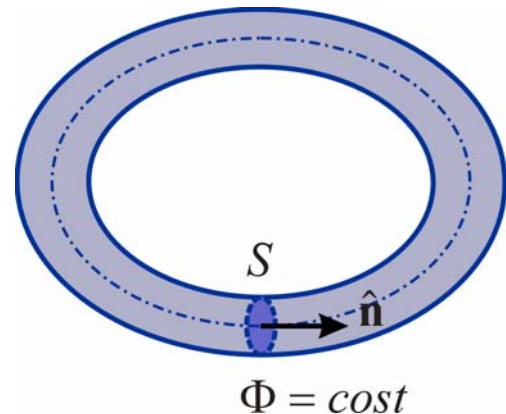
- All'interno di una regione τ in cui $\mathbf{b}$ è solenoidale non possono esistere sezioni terminali del tubo di flusso

- ◆ infatti se S_T fosse una sezione terminale dovrebbe essere

$$\int_{S_T} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

in contraddizione col fatto che il flusso deve essere uguale in tutte le sezioni trasversali

- ➔ Come caso particolare, se $\mathbf{b}$ è solenoidale in tutto lo spazio, i tubi di flusso di $\mathbf{b}$, devono essere chiusi (eventualmente all'infinito)



7

Potenziale

- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{b}$ delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso e interamente contenuto nella regione in cui valgono le condizioni

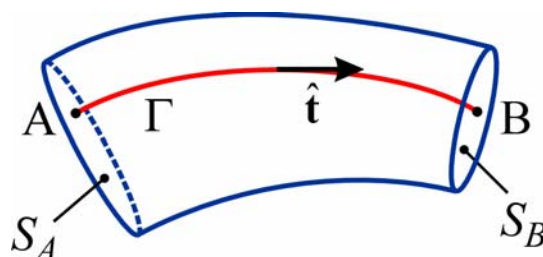
$$\nabla \times \mathbf{a} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b} = \kappa \mathbf{a}$$

- La regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa

- ➔ All'interno del tronco di tubo di flusso possibile esprimere $\mathbf{a}$ come gradiente di un potenziale U

$$\mathbf{a} = -\nabla U$$



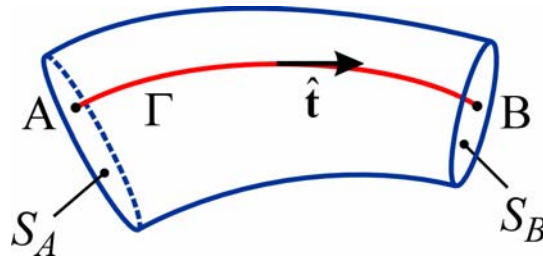
8

Potenziale

- Dato che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli, S_A e S_B sono ortogonali alle linee di campo di $\mathbf{a}$
 - ➔ S_A e S_B sono superfici equipotenziali
- La differenza di potenziale tra le superfici S_A e S_B è

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- ♦ A e B sono due punti generici appartenenti rispettivamente a S_A e S_B
- ♦ L'integrale è valutato lungo una linea arbitraria Γ che collega A e B



9

Relazione tra potenziale e flusso

- Come si è visto, a un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{b}$ delimitato da due superfici trasversali ortogonali e contenuto in una regione in cui $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, possono essere associati in modo univoco
 - ♦ un flusso Φ attraverso la generica sezione trasversale
 - ♦ una differenza di potenziale U_{AB} tra le superfici terminali
- Nelle condizioni indicate valgono le seguenti proprietà:
 - ♦ U_{AB} e Φ sono *proporzionali tra loro*
 - ♦ *La costante di proporzionalità K_{AB} dipende unicamente dalle proprietà geometriche del tubo di flusso e dalle proprietà del mezzo in cui ha sede il campo*

$$U_{AB} = K_{AB} \Phi$$

$$K_{AB} = \frac{U_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_A^B \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

10

Relazione tra potenziale e flusso

- Come si vedrà in seguito, la relazione

$$U_{AB} = K_{AB} \Phi$$

corrisponde

- ♦ alla **legge di Ohm** (in forma integrale), nel caso del campo di corrente stazionario ($\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$)

$$V_{AB} = R_{AB} i$$

- ♦ all'**equazione del condensatore**, nel caso del campo elettrico stazionario ($\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$)

$$V_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} Q$$

- ♦ alla **legge di Hopkinson**, nel caso del campo magnetico stazionario ($\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$)

$$\Psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi$$

11

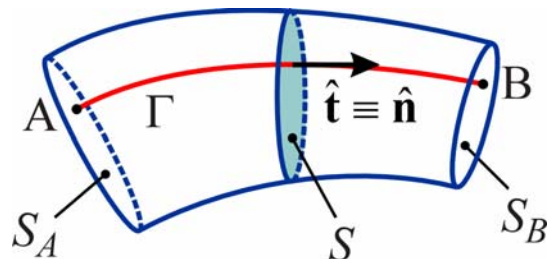
Determinazione della costante K_{AB}

- Per calcolare K_{AB} è conveniente fare coincidere
 - ♦ Γ con una linea di campo
 - ♦ S con una superficie equipotenziale (sezione normale)

- In questo modo

- ♦ $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{\mathbf{n}}$
- ♦ $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli a $\hat{\mathbf{t}}$

- Inoltre, dato che il flusso di $\mathbf{b}$ è indipendente dalla sezione, si può valutare considerando, al variare di x lungo Γ , la superficie $S(x)$ ortogonale a Γ e passante per x



$$K_{AB} = \frac{\int_A^B \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS} = \frac{\int_0^l a(x) dx}{\int_S b dS} = \int_0^l \frac{a(x)}{\int_{S(x)} b dS} dx$$

l = lunghezza di Γ
 x = ascissa curvilinea lungo Γ

12

Tubo di flusso filiforme

- Se l'area della sezione trasversale è molto piccola (➔ tubo filiforme) si può assumere che **b** e κ siano uniformi sulla superficie S

➔ sia **b** che κ dipendono solo da x

➔ L'espressione della costante K_{AB} è

$$K_{AB} = \int_0^l \frac{a(x)dx}{\int_{S(x)} b(x)dS} = \int_0^l \frac{a(x)dx}{\kappa(x)a(x) \int_{S(x)} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\kappa(x)A(x)}$$

$A(x)$ = area della sezione $S(x)$

- ➔ Quindi K_{AB} non dipende da **a** e **b**, ma solo da κ e dalle proprietà geometriche del tubo di flusso
- Se, inoltre, κ e l'area della sezione hanno valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, si ottiene

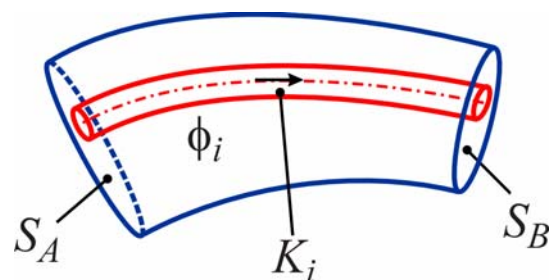
$$K_{AB} = \frac{l}{\kappa A}$$

13

Tubo di flusso generico

- Un tubo di flusso non filiforme può essere suddiviso in un insieme di tubi di flusso filiformi elementari, le cui sezioni terminali sono contenute nelle superfici S_A e S_B
- All' i -esimo tubo di flusso elementare è associato il flusso ϕ_i
- Per tutti i tubi di flusso la differenza di potenziale è pari a U_{AB}
- Per ciascun tubo elementare, applicando il procedimento precedente, si può definire una costante K_i , data da

$$K_i = \frac{U_{AB}}{\phi_i}$$



14

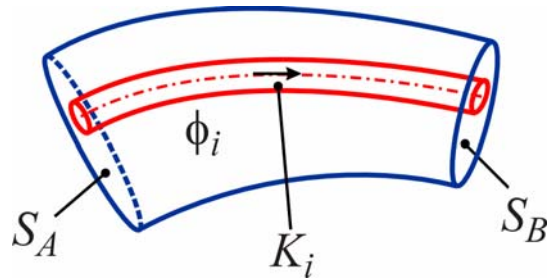
Tubo di flusso generico

- Il flusso totale è dato dalla somma dei flussi dei tubi elementari

$$\Phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{U_{AB}}{K_i}$$

- Quindi K_{AB} può essere ottenuta da

$$K_{AB} = \frac{U_{AB}}{\Phi} = \frac{U_{AB}}{\sum_i \frac{U_{AB}}{K_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{K_i}}$$



- ➔ Dato che le K_i dipendono solo dalla configurazione geometrica e dalla costante κ , lo stesso vale anche per K_{AB}

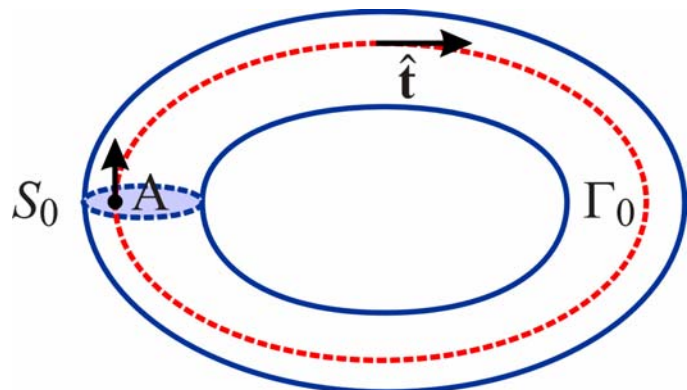
15

Tubi di flusso chiusi

- Si considera un tubo di flusso di $\mathbf{b}$ chiuso e si assume $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ al suo interno mentre non si fanno ipotesi sul valore di $\nabla \times \mathbf{a}$ all'esterno
- ➔ La regione in cui $\mathbf{a}$ è irrotazionale non è semplicemente connessa
- ➔ E' possibile che la circuitazione di $\mathbf{a}$ su una linea chiusa Γ_0 contenuta nel tubo di flusso sia diversa da zero

$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l} = C \neq 0$$

- Si può rendere semplicemente connessa la regione interna al tubo di flusso tagliandola con una superficie S_0 ortogonale alle linee di campo



- ➔ Nella regione interna alla superficie formata da S_0 e dalla superficie laterale del tubo di flusso è possibile definire un potenziale U

16

Tubi di flusso chiusi

- Sulla superficie S_0 il potenziale in genere è discontinuo
- Se si indica con $U(A^+)$ il potenziale sulla faccia superiore di S_0 e con $U(A^-)$ il potenziale sulla faccia inferiore si ha

$$U(A^+) - U(A^-) = \int_{A^+}^{A^-} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\Gamma_0} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = C$$

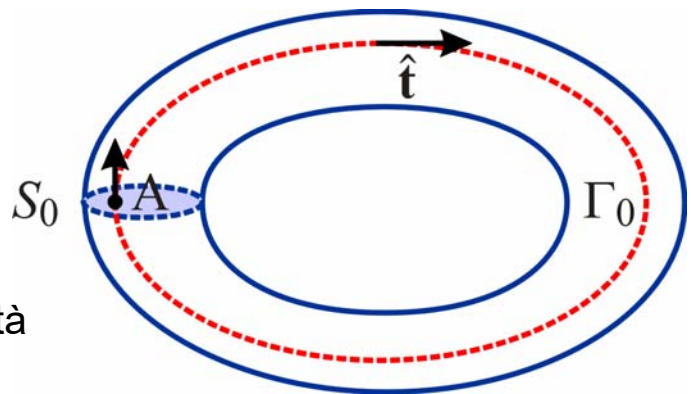
- Procedendo come nel caso di un tubo di flusso aperto si può esprimere il legame tra la circuitazione di $\mathbf{a}$ e il flusso di $\mathbf{b}$ nella forma

$$C = K\Phi$$

dove

$$K = \frac{\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

dipende solo da κ e dalle proprietà geometriche del tubo di flusso



17

Tubi di flusso chiusi

- Se il tubo di flusso chiuso fosse contenuto interamente in una regione τ semplicemente connessa in cui $\mathbf{a}$ è irrotazionale, la circuitazione di $\mathbf{a}$ su ogni linea chiusa Γ_0 sarebbe nulla

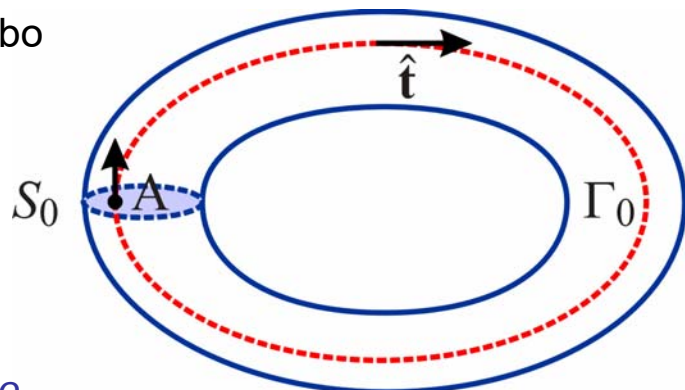
$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- In queste condizioni, per ogni tubo di flusso chiuso di $\mathbf{b}$ si avrebbe

$$0 = K\Phi \Rightarrow \Phi = 0$$

- ➔ quindi anche $\mathbf{b}$ sarebbe identicamente nullo

- ➔ *Tubi di flusso chiusi di $\mathbf{b}$ possono esistere solo se $\mathbf{a}$ non è ovunque irrotazionale*

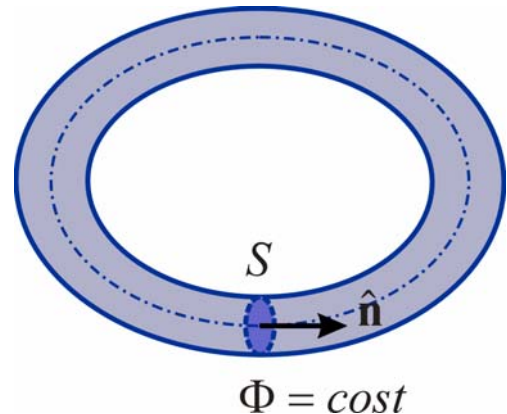


18

Circuito elettrico elementare

- Il vettore $\mathbf{J}$ è ovunque solenoidale
- ➔ I tubi di flusso di $\mathbf{J}$ sono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di $\mathbf{J}$ costituisce un **circuito elettrico elementare**
 - ♦ Più in generale, si possono avere circuiti elettrici con struttura ramificata costituiti dall'unione di più tubi di flusso di $\mathbf{J}$
- ➔ Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore
- Questo valore rappresenta la **corrente** associata al tubo di flusso

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



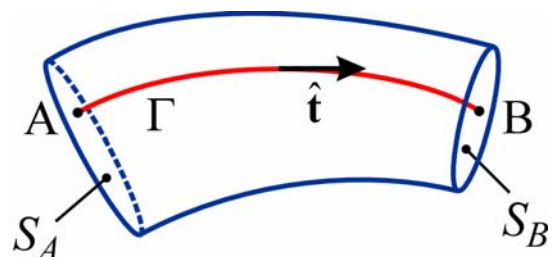
19

Tensione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{J}$ delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tronco di tubo di flusso non agiscano campi impressi (quindi $\mathbf{E} = \sigma \mathbf{J}$)
- Dato che $\mathbf{E}$ è ovunque irrotazionale, si può porre $\mathbf{E} = -\nabla V$
- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di $\mathbf{E}$
 - ➔ sono due superfici equipotenziali
- La **tensione** (differenza di potenziale) tra le due superfici è

$$v_{AB} = V(A) - V(B) = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti rispettivamente di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ che collega A e B



20

Resistenza

- Si definisce **resistenza** (unità di misura ohm, Ω) del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione v_{AB} e la corrente i

$$R_{AB} = \frac{v_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

- Il reciproco della resistenza è detto **conduttanza** (unità di misura siemens, S)

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{i}{v_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La resistenza e la conduttanza non dipendono da $\mathbf{E}$ e da $\mathbf{J}$, ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla conducibilità del materiale*

21

Legge di Ohm in forma integrale

- La differenza di potenziale (tensione) tra le sezioni terminali del tubo di flusso e la corrente attraverso il tubo di flusso sono legate dalla relazione

$$v_{AB} = R_{AB} i$$

Legge di Ohm in forma integrale

e quindi

$$i = G_{AB} v_{AB} \quad (G_{AB} = 1 / R_{AB})$$

22

Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- Se si considera un tubo di flusso chiuso (cioè si fanno coincidere le sezioni S_A e S_B), dato che $\mathbf{E}$ è conservativo risulta

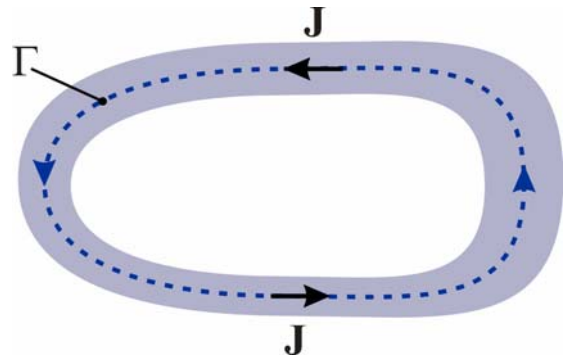
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- Quindi si ha anche

$$Ri = 0$$

dove R rappresenta la resistenza del circuito

- ➔ Di conseguenza la corrente è nulla e quindi anche $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ si devono essere nulli



23

Necessità del campo impresso

- In presenza del solo campo elettrico $\mathbf{E}$ conservativo non si può avere corrente nel circuito
 - ♦ se le cariche percorrono traiettorie chiuse il lavoro compiuto dal campo elettrico è nullo
 - ♦ nel circuito non può circolare corrente, dato che questo richiederebbe che il campo fornisca un'energia pari a quella dissipata per effetto Joule
- ➔ Affinché si possa avere una corrente nel circuito è indispensabile la presenza di un campo impresso non conservativo

24

Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- In presenza di un campo impresso non conservativo, la circuitazione del campo totale vale

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = e \neq 0$$

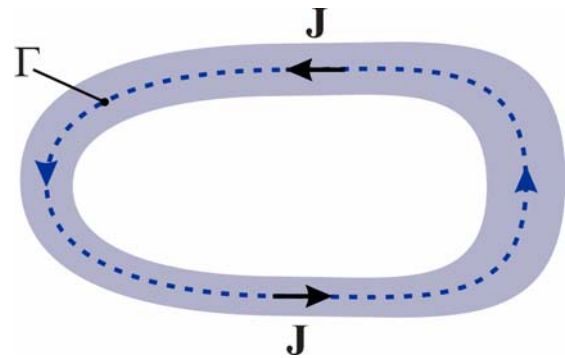
dove e è la **forza elettromotrice** dovuta al campo impresso

- In queste condizioni si ottiene

$$R = \frac{\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS} = \frac{e}{i}$$

- ➔ Quindi la legge di Ohm per un circuito elementare è

$$Ri = e$$



25

Generatori

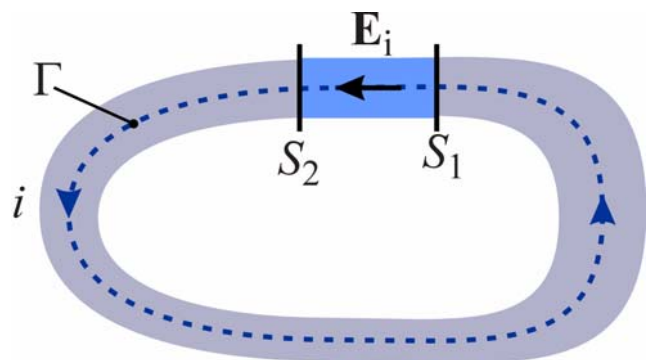
- Normalmente il campo impresso è diverso da zero solo in alcune regioni del circuito
- Nell'esempio $\mathbf{E}_i \neq 0$ solo nel tratto compreso fra le sezioni S_1 e S_2 quindi

$$e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove Γ_{12} è il tratto di Γ compreso tra le due sezioni

- Le regioni in cui agiscono i campi impressi corrispondono a dispositivi nei quali avviene conversione in energia elettrica di energia di altro tipo (es. meccanica, termica, chimica)

➔ **generatori elettrici**



26

Tubo di flusso sede di f.e.m.

- Si considera un tronco di tubo di flusso all'interno del quale è presente una regione in cui il campo impresso è diverso da zero
- Integrando il campo elettrico totale si ottiene

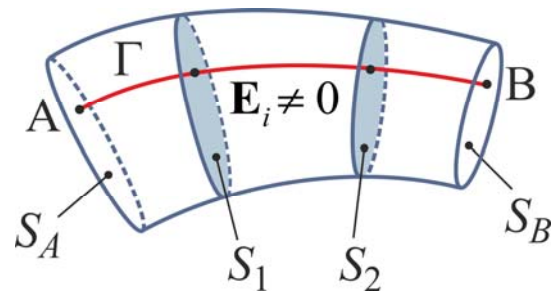
$$\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l} = v_{AB} + e \quad (\mathbf{E}_i \text{ dà contributo solo nel tratto compreso fra } S_1 \text{ e } S_2)$$

- La resistenza può essere valutata come

$$R_{AB} = \frac{v_{AB} + e}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS}$$

- ➔ Quindi la legge di Ohm può essere espressa come

$$v_{AB} = R_{AB} i - e$$



27

Nota

- Le considerazioni precedenti si basano sull'ipotesi che l'andamento dei tubi di flusso di $\mathbf{J}$ sia noto
- Generalmente i circuiti elettrici sono realizzati mediante conduttori circondati da un mezzo isolante (nel quale $\sigma \cong 0$ e quindi $\mathbf{J} \cong 0$)
- In condizioni stazionarie le componenti di $\mathbf{J}$ ortogonali alle superfici di separazione tra regioni occupate da materiali diversi devono essere continue
 - ➔ Dato che nel mezzo isolante $\mathbf{J}$ è praticamente uguale a zero, sulle superfici che delimitano i conduttori si deve annullare la componente ortogonale di $\mathbf{J}$ (altrimenti si avrebbero dei tubi di flusso che terminano sulla superficie dei conduttori, ma questo non è possibile perché $\mathbf{J}$ è solenoidale)
 - ➔ $\mathbf{J}$ deve essere tangente alle superfici che delimitano i conduttori
 - ➔ E' possibile identificare i tubi di flusso di $\mathbf{J}$ con i conduttori

28

Modello circuitale

- Un sistema elettromagnetico sede di un campo di corrente stazionaria può essere descritto in forma un **modello circuitale**
- Il sistema viene suddiviso in sottosistemi detti **componenti** circuitali
- Ogni **componente** è idealmente delimitato da una superficie chiusa (**superficie limite**) attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero di regioni, ciascuna equipotenziale, (**poli o terminali**)
 - ➡ un terminale coincide con la sezione normale di un tubo di flusso di $\mathbf{J}$
 - ➡ ad ogni terminale può essere associata in modo univoco una corrente
 - ➡ ad ogni coppia di terminali può essere associata in modo univoco una tensione

29

Modello circuitale

- Il comportamento del circuito è descritto mediante grandezze integrali, indipendenti dalle coordinate spaziali
 - ◆ **correnti** attraverso i terminali
 - ◆ **tensioni** (differenze di potenziale) tra i terminali
- ➡ Il modello circuitale fa riferimento solo alle relazioni tra le tensioni e le correnti ai terminali dei componenti
- ➡ Non viene messa in evidenza
 - ◆ la configurazione geometrica dei tubi di flusso di $\mathbf{J}$
 - ◆ la distribuzione di campo al loro interno

30

Equazioni dei componenti

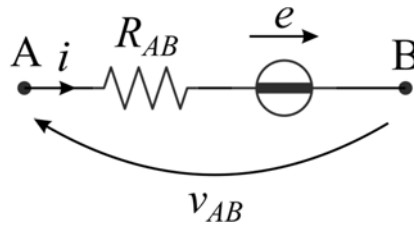
- Le tensioni e le correnti di ciascun componente sono soggette a vincoli dipendenti dalle proprietà fisiche del componente (**equazioni dei componenti**)

- Per esempio, nel caso in cui il componente si identifica con un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{J}$ in cui vale la relazione

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

l'equazione del componente è data, come si è visto, dalla legge di ohm in forma integrale

$$v_{AB} = R_{AB}i - e$$



- Il componente può essere rappresentato come serie di un resistore e di un generatore ideale di tensione

31

Equazioni dei collegamenti

- Dalle equazioni fondamentali per il campo di corrente stazionario

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

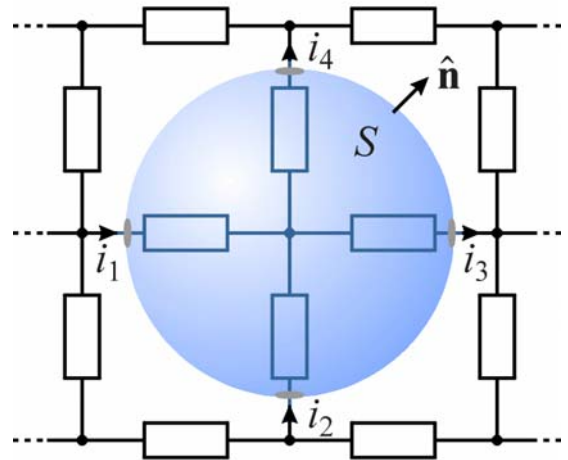
è possibile derivare le leggi di Kirchhoff, che esprimono i vincoli tra le tensioni e tra le correnti dei componenti di un circuito dipendenti dalla struttura dei collegamenti

32

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- La legge di Kirchhoff per le correnti è diretta conseguenza del fatto che la densità di corrente in condizioni stazionarie è solenoidale
- Si considera una superficie chiusa orientata S che interseca i rami del circuito
- La densità di corrente è diversa da zero solo nelle aree S_k che rappresentano le intersezioni tra la superficie e il circuito, quindi

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sum_k \pm i_k = 0$$



- L'integrale di $\mathbf{J}$ sulla superficie S_k coincide con la corrente di un terminale o con il suo opposto a seconda che il verso della normale a S e il verso della corrente siano concordi o discordi

33

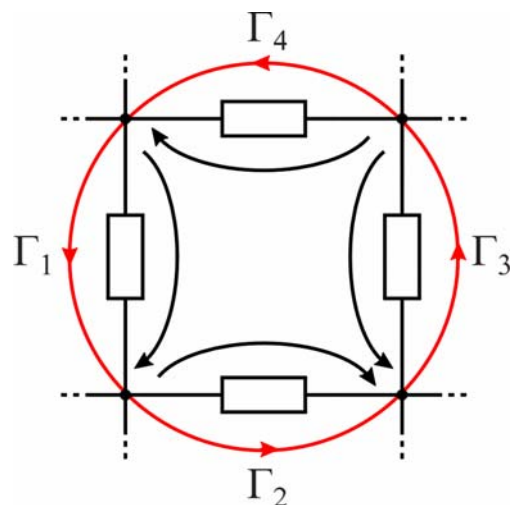
Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- La legge di Kirchhoff per le tensioni è diretta conseguenza del fatto che il campo elettrico in condizioni stazionarie è irrotazionale e quindi su una generica linea chiusa si ha

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- Si considera una linea Γ passante per i nodi di un circuito e la si suddivide in una successione di curve Γ_k , ciascuna delle quali collega una coppia di nodi

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \pm V_k = 0$$



- L'integrale di $\mathbf{E}$ lungo la linea Γ_k rappresenta la tensione V_k tra i nodi collegati dalla linea Γ_k o il suo opposto ($-V_k$) a seconda che il verso della tensione e il verso di Γ siano concordi o discordi

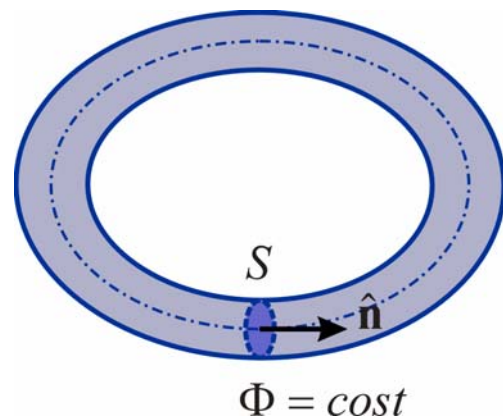
34

Circuito magnetico elementare

- Il vettore $\mathbf{B}$ è ovunque solenoidale
- ➔ I tubi di flusso di $\mathbf{B}$ non possono avere sezioni terminali, quindi devono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di $\mathbf{B}$ costituisce un **circuito magnetico elementare**
 - ♦ Più in generale, si possono avere circuiti magnetici con struttura ramificata costituiti dall'unione di più tubi di flusso di $\mathbf{B}$

- ➔ Il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



35

Potenziale scalare magnetico

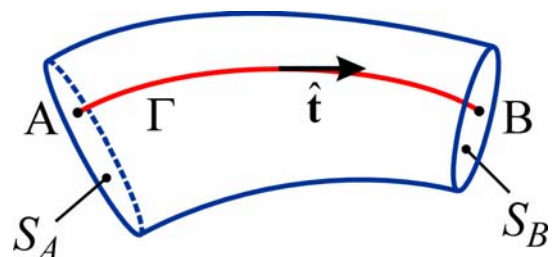
- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{B}$ delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Se all'interno del tronco di tubo di flusso la densità di corrente $\mathbf{J}$ è nulla si ha

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

- Dato che la regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa, in tale regione è possibile definire un **potenziale scalare magnetico** ψ [unità di misura A]

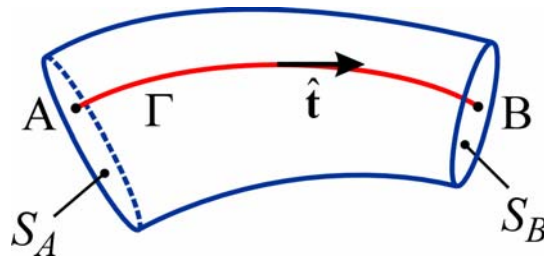
$$\mathbf{H} = -\nabla \psi$$

- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di $\mathbf{H}$
 - ➔ sono due superfici equipotenziali



36

Tensione magnetica



- La **tensione magnetica** [A] tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso è

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ , interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B

37

Riluttanza e permeanza

- Si definisce **riluttanza** [unità di misura henry⁻¹ = H⁻¹] del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione magnetica ψ_{AB} e il flusso di induzione magnetica Φ

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto **permeanza** [unità di misura henry, H]

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{\mathcal{R}_{AB}} = \frac{\Phi}{\psi_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La **riluttanza** e la **permeanza** non dipendono da $\mathbf{B}$ e da $\mathbf{H}$, ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del materiale

38

Legge di Hopkinson

- La tensione magnetica tra le sezioni terminali di un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{B}$ e il flusso magnetico attraverso il tubo sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi \quad \text{Legge di Hopkinson}$$

e quindi

$$\Phi = \mathcal{P}_{AB} \psi_{AB} \quad (\mathcal{P}_{AB} = 1 / \mathcal{R}_{AB})$$

39

Tubi di flusso chiusi

- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata, altrimenti $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ risulterebbero nulli
- In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = i_c$$

- Quindi la riluttanza del tubo di flusso chiuso può essere espressa come

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} H dl}{\int_S B dS} = \frac{i_c}{\Phi}$$

40

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico elementare

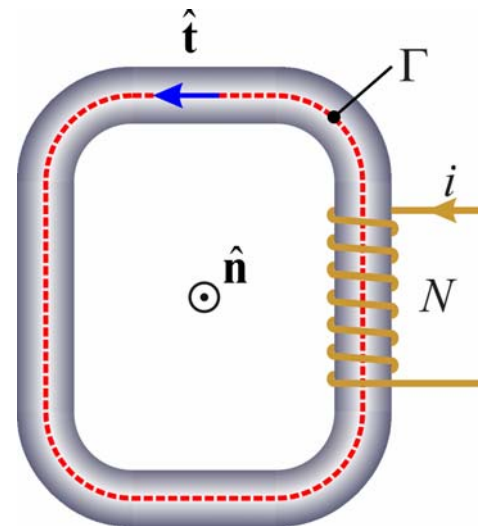
- ➔ Per un tubo di flusso chiuso la legge di Hopkinson assume la forma

$$\mathcal{R}\Phi = i_c$$

- In particolare, se il tubo di flusso è concatenato con un avvolgimento formato da N spire e percorso da una corrente i , si ha

$$\mathcal{R}\Phi = Ni$$

- La corrente concatenata i_c è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) (ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico)



41

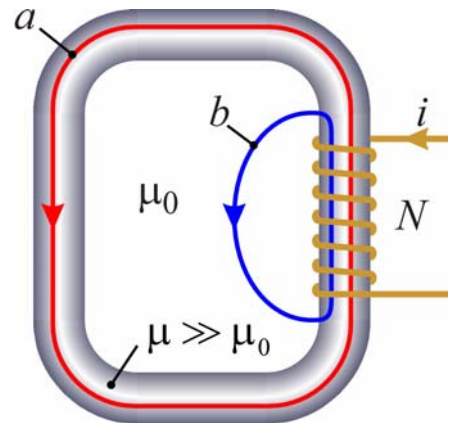
Circuiti magnetici

- Per il campo magnetico stazionario è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff per i circuiti elettrici
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un circuito elettrico "equivalente"
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di $\mathbf{B}$ è noto a priori
 - ◆ sistemi dotati di particolari simmetrie
 - ◆ circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti

42

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

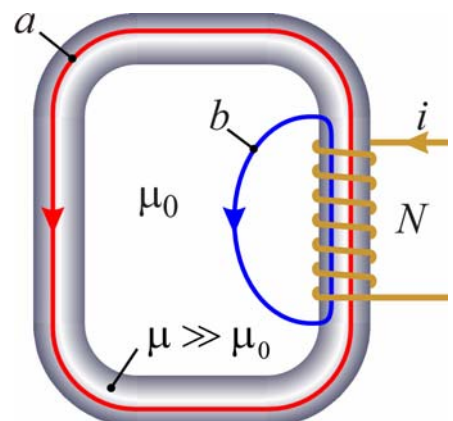
- Dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti
(Tutti i mezzi, vuoto compreso, sono magneticamente permeabili)
- Mentre le conducibilità dei buoni conduttori e quelle degli isolanti possono differire di 18-24 ordini di grandezza, le permeabilità magnetiche possono differire, al più, di 5-6 ordini di grandezza
- **Esempio:**
Circuito magnetico costituito da un materiale ad elevata permeabilità ($\mu \gg \mu_0$) circondato da un mezzo con permeabilità relativamente bassa ($\mu \cong \mu_0$)
- Sono possibili due tipi di linee di flusso
 - ◆ a) linee che si sviluppano interamente nel mezzo ad elevata permeabilità
 - ◆ b) linee che in parte si sviluppano nel mezzo a bassa permeabilità



43

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Si considerano due tubi di flusso filiformi aventi assi coincidenti con le linee *a* e *b*
- Dalla legge di Hopkinson si ottiene
$$\Phi_a = \frac{Ni}{\mathcal{R}_a} \quad \Phi_b = \frac{Ni}{\mathcal{R}_b}$$
- Dato che il tubo di flusso *b* comprende un tratto a bassa permeabilità risulta
$$\mathcal{R}_b \gg \mathcal{R}_a \quad \Rightarrow \quad \Phi_b \ll \Phi_a$$
- ➔ E' possibile trascurare il flusso dovuto a linee del tipo *b* e considerare l'anello di materiale ad elevata permeabilità come un tubo di flusso di **B**



44

Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

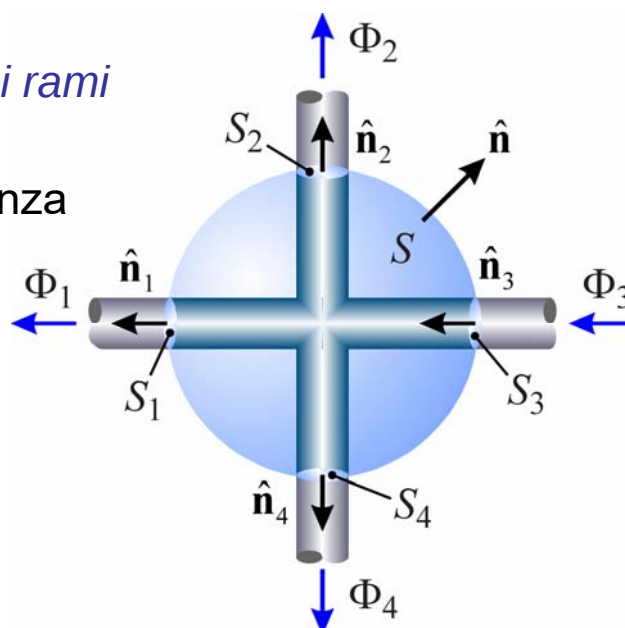
- La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla

➔ In particolare si ha che:

La somma algebrica dei flussi dei rami afferenti ad un nodo è nulla

- Questa legge è diretta conseguenza del fatto che $\mathbf{B}$ è solenoidale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sum_k \pm \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS = \sum_k \pm \Phi_k = 0$$



$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

45

Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

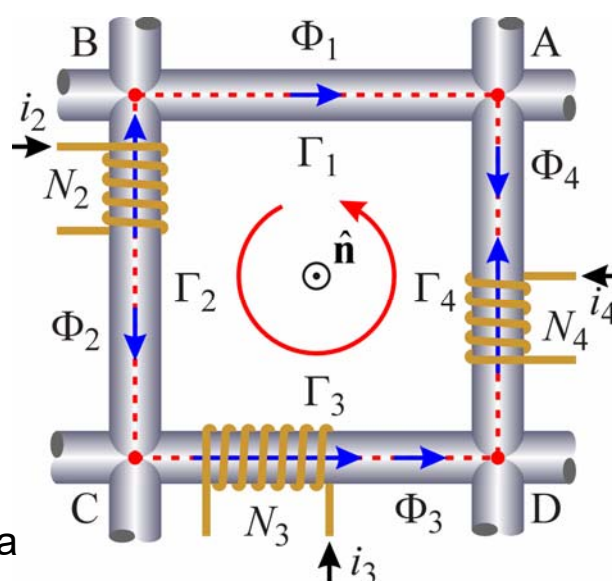
- La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa

- Questa legge si ottiene direttamente dalla legge di Ampere

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = i_C$$

- Se la forza magnetomotrice è prodotta da un insieme di avvolgimenti concatenati con la maglia

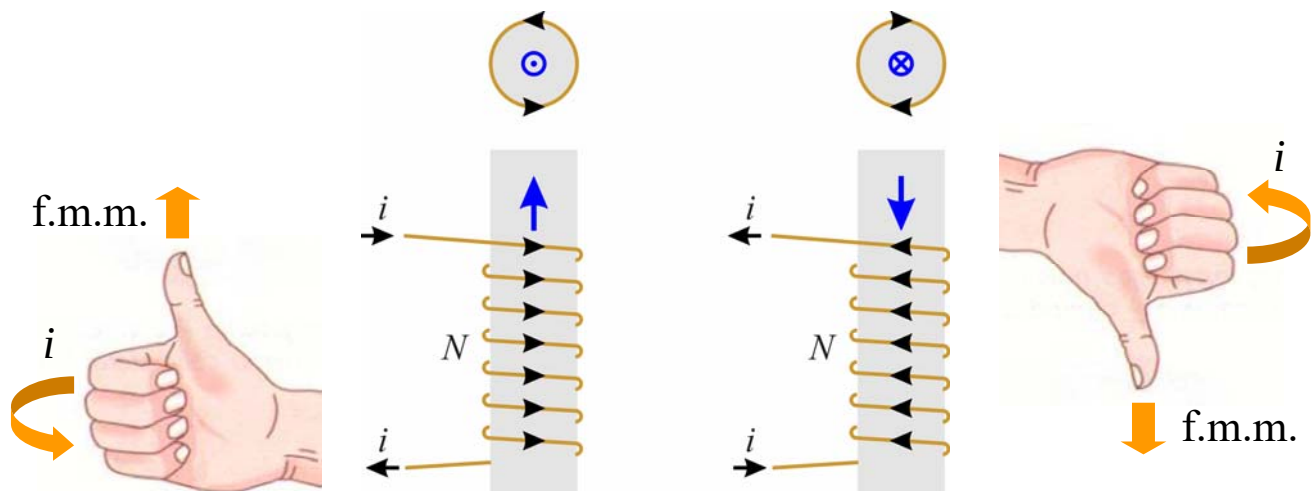
$$\sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$-\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4 = -N_2 i_2 + N_3 i_3 + N_4 i_4$$

46

Versi di riferimento delle f.m.m.



- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento orientati relativamente ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra
- A secondo membro dell'equazione di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, segno – se è discorde

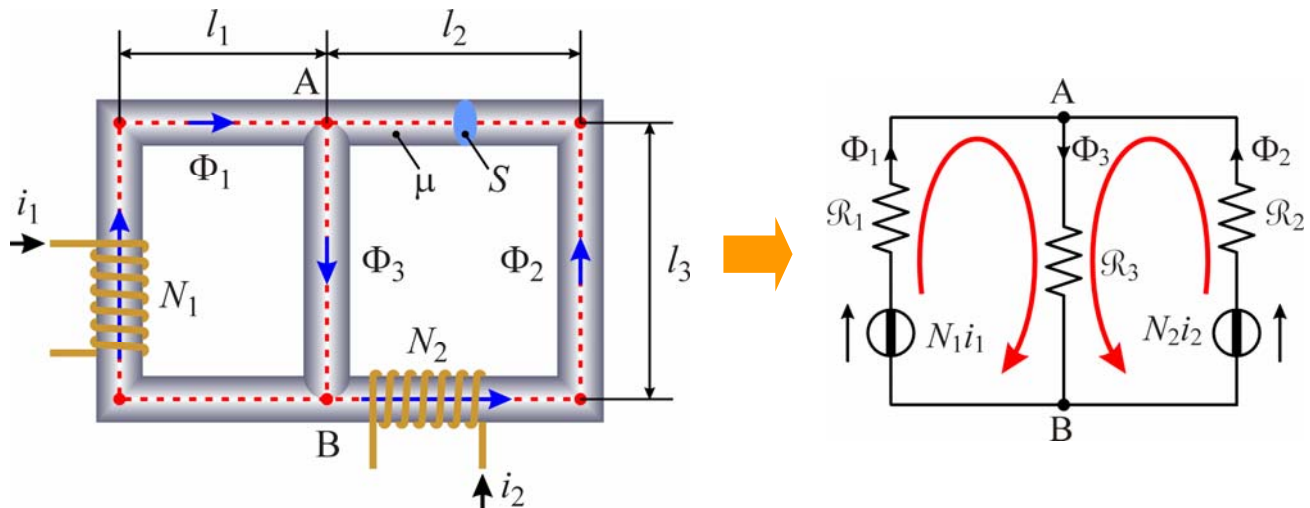
47

Analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
R	$\mathcal{R}$
i	Φ
v	ψ
(f.e.m.) e	(f.m.m.) Ni
$v_k = R_k i_k$	$\psi_k = \mathcal{R}_k \Phi_k$
$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_k \pm \Phi_k = 0$
$\sum_k \pm R i_k = \sum_k \pm e_k$	$\sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$

48

Esempio



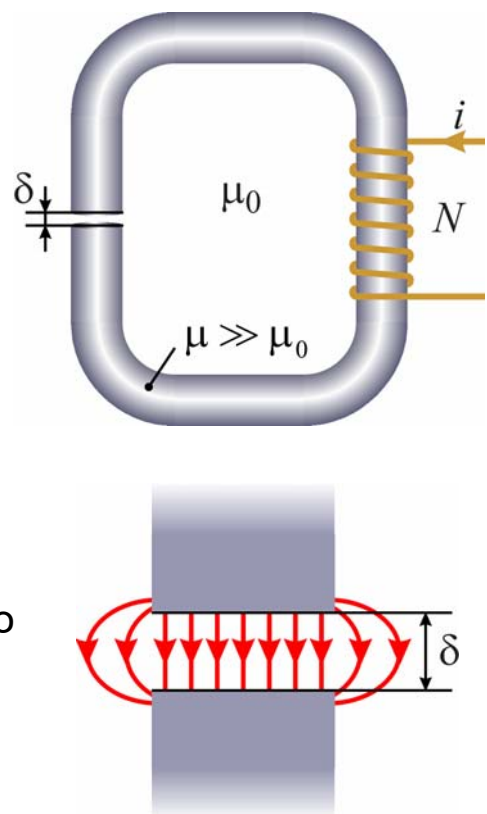
$$\mathcal{R}_1 = \frac{2l_1 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2l_2 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_1 i_1 \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$

49

Circuiti magnetici con traferri

- In alcuni casi, in un circuito magnetico si possono avere delle interruzioni del materiale ad elevata permeabilità (**traferri**)
- La presenza di traferri di piccolo spessore non altera in modo significativo l'andamento delle linee di flusso di $\mathbf{B}$ (si hanno degli *effetti di bordo*, spesso trascurabili)



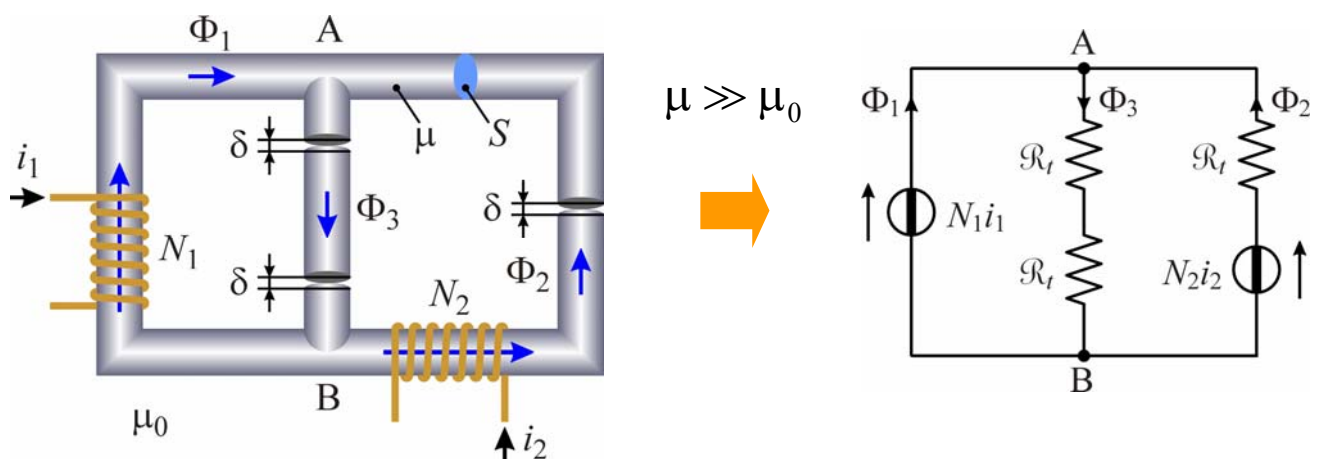
50

Circuiti magnetici con traferri

- Qualora sia necessario tenere conto degli effetti di bordo, si può valutare la riluttanza dei traferri assumendo un'area efficace $S' > S$ (S = sezione del nucleo in corrispondenza del traferro)
 - ♦ Un metodo empirico per definire l'area efficace consiste nell'aggiungere un bordo di larghezza pari allo spessore del traferro
- I traferri possono alterare notevolmente l'entità dei flussi magnetici, dato che le loro riluttanze possono essere molto elevate anche per valori modesti dello spessore δ
 - ➔ Spesso le riluttanze dei tratti di materiale ad elevata permeabilità risultano trascurabili rispetto alle riluttanze dei traferri
 - ➔ Nel circuito elettrico "equivalente" i tratti ad elevata permeabilità corrispondono a conduttori ideali e i traferri a corrispondono a resistori

51

Esempio



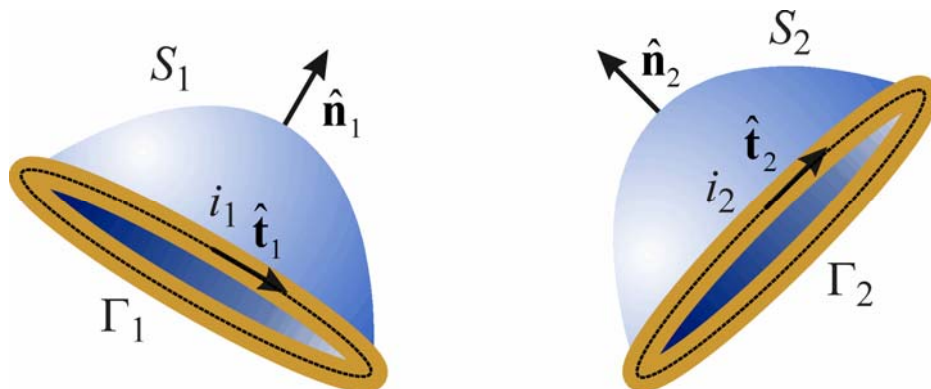
Traferri di uguale spessore δ

Riluttanza di un traferro:
$$\mathcal{R}_t = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

52

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Si considerano due circuiti elettrici Γ_1 e Γ_2 percorsi dalle correnti i_1 e i_2 e immersi in un mezzo lineare isotropo



- In questa ipotesi le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle correnti sono lineari
- I flussi di induzione magnetica concatenati con i due circuiti sono funzioni lineari delle correnti i_1 e i_2

53

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

- I coefficienti L_1 e L_2 sono detti **coefficienti di autoinduzione** o **(auto)induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti **coefficienti di mutua induzione** o **mutue induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- Si può dimostrare che risulta sempre verificata l'uguaglianza $M_{12} = M_{21} = M$ quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti

54

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente i_k , quando la corrente nell'altro circuito è nulla

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_1} \right|_{i_2=0} \qquad L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

- Il coefficiente di mutua induzione rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente nell'altro circuito valutato quando la corrente i_k è nulla

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

55

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le definizioni di coefficienti di auto e mutua induzione possono essere generalizzate al caso di N circuiti
- In questo caso risulta

$$\Phi_{c1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N$$

$$\Phi_{c2} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \dots + M_{2N} i_N$$

$\vdots$

$$\Phi_{cN} = M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \dots + L_N i_N$$

dove

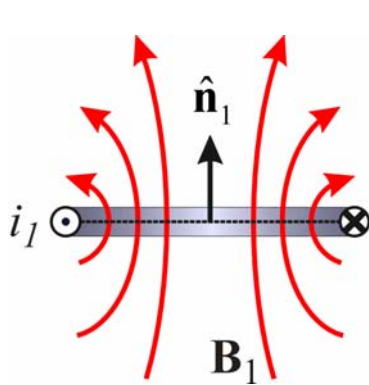
$$L_k = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_k} \right|_{i_h=0 \forall h \neq k} \qquad M_{kj} = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_j} \right|_{i_h=0 \forall h \neq j}$$

- Inoltre si ha

$$M_{hk} = M_{kh}$$

56

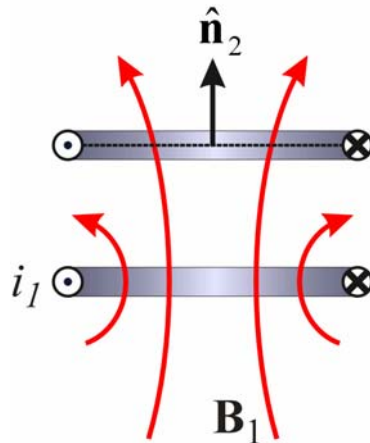
Segni dei coefficienti di auto e mutua induzione



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0$$

$$\Rightarrow L_1 > 0$$

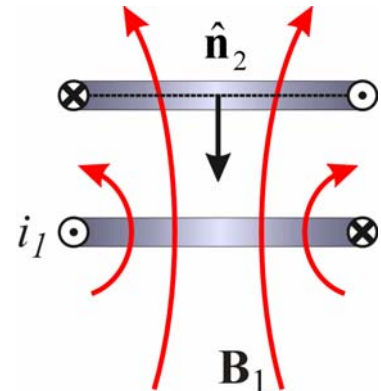
Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} > 0$$

$$\Rightarrow M > 0$$

Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} < 0$$

$$\Rightarrow M < 0$$

57

Esempio 1

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

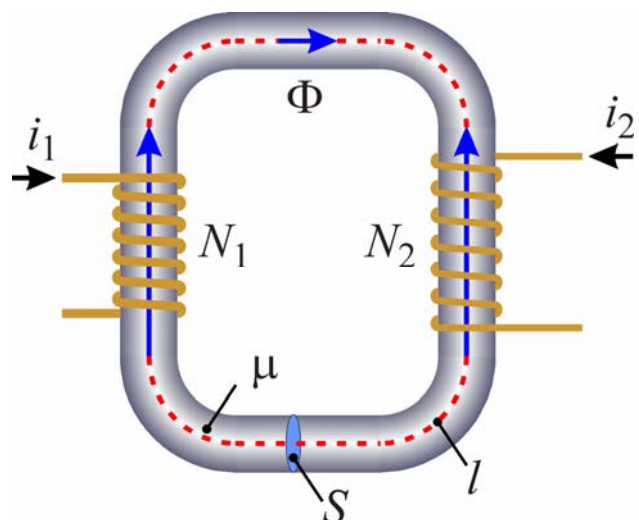
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- ➔ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



58

Esempio 2

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

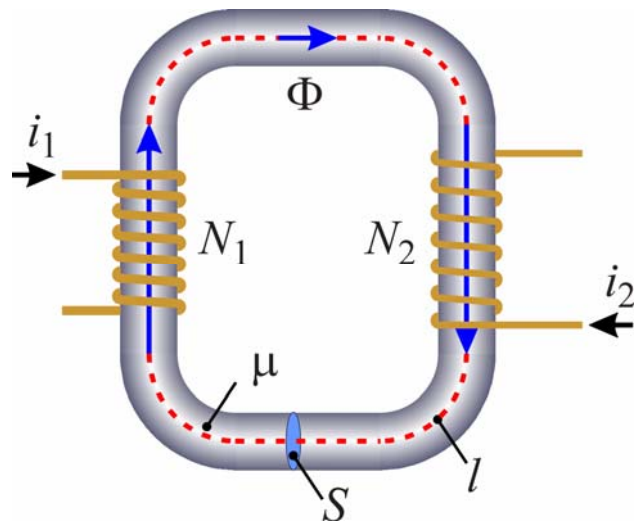
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- ➔ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



59

Nota

- Per un avvolgimento formato da N spire disposto su un ramo di un circuito magnetico il flusso concatenato Φ_c si ottiene moltiplicando il flusso Φ del ramo per il numero di spire

$$\Phi_c = \pm N \Phi$$

- Al flusso concatenato si attribuisce segno + quando il verso della corrente nell'avvolgimento e il verso del flusso sono orientati secondo la regola della mano destra
- Si attribuisce segno – in caso contrario

60

Conduttori in regime elettrostatico

- In condizioni statiche $\mathbf{J} = 0$, quindi deve risultare $\sigma \mathbf{E} = 0$
- ➔ Di conseguenza si ha
 - $\sigma \neq 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$
 - $\mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \sigma = 0$
- ➔ Il campo elettrico può essere diverso da 0 solo in un mezzo isolante ($\sigma = 0$)
- ➔ All'interno di un conduttore ($\sigma \neq 0$)
 - ◆ il campo elettrico è nullo
 - ◆ il potenziale è costante
- ➔ La superficie esterna di un conduttore è una superficie equipotenziale
 - ◆ la componente tangente del campo elettrico è nulla
 - ◆ il campo elettrico all'esterno del conduttore è normale alla superficie

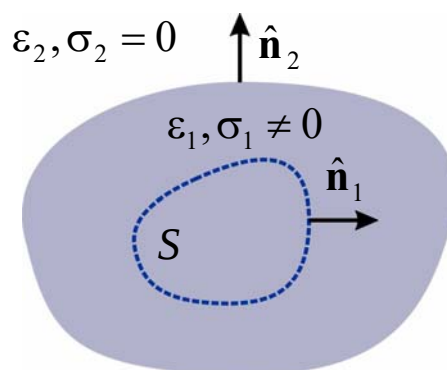
61

Conduttori in regime elettrostatico

- Per una generica superficie chiusa interamente contenuta all'interno del conduttore, dalla legge di Gauss si ottiene

$$Q = \varepsilon_1 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = 0$$

- ➔ La densità di carica all'interno del conduttore è nulla



62

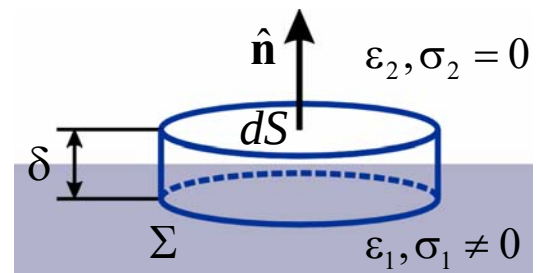
Conduttori in regime elettrostatico

- Si considera una superficie cilindrica infinitesima con asse ortogonale alla superficie del conduttore e con una base all'interno del conduttore e una all'esterno
- Si assume che la superficie laterale sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'area di base dS
- In presenza di campo elettrico esterno il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso la superficie è dato dal solo contributo della base esterna

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = EdS$$

- Per la legge di Gauss, sulla superficie del conduttore deve essere presente una distribuzione di carica con densità superficiale σ_c tale che

$$Q = \sigma_c dS = \epsilon_2 EdS \Rightarrow \sigma_c = \epsilon_2 E = D$$



63

Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

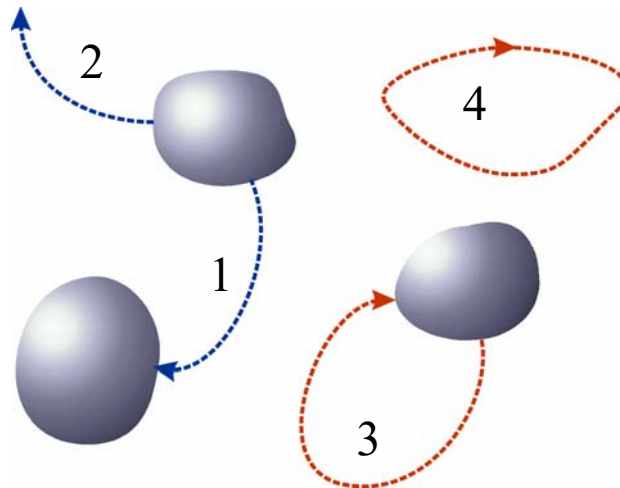
- Si considera un sistema costituito da conduttori carichi separati da un mezzo isolante (dielettrico)
- Si assume $\rho_C = 0$ all'esterno dei conduttori
- ➔ Nella regione esterna ai conduttori, per un generico tubo di flusso di $\mathbf{D}$ il flusso è indipendente dalla sezione
- ➔ Per un tronco di tubo di flusso delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di campo, la differenza di potenziale tra le superfici terminali e il flusso di $\mathbf{D}$ sono legati da una relazione del tipo

$$v_{AB} = K_{AB} \Phi$$

64

Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Si possono avere solo tubi di flusso di **D** che vanno
 - ♦ da un conduttore a un altro (1)
 - ♦ da un conduttore all'infinito (2)
- Non è possibile che un tubo di flusso
 - ♦ abbia entrambe le sezioni terminali sullo stesso conduttore (3)
 - ♦ si richiuda su se stesso (4)



65

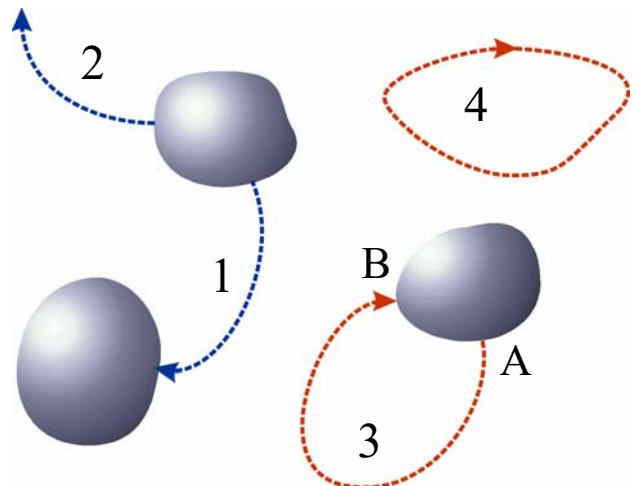
Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Dato che i conduttori sono equipotenziali, per un tubo di flusso del tipo (3) la tensione risulterebbe nulla
 - ♦ Quindi si annullerebbe il flusso di **D** e di conseguenza anche **D** dovrebbe essere nullo

$$K_{AB}\Phi = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0$$

- In modo analogo, dato che **E** è conservativo, anche per un tubo di flusso di tipo (4) si otterrebbe

$$K_{AB}\Phi = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0$$

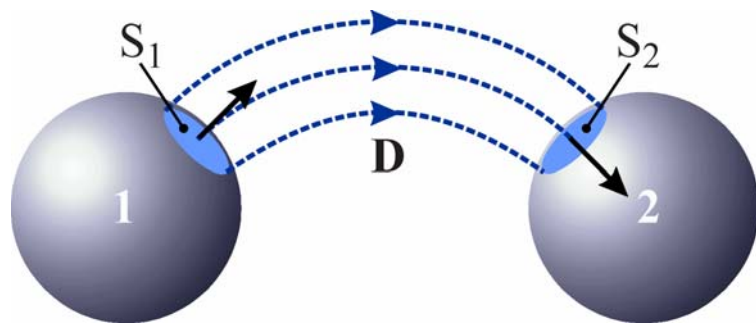


66

Condensatore elementare

- Si considerano due conduttori separati da un dielettrico lineare nel quale la densità di carica è nulla
- Si considera inoltre un tubo di flusso di $\mathbf{D}$ che ha origine sul conduttore 1 e termina sul conduttore 2
- Sulle superfici terminali S_1 e S_2 $\mathbf{D}$ è discontinuo, quindi devono essere presenti due distribuzioni superficiali di carica
- ➔ Si può dimostrare che le cariche sulle superfici S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_Q = - \underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$



67

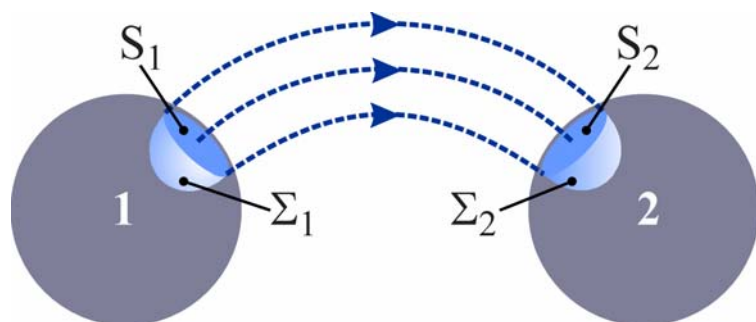
Condensatore elementare

- Si forma una superficie chiusa unendo alla superficie laterale del tubo di flusso e due superfici Σ_1 e Σ_2 interne ai conduttori
- Il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso questa superficie è nullo ($\mathbf{D}$ è nullo all'interno dei conduttori ed è tangente alla superficie laterale)

➔ Quindi risulta

$$\int_{S_1} \sigma_c dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = - \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = Q$$

- ➔ Il sistema formato dalle superfici S_1 e S_2 e dal tubo di flusso che le collega costituisce un **condensatore elementare**



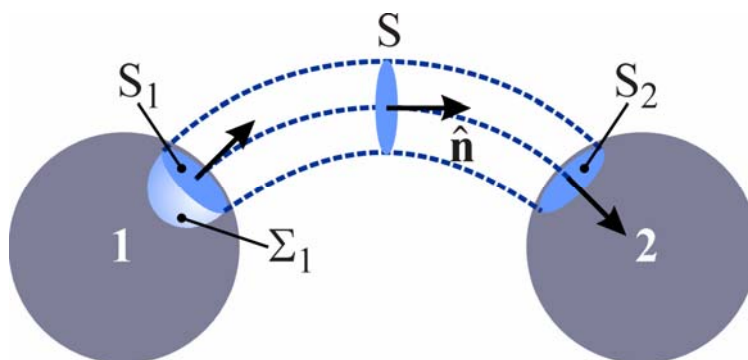
68

Flusso di $\mathbf{D}$ e carica

- All'esterno dei conduttori il flusso di $\mathbf{D}$ ha lo stesso valore attraverso ogni sezione trasversale S del tubo
- Si può verificare che, con i versi di riferimento indicati nella figura, questo valore coincide con la carica totale su S_1

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = Q$$

- Per dimostrarlo è sufficiente applicare la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1 , S e dal tratto della superficie laterale del tubo compreso tra S_1 e S



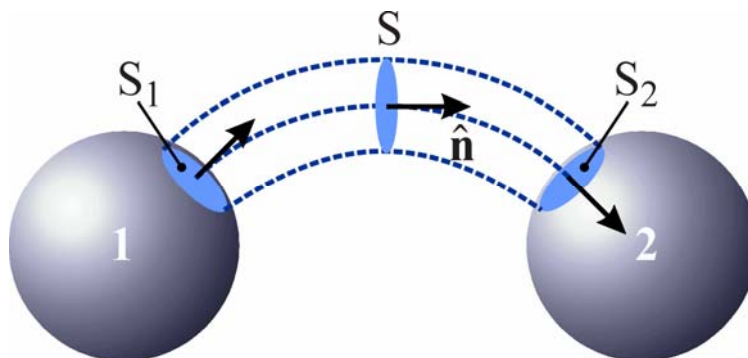
69

Tensione

- Le superfici S_1 e S_2 sono equipotenziali (e quindi ortogonali alle linee di campo di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{D}$)
- La tensione tra due sezioni terminali del tubo di flusso può essere espressa come

$$v_{12} = V(P_1) - V(P_2) = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- dove P_1 e P_2 sono due punti arbitrari di S_1 e S_2 e Γ è una linea arbitraria che unisce i due punti



70

Capacità

- Si definisce **capacità** C (unità di misura farad, F) del tubo di flusso il rapporto tra il valore assoluto della carica sulle sezioni terminali e la differenza di potenziale tra i conduttori

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La capacità dipende solo dalla geometria del sistema e dalle proprietà del mezzo interposto tra i conduttori*
- La definizione di capacità di un tubo di flusso di $\mathbf{D}$ è analoga alla definizione di conduttanza di un tubo di flusso di $\mathbf{J}$

71

Condensatore

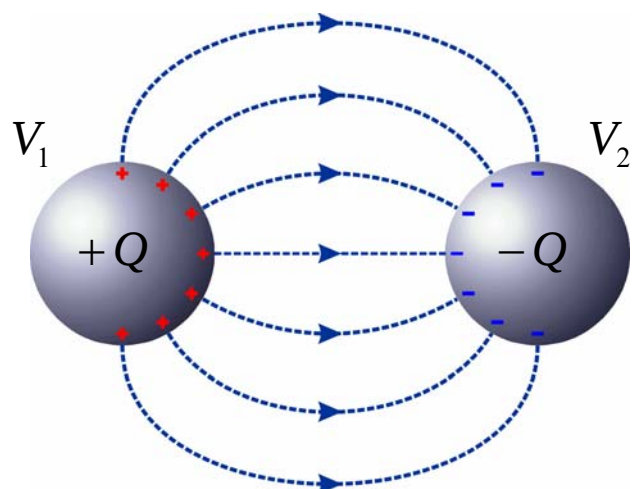
- Condensatore:** sistema formato da due conduttori (armature) disposti in modo tale che tutte le linee di campo uscenti da un conduttore terminino sull'altro
- ➔ Le cariche totali sulle superfici dei conduttori sono uguali e opposte
- Si definisce **capacità** del condensatore il rapporto

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Q = valore assoluto della carica

V_1 = potenziale del conduttore
con carica $+Q$

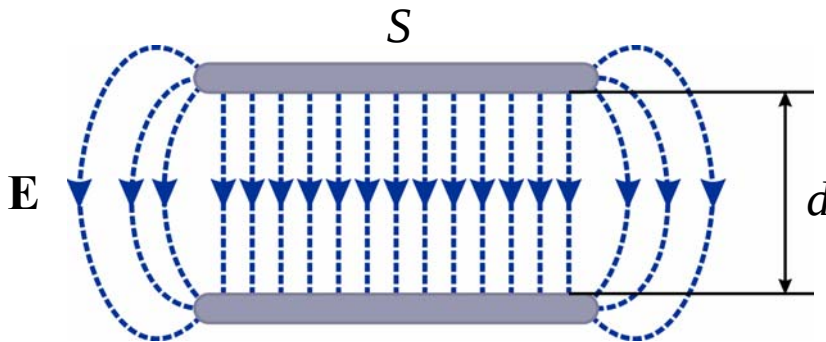
V_2 = potenziale del conduttore
con carica $-Q$



72

Esempio - condensatore a facce piane parallele

- Armature piane parallele di area S
- Distanza tra le armature d piccola rispetto alle dimensioni lineari delle armature
- Se si trascurano gli *effetti di bordo*, si può assumere che il campo elettrico tra le armature sia uniforme



$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

73

Conduttori in condizioni stazionarie

- In condizioni stazionarie, all'interno di un conduttore i vettori $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ soddisfano le equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

- Se il conduttore è omogeneo si ottiene

$$\rho_c = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon \mathbf{J}}{\sigma} \right) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- ➔ All'interno di un conduttore omogeneo la densità volumetrica di carica è sempre nulla
- A differenza del caso elettrostatico, in presenza di correnti stazionarie questa proprietà vale solo se il mezzo è omogeneo

74

Campo elettrico all'esterno dei conduttori

- La superficie di un conduttore percorso da corrente non è equipotenziale
- ➔ Deve essere presente un campo elettrico anche all'esterno di un conduttore
 - ◆ Infatti l'integrale di linea del campo elettrico lungo una linea esterna al conduttore che collega due punti della superficie è uguale alla differenza di potenziale tra i due punti, quindi il campo elettrico all'esterno non può essere nullo
- ➔ A differenza di quanto avviene nel caso elettrostatico, esistono linee di campo che collegano punti appartenenti allo stesso conduttore
- ➔ Il campo elettrico all'esterno del conduttore in generale non è ortogonale alla superficie del conduttore

75

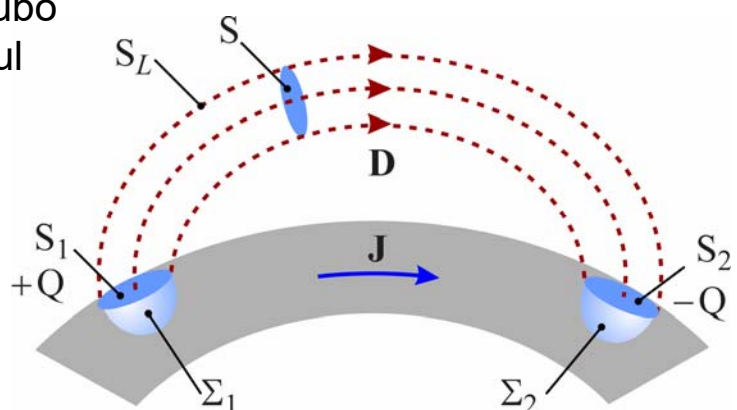
Condensatore elementare

- Si considera un conduttore omogeneo percorso da corrente circondato da un dielettrico con permittività ε
- Si assume che all'esterno del conduttore sia $\rho_c = 0$
- Sulla superficie del conduttore è presente una distribuzione superficiale di carica con densità

$$\sigma_c = \varepsilon E_n = D_n \quad E_n, D_n = \text{componenti di } \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{D} \text{ ortogonali alla superficie}$$

- Sulle superfici terminali di un tubo di flusso che inizia e termina sul conduttore sono presenti due cariche uguali e opposte

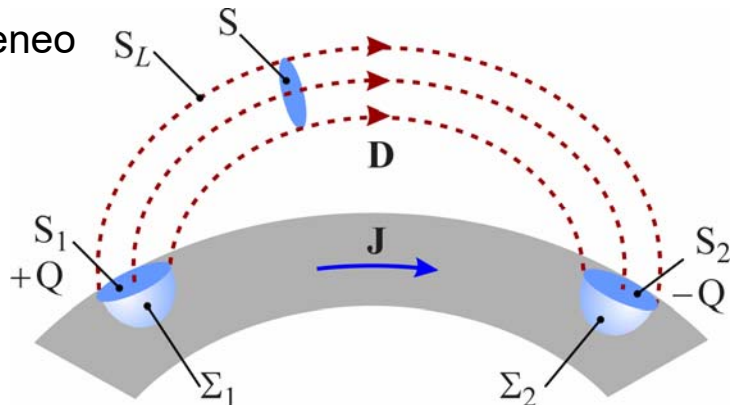
$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_Q = - \underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$



76

Condensatore elementare

- Per dimostrare le affermazioni precedenti, in primo luogo si osserva che è nullo il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso le superfici Σ_1 e Σ_2 interne al conduttore
 - $\mathbf{J}$ è solenoidale $\Rightarrow$ è nullo il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso le superfici chiuse formate da Σ_1 e S_1 e da Σ_2 e S_2
 - Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso S_1 e S_2 è nullo perché il conduttore costituisce un tubo di flusso di $\mathbf{J}$
 - $\Rightarrow$ Quindi devono annullarsi anche i flussi attraverso Σ_1 e Σ_2
- Il conduttore è lineare e omogeneo
 - $\Rightarrow \mathbf{D}$ è proporzionale a $\mathbf{J}$
- $\Rightarrow$ Quindi anche il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso Σ_1 e Σ_2 è nullo



77

Condensatore elementare

- Applicando la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1 , S e dal tratto della superficie laterale S_L compreso tra S_1 ed S si ottiene

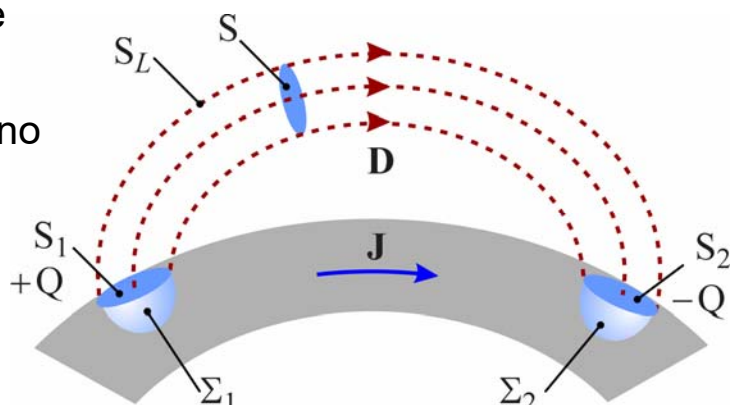
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q = \int_{S_1} \sigma_c dS_1$$

- $\Rightarrow$ Quindi la densità di carica sulla superficie del conduttore è

$$\sigma_c = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

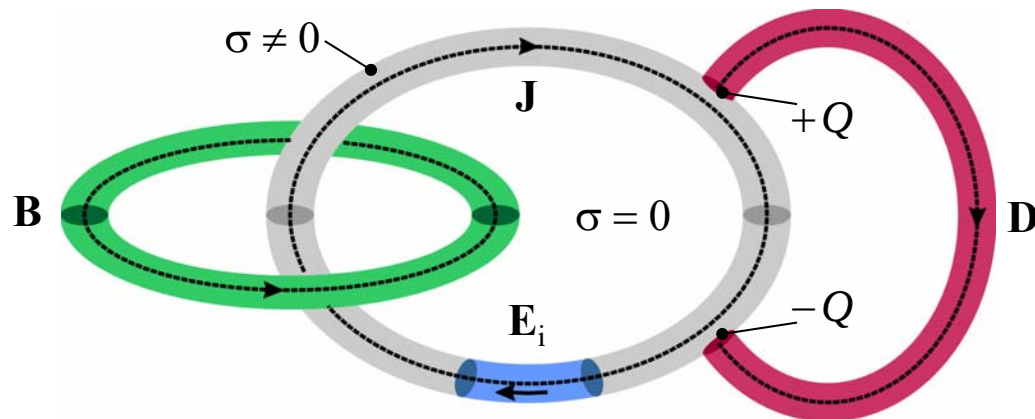
- Il flusso attraverso la superficie formata da S_L , Σ_1 e Σ_2 è nullo
- $\Rightarrow$ Quindi le cariche su S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\int_{S_1} \sigma_c dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = 0$$



78

Elettromagnetismo stazionario - riepilogo



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

**Legge di
Hopkinson**

$$\mathcal{R}\Phi = i_C$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

**Legge
di Ohm**

$$Ri = e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\frac{Q}{C} = V$$

**Equazione del
condensatore**

79

Elettromagnetismo stazionario - riepilogo

● Resistenza

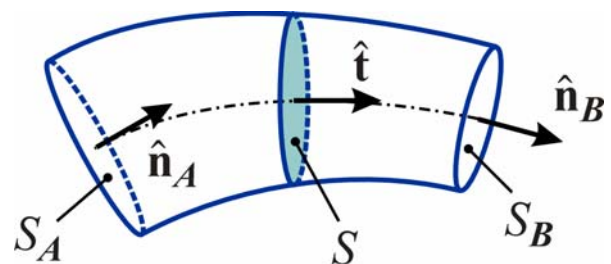
$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S J dS} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x)A(x)}$$

● Riluttanza

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} H dl}{\int_S B dS} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x)A(x)}$$

● Capacità

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{V_{AB}}{Q} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S D dS} = \int_0^l \frac{dx}{\epsilon(x)A(x)}$$



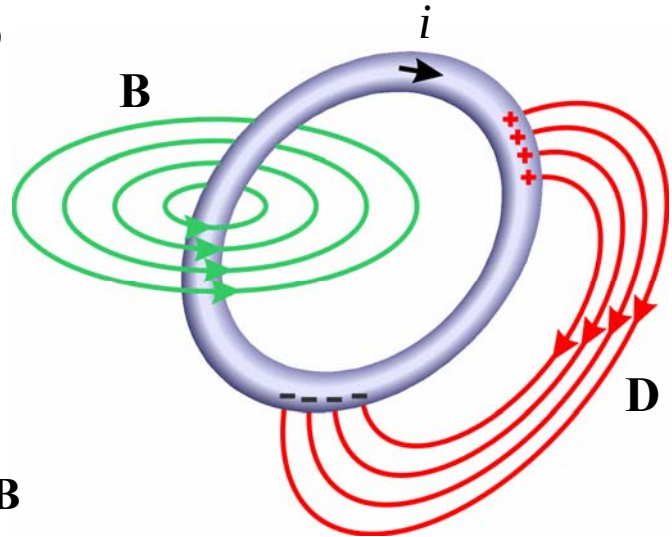
Le ultime uguaglianze
valgono nel caso di
tubi di flusso "filiformi"

80

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

- Sulla superficie di un conduttore percorso da corrente è presente una distribuzione superficiale di carica
- ➔ Alla superficie del conduttore si appoggiano dei tubi di flusso di $\mathbf{D}$ sulle cui sezioni terminali si localizzano cariche uguali e opposte
- ➔ Questi tubi di flusso costituiscono dei condensatori elementari

- La corrente nel circuito genera un campo magnetico
- ➔ Un circuito elettrico è sempre concatenato con tubi di flusso di $\mathbf{B}$

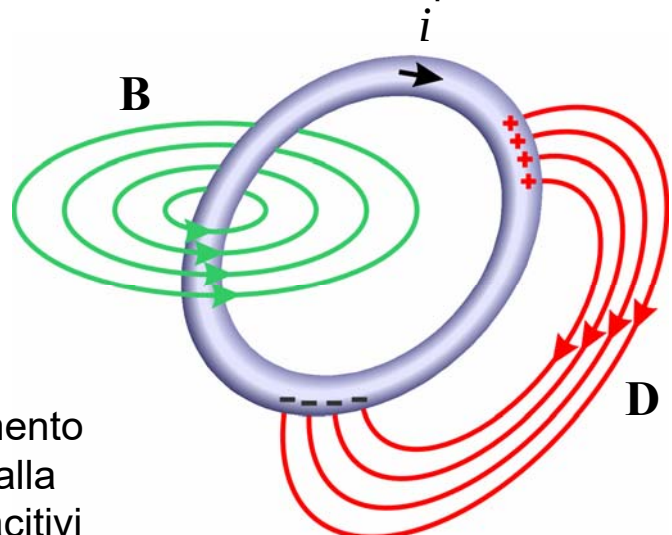


81

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

- In **condizioni stazionarie** è possibile studiare il campo di corrente prescindendo dalla presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico all'esterno del conduttore
- Noti il potenziale e la corrente nel conduttore si possono determinare il campo magnetico e la distribuzione della carica sulla superficie

- In **condizioni non stazionarie** le equazioni che governano il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno del conduttore sono accoppiate con le equazioni del campo di corrente
- ➔ In queste condizioni il comportamento del circuito è influenzato anche dalla presenza di effetti induttivi e capacitivi



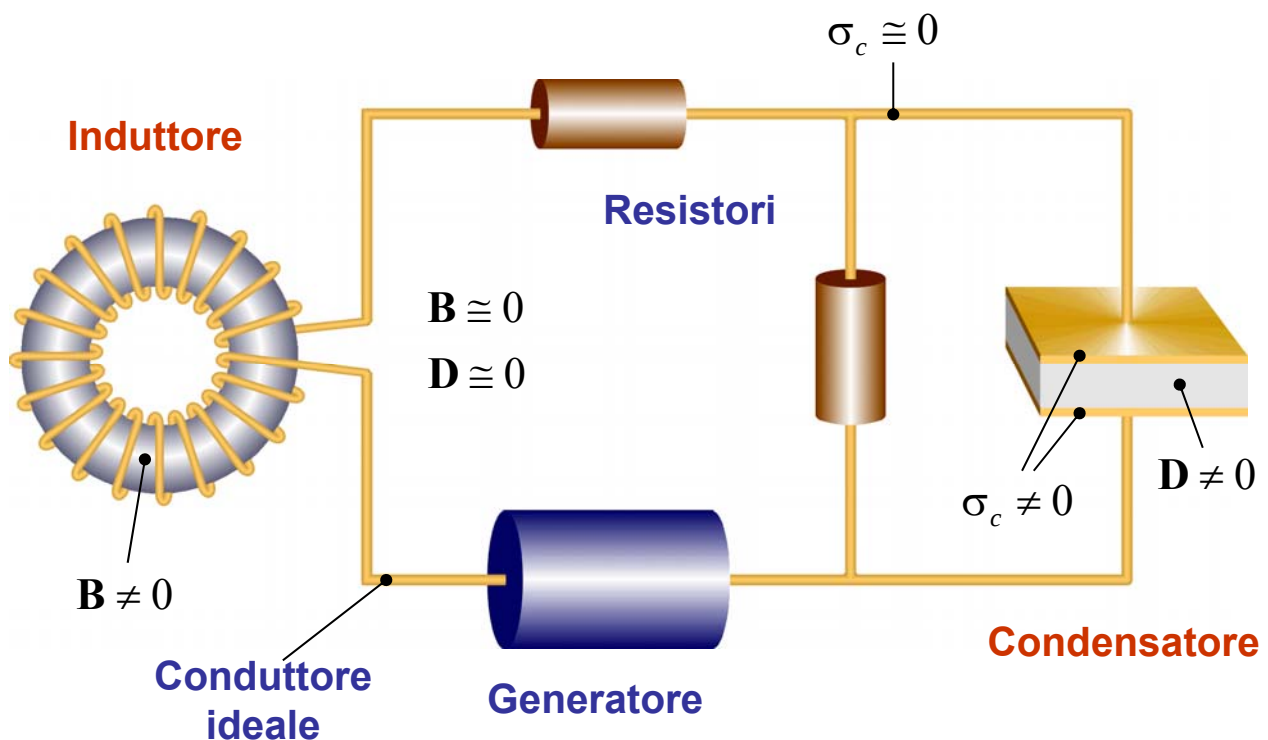
82

Induttori e condensatori

- Normalmente i circuiti elettrici sono realizzati in modo che gli effetti induttivi e capacitivi siano significativi solo all'interno di determinate regioni che corrispondono a componenti detti **induttori** e **condensatori**
 - ➔ Proprietà che a rigore dovrebbero essere associate all'intero circuito possono essere attribuite a singoli componenti
- All'interno di un induttore i valori di **B** sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
 - ➔ Il flusso di **B** concatenato con il circuito è praticamente determinato dai soli contributi dei flussi negli induttori
- All'interno di un condensatore i valori di **D** sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
 - ➔ La densità di carica sulla superficie del conduttore assume valori significativi solo sulle armature dei condensatori

83

Esempio



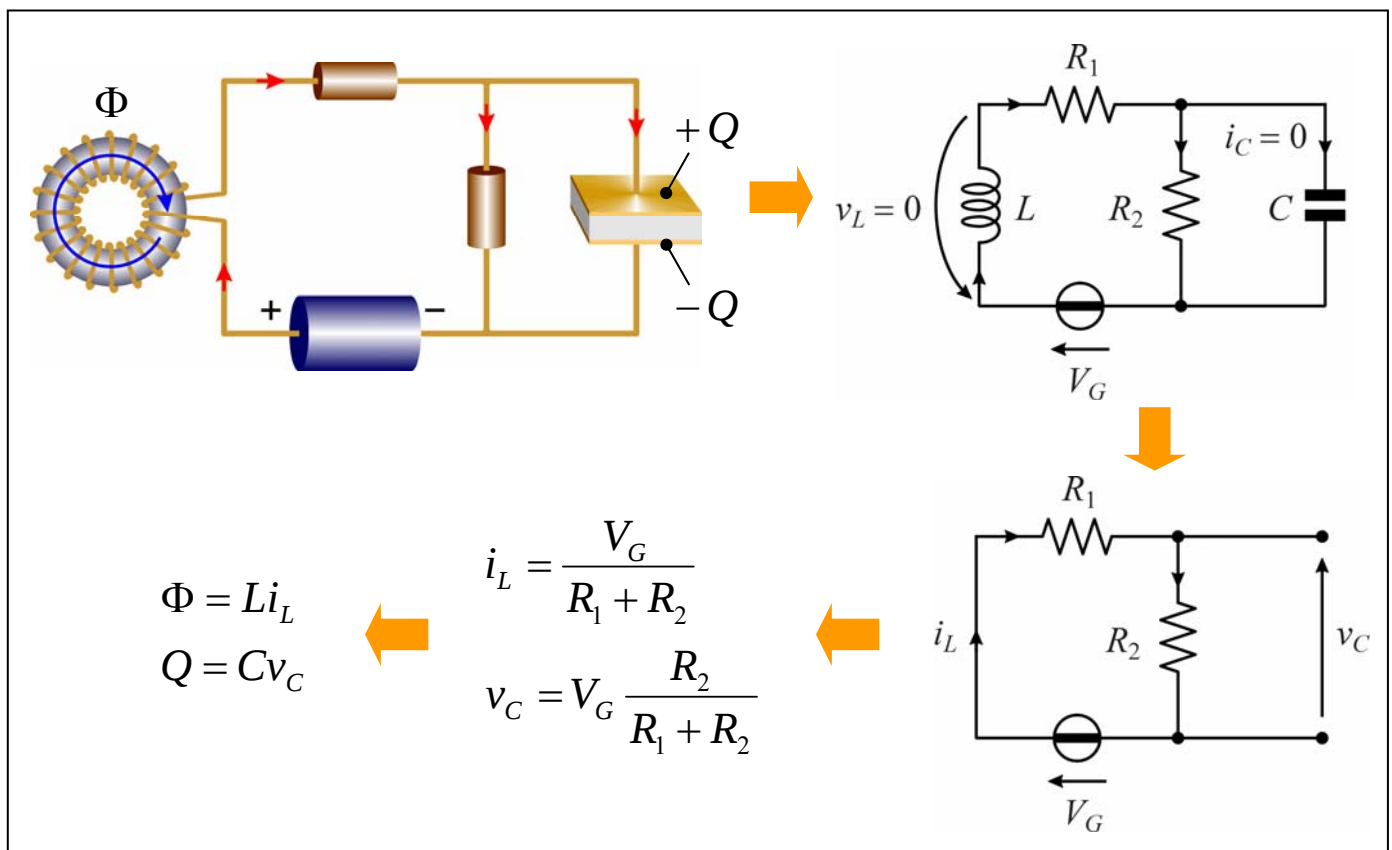
84

Induttori e condensatori in regime stazionario

- Se il conduttore può essere considerato ideale, la tensione dell'induttore è nulla
 - ➔ In regime stazionario un induttore equivale a un cortocircuito
- Dato che le armature del condensatore sono separate da un dielettrico, la corrente nel condensatore è nulla
 - ➔ In regime stazionario un condensatore equivale a un circuito aperto
- ➔ In regime stazionario è possibile determinare le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori studiando circuiti formati solo da componenti resistivi
 - ◆ Per gli induttori, dai valori delle correnti si possono ricavare i flussi di induzione magnetica
 - ◆ Per i condensatori, dai valori delle tensioni si possono ricavare le cariche

85

Esempio



86