

Elettromagnetismo quasi stazionario

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 6-5-2018)

Elettromagnetismo quasi stazionario

- Equazioni fondamentali

Condizioni stazionarie

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Condizioni non stazionarie

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Equazioni di legame materiale per un mezzo lineare isotropo

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

Elettromagnetismo quasi stazionario

- Se le variazioni temporali delle grandezze elettromagnetiche sono *sufficientemente lente* è possibile che, in determinate regioni dello spazio, alcune delle derivate rispetto al tempo che compaiono nelle equazioni fondamentali siano trascurabili
- Quando si verifica questa condizione è possibile descrivere, in modo approssimato, l'evoluzione nel tempo di un sistema elettromagnetico facendo uso, istante per istante, di risultati che a rigore valgono solo in condizioni stazionarie
- ➔ In questo caso si dice che il sistema è in condizioni **quasi stazionarie**

3

Elettromagnetismo quasi stazionario

- Per precisare in cosa consiste l'approssimazione quasi stazionaria è necessario
 - ◆ specificare cosa si intende per variazioni “sufficientemente lente”
 - ◆ indicare in quali casi le derivate rispetto al tempo possono essere trascurate e quando ciò non è possibile
- Per ottenere indicazioni riguardo ai punti precedenti, è utile confrontare le relazioni che legano il campo elettromagnetico alle sorgenti (cioè alle cariche e alle correnti) in condizioni stazionarie e non stazionarie

4

Potenziale elettrico in condizioni stazionarie

- Si considera il campo elettrico generato da una distribuzione stazionaria di cariche con densità volumetrica ρ_c all'interno di un mezzo lineare isotropo omogeneo
- In condizioni stazionarie il campo elettrico è conservativo, quindi è possibile esprimerlo come gradiente di un potenziale V
- Tenendo conto della legge di Gauss e dell'equazione di legame materiale tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ si ottiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla V) = \rho_c \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon}$$

- ➔ Il potenziale può essere determinato risolvendo l'**equazione di Poisson**

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon}$$

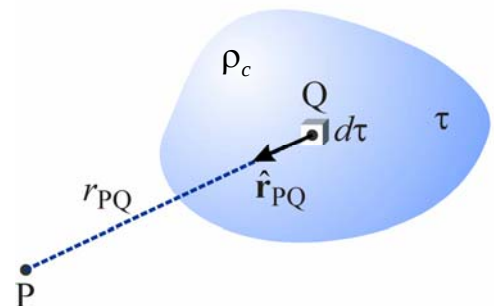
5

Potenziale elettrico in condizioni stazionarie

- Si può dimostrare che, assumendo che il potenziale si annulli all'infinito, la soluzione dell'equazione di Poisson è

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(Q)}{r_{PQ}} d\tau$$

dove τ indica la regione in cui $\rho_c \neq 0$ e l'integrale è valutato facendo variare Q all'interno del volume τ



- In pratica il potenziale nel punto P è costituito dalla “somma” di contributi del tipo

$$dV(P) = \frac{\rho_c(Q)d\tau}{4\pi\varepsilon r_{PQ}}$$

ciascuno dei quali può essere interpretato come il potenziale di una carica puntiforme $\rho_c(Q)d\tau$ posta nel punto Q

6

Potenziale vettore magnetico in condizioni stazionarie

- Si considera il campo magnetico generato da una distribuzione stazionaria di correnti con densità $\mathbf{J}$ all'interno di un mezzo lineare isotropo omogeneo
- Il vettore induzione magnetica è solenoidale
 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- ➔ E' possibile esprimere $\mathbf{B}$ come rotore di un vettore $\mathbf{A}$ detto **potenziale vettore magnetico** (unità di misura T·m)
 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
- La condizione precedente non definisce $\mathbf{A}$ in modo univoco: infatti se si considera un vettore $\mathbf{A}'$ definito come
 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi$ (φ = generica funzione scalare)
risulta $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \varphi}_{=0} = \nabla \times \mathbf{A}$

7

Potenziale vettore magnetico in condizioni stazionarie

- Si può dimostrare che un campo vettoriale è univocamente determinato se si assegnano in ogni punto i valori del suo rotore e della sua divergenza
 - ➔ Per definire univocamente $\mathbf{A}$, si devono assegnare anche delle condizioni sulla sua divergenza
- Nel caso del campo magnetico stazionario, per semplificare le equazioni, conviene imporre la condizione
 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (**scelta di Coulomb**)
- ➔ In queste condizioni si ottiene:

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ➔ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ➔
 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ➔ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ ➔
 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}_{=0} = \mu \mathbf{J}$$

8

Determinazione del potenziale magnetico

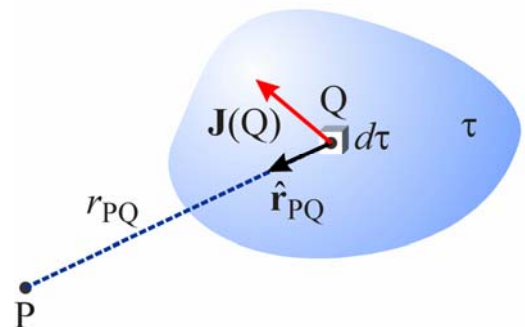
- ➔ Il potenziale vettore magnetico soddisfa l'equazione di Poisson vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

- Si può dimostrare che la soluzione di questa equazione ha una forma analoga a quella ottenuta per il potenziale scalare elettrico

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q})}{r_{PQ}} d\tau$$

dove τ indica la regione in cui $\mathbf{J} \neq 0$ e l'integrale è valutato facendo variare $\mathbf{Q}$ all'interno del volume τ



9

Potenziale vettore magnetico in condizioni non stazionarie

- Si considera il campo elettromagnetico generato da una distribuzione di cariche con densità ρ_c e da una distribuzione di correnti con densità $\mathbf{J}$ all'interno di un mezzo lineare isotropo omogeneo
- Come nel caso stazionario, per determinare il campo è conveniente passare attraverso la determinazione dei potenziali
- Anche in condizioni non stazionarie $\mathbf{B}$ è solenoidale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- ➔ È ancora possibile porre

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Per il momento non si pongono condizioni sulla divergenza
- Questo grado di libertà verrà utilizzato in seguito per semplificare le equazioni

10

Potenziale scalare elettrico in condizioni non stazionarie

- Dalla legge di Faraday si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Si può esprimere il vettore $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ come gradiente di un potenziale scalare V

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

- Il campo elettrico non stazionario può essere espresso come somma di un campo conservativo $\mathbf{E}_c$ e uno non conservativo $\mathbf{E}_{nc}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{nc}$$

11

Equazioni delle onde

- In un mezzo lineare isotropo omogeneo la legge di Ampere-Maxwell può essere posta nella forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Si inseriscono le espressioni di $\mathbf{B}$ e di $\mathbf{E}$ in funzione dei potenziali $\mathbf{A}$ e V

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$



$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \frac{\partial \nabla V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) = -\mu \mathbf{J}$$

12

Equazioni delle onde

- Per definire in modo univoco il potenziale vettore si deve ancora assegnare il valore della sua divergenza
- In questo caso conviene imporre la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{Scelta di Lorentz}$$

- In questo modo si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t})}_{=0} = -\mu\mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$

- ➔ *Il potenziale vettore magnetico soddisfa un'equazione delle onde non omogenea*

13

Equazioni delle onde

- In un mezzo lineare isotropo omogeneo la legge di Gauss può essere posta nella forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon}$$

- Si inserisce nell'equazione l'espressione di $\mathbf{E}$ in funzione dei potenziali $\mathbf{A}$ e V , quindi, tenendo conto della scelta di Lorentz, si ottiene

$$\nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_c}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$

- ➔ *Anche il potenziale scalare elettrico soddisfa un'equazione delle onde non omogenea*

14

Determinazione dei potenziali

- Si può dimostrare che le soluzioni delle equazioni delle onde sono

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

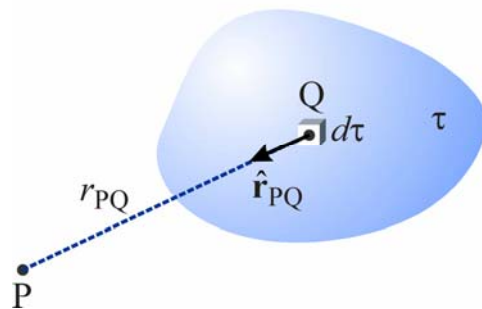
$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

- La costante c rappresenta la **velocità della luce** nel mezzo in cui ha sede il campo elettromagnetico

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- In particolare nel vuoto si ha

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$$

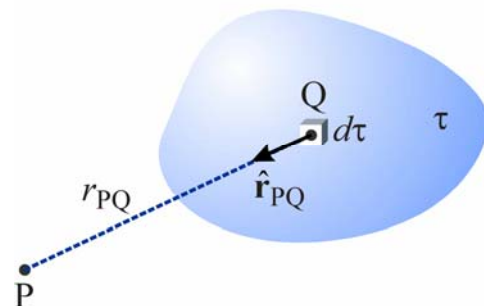


15

Potenziali ritardati

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$



- $\mathbf{A}$ e V sono costituiti dalla somma di infiniti contributi ciascuno dei quali rappresenta un'onda sferica generata in un punto Q che si propaga con velocità c
- ➔ L'effetto dovuto ad una densità di corrente o di carica in un punto Q viene avvertito nel punto P con un ritardo proporzionale alla distanza tra i punti P e Q
- ➔ Il campo elettromagnetico nel punto P all'istante t è costituito da una combinazione di campi prodotti dalle sorgenti in istanti precedenti, dipendenti dalla distanza da P

16

Confronto con il caso stazionario

Condizioni non stazionarie

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c)}{r_{PQ}} d\tau$$

Condizioni stazionarie

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\epsilon}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{P}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q})}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q})}{r_{PQ}} d\tau$$

17

Approssimazione quasi stazionaria

- Se è possibile trascurare i ritardi di propagazione, cioè se si può ritenere

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c) \cong \mathbf{J}(\mathbf{Q}, t) \quad \rho_c(\mathbf{Q}, t - r_{PQ}/c) \cong \rho_c(\mathbf{Q}, t)$$

per ogni P e per ogni Q, è possibile approssimare, istante per istante, il campo non stazionario con il campo stazionario che produrrebbero delle distribuzioni di cariche e di correnti costanti con valori pari ai valori istantanei

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}, t) \cong \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{Q}, t)}{r_{PQ}} d\tau \quad V(\mathbf{P}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(\mathbf{Q}, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

- In questo caso si parla di **condizioni quasi stazionarie**

18

Approssimazione quasi stazionaria

- L'approssimazione quasi stazionaria vale se in un intervallo di tempo pari al massimo ritardo di propagazione che si può avere all'interno del sistema le grandezze elettromagnetiche si possono ritenere praticamente costanti
- ➔ Per potere definire in modo più preciso i limiti di validità occorre fare delle ipotesi sulla legge di variazione nel tempo delle grandezze elettromagnetiche

19

Approssimazione quasi stazionaria

- Si considera il caso in cui le grandezze elettromagnetiche variano nel tempo con legge sinusoidale e quindi si ha

$$\rho_c(Q, t) = \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)]$$

$$\mathbf{J}(Q, t) = \mathbf{J}_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_J(Q)]$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ω = pulsazione
 f = frequenza
 T = periodo

- Variazioni di tipo più generale possono essere espresse mediante sovrapposizione di funzioni sinusoidali (**serie o integrali di Fourier**)
- ➔ Le considerazioni relative al caso sinusoidale possono essere estese a situazioni più generali riferendole alla massima frequenza che occorre considerare

20

Approssimazione quasi stazionaria

- Se ρ_c varia con legge sinusoidale si ha

$$\begin{aligned}\rho_c(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}) &= \rho_M(Q) \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_{PQ}}{c}\right) + \varphi_\rho(Q)\right] = \\ &= \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \cos\left(\frac{\omega r_{PQ}}{c}\right) + \rho_M(Q) \sin[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \sin\left(\frac{\omega r_{PQ}}{c}\right) = \\ &= \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \cos\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) + \rho_M(Q) \sin[\omega t + \varphi_\rho(Q)] \sin\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right)\end{aligned}$$

- T indica il periodo e t_D il tempo di ritardo dal punto Q al punto P

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad t_D = \frac{r_{PQ}}{c}$$

- Un'espressione analoga vale per $\mathbf{J}$

21

Approssimazione quasi stazionaria

- Se in tutti i punti del sistema vale la condizione

$$T \gg t_D = \frac{r_{PQ}}{c} \quad \forall P \forall Q$$

risulta

$$\begin{aligned}\cos\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) &\cong 1 \\ \sin\left(2\pi \frac{t_D}{T}\right) &\cong 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\rho_c(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}) &\cong \rho_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_\rho(Q)] = \rho_c(Q, t) \\ \mathbf{J}(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c}) &\cong \mathbf{J}_M(Q) \cos[\omega t + \varphi_J(Q)] = \mathbf{J}(Q, t)\end{aligned}$$

- Quindi si ha

$$\mathbf{A}(P, t) \cong \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

$$V(P, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_c(Q, t)}{r_{PQ}} d\tau$$

In ogni istante t il campo elettromagnetico coincide con il campo stazionario generato da distribuzioni di carica e di corrente costanti con densità $\mathbf{J}(Q, t)$ e $\rho_c(Q, t)$

22

Limiti di validità

- Se la massima distanza tra due punti del sistema è $d_{\max}$, il massimo ritardo di propagazione è

$$t_{D\max} = \frac{d_{\max}}{c}$$

- ➔ L'approssimazione quasi stazionaria è valida se, alla massima frequenza che interessa considerare, il periodo della variazione delle grandezze elettromagnetiche è molto grande rispetto al massimo ritardo di propagazione

$$T \gg t_{D\max}$$

- La condizione può essere posta nella forma

$$d_{\max} \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda \quad \lambda = \text{lunghezza d'onda}$$

- ➔ *La massima dimensione del sistema deve essere molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda corrispondente alla massima frequenza che interessa considerare*

23

Limiti di validità

f	T	$\lambda_0 = c_0/f$
50 Hz	20 ms	6000 km
100 Hz	10 ms	3000 km
1 kHz	1 ms	300 km
10 kHz	100 μ s	30 km
20 kHz	50 μ s	15 km
100 kHz	10 μ s	3 km
1 MHz	1 μ s	300 m
10 MHz	100 ns	30 m
100 MHz	10 ns	3 m
1 GHz	1 ns	300 mm
10 GHz	100 ps	30 mm

c_0 e λ_0 indicano la velocità della luce e la lunghezza d'onda nel vuoto

24

Condizioni sulle derivate di **B** e **D**

- In condizioni quasi stazionarie si approssimano, istante per istante, i potenziali con le soluzioni delle equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{A}(t) = -\mu \mathbf{J}(t) \quad \nabla^2 V(t) = -\frac{\rho_c(t)}{\varepsilon}$$

- Le derivate seconde rispetto a t dei potenziali devono essere trascurabili

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \cong 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cong 0$$

- La presenza di queste derivate dipende dalla presenza simultanea delle derivate temporali di **B** e **D** nelle equazioni di Maxwell

- Se si annulla almeno una di queste derivate si annullano anche le derivate seconde di **A** e **V**

- Le derivate seconde di **A** e **V** sono trascurabili se in ogni punto del sistema è verificata almeno una delle condizioni

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0$$

25

Derivata di ρ_c

- In condizioni non stazionarie è sempre solenoidale la densità di corrente totale $\mathbf{J}_T$ costituita dalla somma delle densità di corrente di conduzione e di spostamento

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \end{array} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$$

- Nelle regioni in cui la derivata di **D** è trascurabile si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{J} \cong \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$$

- Quindi, dall'equazione di continuità si ricava che in queste regioni deve valere anche la condizione

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \cong 0$$

26

Derivate di **B** e **D** in regime sinusoidale

- Si considera il caso in cui **B** e **D** sono funzioni sinusoidali del tempo

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}, t) = \mathbf{B}_M(\mathbf{P}) \cos[\omega t + \varphi_B(\mathbf{P})]$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{P}, t) = \mathbf{D}_M(\mathbf{P}) \cos[\omega t + \varphi_D(\mathbf{P})]$$

- In questo caso le loro derivate sono funzioni sinusoidali del tempo con ampiezza proporzionale all'ampiezza di **B** e **D**

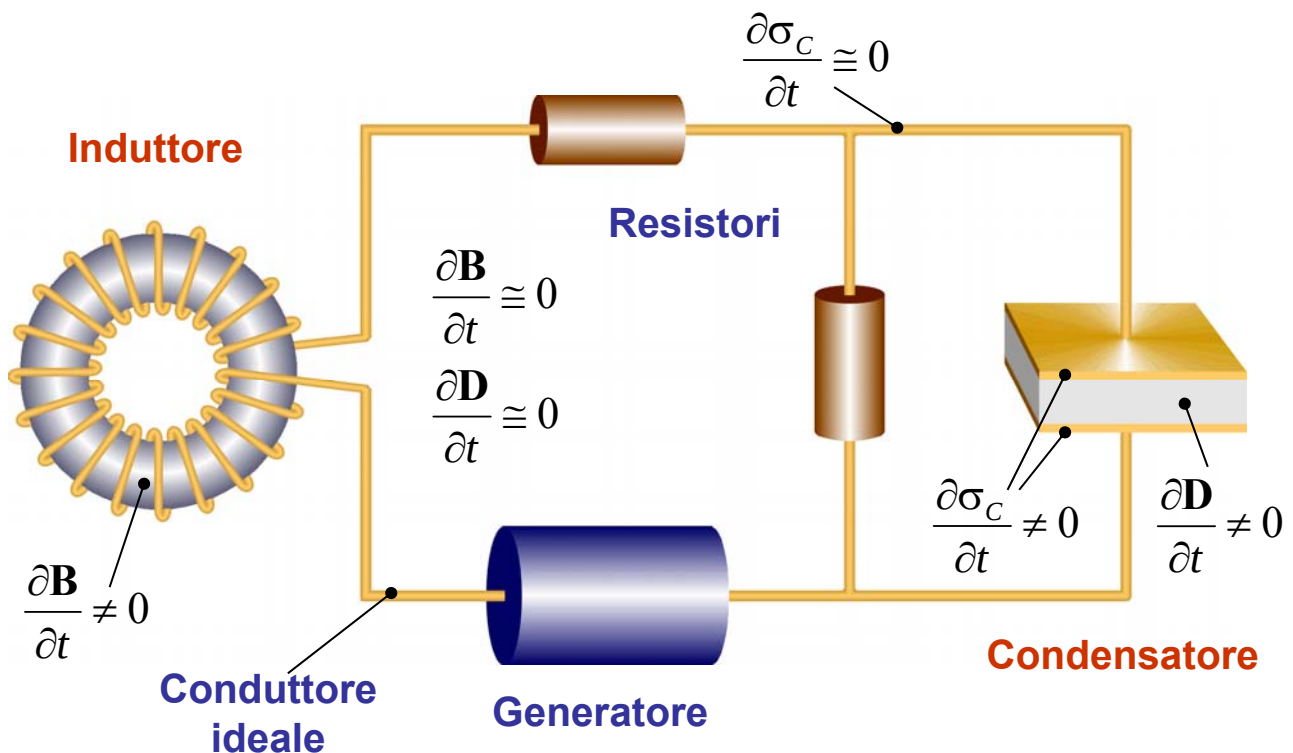
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\omega \mathbf{B}_M(\mathbf{P}) \sin[\omega t + \varphi_B(\mathbf{P})] = \omega \mathbf{B}_M(\mathbf{P}) \cos\left[\omega t + \varphi_B(\mathbf{P}) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\omega \mathbf{D}_M(\mathbf{P}) \sin[\omega t + \varphi_D(\mathbf{P})] = \omega \mathbf{D}_M(\mathbf{P}) \cos\left[\omega t + \varphi_D(\mathbf{P}) + \frac{\pi}{2}\right]$$

- ➔ In queste condizioni si può assumere che le derivate siano trascurabili nelle regioni in cui **B** e **D** sono trascurabili

27

Esempio



28

Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- In generale, in condizioni non stazionarie il modello circuitale non è utilizzabile
- **E** non è conservativo
 - ➔ Non si può definire in modo univoco la tensione tra due terminali di un componente
 - ➔ Non vale la legge di Kirchhoff per le tensioni
- **J** non è solenoidale
 - ➔ La corrente attraverso la sezione trasversale di un tubo di flusso di **J** non è costante
 - ➔ Non vale la legge di Kirchhoff per le correnti
- Le interazioni tra i componenti di un sistema elettromagnetico non possono essere descritte in termini di tensioni e correnti
- In particolare, non è possibile esprimere la potenza assorbita o erogata da un componente mediante le tensioni e le correnti ai terminali

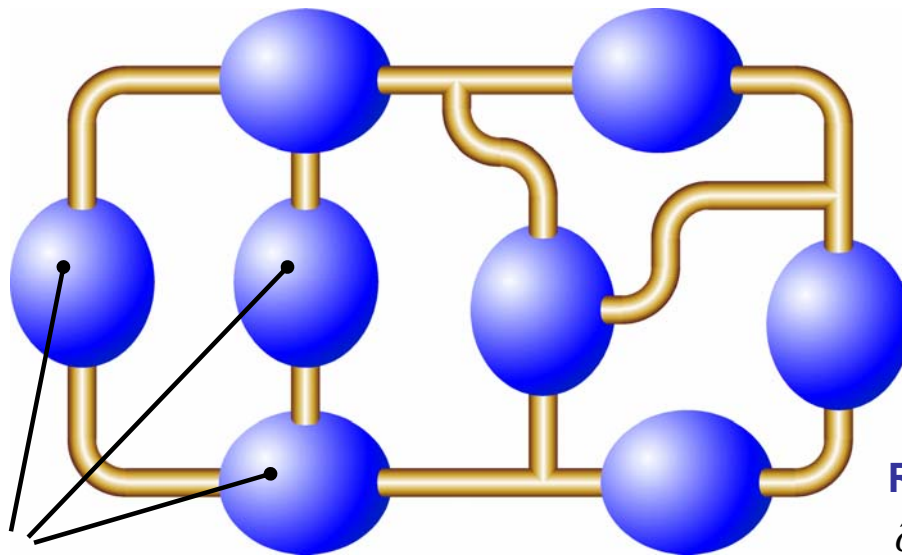
29

Circuiti in condizioni quasi stazionarie

- Se la frequenza è sufficientemente bassa, si può assumere che nelle regioni in cui **B** e **D** sono trascurabili siano trascurabili anche le loro derivate
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{negli induttori} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{nelle rimanenti regioni}$$
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{nei condensatori} \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{nelle rimanenti regioni}$$
- Il sistema può essere ancora descritto mediante un modello circuitale se le superfici limite dei componenti vengono definite in modo che derivate di **B** e di **D** siano diverse da zero solo al loro interno
(Ad esempio, non si può racchiudere in una superficie limite una sola armatura di un condensatore)
- In questo modo, anche le derivate dei flussi di **B** e di **D** attraverso le superfici limite sono nulle

30

Circuiti in condizioni quasi stazionarie



Componenti:

All'interno delle superfici limite, in ogni punto è verificata almeno una delle condizioni

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0$$

Regione esterna:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cong 0$$

31

Circuiti in condizioni quasi stazionarie

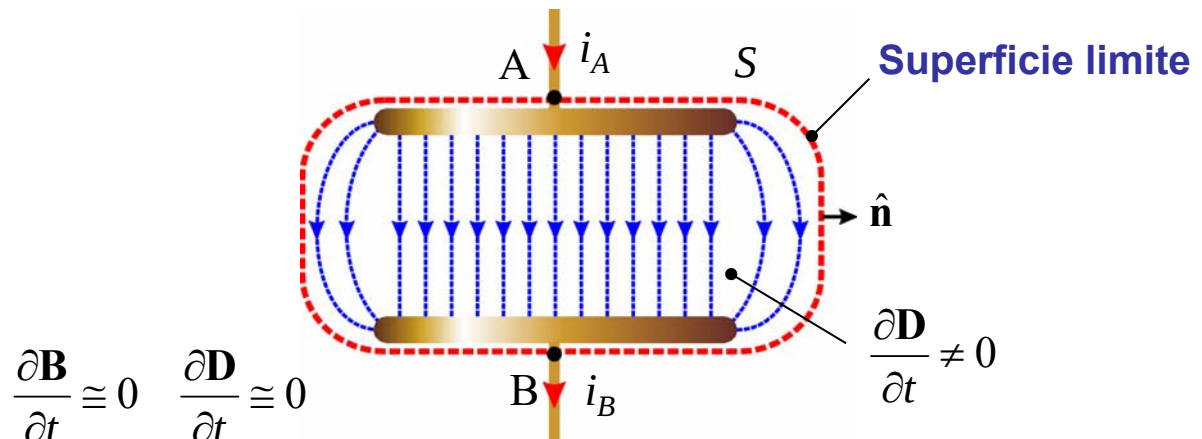
- Nella regione esterna e sulle superfici limite si può ritenere che $\mathbf{E}$ sia conservativo e $\mathbf{J}$ è solenoidale
- ➔ Si possono definire in modo univoco le tensioni e le correnti ai terminali dei componenti
- ➔ Valgono le leggi di Kirchhoff (se si considerano linee chiuse e superfici chiuse interamente contenute nella regione esterna ai componenti)
- ➔ Sono ancora valide le espressioni delle potenze scambiate dai componenti in funzione delle tensioni e delle correnti che sono state ricavate nel caso stazionario

32

Condensatore

Ipotesi:

- La derivata di $\mathbf{D}$ rispetto a t assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo all'interno della superficie chiusa S
- La densità di carica assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo sulle armature del condensatore
- La derivata di $\mathbf{B}$ rispetto a t può essere considerata ovunque nulla



33

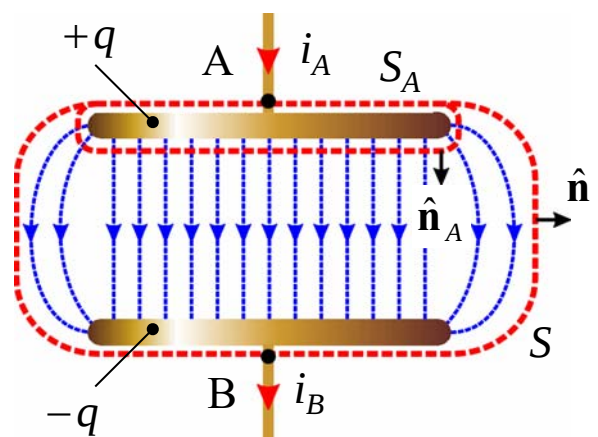
Condensatore

- La corrente di spostamento attraverso la superficie S è nulla
 - Su S $\mathbf{J}$ è solenoidale
 - La corrente i_A è uguale in ogni istante alla corrente i_B

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -i_A + i_B = 0 \quad \Rightarrow \quad i_A = i_B = i$$

- All'interno della superficie S il campo elettrico è identico, in ogni istante, ad un campo stazionario
 - Vale la relazione

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = v(t) = \frac{q(t)}{C}$$



34

Condensatore

- Dall'equazione di continuità, considerando la superficie S_A , si ha

$$i = - \oint_{S_A} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \frac{dq}{dt}$$

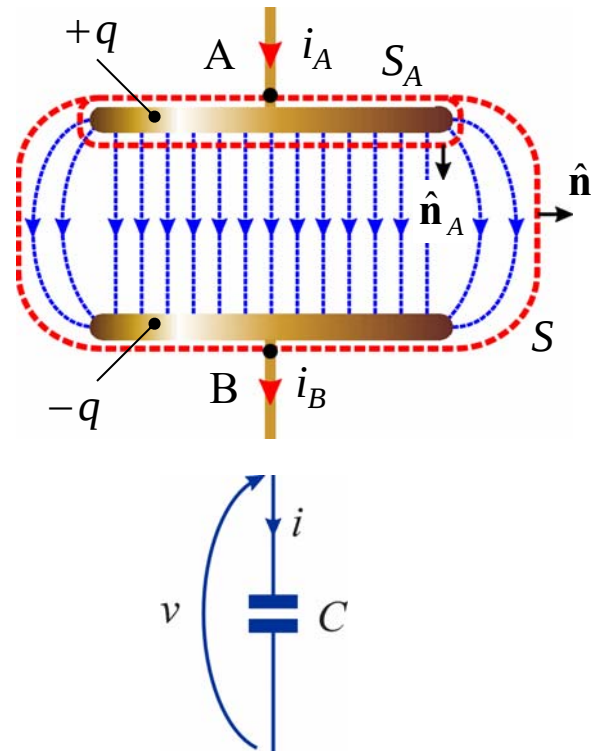
- Combinando le due ultime equazioni si ottiene la relazione costitutiva del condensatore

$$q(t) = Cv(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$



35

Energia di un condensatore

- La potenza assorbita da un condensatore può essere espressa come

$$p = vi = v \frac{dq}{dt}$$

- Si assume che per $t = 0$ v e q siano nulle
- Nell'intervallo $[0, t_0]$ si fa variare v da 0 a un valore finale V
 - la carica varia da 0 a un valore finale Q
- L'energia assorbita dal condensatore nell'intervallo $[0, t_0]$ è

$$W_E = \int_0^{t_0} v \frac{dq}{dt} dt = \int_0^Q v dq$$

36

Energia di un condensatore

- Se la relazione tra v e q è biunivoca, il valore di W_E non dipende dall'andamento di v e q durante l'intervallo $[0, t_0]$, ma solo dal valore finale della carica Q
- Se la tensione (e quindi la carica) vengono riportate a 0, l'energia W_E viene restituita integralmente
- ➔ W_E rappresenta un'energia di tipo conservativo
- ➔ **energia accumulata nel campo elettrico del condensatore**
- Per un condensatore lineare (➔ $q = Cv$) l'energia del campo elettrico può essere espressa nelle forme

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2$$

37

Energia del campo elettrico

- L'energia di un condensatore può essere espressa anche in funzione dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$

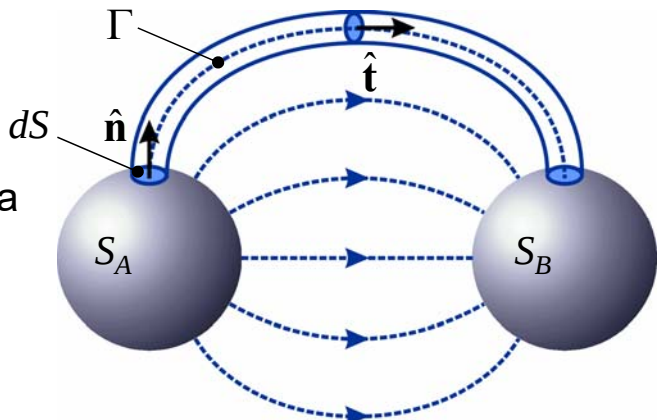
$$W_E = \int_0^Q v dq$$

- La carica sull'armatura S_A è data da

$$Q = \int_{S_A} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} D \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area dS individua un tubo di flusso di $\mathbf{D}$ che collega le due armature del condensatore
- Si può esprimere la differenza di potenziale v tra le armature come integrale di $\mathbf{E}$ lungo una linea di campo Γ di $\mathbf{D}$ coincidente con l'asse del tubo di flusso

$$v = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

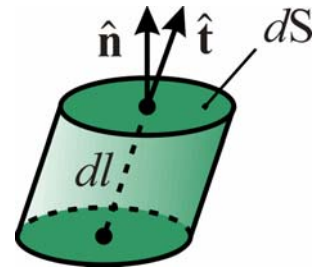


38

Energia del campo elettrico

- Utilizzando le espressioni di v e Q e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è $d\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS$ si ha

$$\begin{aligned} v dq &= \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \int_{S_A} dD \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_{S_A} \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS = \int_{\tau_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} d\tau \end{aligned}$$



- ➔ Quindi l'espressione dell'energia è

$$W_E = \int_0^Q v dq = \int_{\tau_c} \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{D} \text{ e } \mathbf{E} \text{ sono diversi da zero})$$

- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ sia biunivoca
- Si può dimostrare che queste espressioni dell'energia del campo elettrico, ottenute nel caso di un condensatore, hanno validità generale

39

Densità di energia del campo elettrico

- ➔ Si può interpretare come **densità di energia del campo elettrico** la quantità

$$w_E = \frac{dW_E}{d\tau} = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$$

- Per un mezzo isotropo si ha

$$w_E = \int_0^E E dD$$

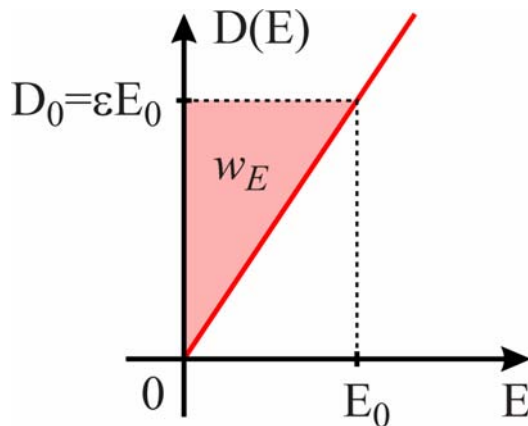
- Se il mezzo è anche lineare ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$) la densità di energia può essere espressa come

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

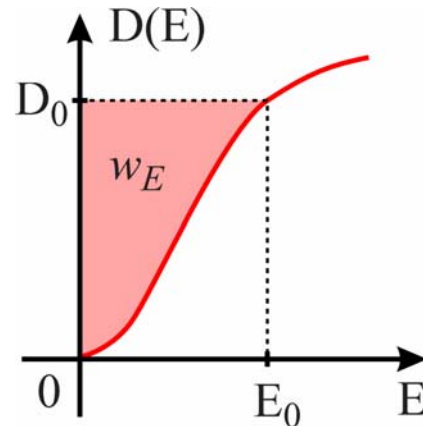
40

Densità di energia del campo elettrico

- w_E corrisponde all'area compresa tra la curva $D(E)$ e l'asse delle ordinate



Mezzo lineare



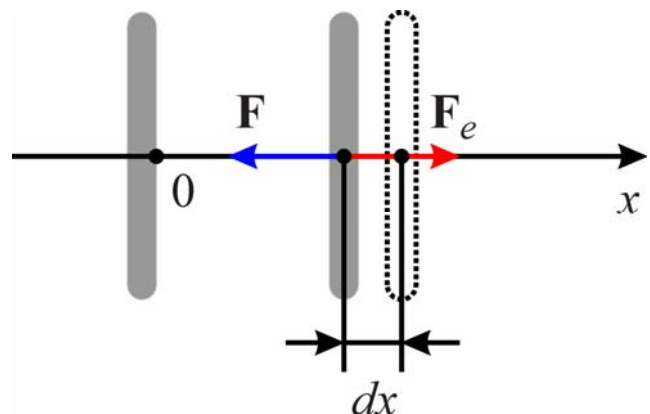
Mezzo non lineare

41

Forza tra le armature di un condensatore

- $\mathbf{F}$ = risultante delle forze agenti su un'armatura
- $\mathbf{F}_e$ = forza esterna necessaria a mantenere in equilibrio l'armatura
- Si può valutare $\mathbf{F}_e$ (e quindi $\mathbf{F}$) applicando uno spostamento virtuale dx (nella direzione di $\mathbf{F}_e$) all'armatura
- Si assume che il condensatore sia isolato → carica Q costante
- Il lavoro fornito da $\mathbf{F}_e$ deve essere uguale alla variazione dell'energia accumulata nel condensatore

$$F_e dx = dW_E$$
- Quindi si ottiene



$$F = F_e = \frac{dW_E}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

42

Forza tra le armature di un condensatore

- Lo stesso risultato si ottiene nel caso in cui il condensatore non è elettricamente isolato ma interagisce con altri dispositivi (ad es. con un generatore)
 - In questo caso la carica del condensatore può variare
 - Il lavoro necessario per produrre una variazione dQ della carica è

$$dL_E = VdQ$$

- In queste condizioni il bilancio energetico diviene

$$dL_M + dL_E = dW_E \quad \Rightarrow \quad F_e dx + VdQ = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right)$$

(L_M = lavoro meccanico, L_E = lavoro elettrico)

- Quindi, dato che $Q = CV$, si ha

$$F_e dx + V(CdV + VdC) = CVdV + \frac{1}{2}V^2dC \quad \Rightarrow \quad F_e dx = -\frac{1}{2}V^2dC$$

43

Forza tra le armature di un condensatore

- Nel caso di un condensatore a facce piane parallele la capacità vale

$$C = \varepsilon \frac{S}{x}$$

- Quindi la forza agente sulle armature è

$$F = -\frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{V^2 S}{x^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

dove E rappresenta il modulo del campo elettrico (uniforme) all'interno del condensatore

$$E = \frac{V}{x}$$

- La forza è data dal prodotto dell'area dell'armatura per la quantità

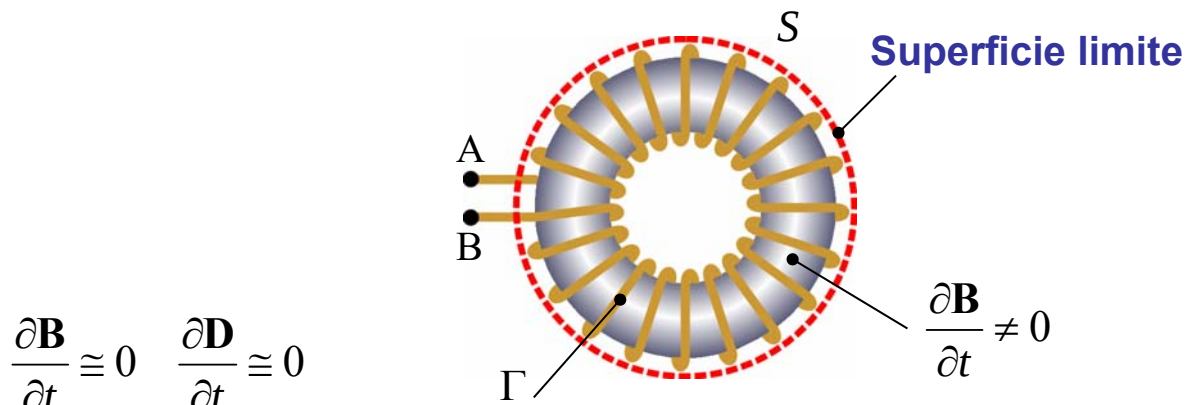
$$P_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad (\text{pressione elettrostatica})$$

44

Induttore

Ipotesi:

- ◆ Avvolgimento costituito da un conduttore filiforme Γ con sezione Δs e conducibilità σ
- ◆ La derivata di $\mathbf{B}$ rispetto a t assume valori apprezzabilmente diversi da zero solo all'interno della superficie chiusa S
- ◆ La derivata di $\mathbf{D}$ rispetto a t può essere considerata ovunque nulla

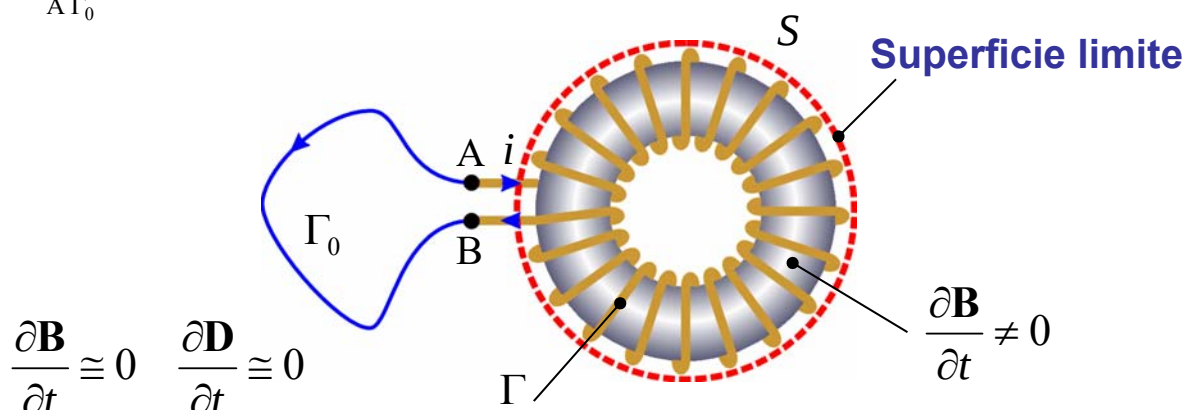


45

Induttore

- $\mathbf{J}$ è ovunque solenoidale ➔ la corrente ha lo stesso valore $i = J\Delta s$ in ogni sezione del conduttore
- All'esterno di S $\mathbf{E}$ è irrotazionale ➔ la tensione tra i terminali A e B dell'induttore può essere valutata integrando il campo elettrico lungo una linea arbitraria Γ_0 esterna alla superficie S

$$v_{AB} = \int_{A \Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



46

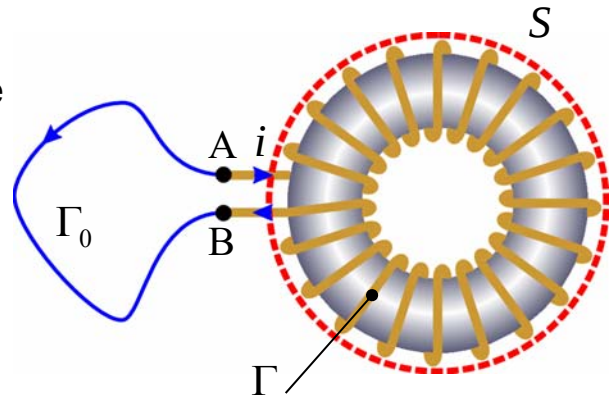
Induttore

- Per il conduttore Γ vale la relazione

$$R = \frac{\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_{\Delta S} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS} = \frac{\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{i} \Rightarrow \int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

dove R è la resistenza del conduttore

- Dato che all'interno della superficie S $\mathbf{E}$ non è irrotazionale, l'integrale a primo membro non è la differenza di potenziale tra i terminali A e B



47

Induttore

- Si sottrae e si somma a primo membro l'integrale di $\mathbf{E}$ su Γ_0

$$\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

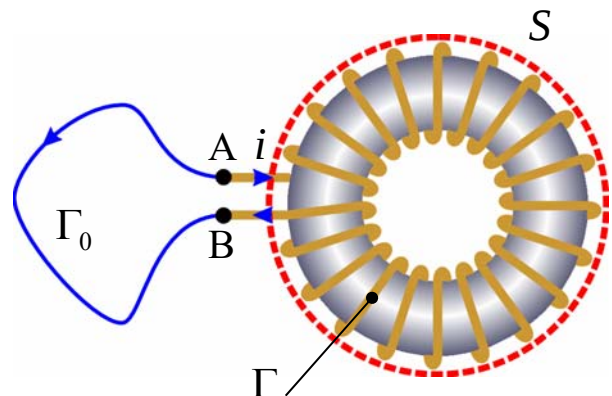
- I primi due termini della rappresentano la circuitazione di $\mathbf{E}$ sulla linea chiusa formata da Γ e Γ_0

$$\oint_{\Gamma \cup \Gamma_0} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_{A\Gamma_0}^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = Ri$$

- Per la legge di Faraday

$$\oint_{\Gamma \cup \Gamma_0} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d\phi}{dt}$$

ϕ = flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con la linea $\Gamma \cup \Gamma_0$



48

Induttore

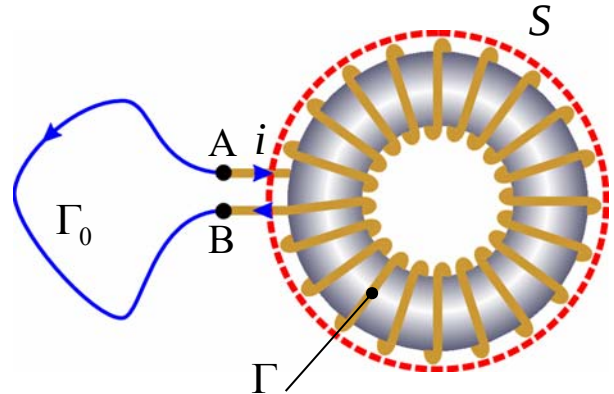
➔ Quindi si ottiene

$$-\frac{d\phi}{dt} + v_{AB} = Ri \Rightarrow v_{AB} = Ri + \frac{d\phi}{dt}$$

- All'esterno di S $\mathbf{B}$ e la sua derivata rispetto a t sono trascurabili
- ➔ Il valore del flusso e della sua derivata non dipendono dalla particolare linea Γ_0 considerata
- Se il nucleo è realizzato con un materiale lineare, l'equazione si può porre nella forma

$$v_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$L = \frac{\phi}{i} \quad \text{induttanza dell'avvolgimento } \Gamma$$

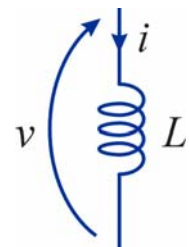


49

Induttore

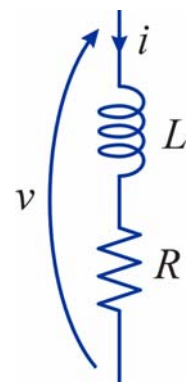
- Se la resistenza dell'avvolgimento, R , è trascurabile è possibile rappresentare il componente con un **induttore ideale**

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$



- Se la resistenza non è trascurabile si può rappresentare il componente mediante un bipolo equivalente formato da un induttore ideale e un resistore collegati in serie

$$v = Ri + L \frac{di}{dt}$$



50

Energia di un induttore

- La potenza assorbita da un induttore può essere espressa come

$$p = vi = i \frac{d\varphi}{dt}$$

- Si assume che per $t = 0$ i e φ siano nulli
- Nell'intervallo $[0 \ t_0]$ si fa variare i da 0 a un valore finale I
 - ➔ Il flusso varia da 0 a un valore finale Φ
- L'energia assorbita dall'induttore nell'intervallo $[0 \ t_0]$ è

$$W_M = \int_0^{t_0} i \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_0^{\Phi} i d\varphi$$

51

Energia di un induttore

- Se la relazione tra i e φ è biunivoca (cioè se non si ha isteresi) il valore di W_M non dipende dall'andamento di i e φ durante l'intervallo $[0 \ t_0]$, ma solo dal valore finale del flusso Φ
- Se la corrente (e quindi il flusso) vengono riportati a 0, l'energia W_M viene restituita integralmente
 - ➔ W_M rappresenta un'energia di tipo conservativo
 - ➔ **energia accumulata nel campo magnetico dell'induttore**
- Per un induttore lineare (➔ $\varphi = Li$) l'energia magnetica può essere espressa nelle forme

$$W_M = \int_0^{\Phi} \frac{\varphi}{L} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2$$

52

Energia degli induttori accoppiati

- Procedendo in modo simile, si può dimostrare che nel caso di un sistema costituito da N induttori accoppiati l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i d\phi$$

- Se gli induttori sono lineari si ha

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N M_{kj} i_k i_j$$

- Nel caso di due soli induttori accoppiati l'espressione dell'energia è

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

53

Energia del campo magnetico

- L'energia magnetica di un circuito filiforme può essere espressa anche in funzione dei campi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$

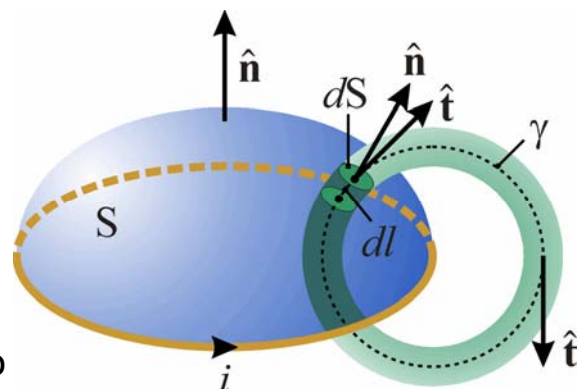
$$W_M = \int_0^{\Phi} i d\phi$$

- Il flusso concatenato con il circuito è

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S B \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area dS individua un tubo di flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con il circuito
- Si può esprimere la corrente i in funzione di $\mathbf{H}$ applicando la legge di Ampere ad una linea di campo γ di $\mathbf{B}$ coincidente con l'asse del tubo di flusso

$$i = \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

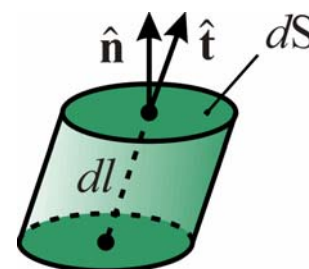


54

Energia del campo magnetico

- Utilizzando le espressioni di i e Φ e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è $d\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS$ si ha

$$\begin{aligned} id\phi &= \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \int_S d\mathbf{B} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_S \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS = \int_{\tau_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \end{aligned}$$



- ➔ Quindi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \int_0^{\Phi} id\phi = \int_{\tau_c}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{H} \text{ sono diversi da zero})$$

- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ sia biunivoca (mezzi privi di isteresi)
- Si può dimostrare che queste espressioni, ottenute per un circuito filiforme, valgono anche per distribuzioni di corrente più generali

55

Densità di energia del campo magnetico

- ➔ Si può interpretare come **densità di energia del campo magnetico** la quantità

$$w_M = \frac{dW_M}{d\tau} = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

- Per un mezzo isotropo si ha

$$w_M = \int_0^B H dB$$

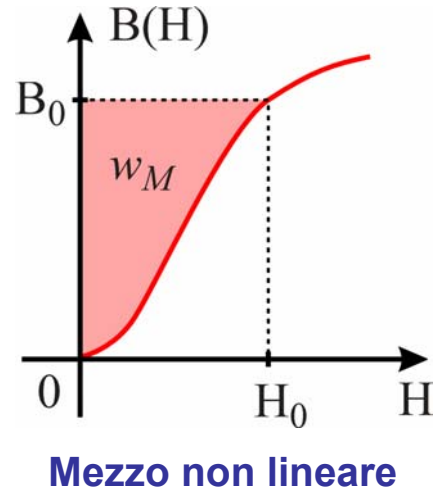
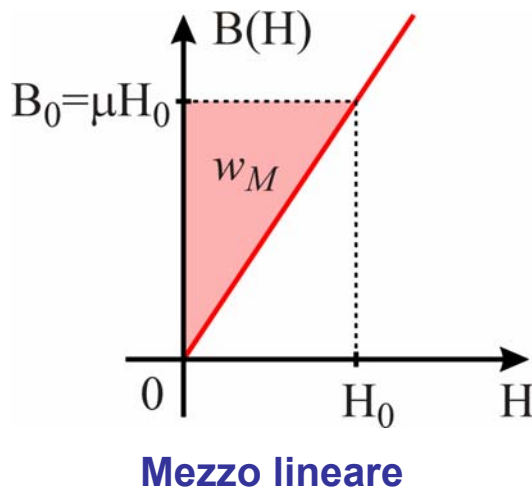
- Se il mezzo è anche lineare ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) la densità di energia può essere espressa come

$$w_M = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

56

Densità di energia del campo magnetico

- w_M corrisponde all'area compresa tra la curva $B(H)$ e l'asse delle ordinate

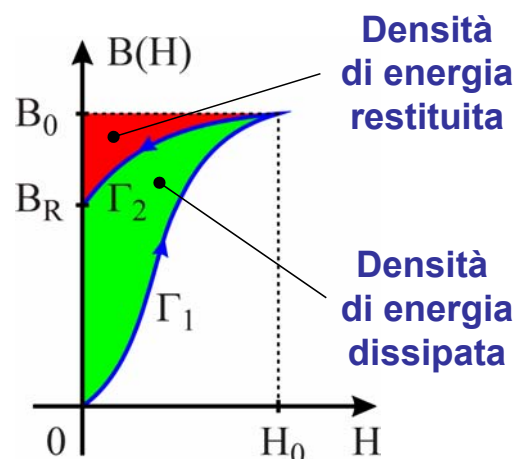
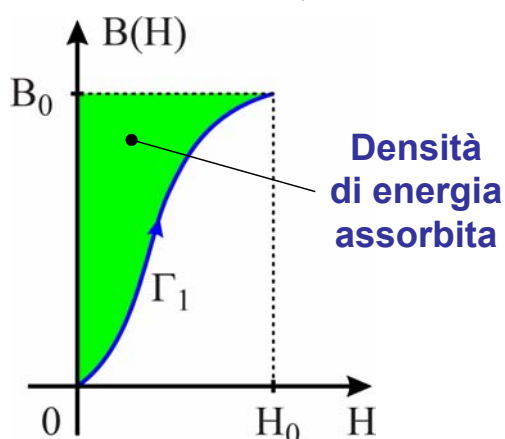


57

Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Nel caso di un mezzo con isteresi, l'energia spesa per creare il campo (partendo da i e $\mathbf{H}$ nulli) è maggiore di quella che viene restituita se la corrente i , e quindi $\mathbf{H}$, sono riportati a zero
- ➔ Viene assorbita in modo irreversibile, e quindi dissipata, l'energia per unità di volume

$$w_D = \int_{0 \Gamma_1}^{B_0} H dB + \int_{B_0 \Gamma_2}^{B_R} H dB$$



58

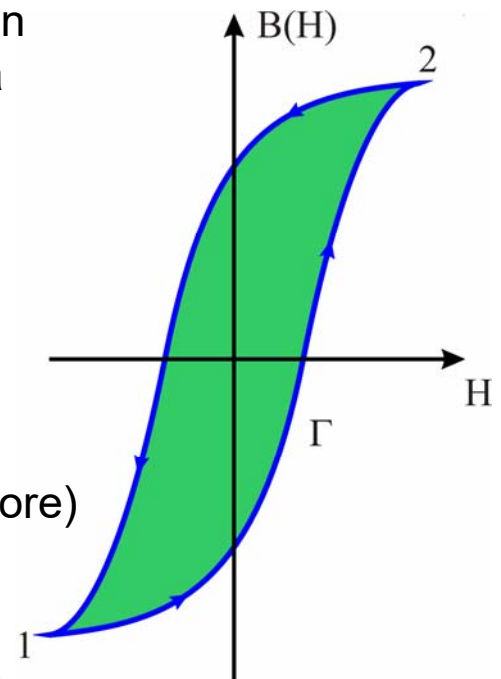
Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Si fa variare periodicamente la corrente in modo che il materiale ferromagnetico sia soggetto a cicli di isteresi
- Complessivamente in ogni ciclo viene assorbita, per unità di volume, l'energia

$$w_D = \oint_{\Gamma} H dB$$

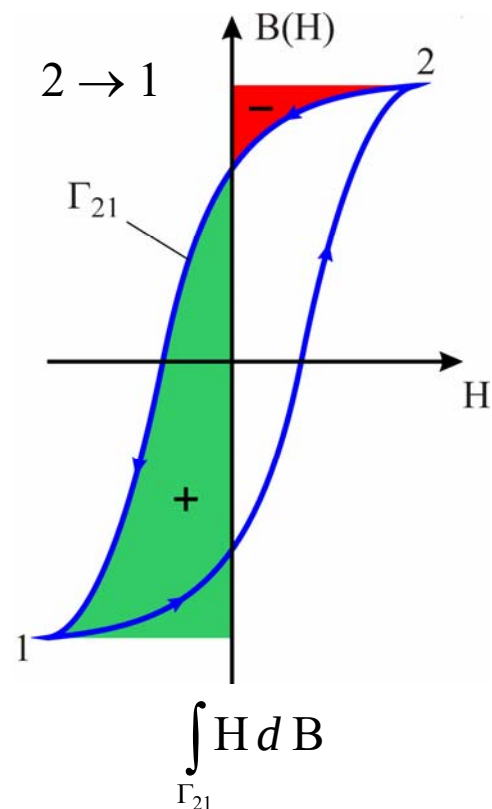
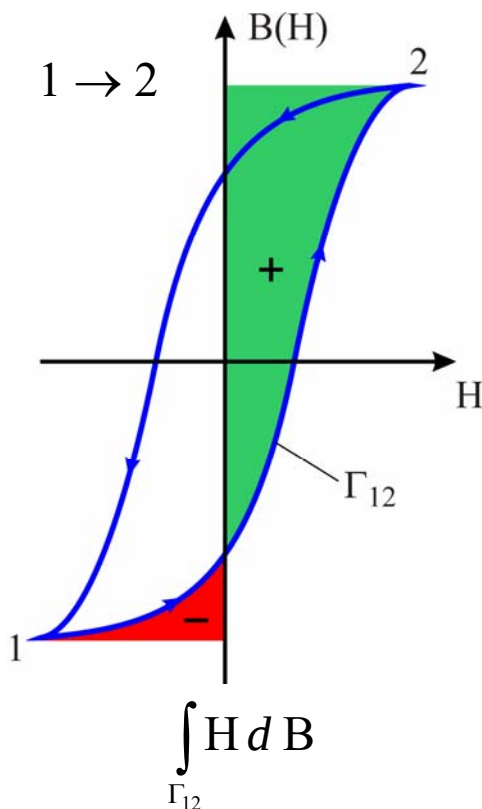
➔ Dissipazione di energia (convertita in calore)

- *L'energia per unità di volume dissipata in un ciclo corrisponde all'area delimitata dal ciclo di isteresi*



59

Energia dissipata in un ciclo di isteresi



60

Forza di un elettromagnete

- $\mathbf{F}$ = risultante delle forze agenti sull'ancora dovute all'elettromagnete
- $\mathbf{F}_e$ = forza esterna necessaria a mantenere l'ancora in equilibrio
- Si può valutare $\mathbf{F}_e$ (e quindi $\mathbf{F}$) applicando uno spostamento virtuale dx (nella direzione di $\mathbf{F}_e$) all'ancora
- Bilancio energetico:

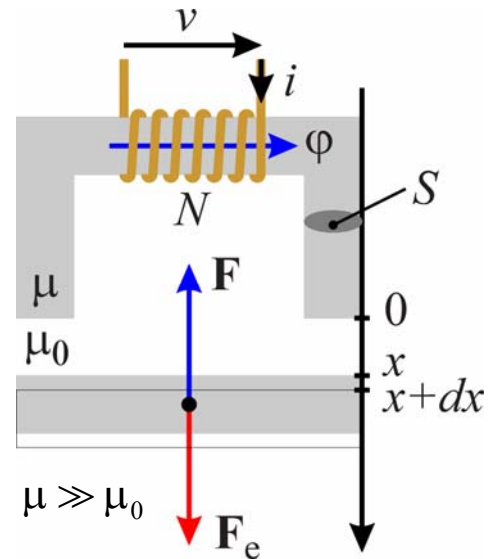
$$dL_m + dL_E = dW_M$$

dL_m = lavoro meccanico compiuto da F_e

$dL_E = vidt = id\Phi$ = lavoro elettrico
(fornito da generatori esterni)

$\Phi = N\phi$ = flusso concatenato

dW_M = variazione dell'energia magnetica



61

Forza di un elettromagnete

- Quindi si ha

$$F_e dx + id\Phi = dW_M$$

- Per calcolare $\mathbf{F}_e$ (e quindi $\mathbf{F}$) si può considerare una trasformazione infinitesima nella quale il flusso viene mantenuto costante ($d\Phi = 0$)

$$F = F_e = \left. \frac{dW_M}{dx} \right|_{\Phi=\text{cost}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L^2} \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

- Il risultato non dipende dalla particolare trasformazione considerata, infatti nel caso generale si ottiene

$$F_e dx + id\Phi = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$$

$$F_e dx + i(Ldi + idL) = Lidi + \frac{1}{2} i^2 dL \quad \Rightarrow \quad F = F_e = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

62

Forza di un elettromagnete

- Facendo uso della legge di Hopkinson

$$\mathcal{R}\phi = Ni$$

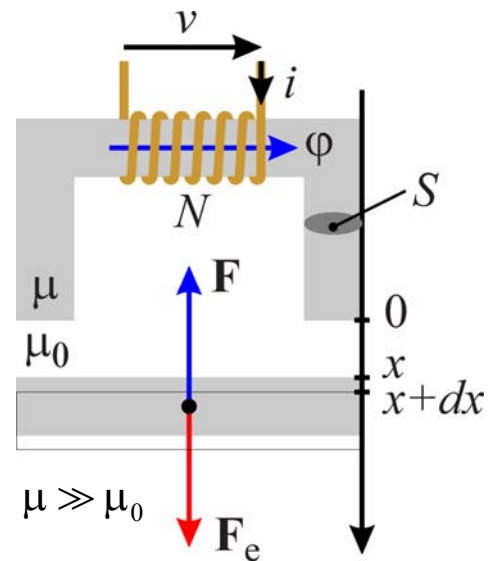
($\mathcal{R}$ = riluttanza del circuito magnetico)

e della definizione di induttanza

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

si può esprimere la forza agente sull'ancora nella forma

$$F = -\frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}$$



63

Forza di un elettromagnete

- Se è possibile trascurare la riluttanza dei tratti formati dal materiale ad alta permeabilità, $\mathcal{R}$ è data la somma delle riluttanze dei due traferri

$$\mathcal{R} = \frac{2x}{\mu_0 S} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{\phi^2}{\mu_0 S} = \frac{N^2 i^2 \mu_0 S}{4x^2}$$

- Se il campo magnetico è uniforme si ha

$$\frac{\phi}{\mu_0 S} = \frac{B}{\mu_0} = H$$

- Quindi si può esprimere F come

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \cdot 2S$$

- La forza è data dal prodotto dell'area dei traferri ($2S$) per la quantità

$$P_M = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{pressione magnetica})$$

64