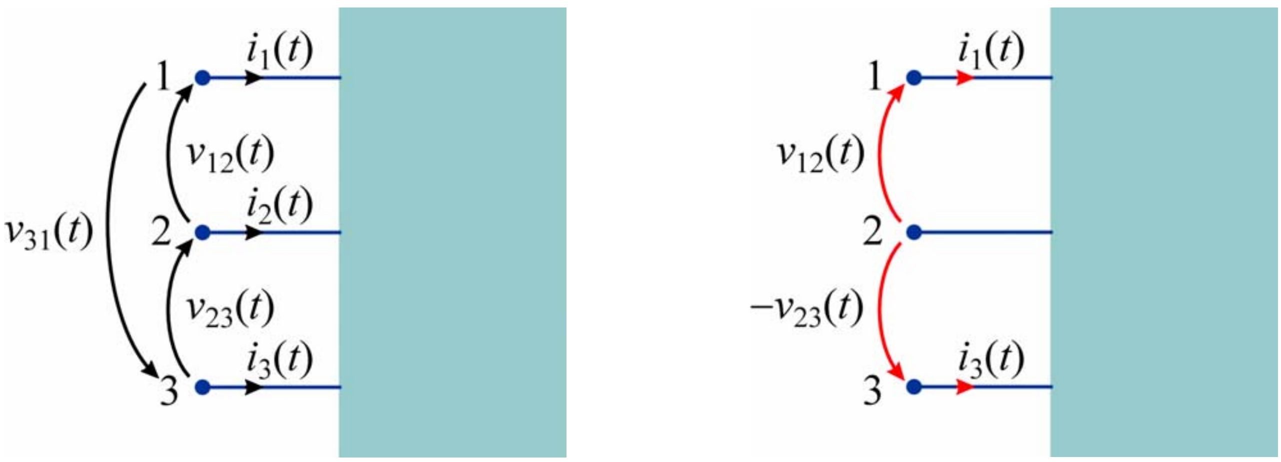
Sistemi trifase

Parte 2

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 8-3-2019)

Potenza assorbita da un carico trifase (1)



- Un generico carico trifase può essere considerato un doppio bipolo (due porte)
- Scelto un terminale di riferimento, si può esprimere la potenza istantanea assorbita dal carico in funzione delle correnti degli altri terminali e delle tensioni degli altri terminali rispetto al riferimento

$$p(t) = v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t)$$

Potenza assorbita da un carico trifase (2)

- Il valore della potenza non dipende dalla scelta del terminale di riferimento
  - Infatti le tensioni concatenate e le correnti di linea soddisfano le condizioni

$$v_{12}(t)+v_{23}(t)+v_{31}(t)=0$$

$$i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)=0$$

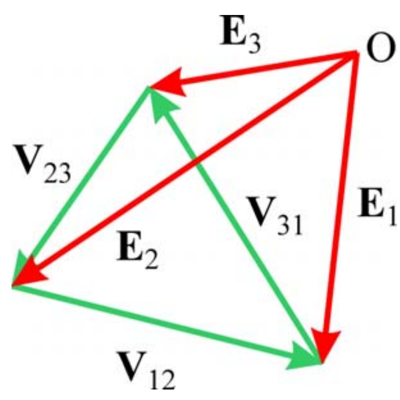
  - quindi è immediato verificare che risulta

$$\begin{aligned} p(t) &= v_{31}(t)i_3(t)-v_{12}(t)i_2(t)= && \text{(riferimento = terminale 1)}\\ &= v_{12}(t)i_1(t)-v_{23}(t)i_3(t)= && \text{(riferimento = terminale 2)}\\ &= v_{23}(t)i_2(t)-v_{31}(t)i_1(t) && \text{(riferimento = terminale 3)} \end{aligned}$$

Potenza assorbita da un carico trifase (3)

- La potenza può essere espressa anche in funzione delle correnti di linea e di un’arbitraria terna di tensioni stellate associata alle tensioni concatenate

$$p(t)=e_1(t)i_1(t)+e_2(t)i_2(t)+e_3(t)i_3(t)$$



- In particolare, si possono utilizzare le tensioni principali di fase

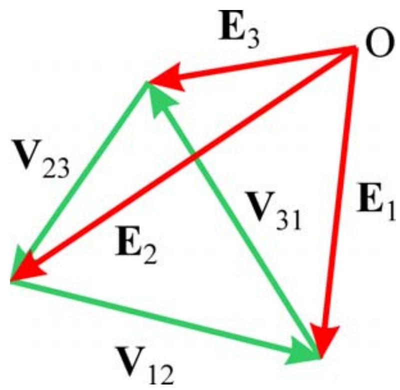
$$p(t)=e_{10}(t)i_1(t)+e_{20}(t)i_2(t)+e_{30}(t)i_3(t)$$

Potenza assorbita da un carico trifase (4)

Dimostrazione

- Dato che le tensioni concatenate sono legate alle tensioni di fase delle relazioni

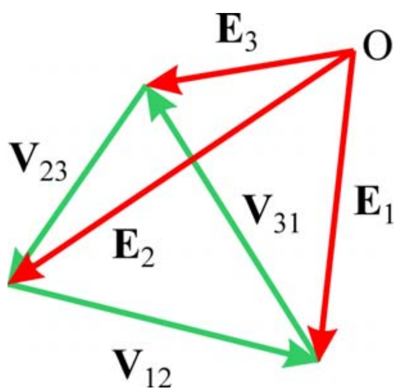
$$v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t)$$
$$v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t)$$
$$v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t)$$



- l'espressione della potenza diviene

$$\begin{aligned} p(t) &= v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t) = \\ &= [e_1(t) - e_2(t)]i_1(t) - [e_2(t) - e_3(t)]i_3(t) = \\ &= e_1(t)i_1(t) - e_2(t)[i_1(t) + i_3(t)] + e_3(t)i_3(t) = \\ &= e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) \end{aligned}$$

Nota



- Si può osservare che le tre espressioni

$$\begin{aligned} p(t) &= v_{31}(t)i_3(t) - v_{12}(t)i_2(t) = \\ &= v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t) = \\ &= v_{23}(t)i_2(t) - v_{31}(t)i_1(t) \end{aligned}$$

possono essere interpretate come casi particolari della relazione

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

che si ottengono quando il centro delle tensioni di fase O coincide con uno dei vertici del triangolo

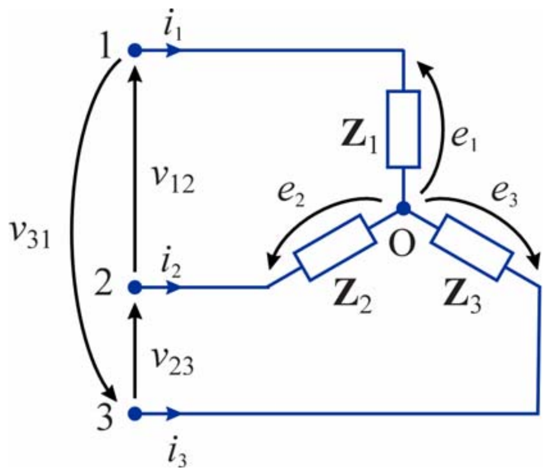
- In questo caso
  - una delle tensioni stellate si annulla
  - una coincide con una tensione concatenata
  - una coincide con l'opposto di una tensione concatenata

Potenza assorbita da un carico a stella

- Nel caso di un carico a stella, se come tensioni stellate si utilizzano quelle delle impedenze, l'espressione

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

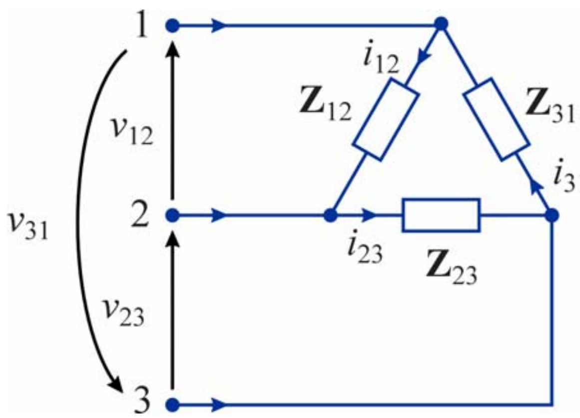
mostra che la potenza è data dalla somma delle potenze assorbite dalle tre impedenze



Potenza assorbita da un carico a triangolo

- Anche nel caso di un carico a triangolo si può verificare che la potenza è data dalla somma delle potenze assorbite dalle tre impedenze
  - Dato che le relazioni tra le correnti di linea e le correnti di fase sono

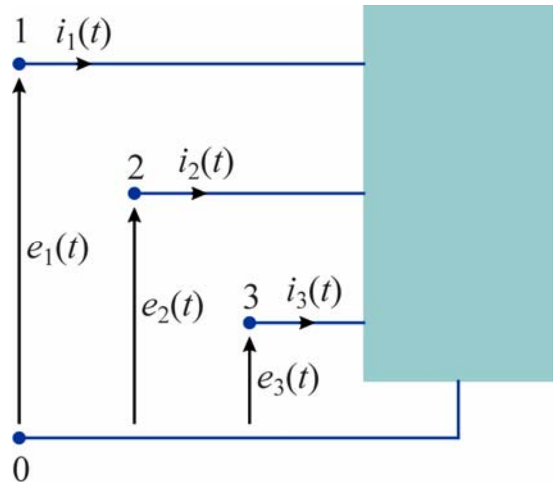
$$i_1(t) = i_{12}(t) - i_{31}(t)$$
$$i_2(t) = i_{23}(t) - i_{12}(t)$$
$$i_3(t) = i_{31}(t) - i_{23}(t)$$



  - si ottiene

$$\begin{aligned} p(t) &= v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t) = \\ &= v_{12}(t)\left[i_{12}(t) - i_{31}(t)\right] - v_{23}(t)\left[i_{31}(t) - i_{23}(t)\right] = \\ &= v_{12}(t)i_{12}(t) + v_{23}(t)i_{23}(t) - \left[v_{12}(t) + v_{23}(t)\right]i_{31}(t) = \\ &= v_{12}(t)i_{12}(t) + v_{23}(t)i_{23}(t) + v_{31}(t)i_{31}(t) \end{aligned}$$

Potenza assorbita da un carico trifase con neutro



- Un carico trifase con neutro può essere considerato un triplo bipolo (tre porte)

➡ La potenza istantanea assorbita dal carico è

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

Potenza attiva (1)

- La potenza attiva assorbita da un carico trifase è definita come valore medio sul periodo della potenza istantanea

➡ Procedendo come nel caso di un carico monofase, si può verificare che, in termini di tensioni concatenate e correnti di linea, l'espressione della potenza attiva è

$$\begin{aligned} P &= V_{31} I_3 \cos\delta_{31} - V_{12} I_2 \cos\delta_{12} = \\ &= V_{12} I_1 \cos\delta_{12} - V_{23} I_3 \cos\delta_{23} = \\ &= V_{23} I_2 \cos\delta_{23} - V_{31} I_1 \cos\delta_{31} \end{aligned}$$

dove δ_{12}, δ_{23}, δ_{31} sono gli angoli di sfasamento fra la tensione e la corrente di ciascuna delle coppie considerate

Potenza attiva (2)

- In termini di tensioni stellate e correnti di linea, l'espressione della potenza attiva è
  $$P = E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 + E_3 I_3 \cos\varphi_3$$
  dove φ_1, φ_2, φ_3 sono gli angoli di sfasamento fra la tensione e la corrente di ciascuna delle coppie considerate
- Nel caso di carico a stella, se le tensioni stellate coincidono con le tensioni delle impedenze, φ_1, φ_2, φ_3 sono gli argomenti delle impedenze
- Per un carico a triangolo, si ha anche
  $$P = V_{12} I_{12} \cos\varphi_{12} + V_{23} I_{23} \cos\varphi_{23} + V_{31} I_{31} \cos\varphi_{31}$$
  dove φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} sono gli argomenti delle impedenze

➡ La potenza attiva è data dalla somma delle potenza attive assorbite dalle tre fasi

Potenza reattiva

- La potenza reattiva è definita come somma delle potenze reattive delle tre fasi, quindi si hanno le espressioni
  - in termini di tensioni stellate e correnti di linea
    $$Q = E_1 I_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + E_2 I_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + E_3 I_3 \operatorname{sen}\varphi_3$$
  - per un carico a triangolo, in termini di tensioni concatenate e correnti di fase
    $$Q = V_{12} I_{12} \operatorname{sen}\varphi_{12} + V_{23} I_{23} \operatorname{sen}\varphi_{23} + V_{31} I_{31} \operatorname{sen}\varphi_{31}$$
- Inoltre si può verificare che, in termini di tensioni concatenate e correnti di linea, risulta
  $$\begin{aligned} Q &= V_{31} I_3 \operatorname{sen}\delta_{31} - V_{12} I_2 \operatorname{sen}\delta_{12} = \\ &= V_{12} I_1 \operatorname{sen}\delta_{12} - V_{23} I_3 \operatorname{sen}\delta_{23} = \\ &= V_{23} I_2 \operatorname{sen}\delta_{23} - V_{31} I_1 \operatorname{sen}\delta_{31} \end{aligned}$$

Potenza apparente e fattore di potenza

- La potenza apparente e il fattore di potenza sono definiti convenzionalmente mediante le relazioni valide nel caso monofase

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos\Phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \cos\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)\right]$$

- In questo caso Φ è un angolo convenzionale (in generale non è interpretabile come angolo di sfasamento tra una tensione e una corrente)

Potenza complessa

- Come nel caso monofase, anche per un carico trifase si può introdurre la potenza complessa
  $\mathbf{N} = P + jQ$
- Le sue espressioni sono
  - In termini di tensioni concatenate e correnti di linea
    $\mathbf{N} = \mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_3^* - \mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_2^* \quad = \quad \mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_1^* - \mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_3^* \quad = \quad \mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_2^* - \mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_1^*$
  - In termini di tensioni stellate e correnti di linea
    $\mathbf{N} = \mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* + \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*$
  - Per un carico a triangolo, in termini di tensioni concatenate e correnti di fase
    $\mathbf{N} = \mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_{12}^* + \mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_{23}^* + \mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_{31}^*$

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati (1)

- **Ipotesi**
  - Le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica
  - Il carico è regolare
- Si esprime la potenza assorbita dal carico in funzione delle tensioni principali di fase e delle correnti di linea

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(t) &= \mathrm{e}_{10}(t)\mathrm{i}_1(t) + \mathrm{e}_{20}(t)\mathrm{i}_2(t) + \mathrm{e}_{30}(t)\mathrm{i}_3(t) = \\ &= E_0 I\cos\varphi + \boxed{E_0 I\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) +} \\ &+ E_0 I\cos\varphi + \boxed{E_0 I\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I + \tfrac{2}{3}\pi) +} \\ &+ E_0 I\cos\varphi + \boxed{E_0 I\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I - \tfrac{2}{3}\pi) =} \\ &= 3E_0 I\cos\varphi \end{aligned}$$

I termini oscillanti formano una terna simmetrica

⇓

la loro somma è nulla

- E_0 = valore efficace delle tensioni principali di fase
- I = valore efficace delle correnti di linea

➡ *In un sistema simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante*

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati (2)

- Il valore efficace delle tensioni principali di fase è legato al valore delle tensioni concatenate dalla relazione

$$V = \sqrt{3}E_0$$

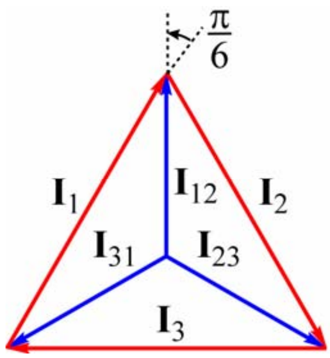
- Il valore costante della potenza istantanea, coincidente con la potenza attiva può essere espresso come

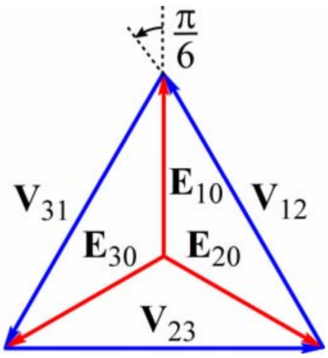
$$P = \sqrt{3}VI\cos\varphi$$

- In questo caso l'angolo φ non è lo sfasamento tra una tensione concatenata e una corrente di linea, ma tra una tensione principale di fase e la corrispondente corrente di linea

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati (3)

- Nel caso di un carico a stella regolare, le tensioni delle impedenze coincidono con le tensioni principali di fase
  - ➡ φ rappresenta l'argomento delle impedenze
- Per un carico a triangolo regolare
  - le tensioni delle impedenze coincidono con le tensioni concatenate e quindi sono ruotate di $\pi/6$ rispetto alle tensioni principali di fase
  - le correnti delle impedenze sono ruotate di $\pi/6$ rispetto alle correnti di linea
  - ➡ anche in questo caso φ rappresenta l'argomento delle impedenze





Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati (4)

- Potenza attiva

$$P = 3E_0 I \cos\varphi = \sqrt{3} VI \cos\varphi$$

- Potenza reattiva

$$Q = 3E_0 I \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} VI \operatorname{sen}\varphi$$

- Potenza apparente

$$S = 3E_0 I = \sqrt{3} VI$$

- Fattore di potenza

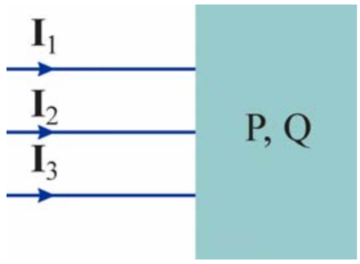
$$\cos\Phi = \cos\varphi$$

(per un carico regolare a stella o a triangolo Φ rappresenta l'argomento delle impedenze di carico)

Rifasamento di un carico trifase (1)

- Si considera un carico regolare, alimentato da una terna simmetrica di tensioni concatenate con valore efficace V, che assorbe potenza attiva P e potenza reattiva Q
- Il valore efficace I delle correnti di linea è

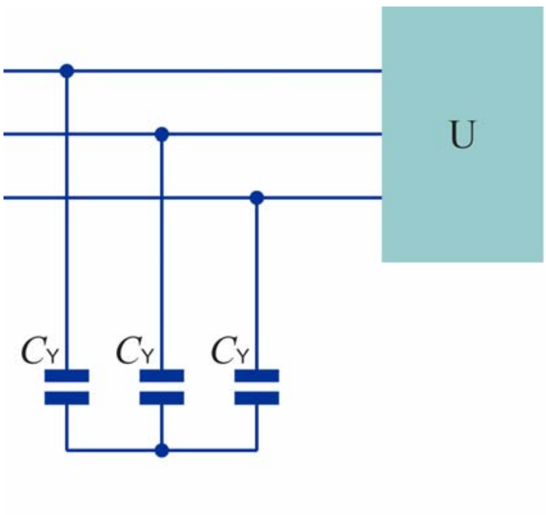
$$I = \frac{P}{\sqrt{3}\,V\cos\varphi}$$

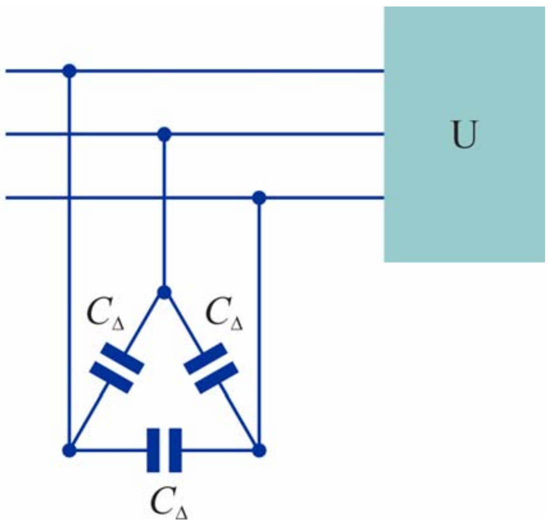


- A parità di tensioni concatenate e potenza attiva fornita al carico, il valore efficace delle correnti di linea diminuisce all'aumentare del fattore di potenza e, quindi, al diminuire della potenza reattiva

$$Q = P\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Rifasamento di un carico trifase (2)





- Per portare il fattore di potenza da $\cos\varphi$ a $\cos\varphi'$ si impiegano tre bipoli reattivi uguali collegati a stella o a triangolo tali da assorbire la potenza reattiva

$$Q_R = P(tg\varphi' - tg\varphi)$$

Rifasamento di un carico trifase (3)

- Il caso più frequente nella pratica è quello di un carico ohmico-induttivo
  - ➡ i bipoli reattivi sono condensatori
- Valori efficaci delle tensioni dei condensatori
  - collegamento a stella

$$V_C^{Y} = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

$V =$ valore efficace delle tensioni concatenate

  - collegamento a triangolo

$$V_C^{\Delta} = V = \sqrt{3}\,V_C^{Y}$$

➡ Potenza reattiva assorbita dai tre condensatori

$$Q_R = -3\omega C V_C^2 = -\omega C_Y V^2 = -3\omega C_\Delta V^2$$

Rifasamento di un carico trifase (4)

- Capacità di rifasamento
  - collegamento a stella

$$C_Y = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega V^2}$$

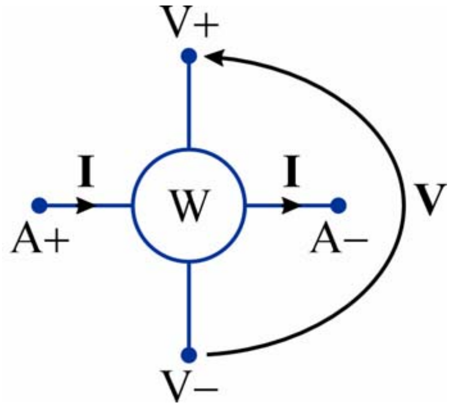
  - collegamento a triangolo

$$C_\Delta = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{3\omega V^2} = \frac{C_Y}{3}$$

- Nel caso del collegamento a stella la capacità è 3 volte maggiore, mentre la tensione sui condensatori è inferiore di un fattore $\sqrt{3}$
- Dato che il costo di un condensatore aumenta sia con la capacità che con la massima tensione di funzionamento, la scelta del tipo di collegamento dipende dal fattore che incide in misura maggiore

Wattmetro

- La potenza attiva viene misurata mediante uno strumento, detto **wattmetro**, dotato di due porte
  - **porta ampermetrica**: terminali A+ A–
  - **porta voltmetrica**: terminali V+ V–



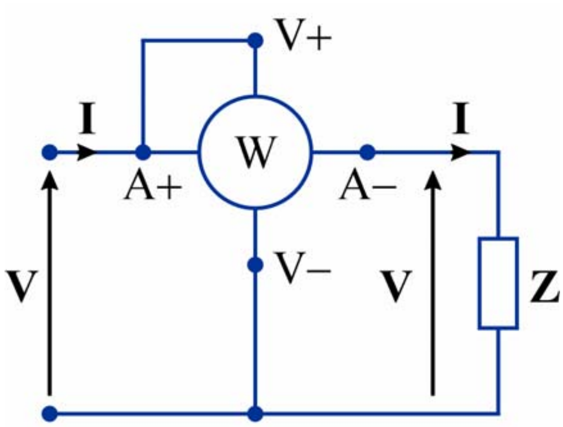
- L'indicazione dello strumento corrisponde al prodotto dei valori efficaci della corrente alla porta ampermetrica e della tensione alla porta voltmetrica per il coseno dell'angolo di sfasamento φ fra la tensione e la corrente

$$P_{\mathrm{W}} = VI\cos\varphi = VI\cos\widehat{\mathbf{VI}} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}\mathbf{I}^{*}\right]$$

- Le coppie di terminali sono orientate, dato che l'inversione dei terminali di una delle porte causa l'inversione del segno di $\cos\varphi$

Collegamento di un wattmetro

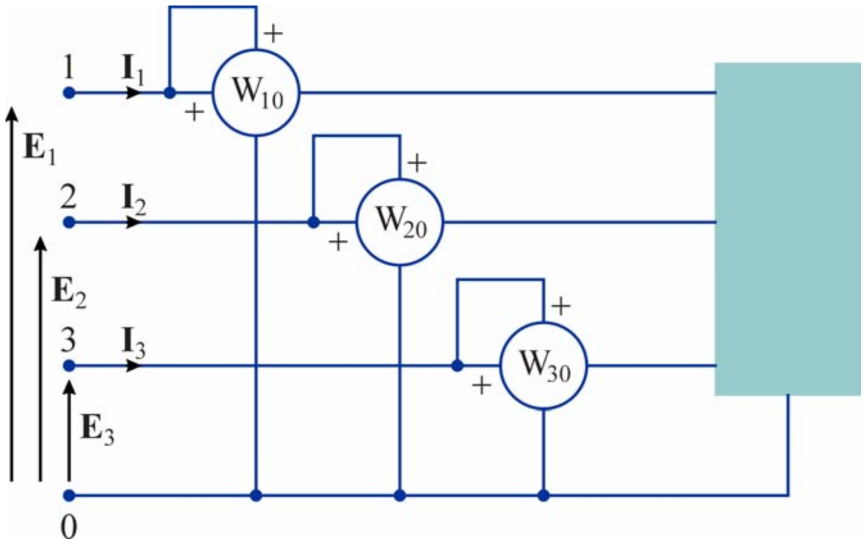
- Per misurare la potenza attiva scambiata da un bipolo (o a una porta di un componente multipolare), la porta ampermetrica viene collegata in serie e la porta voltmetrica viene collegata in parallelo



- Per un wattmetro ideale la tensione tra i terminali della porta ampermetrica e la corrente attraverso la porta voltmetrica sono uguali a zero
  - ➡ L'inserimento del wattmetro non altera il funzionamento del circuito

Misura della potenza in sistemi con neutro

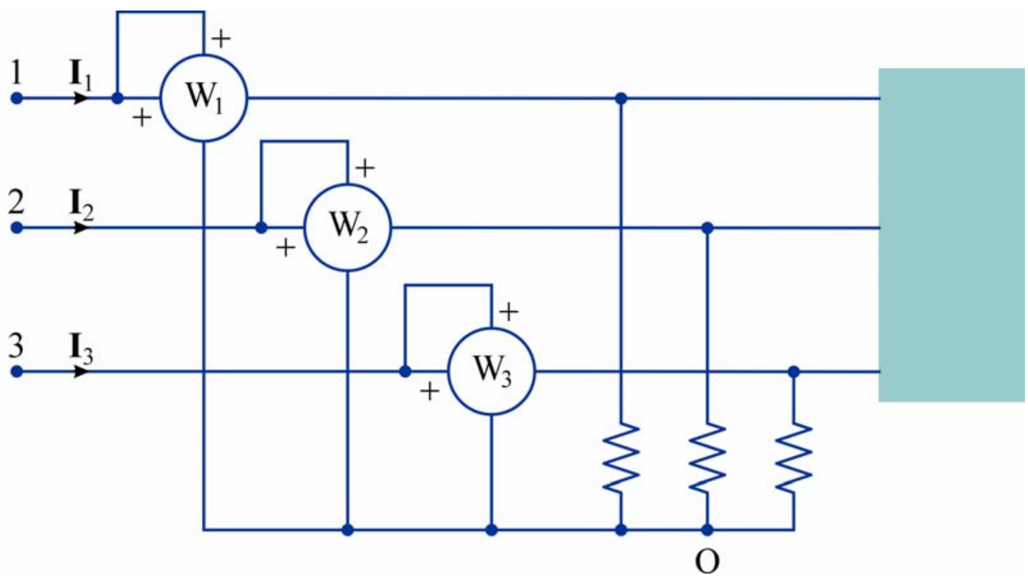
- In un sistema trifase con neutro è possibile misurare la potenza attiva mediante tre wattmetri inseriti tra ciascuna delle fasi e il neutro



$$P = P_{W10} + P_{W20} + P_{W30} = E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 + E_3 I_3 \cos\varphi_3$$

Misura della potenza in sistemi senza neutro

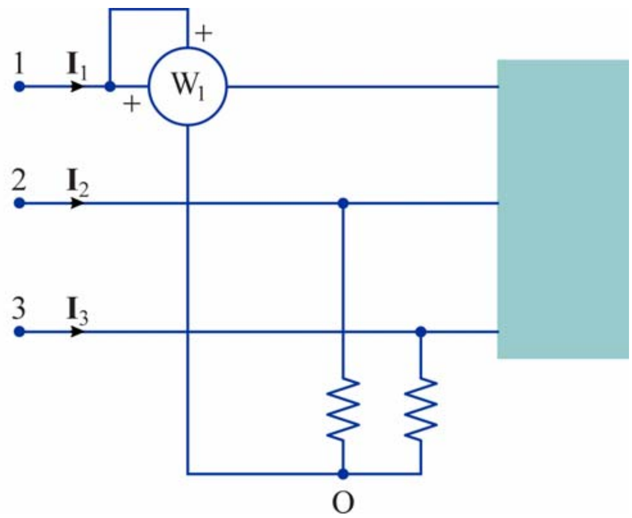
- Per i sistemi senza neutro, è possibile rendere disponibili le tensioni di fase mediante una stella di impedenze (di valore sufficientemente alto da non perturbare il comportamento del circuito)



$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} = E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 + E_3 I_3 \cos\varphi_3$$

Sistemi simmetrici ed equilibrati

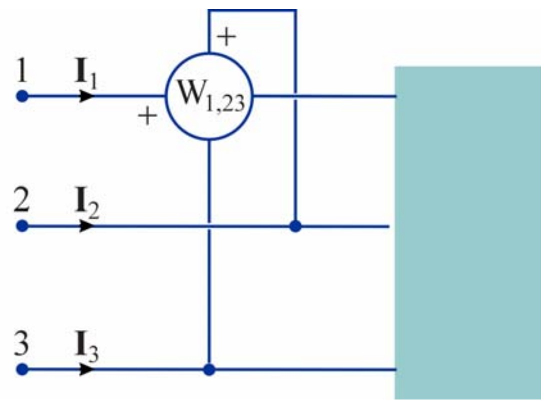
- In un sistema equilibrato è possibile misurare la potenza attiva anche mediante un solo wattmetro
- Per rendere disponibile la tensione principale di fase $\mathbf{E}_{10}$ si utilizzano due resistenze di valore uguale alla resistenza interna della porta voltmetrica del wattmetro



$$P = 3P_{W1} = 3EI\cos\varphi = \sqrt{3}VI\cos\varphi$$

Inserzione di un wattmetro in quadratura (1)

- Un wattmetro è inserito **in quadratura** se i terminali positivo e negativo della porta voltmetrica sono collegati alle due fasi successive a quella a cui è collegata la porta ampermetrica



- In questo caso l'indicazione del wattmetro è

$$P_{W1,23} = V_{23} I_1 \cos \mathbf{V}_{23}\hat{\ }\mathbf{I}_1 = \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_1^*\right]$$

Inserzione di un wattmetro in quadratura (2)

- Si dice che il wattmetro è in quadratura perché, se il sistema è simmetrico, la tensione applicata alla porta voltmetrica è sfasata in quadratura (in ritardo) rispetto alla tensione di fase corrispondente alla linea a cui è collegata la porta ampermetrica

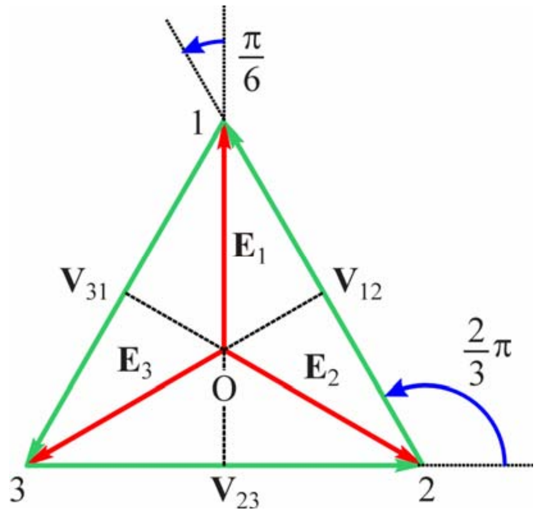
$$\mathbf{V}_{23} = -j\sqrt{3}\mathbf{E}_1$$

- Quindi si ha

$$P_{\mathrm{W}1,23} = \mathrm{Re}\left[-j\sqrt{3}\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^*\right] = \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^*\right] =$$

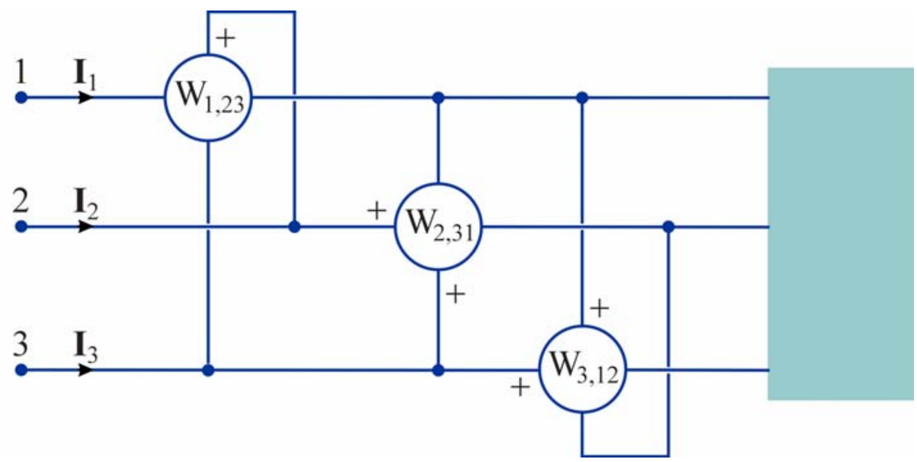
$$= \sqrt{3}E_1I_1 \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1} = \sqrt{3}E_1I_1 \operatorname{sen} \varphi_1$$

$$\left[\ \mathrm{Re}[-j(a+jb)] = \mathrm{Re}[b-ja] = \mathrm{Im}[a+jb]\ \right]$$



Misura della potenza reattiva

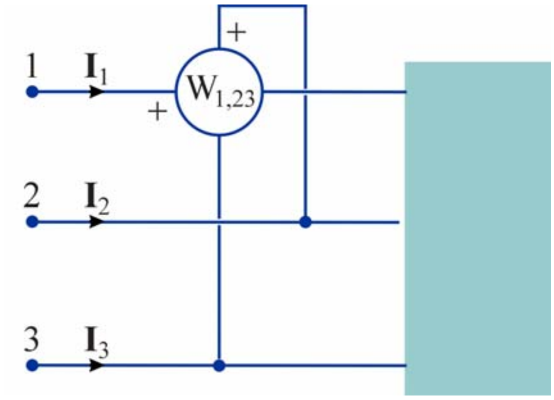
- In un sistema simmetrico, è possibile misurare la potenza reattiva mediante tre wattmetri in quadratura
- Questo metodo si può utilizzare anche in un sistema con neutro



$$Q = \frac{P_{\mathrm{W}1,23} + P_{\mathrm{W}2,31} + P_{\mathrm{W}3,12}}{\sqrt{3}} = E_1I_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + E_2I_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + E_3I_3 \operatorname{sen}\varphi_3$$

Misura della potenza reattiva in un sistema simmetrico e equilibrato

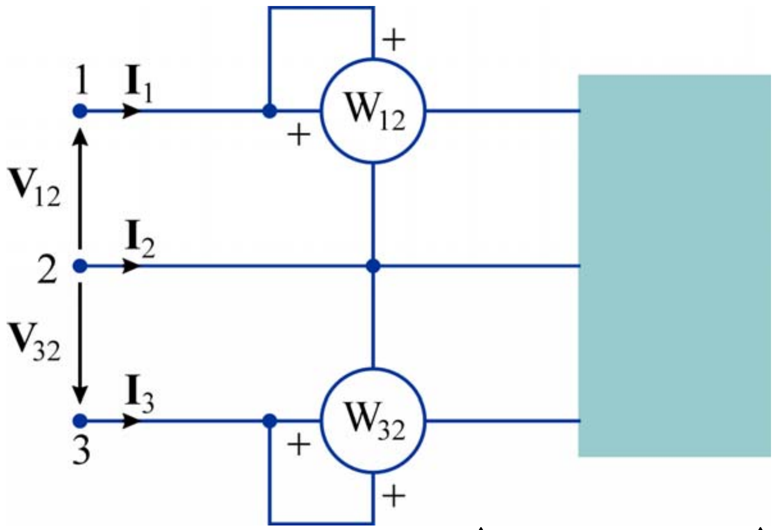
- In un sistema simmetrico e equilibrato è possibile misurare la potenza reattiva mediante un solo wattmetro in quadratura



$$Q = \sqrt{3} P_{W1,23} = \sqrt{3} VI \operatorname{sen} \varphi = 3EI \operatorname{sen} \varphi$$

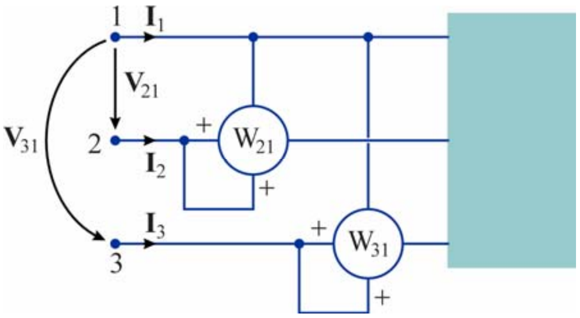
Inserzione Aron

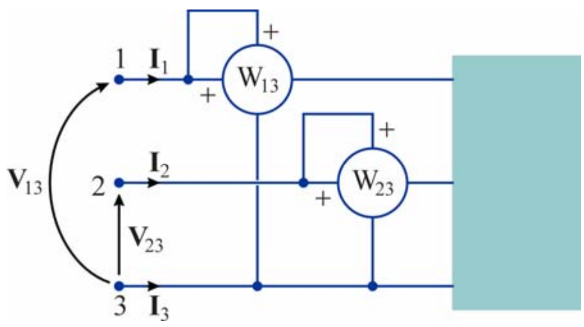
- Nei sistemi senza neutro, la potenza attiva può essere misurata anche mediante due soli wattmetri con le porte ampermetriche in serie a due linee (scelte arbitrariamente) e con le porte voltmetriche che collegano le due linee alla terza (**inserzione Aron**)



$$P = P_{W12} + P_{W32} = V_{12} I_1 \cos \widehat{\mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_1} + V_{32} I_3 \cos \widehat{\mathbf{V}_{32}\mathbf{I}_3}$$

Inserzioni equivalenti





$$P = P_{W21} + P_{W31} =$$
$$= V_{21} I_2 \cos \widehat{\mathbf{V}_{21}\mathbf{I}_2} + V_{31} I_3 \cos \widehat{\mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_3}$$

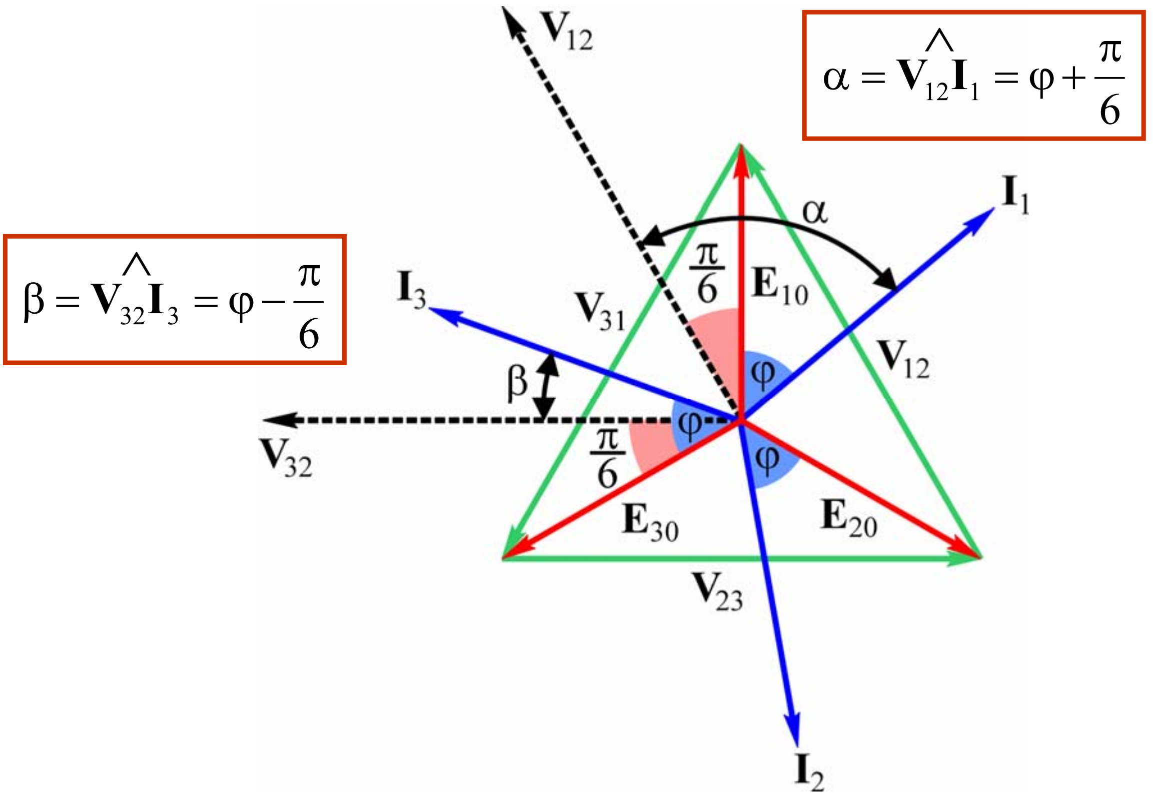
$$P = P_{W13} + P_{W23} =$$
$$= V_{13} I_1 \cos \widehat{\mathbf{V}_{13}\mathbf{I}_1} + V_{23} I_2 \cos \widehat{\mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_2}$$

Inserzione Aron in sistemi simmetrici ed equilibrati

- L'inserzione Aron può essere utilizzata per misurare la potenza attiva in un generico sistema trifase privo di neutro (quindi anche in sistemi dissimmetrici e squilibrati)
- Nel caso di un sistema simmetrico ed equilibrato, dalle indicazioni dei due wattmetri è possibile determinare anche la potenza reattiva
- Si indica con φ l'angolo di sfasamento tra le tensioni principali di fase e le correnti di linea (che coincide con l'argomento delle impedenze)
- Mediante considerazioni geometriche è possibile riconoscere che gli angoli che compaiono nelle espressioni delle potenze misurate dai due wattmetri sono

$$\alpha = \widehat{\mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_1} = \varphi + \frac{\pi}{6}$$
$$\beta = \widehat{\mathbf{V}_{32}\mathbf{I}_3} = \varphi - \frac{\pi}{6}$$

Angoli di sfasamento



Potenze misurate dai wattmetri

- Le potenze misurate dai due wattmetri possono essere espresse nel modo seguente

$$P_{W12} = V_{12} I_1 \cos\alpha = VI\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = VI\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} VI\cos\varphi - \frac{1}{2} VI\operatorname{sen}\varphi$$

$$P_{W32} = V_{32} I_3 \cos\beta = VI\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = VI\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} VI\cos\varphi + \frac{1}{2} VI\operatorname{sen}\varphi$$

Misura della potenza attiva e reattiva

- La somma delle potenze coincide con la potenza attiva

$$P_{W12} + P_{W32} = \sqrt{3} VI \cos\varphi = P$$

- Dalla differenza tra le potenze si può ricavare la potenza reattiva

$$P_{W32} - P_{W12} = VI \operatorname{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{3}\left(P_{W32} - P_{W12}\right)$$

- Quindi il fattore di potenza è

$$\cos\varphi = \cos\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\,\frac{P_{W32} - P_{W12}}{P_{W12} + P_{W32}}\right)\right]$$

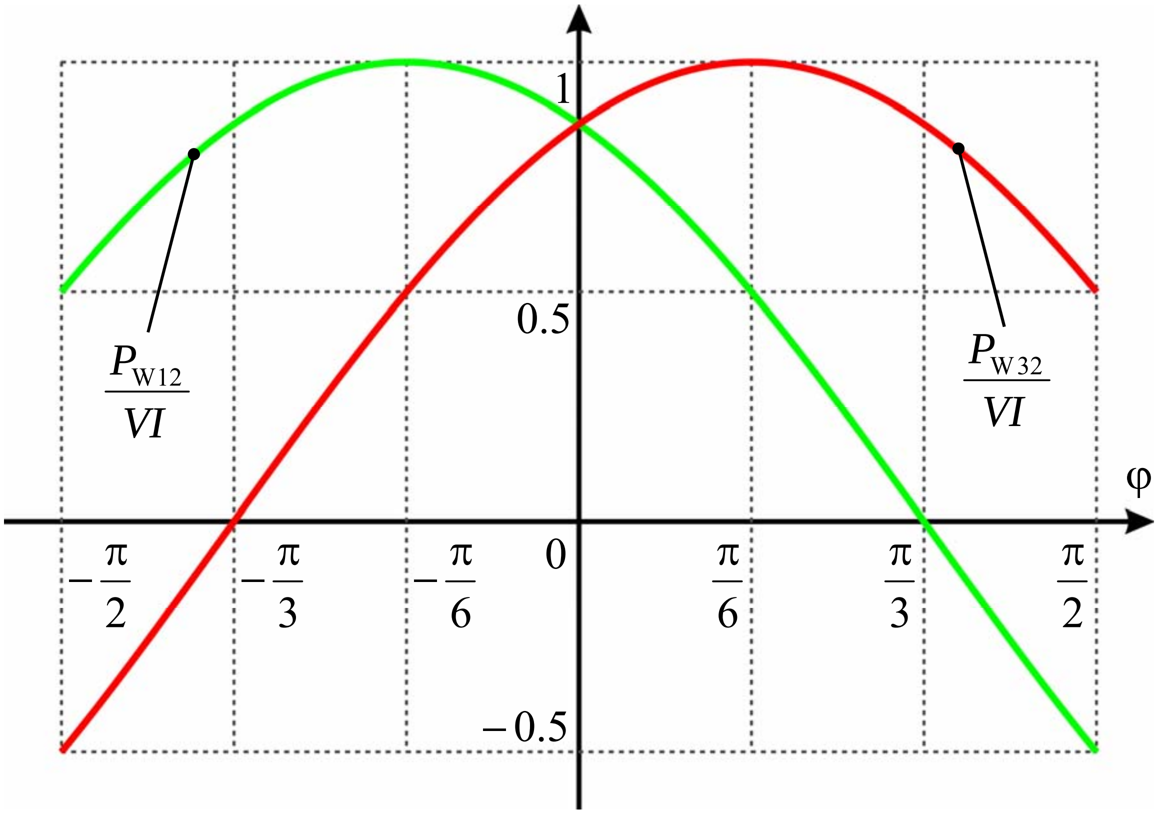
Potenze misurate dai wattmetri in funzione di φ

- Assumendo $P \geq 0$, le indicazioni dei due wattmetri sono entrambe positive se

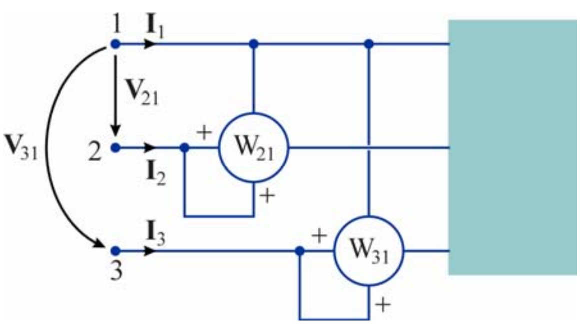
$$-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi > 0.5$$

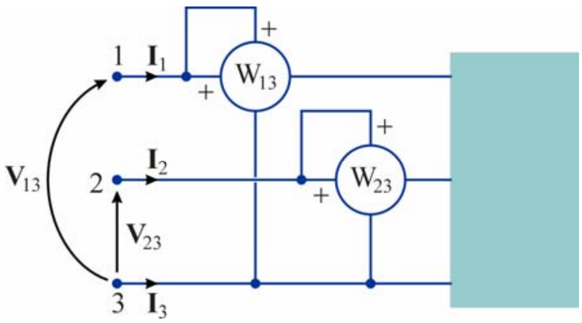
- Le indicazioni dei due wattmetri sono uguali se e solo se il carico è puramente resistivo
- Se il carico non è puramente resistivo
  - $P_{W32} > P_{W12} \Leftrightarrow$ la reattanza del carico è induttiva
  - $P_{W12} > P_{W32} \Leftrightarrow$ la reattanza del carico è capacitiva

Potenze misurate dai wattmetri in funzione di φ



Inserzioni equivalenti





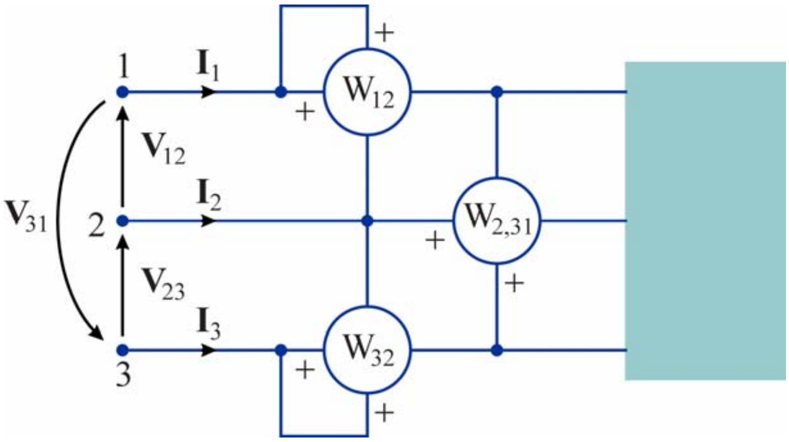
$$Q = \sqrt{3}(P_{W21} - P_{W31})$$

$$Q = \sqrt{3}(P_{W13} - P_{W23})$$

- Si può notare che nelle espressioni della potenza reattiva si attribuisce sempre segno – all'indicazione del wattmetro per cui terminali della porta voltmetrica sono disposti secondo la sequenza ciclica delle fasi e segno + a quella del wattmetro i cui terminali sono disposti in senso opposto

Inserzione Righi (1)

- In un sistema simmetrico e squilibrato è possibile misurare la potenza attiva e la potenza reattiva aggiungendo ai due wattmetri in inserzione Aron un terzo wattmetro in quadratura (**inserzione Righi**)



$$P = P_{W12} + P_{W32} \qquad Q = \frac{P_{W32} - P_{W12} + 2P_{W2,31}}{\sqrt{3}}$$

Inserzione Righi (2)

Dimostrazione

- La differenza tra le indicazioni dei due wattmetri in inserzione Aron è

$$\begin{aligned}P_{W32} - P_{W12} &= \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_{32}\mathbf{I}_3^* - \mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_1^*\right] = \\ &= \mathrm{Re}\left[j\sqrt{3}\mathbf{E}_1(-\mathbf{I}_1^* - \mathbf{I}_2^*) + j\sqrt{3}\mathbf{E}_3(-\mathbf{I}_2^* - \mathbf{I}_3^*)\right] = \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* + (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3)\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*\right] = \\ &= \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* - \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*\right]\end{aligned}$$

- L'indicazione del wattmetro in quadratura è

$$P_{W2,31} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_2^*\right] = \mathrm{Re}\left[-j\sqrt{3}\mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^*\right] = \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^*\right]$$

➡ Quindi complessivamente si ha

$$P_{W32} - P_{W12} + 2P_{W2,31} = \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* + \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*\right] = \sqrt{3}\cdot Q$$

Nota

- Se il sistema è anche equilibrato risulta

$$\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* = \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* = \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^* = EI(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

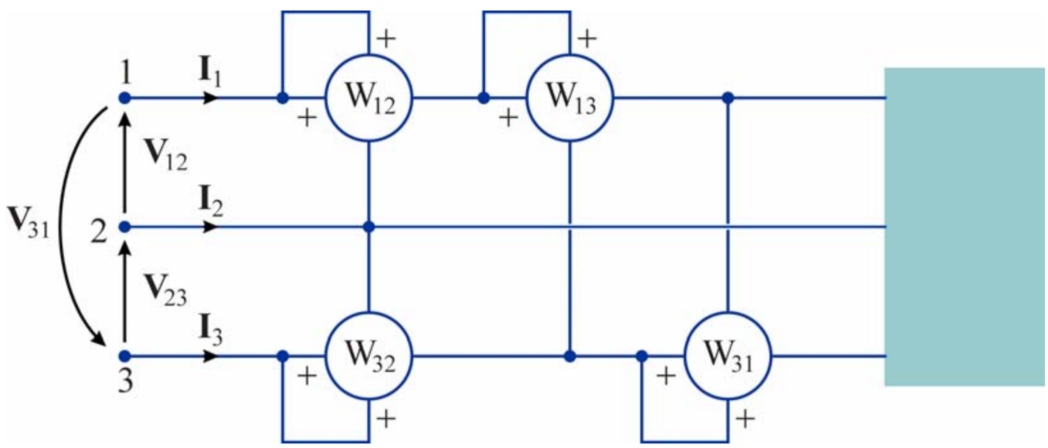
- Quindi si riottiene che

$$P_{W32} - P_{W12} = \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* - \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*\right] =$$
$$= \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^*\right] = \sqrt{3}EI\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

- DI conseguenza, se il sistema è equilibrato, per determinare la potenza reattiva sono sufficienti le sole indicazioni dei due wattmetri in inserzione Aron

Inserzione Barbagelata (1)

- Al posto del wattmetro in quadratura si possono utilizzare due wattmetri disposti in modo simmetrico sulle stesse linee a cui sono collegate le porte ampermetriche dei wattmetri in Aron (**inserzione Barbagelata**)



$$P = P_{W12} + P_{W32} \qquad Q = \frac{P_{W32} - P_{W12} + 2(P_{W13} - P_{W31})}{\sqrt{3}}$$

Inserzione Barbagelata (2)

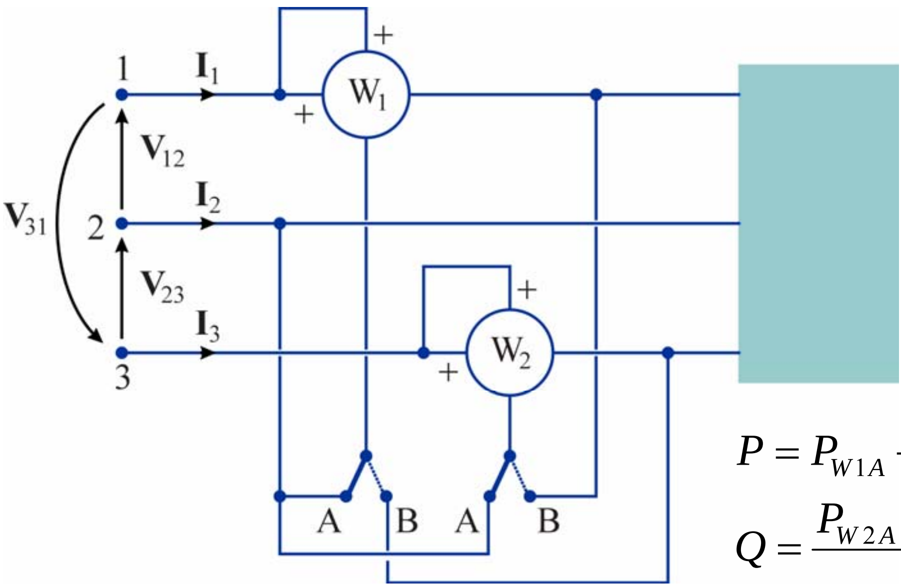
Dimostrazione

- Per dimostrare l'espressione della potenza reattiva, è sufficiente verificare che la differenza tra le indicazioni dei due wattmetri in inserzione simmetrica coincide con l'indicazione del wattmetro in quadratura utilizzato nell'inserzione Righi

$$
\begin{aligned}
P_{W13} - P_{W31} &= \mathrm{Re}\left[-\mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_1^* - \mathbf{V}_{31}\mathbf{I}_3^*\right] = \\
&= \mathrm{Re}\left[-j\sqrt{3}\mathbf{E}_2(-\mathbf{I}_1^* - \mathbf{I}_3^*)\right] = \mathrm{Re}\left[-j\sqrt{3}\mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^*\right] = \\
&= \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^*\right] = P_{W2,31}
\end{aligned}
$$

Inserzione Barbagelata (3)

- Se il carico non varia nel tempo, è possibile utilizzare due soli wattmetri ed eseguire due letture con i wattmetri in inserzione Aron (commutatori in posizione A) e con i wattmetri in inserzione simmetrica (commutatori in posizione B)



$$P = P_{W1A} + P_{W2A}$$

$$Q = \frac{P_{W2A} - P_{W1A} + 2(P_{W1B} - P_{W2B})}{\sqrt{3}}$$

Principali vantaggi dei sistemi trifase

- In un sistema simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante
  - L'energia elettrica è ottenuta convertendo l'energia meccanica fornita al rotore
  - In un sistema monofase la potenza istantanea è variabile e, se il carico non è puramente resistivo, in alcuni istanti è anche negativa
    - ➨ Dato che ω deve essere costante è necessario applicare al rotore una coppia variabile
  - In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è richiesta una coppia costante
- A parità di condizioni, in un sistema trifase le perdite nelle linee di trasporto dell'energia elettrica sono inferiori
- Un sistema di correnti trifase può essere utilizzato per generare un **campo magnetico rotante**, su cui si basa il funzionamento delle macchine elettriche rotanti in corrente alternata

Trasmissione dell'energia elettrica

- Confronto tra
  - linea in corrente continua
  - linea in corrente alternata monofase
  - linea in corrente alternata trifase
- l = lunghezza della linea
- P = potenza assorbita dal carico in corrente continua
  = potenza attiva assorbita dal carico in corrente alternata
- V = tensione sul carico in corrente continua
  = valore efficace della tensione sul carico monofase
  = valore efficace delle tensioni concatenate della linea trifase

Correnti nella linea (1)

- Corrente della linea in corrente continua

$$I_{\mathrm{CC}} = \frac{P}{V}$$

- Valore efficace della corrente della linea monofase

$$I_{\mathrm{CAM}} = \frac{P}{V\cos\varphi}$$

- Valore efficace delle correnti della linea trifase

$$I_{\mathrm{CAT}} = \frac{P}{\sqrt{3}\,V\cos\varphi}$$

(si assume che i fattori di potenza del carico monofase e del carico trifase siano uguali)

Potenza dissipata nella linea

- Potenza dissipata nella linea

$$P_{\mathrm{D}} = nRI^2 = n\rho\frac{l}{S}I^2 = n^2\rho\frac{l^2}{\tau}I^2$$

  - n = numero di conduttori
  - R = resistenza di un conduttore
  - l = lunghezza della linea
  - S = sezione di un conduttore
  - ρ = resistività
  - τ = volume totale dei conduttori
    $\tau = nlS$
  - I = (nei tre casi) I_{CC}, I_{CAM}, I_{CAT}

Potenza dissipata nella linea (2)

- Inserendo nell'espressione di P_D il numero di conduttori e l'espressione della corrente si ottiene nei tre casi

$$P_{DCC} = 4\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{CC} V^2} = \frac{4K}{\tau_{CC}}$$

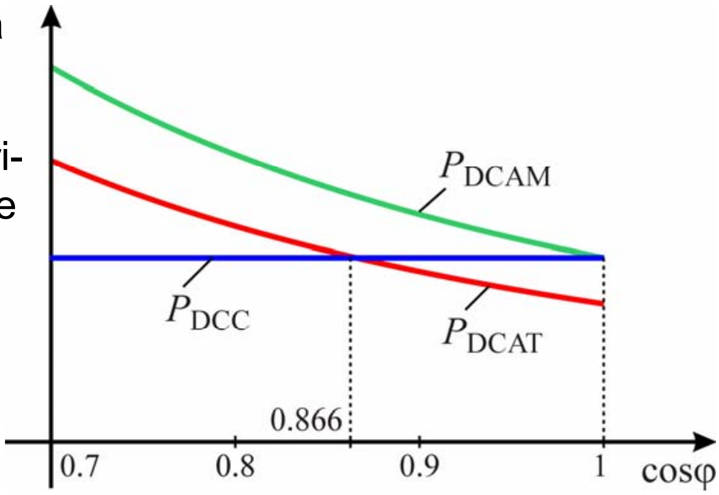
$$P_{DCAM} = 4\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{CAM} V^2 \cos^2\varphi} = \frac{4K}{\tau_{CAM} \cos^2\varphi}$$

$$P_{DCAT} = 3\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{CAT} V^2 \cos^2\varphi} = \frac{3K}{\tau_{CAT} \cos^2\varphi}$$

dove $K = \rho \frac{l^2 P^2}{V^2}$ non dipende dal tipo di linea

Confronto (1)

- A parità di volume dei conduttori
  - Le perdite nella linea trifase sono sempre inferiori del 25% rispetto a quelle della linea monofase
  - Le perdite nella linea monofase sono maggiori di quelle nella linea in continua tranne che nel caso di $\cos\varphi = 1$, in cui sono uguali
  - Per $\cos\varphi > \sqrt{3}/2 \cong 0.866$ le perdite nella linea trifase sono minori di quelle nella linea in continua
- A parità di perdite
  - La linea trifase consente di risparmiare il 25% di materiale conduttore rispetto alla linea monofase
  - Per valori elevati di $\cos\varphi$, è più conveniente anche della linea in continua



Confronto (2)

- Ulteriori vantaggi dei sistemi in corrente alternata (trifase) rispetto ai sistemi in corrente continua
  - Maggiore affidabilità dei generatori e dei motori in corrente alternata rispetto a quelli in corrente continua
  - Possibilità di variare i livelli di tensione e corrente mediante trasformatori (semplici, affidabili e capaci di rendimenti molto elevati), mentre per i sistemi in corrente continua sono necessari convertitori statici (più complessi e costosi)

Linee in corrente continua

- Le linee in corrente continua sono utilizzate prevalentemente per attraversare lunghi tratti di mare mediante cavi sottomarini perché, in questo caso, forniscono diversi vantaggi rispetto alle linee in alternata
  - Se la tensione continua è pari al valore efficace della tensione alternata, l'isolamento del cavo deve sopportare una tensione minore
  - Si hanno minori cadute di tensione dato che in corrente continua non è presente il contributo dovuto alle induttanze della linea
  - Si evitano i problemi legati alle capacità parassite tra i conduttori (in corrente alternata, la corrente dovuta alla carica e scarica delle capacità parassite determina un incremento delle correnti nelle linee e quindi delle perdite)
  - E' possibile ridurre il costo della linea impiegando un solo conduttore e utilizzando il mare come conduttore di ritorno

Trazione elettrica

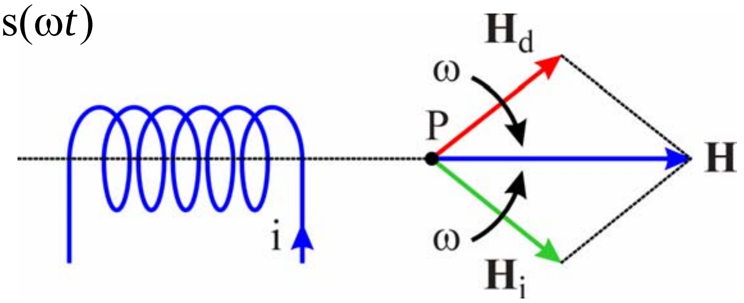
- L'alimentazione in corrente continua è ampiamente utilizzata nella trazione elettrica (treni, metropolitane, tram)
- In passato i motori in corrente continua erano ritenuti più idonei alla trazione perché in grado di fornire elevate coppie di spunto e per la maggiore semplicità della regolazione della velocità
- La trazione ferroviaria italiana fa uso di linee unipolari in corrente continua a 3000 V (come conduttore di ritorno si utilizza il terreno)
- Attualmente, in seguito allo sviluppo dell'elettronica di potenza, si preferisce utilizzare motori in corrente alternata (alimentati mediante convertitori statici) anche in presenza di alimentazione in continua (➡ i locomotori sono in grado di adattarsi sia all'alimentazione in continua che a quella in alternata)
- Nelle nuove linee ad alta velocità, per fare fronte alle maggiori potenze richieste, si utilizza un'alimentazione in corrente alternata a 25000 V

Campo magnetico rotante

- **Campo magnetico rotante** = campo magnetico avente intensità costante e direzione che ruota attorno ad un asse con velocità angolare costante ω
- Un campo magnetico rotante può essere prodotto facendo ruotare con velocità angolare costante un magnete permanente o un solenoide percorso da corrente costante
- E' possibile generare un campo magnetico rotante anche mediante un insieme di avvolgimenti fissi, opportunamente disposti e percorsi da correnti sinusoidali opportunamente sfasate tra loro

Campi controrotanti (1)

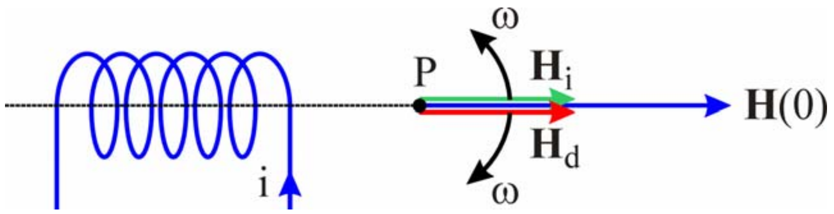
- Solenoide percorso da una corrente sinusoidale $i(t) = I_M \cos(\omega t)$
- Si considera il campo in un punto P dell'asse del solenoide
- Il campo magnetico ha direzione assiale e varia con legge sinusoidale
  $H(t) = H_M \cos(\omega t)$



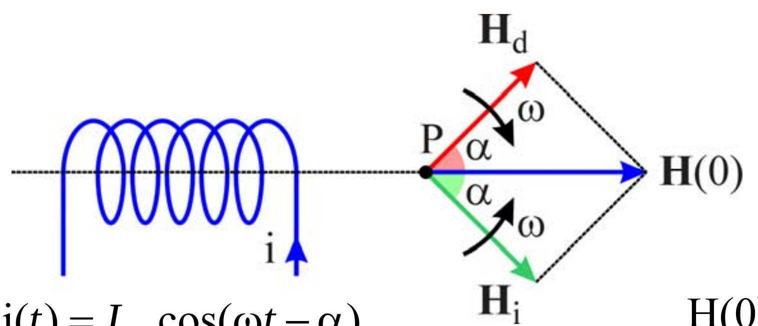
- Il campo magnetico può essere scomposto nella somma di due vettori di modulo $H_M/2$ che ruotano, uno in senso opposto all'altro, con velocità angolare ω attorno al punto P in un piano passante per l'asse del solenoide
  - $\mathbf{H}_d$ = **campo diretto** ➨ rotazione in senso orario
  - $\mathbf{H}_i$ = **campo inverso** ➨ rotazione in senso antiorario

Campi controrotanti (2)

- Una rotazione in ritardo di un angolo α della fase della corrente produce rotazioni di un angolo α, in senso opposto tra loro, dei campi $\mathbf{H}_d$ e $\mathbf{H}_i$



$i(t) = I_M \cos(\omega t)$ $\quad$ $H(0) = H_M$



$i(t) = I_M \cos(\omega t - \alpha)$ $\quad$ $H(0) = H_M \cos\alpha$

Campo magnetico rotante prodotto da due correnti in quadratura (1)

- Si considerano due solenoidi identici, posti alla stessa distanza dal punto P
- Agendo sulle fasi delle correnti e sull'orientamento dei due solenoidi è possibile fare in modo che essi producano nel punto P
  - campi diretti in fase tra loro
  - campi inversi in opposizione di fase
- In pratica occorre
  - che la corrente del secondo solenoide sia in quadratura in ritardo rispetto alla corrente del primo
  - che l'asse del secondo solenoide sia ruotato in senso orario di 90° rispetto all'asse del primo

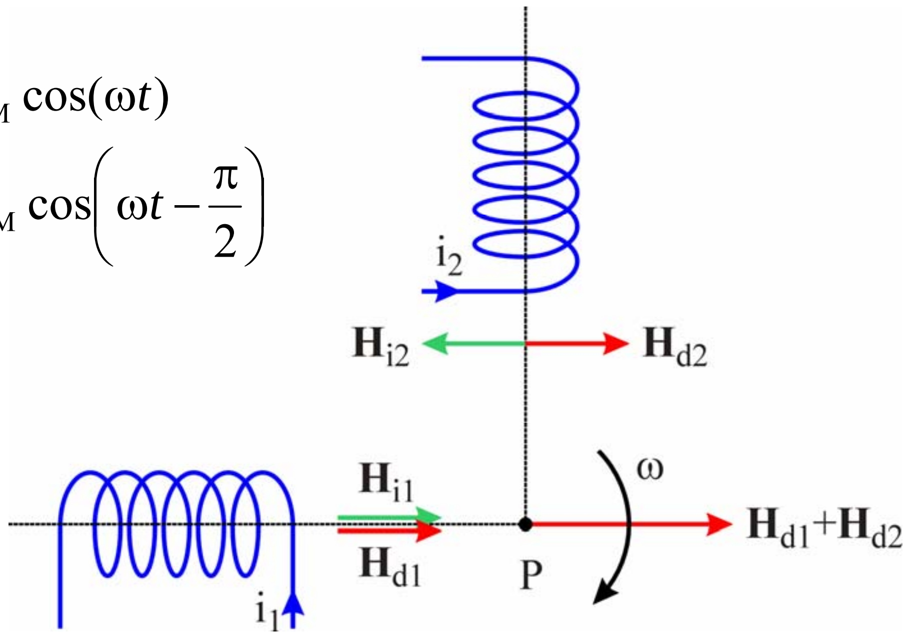
➡ I campi inversi si elidono, mentre i campi diretti si sommano

➡ Viene generato un campo magnetico rotante

Campo magnetico rotante prodotto da due correnti in quadratura (2)

$$\mathrm{i}_1(t) = I_\mathrm{M}\cos(\omega t)$$

$$\mathrm{i}_2(t) = I_\mathrm{M}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



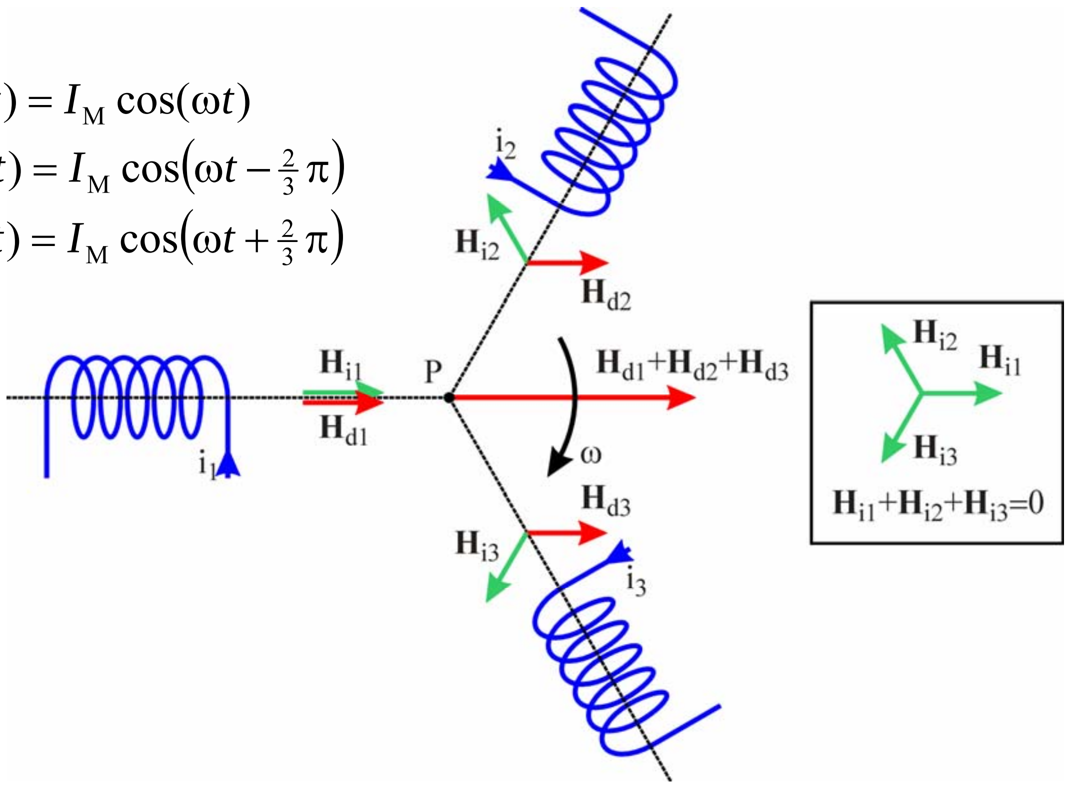
$$\mathbf{H}_{\mathrm{i}1} + \mathbf{H}_{\mathrm{i}2} = 0$$

Campo magnetico rotante prodotto da un sistema di correnti trifase (1)

- Disponendo di un'alimentazione trifase, si può ottenere un campo rotante mediante tre solenoidi identici
  - ciascuno avente l'asse ruotato di 120° in senso orario rispetto al precedente
  - percorsi da una terna equilibrata diretta di correnti
- Per i campi diretti, gli effetti della rotazione del solenoide e della rotazione della fase della corrente si compensano
  - ➡ i campi diretti si sommano
- I campi inversi formano una terna simmetrica
  - ➡ i campi inversi si elidono

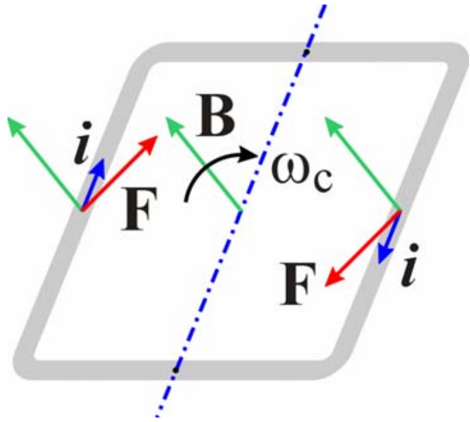
Campo magnetico rotante prodotto da un sistema di correnti trifase (2)

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega t)$$
$$i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi\right)$$
$$i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi\right)$$



Motore a induzione - principio di funzionamento (1)

- Si considera una spira libera di ruotare attorno ad un asse, posta in una regione in cui è presente un campo magnetico rotante con velocità angolare ω_c
- Il flusso concatenato con la spira varia nel tempo
- ➡ Viene indotta una f.e.m. e quindi nella spira circola corrente
- ➡ La spira percorsa da corrente è soggetta a forze che la fanno ruotare in senso concorde con il campo magnetico
- La rotazione della spira nello stesso senso del campo tende ad annullare la variazione del flusso concatenato
- ➡ In accordo con la legge di Lenz, le forze tendono ad opporsi alla causa che le ha generate



Motore a induzione - principio di funzionamento (2)

- Idealmente la spira tenderebbe a raggiungere una velocità di rotazione coincidente con quella del campo (**velocità di sincronismo**)
- In pratica la spira non può raggiungere la velocità del campo rotante perché in queste condizioni il flusso concatenato sarebbe costante e di conseguenza la coppia agente sulla spira si annullerebbe
- A regime la spira ruota ad una velocità, inferiore alla velocità di sincronismo, in corrispondenza della quale la coppia dovuta al campo magnetico e la coppia resistente (ad es. dovuta all'attrito) si bilanciano
- ➡ Da questo deriva il nome **macchina asincrona**