

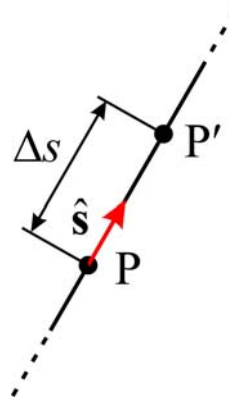
# Operatori differenziali

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 22-3-2019)

## Derivata direzionale

- Dato un punto  $P$  appartenente a una regione in cui è definito un campo scalare  $f(P)$ , si considera la retta passante per  $P$  individuata da un versore  $\hat{s}$  e si indica con  $P'$  un punto sulla retta a distanza  $\Delta s$  da  $P$
- La **derivata direzionale** del campo scalare  $f$  nella direzione individuata da  $\hat{s}$  è definita dal limite

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(P') - f(P)}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(P + \Delta s \hat{s}) - f(P)}{\Delta s}\end{aligned}$$



## Gradiente di un campo scalare

- Il **gradiente** di un campo scalare  $f(P)$  è un vettore la cui proiezione nella direzione individuata da un versore  $\hat{s}$  è uguale alla derivata direzionale di  $f$  nella direzione di  $\hat{s}$

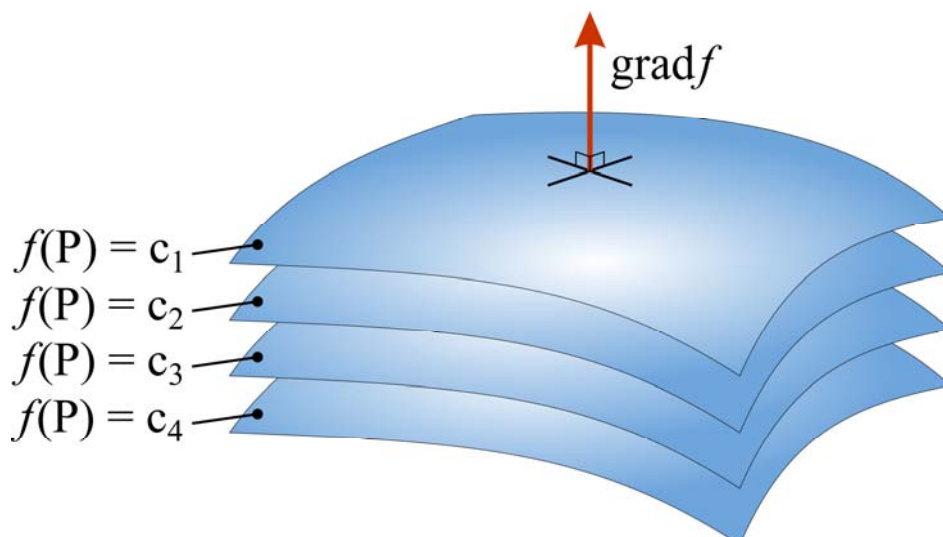
$$\frac{df}{ds} = \text{grad} f \cdot \hat{s}$$

- ➔ La direzione e il verso del gradiente sono quelli del versore  $\hat{s}$  con cui si ottiene il massimo valore della derivata direzionale e, quindi, il massimo incremento di  $f$
- ➔ Il modulo del gradiente coincide con il valore massimo della derivata

3

## Gradiente di un campo scalare

- Se si considera una generica direzione  $\hat{s}$  ortogonale al gradiente, la derivata direzionale lungo  $\hat{s}$  risulta uguale a zero
- ➔ Il gradiente è ortogonale alle superfici di livello di  $f(P)$ , cioè alle superfici sulle quali  $f(P) = \text{costante}$



4

## Gradiente in coordinate cartesiane

- La definizione che è stata data per il gradiente è **intrinseca**, cioè non dipende dal tipo di coordinate utilizzate
- Nel caso di un sistema di coordinate cartesiane, considerando i prodotti scalari del gradiente con i versori degli assi coordinati, si ricava

$$\text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{df}{dx} \quad \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{df}{dy} \quad \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{df}{dz}$$

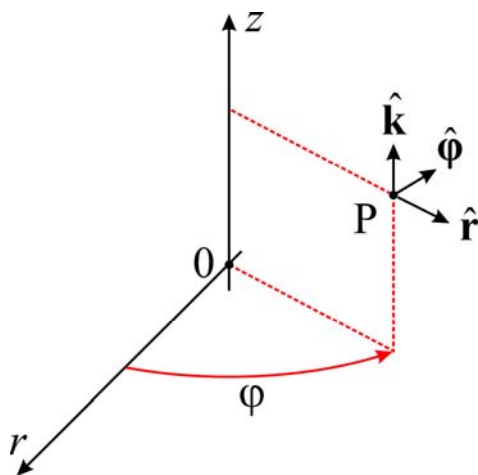
- ➔ Quindi l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane è

$$\text{grad} f = \frac{df}{dx} \hat{\mathbf{i}} + \frac{df}{dy} \hat{\mathbf{j}} + \frac{df}{dz} \hat{\mathbf{k}}$$

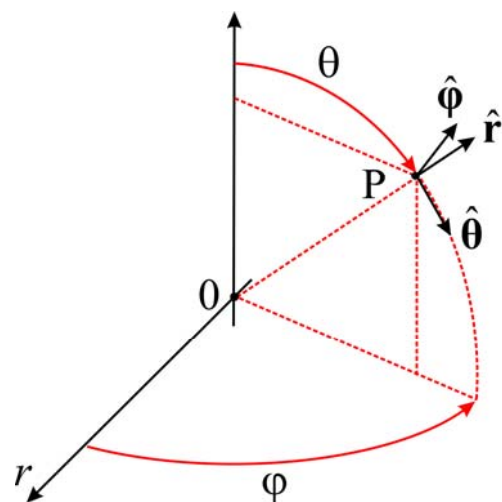
5

## Coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane, è possibile ricavare le espressioni dell'operatore gradiente in altri sistemi di coordinate, come le coordinate cilindriche e le coordinate sferiche



Coordinate cilindriche



Coordinate sferiche

6

## Gradiente in coordinate cilindriche e sferiche

- Nel caso delle **coordinate cilindriche**, gli spostamenti infinitesimi nelle direzioni dei versori coordinati sono:  $dr$ ,  $r \cdot d\varphi$  e  $dz$
- Quindi l'espressione del gradiente è

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Nel caso delle **coordinate sferiche**, gli spostamenti infinitesimi nelle direzioni dei versori coordinati sono:  $dr$ ,  $r \cdot d\theta$  e  $r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi$
- Quindi l'espressione del gradiente è

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

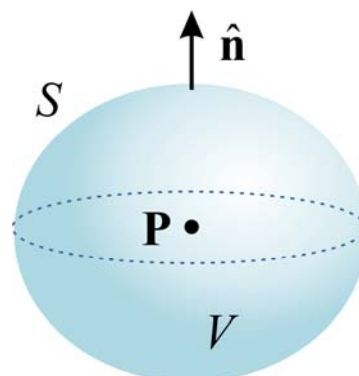
7

## Divergenza di un campo vettoriale

- Dato un punto  $P$  contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{A}(P)$ , si considera una superficie chiusa  $S$  che delimita un volume  $V$  nell'intorno di  $P$
- Si indica con  $\hat{\mathbf{n}}$  il versore normale alla superficie  $S$  diretto verso l'esterno
- La **divergenza** di  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$  è una grandezza scalare definita dal limite

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{V}$$

(Definizione intrinseca)



8

## Divergenza in coordinate cartesiane (1)

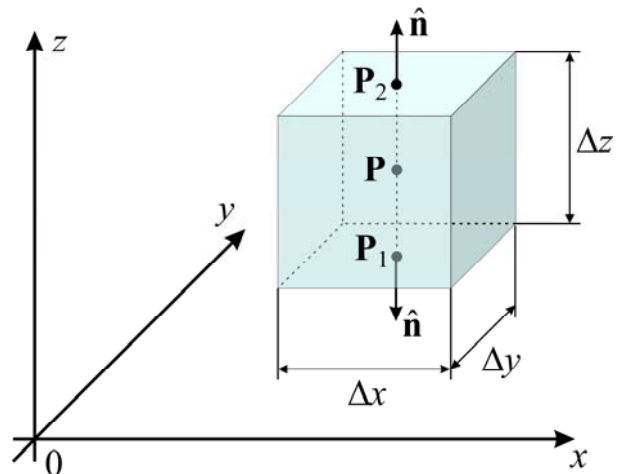
- Si considera un parallelepipedo infinitesimo  $\Delta V$  con centro nel punto  $P$  e facce parallele ai piani coordinati
- Il flusso di  $\mathbf{A}$  uscente dalle facce  $S_1$  e  $S_2$  parallele al piano coordinato  $xy$  può essere espresso come

$$\int_{S_1 \cup S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = [A_z(P_2) - A_z(P_1)] \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

dove

$$A_z(P_1) = A_z(P) - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

$$A_z(P_2) = A_z(P) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$



9

## Divergenza in coordinate cartesiane (2)

- Procedendo in modo analogo con le altre due coppie di facce parallele ai piani coordinati, si può ricavare che il flusso totale attraverso la superficie del parallelepipedo è

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Quindi, dalla definizione di divergenza si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

10

# Divergenza in coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane si possono ricavare le seguenti espressioni:

- ♦ **Coordinate cilindriche**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

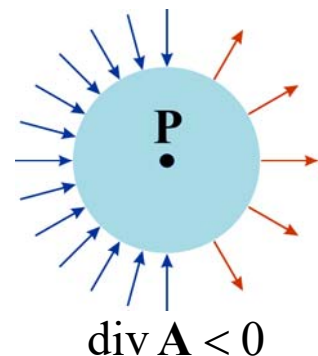
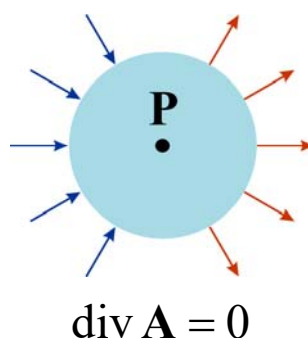
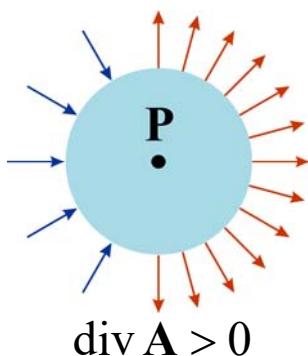
- ♦ **Coordinate sferiche**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

11

## Significato della divergenza

- Un valore positivo della divergenza nel punto P indica che le linee di campo tendono a divergere dal punto P
  - ➔ Il flusso uscente attraverso una superficie infinitesima nell'intorno di P prevale su quello entrante
- Un valore negativo della divergenza indica che le linee di campo tendono a convergere nel punto P
  - ➔ Il flusso entrante prevale su quello uscente



12

## Esempio – sfera uniformemente carica (1)

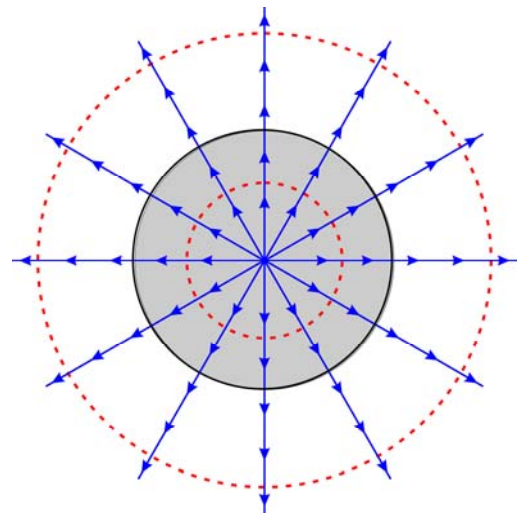
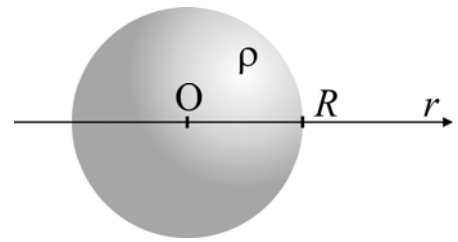
- Si considera una carica  $Q$  distribuita con densità uniforme  $\rho$  all'interno di una sfera di raggio  $R$

$$\int_{V_R} \rho dV = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = Q$$

- Per ragioni di simmetria il campo elettrico è diretto in senso radiale, quindi facendo uso di un sistema di coordinate sferiche con origine nel centro della sfera, si ha

$$\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$$

dove  $E_r$  è funzione solo di  $r$  (e quindi è costante su ogni superficie sferica con centro nell'origine)



13

## Esempio – sfera uniformemente carica (2)

- Se si indica con  $S(r)$  la superficie della una sfera di raggio  $r$  con centro in  $O$  e con  $V(r)$  il volume delimitato da  $S(r)$ , per la legge di Gauss si ha

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(r)} \rho dV$$

dove  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$

- All'interno della sfera ( $r < R$ ) dalla relazione precedente si ottiene

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{r \rho}{3 \epsilon_0}$$

- All'esterno della sfera ( $r > R$ ) si ottiene

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

- ➔ Quindi all'esterno della sfera il campo elettrico è identico a quello prodotto da una carica puntiforme  $Q$  posta nell'origine

14

## Esempio – sfera uniformemente carica (3)

- Dall'espressione della divergenza in coordinate sferiche ottiene che la divergenza del campo elettrico vale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}$$

- ➔ Quindi, all'interno della sfera risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^3 \rho}{3 \epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

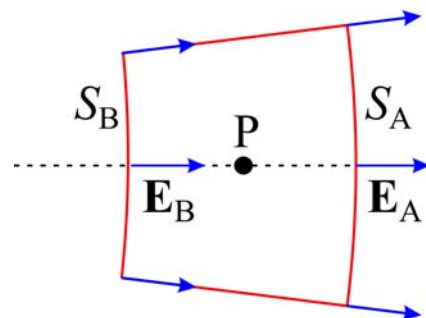
- ➔ Mentre all'esterno si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0$$

15

## Esempio – sfera uniformemente carica (4)

- Su considera una superficie chiusa nell'intorno di un punto P costituita da un tratto infinitesimo di un tubo di flusso di  $\mathbf{E}$  delimitato da due calotte sferiche
- Si indicano con  $S_A$  e  $S_B$  le aree delle due calotte sferiche e con  $E_A$  ed  $E_B$  i valori del modulo del campo elettrico sulle due superfici
- Il flusso di  $\mathbf{E}$  uscente dalla superficie vale  $E_A S_A - E_B S_B$
- L'area delle calotte è proporzionale a  $r^2$
- All'interno della sfera carica il campo è proporzionale a  $r$ 
  - ➔  $E_A S_A - E_B S_B > 0$
- All'esterno il campo è inversamente proporzionale a  $r^2$ 
  - ➔  $E_A S_A - E_B S_B = 0$



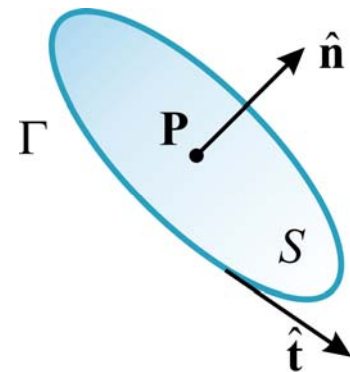
16



## Rotore di un campo vettoriale

- Dato un punto  $P$  contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{A}(P)$ , si considera una linea chiusa  $\Gamma$  che delimita un'area piana  $S$  nell'intorno di  $P$
- Si orientano il versore tangente a  $\Gamma$  e il versore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra
- Il **rotore** di  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$  è un vettore definito dal limite

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{S} \quad (\text{Definizione intrinseca})$$



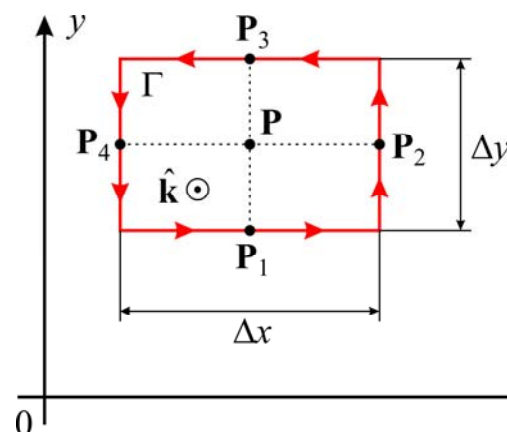
- ➔ La direzione e il verso del rotore sono individuati dal versore  $\hat{\mathbf{n}}$  per cui il tale limite è massimo
- ➔ Il modulo del rotore coincide con il valore massimo del limite

17

## Rotore in coordinate cartesiane (1)

- Per determinare la componente nella direzione dell'asse  $z$  del rotore di  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$ , si considera un rettangolo infinitesimo con centro in  $P$  e contenuto nel piano parallelo al piano coordinato  $xy$
- La circuitazione di  $\mathbf{A}$  lungo la linea  $\Gamma$  che costituisce il perimetro del rettangolo può essere espressa come

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = A_x(P_1)\Delta x + A_y(P_2)\Delta y - A_x(P_3)\Delta x - A_y(P_4)\Delta y$$



18

## Rotore in coordinate cartesiane (2)

- I valori di  $A_x$  e  $A_y$  nei punti medi dei lati del rettangolo sono

$$\begin{aligned}A_x(P_1) &= A_x(P) - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} & A_y(P_4) &= A_y(P) - \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\A_x(P_3) &= A_x(P) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} & A_y(P_2) &= A_y(P) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\end{aligned}$$

- Di conseguenza la circuitazione lungo  $\Gamma$  vale

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

- Quindi, facendo uso della definizione di rotore, si ottiene

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

19

## Rotore in coordinate cartesiane (3)

- In modo analogo, considerando i rettangoli contenuti nei piani paralleli ai piani coordinati  $yz$  e  $xz$ , si possono determinare le componenti del rotore nella direzione dell'asse  $x$  e dell'asse  $y$

- Quindi, complessivamente, l'espressione del rotore risulta

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

- Si può notare che questa espressione può essere ottenuta sviluppando il determinante simbolico

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

20

## Rotore in coordinate cilindriche e sferiche

- Con procedimenti simili a quello visto nel caso delle coordinate cartesiane si possono ricavare le seguenti espressioni:

- ◆ **Coordinate cilindriche**

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

- ◆ **Coordinate sferiche**

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

21

## Significato del rotore (1)

- Il termine *rotore* richiama il concetto di *rotazione* e, infatti, un valore diverso da zero del rotore in un punto P indica che le linee di campo tendono a ruotare intorno al punto
- Per comprendere il significato del rotore di un campo vettoriale può essere utile considerare il moto di un corpo rigido
- Se G è il baricentro del corpo rigido, la velocità  $\mathbf{v}$  di un generico punto Q del corpo rigido può essere espressa come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} - \mathbf{G})$$

dove  $\mathbf{v}_G$  rappresenta la velocità del baricentro e  $\boldsymbol{\omega}$  è il vettore velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}}$$

22

## Significato del rotore (2)

- Se si indicano con  $(x, y, z)$  le coordinate di Q e con  $(x_0, y_0, z_0)$  le coordinate del baricentro si ha

$$\mathbf{Q}-\mathbf{G}=(x-x_0)\hat{\mathbf{i}}+(y-y_0)\hat{\mathbf{j}}+(z-z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

- Quindi la velocità del punto Q è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_G + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{v}_G + [\omega_y(z-z_0) - \omega_z(y-y_0)]\hat{\mathbf{i}} + [\omega_z(x-x_0) - \omega_x(z-z_0)]\hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + [\omega_x(y-y_0) - \omega_y(x-x_0)]\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

23

## Significato del rotore (3)

- Il rotore della velocità vale

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (\omega_x + \omega_x)\hat{\mathbf{i}} + (\omega_y + \omega_y)\hat{\mathbf{j}} + (\omega_z + \omega_z)\hat{\mathbf{k}} = 2\boldsymbol{\omega}$$

- ➔ Quindi per il campo di velocità dei punti del corpo rigido il rotore coincide, a meno di un fattore 2, con il vettore velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

24

## Significato del rotore (4)

- Il significato del rotore può essere illustrato interpretando il campo vettoriale  $\mathbf{A}$  come il campo di velocità di un fluido in movimento
- Si considera una particella rigida infinitesima con baricentro posto in un punto  $P$  all'interno del fluido
  - ◆ Se il rotore di  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$  è diverso da zero, la particella, trascinata dal fluido, ruota attorno al suo baricentro
  - ◆ Se il rotore di  $\mathbf{A}$  è uguale a zero si ha solo moto di traslazione
- ➔ Quindi un valore diverso da zero del rotore indica che la distribuzione di velocità del fluido è tale da produrre un moto di rotazione

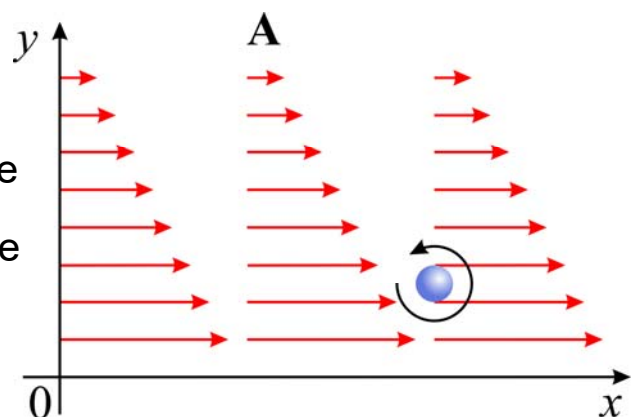
25

## Esempio 1 (1)

- Si consideri il campo vettoriale  
$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} = (a - by) \hat{\mathbf{i}}$$
dove  $a$  e  $b$  sono due costanti positive

- Il rotore di  $\mathbf{A}$  è diretto lungo l'asse  $z$  e vale

$$\text{rot} \mathbf{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{\mathbf{k}} = b \hat{\mathbf{k}}$$



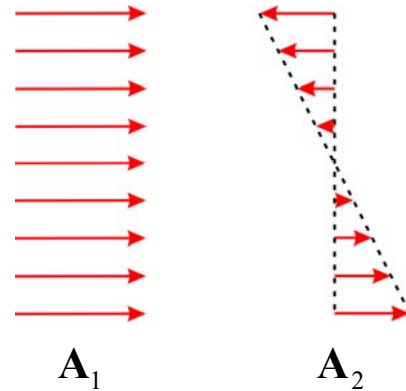
- Si può vedere che, se  $\mathbf{A}$  è interpretato come la velocità di un fluido, una particella rigida infinitesima posta nel fluido ruota in senso positivo (cioè antiorario) attorno ad un asse parallelo all'asse  $z$

26

## Esempio 1 (2)

- Se  $y_0$  rappresenta l'ordinata del baricentro della particella, è possibile rappresentare il campo vettoriale come somma di due contributi

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (a - by_0)\hat{\mathbf{i}} + b(y_0 - y)\hat{\mathbf{i}}$$



- Il primo termine rappresenta un campo uniforme (quindi ha rotore nullo) e determina un moto di traslazione
- Il secondo termine (il cui rotore coincide con  $\text{rot}\mathbf{A}$ ) determina il moto di rotazione

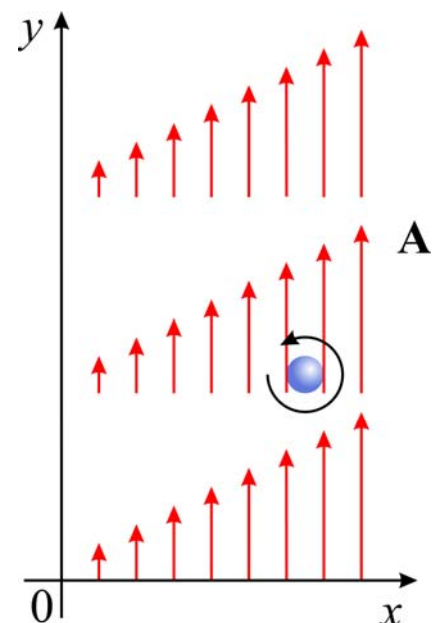
27

## Esempio 2

- Si consideri il campo vettoriale  
 $\mathbf{A} = A_y \hat{\mathbf{j}} = cx \hat{\mathbf{i}}$   
dove  $c$  è una costante positiva
- Il rotore di  $\mathbf{A}$  è diretto lungo l'asse  $z$  e vale

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} = c \hat{\mathbf{k}}$$

- Anche in questo caso, se si rappresenta  $\mathbf{A}$  come la velocità di un fluido, si ottiene che la distribuzione di velocità determina una rotazione in senso antiorario attorno a un asse parallelo all'asse  $z$



28

## Nota

- I due esempi mostrano che per ottenere una rotazione in senso positivo attorno a un asse parallelo all'asse  $z$  occorre che
  - ◆ la componente  $A_x$  diminuisca al crescere  $y$
  - ◆ la componente  $A_y$  aumenti al crescere  $x$
- Questo è coerente con il fatto che la componente lungo l'asse  $z$  del rotore è data da

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

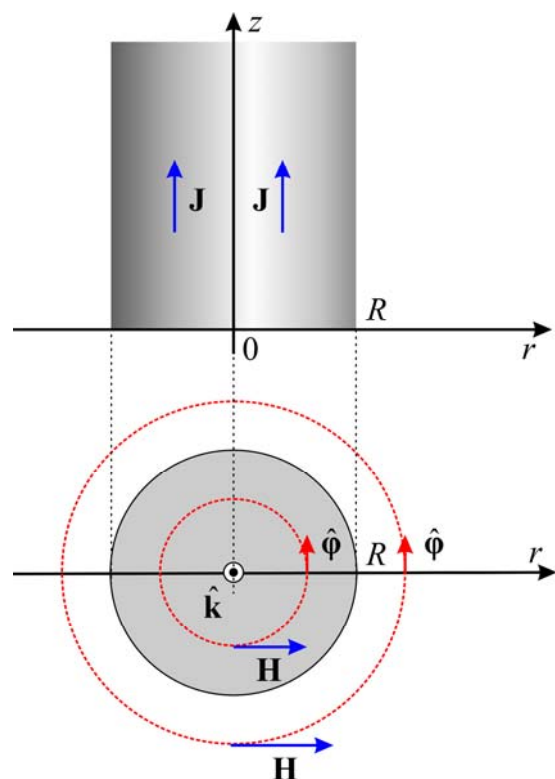
29

## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (1)

- Si considera un conduttore cilindrico di raggio  $R$  e lunghezza infinita diretto lungo l'asse  $z$  e percorso da corrente con densità  $\mathbf{J}$  uniforme nella sezione
  - $\mathbf{J} = J_z \hat{\mathbf{k}}$
- Si indica con  $i$  la corrente attraverso la sezione del conduttore
  - $i = \pi R^2 J_z$
- Per ragioni di simmetria le linee di campo sono circonferenze concentriche con il cilindro e risulta

$$\mathbf{H} = H_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

con  $H_\phi$  dipendente solo da  $r$



30

## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (2)

- E' possibile determinare il campo magnetico utilizzando la legge di Ampere

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- Se  $\Gamma$  è una circonferenza concentrica con il cilindro e  $S$  una sua sezione trasversale, risulta

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$$

- Per una linea di campo interna al conduttore ( $r < R$ ) si ottiene

$$2\pi r H_{\phi} = \pi r^2 J_z \Rightarrow H_{\phi} = \frac{r}{2} J_z$$

- Mentre all'esterno del conduttore ( $r > R$ ) si ha

$$2\pi r H_{\phi} = \pi R^2 J_z = i \Rightarrow H_{\phi} = \frac{i}{2\pi r}$$

quindi il campo magnetico all'esterno è identico a quello prodotto da un conduttore filiforme percorso da corrente  $i$  e disposto lungo l'asse  $z$

31

## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (3)

- Dall'espressione del rotore in coordinate cilindriche si ottiene che il rotore di  $\mathbf{H}$  è diretto lungo l'asse  $z$  e vale

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_{\phi})}{\partial r} \hat{\mathbf{k}}$$

- Quindi all'interno del conduttore si ha

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{2} J_z \right) \hat{\mathbf{k}} = J_z \hat{\mathbf{k}}$$

- Mentre all'esterno risulta

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{i}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

32



## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (4)

- Se si interpreta il campo  $\mathbf{H}$  come la velocità di un fluido, una particella infinitesima posta a una distanza  $r > R$  dall'origine ruota intorno all'origine con velocità angolare

$$\omega = \frac{|\mathbf{H}|}{r} = \frac{i}{2\pi r^2}$$

- ◆ Dato che  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  la particella non ruota su sé stessa

- Una particella posta a distanza  $r < R$  ruota intorno all'origine con velocità angolare

$$\omega = \frac{|\mathbf{H}|}{r} = \frac{J_z}{2}$$

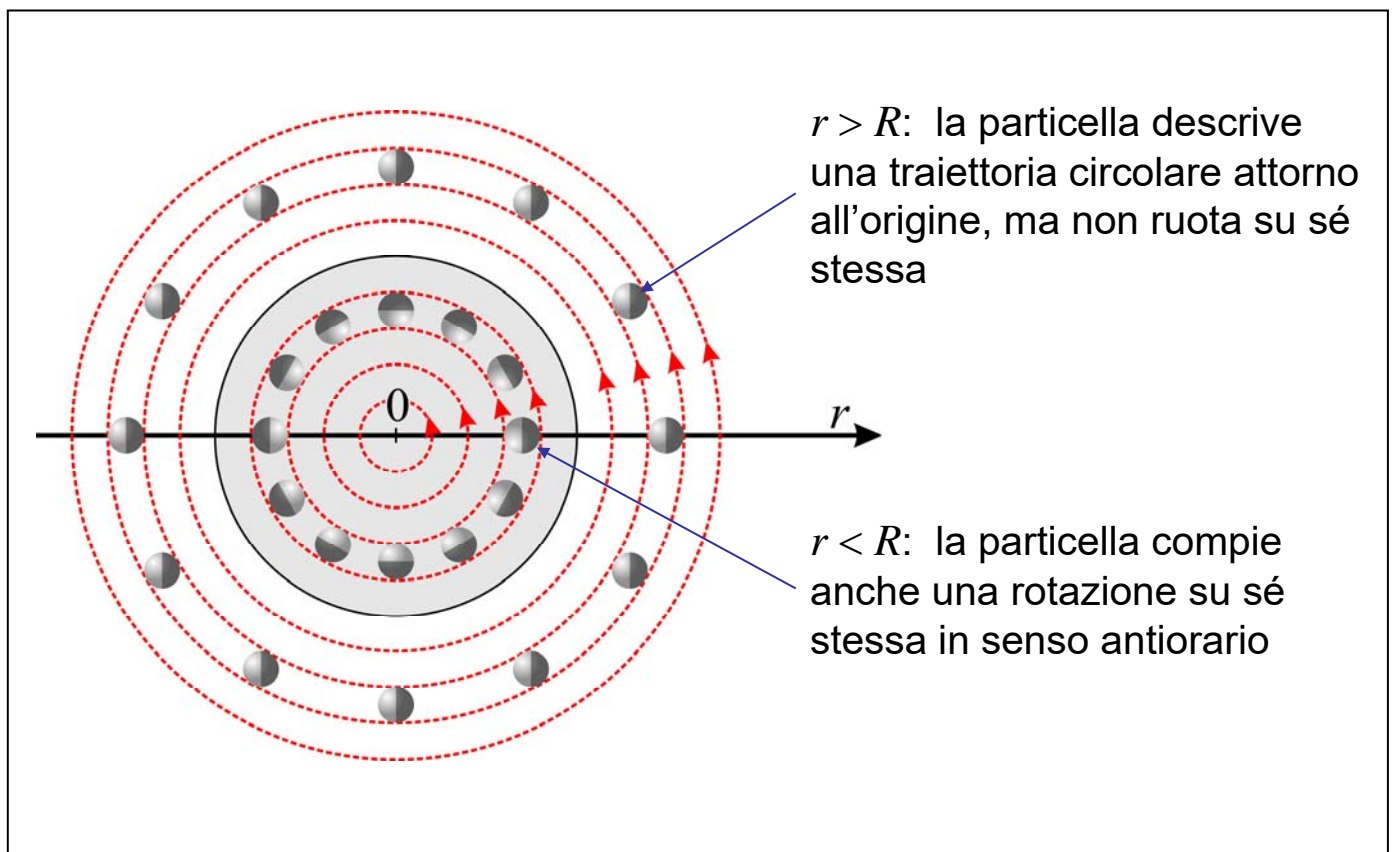
- Inoltre la particella ruota su se stessa con velocità angolare

$$\omega' = \left| \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{H} \right| = \frac{J_z}{2}$$

- ◆ Dato che, in questo caso, le due velocità angolari  $\omega$  e  $\omega'$  sono uguali, la particella rivolge sempre la stessa faccia verso l'origine

33

## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (5)



34

## Esempio – Conduttore cilindrico uniforme (6)

- L'andamento del vettore  $\mathbf{H}$  è tale per cui è possibile ottenere una circuitazione diversa da zero anche su una linea chiusa contenuta nella regione esterna al conduttore
- Se però si considera una linea chiusa infinitesima nell'intorno di un punto  $P$  si ottiene circuitazione nulla se  $P$  è all'esterno del conduttore e circuitazione diversa da zero solo se  $P$  è all'interno
- Il rotore descrive il comportamento della circuitazione "a livello locale", quindi risulta nullo all'esterno del conduttore e diverso da zero all'interno

35

## Operatore nabla

- L'**operatore nabla** ( $\nabla$ ) è un vettore formale, definito come

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Mediante questo operatore è possibile esprimere gradiente, divergenza e rotore come prodotti formali:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

36

## Operatore nabla e coordinate non cartesiane

- L'operatore nabla è definito solo in coordinate cartesiane
- I simboli  $\nabla f$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  e  $\nabla \times \mathbf{A}$  sono utilizzati per indicare gradiente, divergenza e rotore anche nel caso di sistemi di coordinate non cartesiane
- In questo caso però non è possibile definire un vettore simbolico che permetta di esprimere gradiente, divergenza e rotore come prodotti formali

37

## Esempio

- Per esempio, dall'espressione del gradiente in coordinate cilindriche

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

non è lecito ricavare per l'operatore nabla l'espressione

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

- Utilizzando questa espressione per calcolare la divergenza come prodotto scalare formale si otterrebbe

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Formula errata})$$

mentre l'espressione corretta è

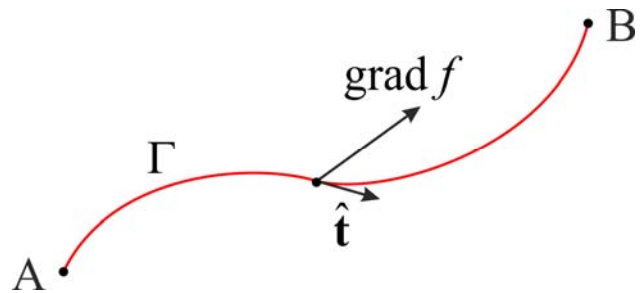
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

38

## Teorema del gradiente

- Si considera una linea  $\Gamma$  che unisce due punti A e B di una regione in cui è definito un campo scalare  $f$
- Per ogni  $f$ , l'integrale di linea del gradiente da A a B non dipende dalla linea  $\Gamma$  ma solo dal valore di  $f$  nei punti A e B

$$\int_{A,\Gamma}^B \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = f(B) - f(A)$$



- ➔ Di conseguenza, l'integrale del gradiente lungo una linea chiusa è sempre nullo

39

## Teorema del gradiente - dimostrazione

- Il vettore tangente può essere espresso come

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\partial x}{\partial l} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial l} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial l} \hat{\mathbf{k}}$$

- Utilizzando l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane si ha

$$\text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{df}{dl}$$

- ➔ Di conseguenza risulta

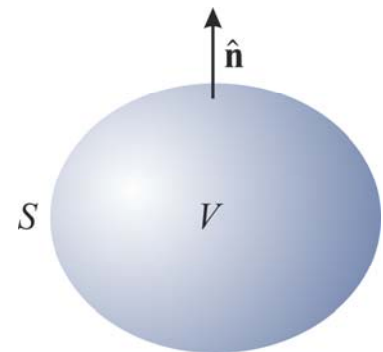
$$\int_{A,\Gamma}^B \text{grad} f \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{A,\Gamma}^B \frac{df}{dl} dl = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

40

## Teorema di Gauss (o della divergenza)

- Si considera una superficie chiusa  $S$  che delimita un volume  $V$  contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{A}$
- Si indica con  $\hat{\mathbf{n}}$  il versore normale alla superficie diretto verso l'esterno
- ➔ Vale la relazione:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



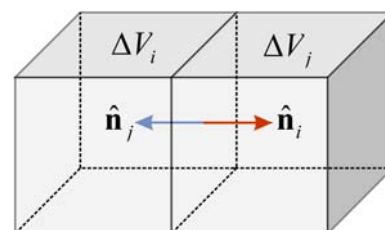
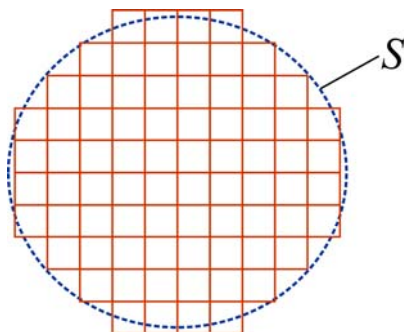
- L'integrale esteso al volume  $V$  della divergenza di  $\mathbf{A}$  è uguale al flusso di  $\mathbf{A}$  uscente dalla superficie chiusa che delimita  $V$

41

## Teorema di Gauss – dimostrazione (1)

Una dimostrazione non rigorosa può essere ottenuta nel modo seguente:

- Si approssima il volume  $V$  con  $N$  elementi di volume  $\Delta V_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) (per semplicità si considerano elementi cubici)



- Si può ottenere un'approssimazione del flusso  $\mathbf{A}$  attraverso la superficie  $S$  sommando i flussi attraverso le superfici degli elementi di volume
  - ◆ infatti i contributi delle facce comuni a due elementi sono uguali e opposti e si elidono, quindi rimangono i soli contributi delle facce esterne che approssimano la superficie  $S$

42

## Teorema di Gauss – dimostrazione (2)

- L'espressione approssimata del flusso di  $\mathbf{A}$  attraverso  $S$  è

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i \right) \Delta V_i$$

- Se si fa tendere a infinito il numero degli elementi, e quindi a zero il loro volume, la sommatoria tende all'integrale di volume su  $V$ , mentre il termine tra parentesi tende alla divergenza di  $\mathbf{A}$ , quindi

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS_i \right) \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$$

43

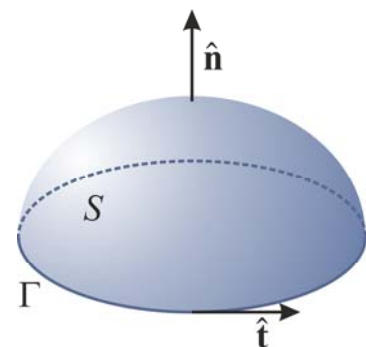
## Teorema di Stokes (o del rotore)

- Si considera una linea chiusa  $\Gamma$  contenuta in una regione  $\tau$  in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{A}$
- Si considera inoltre una generica superficie  $S$  contenuta in  $\tau$  avente come contorno la linea  $\Gamma$
- Si orientano il versore tangente a  $\Gamma$  e il versore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra

➔ Vale la relazione

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- Il flusso del rotore di  $\mathbf{A}$  attraverso una generica superficie avente la linea  $\Gamma$  come contorno è uguale alla circuitazione di  $\mathbf{A}$  lungo la linea  $\Gamma$

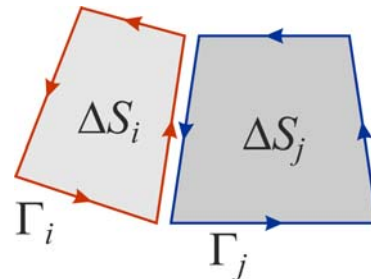
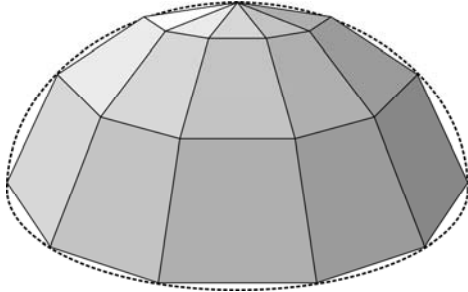


44

## Teorema di Stokes – dimostrazione (1)

Una dimostrazione non rigorosa può essere ottenuta nel modo seguente:

- Si approssima la superficie  $S$  mediante  $N$  elementi di superficie piani di area  $\Delta S_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )



- E' possibile ottenere un'approssimazione della circuitazione di  $\mathbf{A}$  lungo il contorno  $\Gamma$  della superficie sommando le circuitazioni di  $\mathbf{A}$  lungo i contorni delle superfici  $\Delta S_i$ 
  - ◆ infatti i contributi dei lati comuni a due elementi sono uguali e opposti e si elidono, quindi rimangono i soli contributi dei lati esterni che approssimano la curva  $\Gamma$

45

## Teorema di Stokes – dimostrazione (2)

- L'espressione approssimata della circuitazione di  $\mathbf{A}$  è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \approx \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl \right) \Delta S_i$$

- Se si fa tendere a infinito il numero degli elementi di superficie, e quindi a zero la loro area, la sommatoria tende all'integrale di superficie su  $S$ , mentre il termine tra parentesi tende al prodotto scalare del rotore di  $\mathbf{A}$  per il versore normale all' $i$ -esimo elemento di superficie, quindi

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i \, dl \right) \Delta S_i = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

46

## Rotore del gradiente (1)

- Per il teorema del gradiente, l'integrale di linea del gradiente di un generico campo scalare  $f$  dipende solo dai punti iniziale e finale
- ➔ Di conseguenza, l'integrale del gradiente lungo una linea chiusa è sempre nullo
- ➔ Quindi, dalla definizione di rotore, si ottiene che per ogni campo scalare  $f$  deve risultare

$$\text{rot grad } f = 0$$

47

## Rotore del gradiente (2)

- Lo stesso risultato può essere ottenuto a partire dall'espressione del rotore in coordinate cartesiane

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

- Sostituendo ad  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

si ottiene

$$\text{rot grad } f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

(A rigore, la dimostrazione richiede che le derivate seconde di  $f$  siano continue)

48



## Divergenza del rotore (1)

- Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore di un generico campo vettoriale  $\mathbf{A}$  dipende solo dal contorno della superficie  $S$
- ➔ Di conseguenza, il flusso del rotore attraverso una superficie chiusa è sempre nullo
- ➔ Quindi, dalla definizione di divergenza, si ottiene che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{A}$  deve risultare  
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$

49

## Divergenza del rotore (2)

- Lo stesso risultato può essere ottenuto partendo dall'espressione in coordinate cartesiane della divergenza

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

- Sostituendo a  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

( e assumendo che le derivate seconde di  $\mathbf{A}$  siano continue) si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

50

## Connessione lineare e superficiale

- Una regione  $\tau$  è detta **a connessione lineare semplice** se per ogni linea chiusa  $\Gamma$  contenuta in  $\tau$  esiste almeno una superficie  $S$  contenuta in  $\tau$  avente  $\Gamma$  come contorno
  - ◆ Se questa proprietà non è verificata si dice che  $\tau$  è **a connessione lineare multipla**
- Una regione  $\tau$  è detta **a connessione superficiale semplice** se per ogni superficie chiusa  $S$  contenuta in  $\tau$  il volume delimitato da  $S$  è contenuto in  $\tau$ 
  - ◆ Se questa proprietà non è verificata si dice che  $\tau$  è **a connessione superficiale multipla**

51

## Connessione lineare e superficiale - Esempi

- **Esempi**
  - ◆ Regione racchiusa da una superficie sferica:
    - connessione lineare semplice
    - connessione superficiale semplice
  - ◆ Regione racchiusa da una superficie toroidale:
    - connessione lineare multipla
    - connessione superficiale semplice
  - ◆ Regione compresa tra due superfici sferiche concentriche:
    - connessione lineare semplice
    - connessione superficiale multipla

52

## Campi conservativi e campi irrotazionali (1)

Si consideri un campo vettoriale definito in una regione  $\tau$

- Il campo si dice **conservativo** se la sua circuitazione lungo una generica curva chiusa contenuta in  $\tau$  è uguale a zero
- Il campo si dice **irrotazionale** se il suo rotore è nullo in ogni punto di  $\tau$
- Un campo conservativo è sempre irrotazionale
  - ◆ questa proprietà deriva direttamente dalla definizione del rotore
- Un campo irrotazionale nella regione  $\tau$  è conservativo se la regione  $\tau$  è a connessione lineare semplice

53

## Campi conservativi e campi irrotazionali (2)

- Si assume che  $\mathbf{A}$  sia un campo vettoriale tale che  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  in una regione  $\tau$
- Si considera la circuitazione di  $\mathbf{A}$  su una curva chiusa  $\Gamma$
- Se la regione  $\tau$  è a connessione lineare semplice, è possibile individuare una superficie  $S$  contenuta in  $\tau$  che ha  $\Gamma$  come contorno
- ➔ Quindi, mediante il teorema di Stokes, si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

- Se la regione  $\tau$  non è a connessione lineare semplice esiste almeno una curva chiusa  $\Gamma'$  tale che ogni superficie che ha  $\Gamma'$  come contorno non è interamente contenuta in  $\tau$
- ➔ Quindi la relazione precedente non vale e la circuitazione su  $\Gamma'$  è diversa da zero

54

## Esempio (1)

- Si riconsideri l'esempio relativo al calcolo del campo magnetico di un conduttore lineare omogeneo
- Come si è visto, nella regione esterna al conduttore il campo magnetico è irrotazionale
- La regione esterna al conduttore non è a connessione lineare semplice, quindi non si può affermare che il campo magnetico all'esterno del conduttore è conservativo:
  - ◆ Per una linea chiusa  $\Gamma_1$  che non circonda il conduttore la circuitazione risulta nulla
  - ◆ Per una linea chiusa  $\Gamma_2$  che circonda il conduttore la circuitazione è diversa da zero: in questo caso una superficie  $S_2$  avente la linea come contorno deve contenere punti nella regione in cui  $\text{rot}\mathbf{H}$  è diverso da zero quindi

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{S_2} \text{rot}\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \neq 0$$

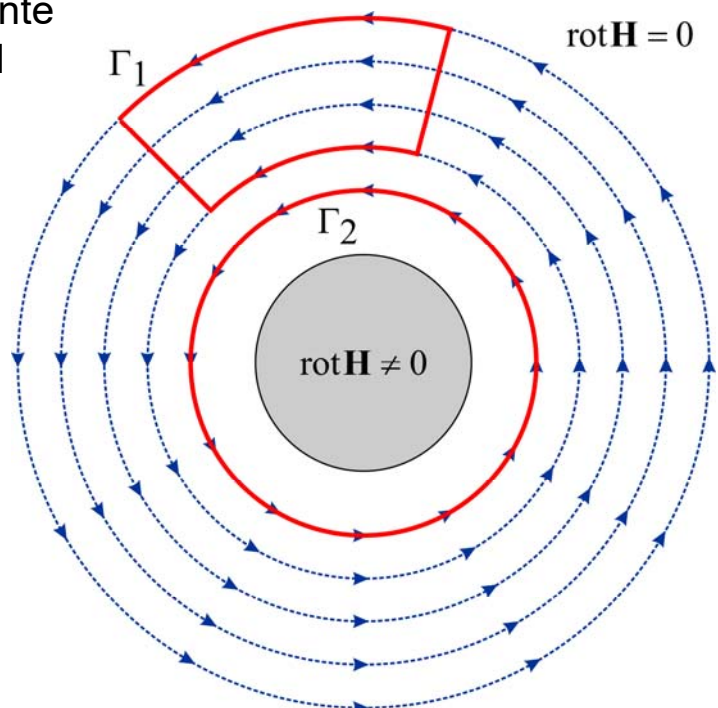
55

## Esempio (2)

- Le linee  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono interamente contenute nella regione in cui il rotore di  $\mathbf{H}$  è nullo

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \neq 0$$



56

## Potenziale (1)

- Dal teorema del gradiente si ottiene che il gradiente di un campo scalare  $\varphi$  è un campo vettoriale conservativo
- Si può dimostrare che vale anche la proprietà simmetrica, cioè ogni campo vettoriale conservativo  $\mathbf{A}$  può essere espresso come gradiente di un campo scalare  $\varphi$   
$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi$$
- Il campo scalare  $\varphi$  è detto **potenziale** del campo vettoriale  $\mathbf{A}$
- Il potenziale è definito a meno di una costante
  - ◆ infatti se  $\psi = \varphi + \text{cost}$  si ha  
$$\text{grad } \psi = \text{grad } \varphi$$

57

## Potenziale (2)

- Per dimostrare che un campo conservativo  $\mathbf{A}$  può essere espresso come gradiente di un potenziale, si osserva che, scelto arbitrariamente un punto  $O$  (punto di riferimento), al campo  $\mathbf{A}$  si può associare la funzione scalare definita da  
$$\varphi(P) = \varphi_0 + \int_O^P \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$
  
dove l'integrale è valutato su una linea arbitraria che unisce i punti  $O$  e  $P$  e  $\varphi_0$  rappresenta una costante arbitraria
- Dato che l'integrale di linea di  $\mathbf{A}$  tra due punti  $P$  e  $Q$  non dipende dal percorso, è possibile valutarlo considerando un percorso passante per il punto  $O$

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_P^O \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^Q \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

58

## Potenziale (3)

- Per due punti posti a distanza infinitesima la relazione precedente si riduce a

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = d\varphi$$

che può essere scritta come

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Quindi, utilizzando l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane si ha

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \text{grad } \varphi$$

e, di conseguenza, si riconosce che  $\varphi$  è il potenziale di  $\mathbf{A}$

- Per definire in modo univoco il potenziale occorre fissare il valore della costante  $\varphi_0$ , che corrisponde al valore del potenziale nel punto di riferimento

59

## Potenziale - Nota

- Di solito, nello studio dei campi elettromagnetici il potenziale viene definito come

$$\varphi(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{O}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

cioè con segno opposto rispetto a quello considerato nella trattazione precedente

- Con questa convenzione risulta

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$$

- Di conseguenza l'integrale di linea del campo vettoriale da un punto P a un punto Q è dato da

$$\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \varphi(\mathbf{P}) - \varphi(\mathbf{Q})$$

60

## Campi solenoidali e campi indivergenti (1)

Si consideri un campo vettoriale definito in una regione  $\tau$

- Il campo si dice **solenoidale** se il suo flusso attraverso una generica superficie chiusa contenuta in  $\tau$  è uguale a zero
- Il campo si dice **indivergente** se la sua divergenza è nulla in ogni punto di  $\tau$
- Un campo solenoidale è sempre indivergente
  - ◆ questa proprietà deriva direttamente dalla definizione della divergenza
- Un campo indivergente nella regione  $\tau$  è solenoidale se la regione  $\tau$  è a connessione superficiale semplice

61

## Campi solenoidali e campi indivergenti (2)

- Si assume che  $\mathbf{A}$  sia un campo vettoriale tale che  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  in una regione  $\tau$
- Si considera il flusso di  $\mathbf{A}$  uscente da una superficie chiusa  $S$
- Se la regione  $\tau$  è a connessione superficiale semplice, il volume racchiuso da  $S$  è contenuto in  $\tau$

➔ Quindi, mediante il teorema di Gauss, si ottiene

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = 0$$

- Se la regione  $\tau$  non è a connessione superficiale semplice esiste almeno una superficie chiusa  $S'$  tale che il volume delimitato da  $S'$  non è interamente contenuto in  $\tau$
- ➔ Quindi non è possibile applicare il teorema di Gauss e il flusso attraverso  $S'$  in generale è diverso da zero

62

## Esempio

- Si riconsideri l'esempio del campo elettrico prodotto da una distribuzione sferica omogenea di carica
- All'esterno della sfera il campo elettrico è indivergente
- Dato che la regione all'esterno della sfera non è a connessione superficiale semplice, non si può affermare che il campo elettrico all'esterno della sfera è solenoidale:
  - ◆ il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa  $S_1$  che non racchiude la sfera carica è nullo
  - ◆ il flusso attraverso una superficie chiusa  $S_2$  che racchiude la sfera carica è diverso da zero dato che nel volume interno a  $S_2$  la divergenza del campo elettrico non è ovunque nulla

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{V_2} \operatorname{div} \mathbf{E} dV \neq 0$$

63

## Flusso concatenato con una linea chiusa

- Si considera un campo vettoriale solenoidale  $\mathbf{A}$  definito in una regione  $\tau$
- Si considerano, inoltre, due superfici  $S_1$  e  $S_2$  contenute in  $\tau$  e aventi come bordo la stessa linea chiusa  $\Gamma$

- I flussi di  $\mathbf{A}$  attraverso  $S_1$  e  $S_2$  sono

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

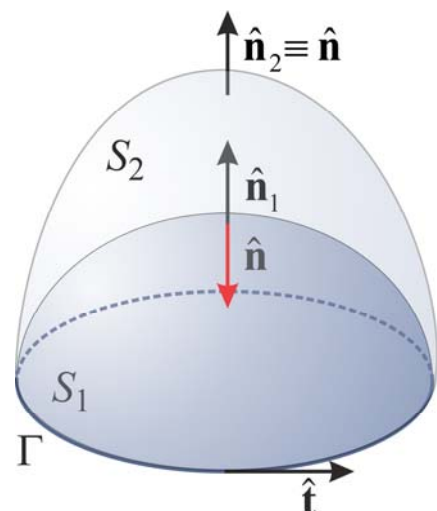
- L'unione di  $S_1$  e  $S_2$  forma una superficie chiusa, attraverso la quale si ha

$$\oint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

- Quindi risulta  $\Phi_1 = \Phi_2$

- ➔ Il flusso di  $\mathbf{A}$  non dipende dalla superficie, ma solo dalla linea  $\Gamma$  che ne costituisce il bordo

- ➔ Per questo si parla di flusso concatenato con la linea  $\Gamma$



64



## Potenziale vettore (1)

- Si consideri il un campo vettoriale  $\mathbf{B}$  definito come rotore di un altro campo vettoriale  $\mathbf{A}$
- Per il teorema di Stokes, il campo  $\mathbf{B}$  risulta solenoidale
- Si può dimostrare che vale anche la proprietà simmetrica, cioè ogni campo vettoriale solenoidale  $\mathbf{B}$  può essere espresso come rotore di un altro campo vettoriale  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

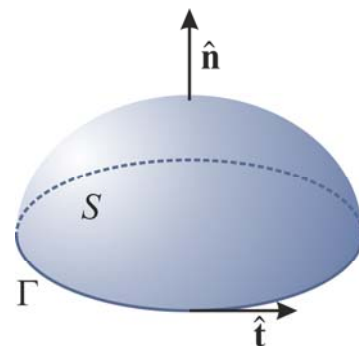
- Il campo vettoriale  $\mathbf{A}$  è detto **potenziale vettore** del campo vettoriale  $\mathbf{B}$
- Il potenziale è definito a meno del gradiente di un campo scalare
  - ◆ infatti se  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \varphi$  si ha  
 $\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \varphi = \text{rot } \mathbf{A}$

65

## Potenziale vettore (2)

- Se  $\mathbf{B}$  è un campo vettoriale e  $\mathbf{A}$  è il suo potenziale vettore, dal teorema di Stokes di ottiene direttamente

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



- Il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie  $S$  è uguale alla circuitazione del suo potenziale vettore sulla linea  $\Gamma$  che costituisce il contorno della superficie

66

## Operatori del secondo ordine (1)

- Il gradiente di un campo scalare  $f$  è un vettore, quindi è possibile calcolarne il rotore e la divergenza
  - ◆ Come si è visto, per ogni  $f$  risulta
$$\text{rot grad } f = 0$$
  - ◆ La divergenza del gradiente definisce un nuovo operatore detto **laplaciano**, indicato con
$$\nabla^2 f = \text{div grad } f$$
  - ◆ In alcuni testi il laplaciano di  $f$  è indicato anche col simbolo  $\Delta f$

67

## Laplaciano di uno scalare in coordinate cartesiane

- A partire dalla definizione

$$\nabla^2 f = \text{div grad } f$$

e facendo uso delle espressioni del gradiente e della divergenza in coordinate cartesiane si ricava

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

68

## Operatori del secondo ordine (2)

- Al rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  si possono applicare gli operatori divergenza e rotore
- Alla divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  si può applicare l'operatore gradiente
  - ◆ Come si è visto, per ogni  $\mathbf{A}$  risulta
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$$
  - ◆ A partire dagli operatori  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  e  $\operatorname{grad} \operatorname{div}$  si definisce il **laplaciano di un vettore** tramite la relazione
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

69

## Laplaciano di un vettore in coordinate cartesiane

- A partire dalla definizione
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$
e facendo uso delle espressioni degli operatori gradiente divergenza e rotore in coordinate cartesiane si può verificare che l'espressione del laplaciano di un vettore è
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{k}}$$
- Quindi il laplaciano di un vettore  $\mathbf{A}$  è un vettore avente come componenti i laplaciani scalari delle componenti di  $\mathbf{A}$ 
  - ◆ Questo giustifica il fatto che si utilizzi nel caso vettoriale lo stesso simbolo impiegato per il laplaciano di uno scalare, anche se i due operatori hanno significato diverso
  - ◆ Questa proprietà vale solo nel caso delle coordinate cartesiane

70

## Laplaciano in coordinate cilindriche

- Laplaciano di uno scalare

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Laplaciano di un vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left( \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{k}}$$

71

## Laplaciano in coordinate sferiche

- Laplaciano di uno scalare

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- Laplaciano di un vettore

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \left( \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta}{r^2 \tan \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \\ & + \left( \nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \left( \nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

72

## Identità notevoli (1)

Proprietà di linearità:

- Gradiente, divergenza, rotore e laplaciano sono operatori lineari
- ➔ Se  $c_1$  e  $c_2$  indicano due costanti,  $\varphi$  e  $\psi$  due campi scalari,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  due campi vettoriali, valgono le relazioni

$$\nabla(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\nabla\varphi + c_2\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla \cdot \mathbf{A} + c_2\nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla \times \mathbf{A} + c_2\nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla^2(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\nabla^2\varphi + c_2\nabla^2\psi$$

$$\nabla^2(c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}) = c_1\nabla^2\mathbf{A} + c_2\nabla^2\mathbf{B}$$

73

## Identità notevoli (2)

Operatori del secondo ordine:

- Se  $\varphi$  indica un campo scalare e  $\mathbf{A}$  un campo vettoriale, valgono le relazioni

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$$

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

74

## Identità notevoli (3)

- Se  $\varphi$  e  $\psi$  indicano due campi scalari e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  due campi vettoriali, valgono le relazioni

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \times \mathbf{A} + \varphi\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\nabla^2\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla^2\varphi + 2(\nabla\varphi \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

75

## Identità notevoli - Nota

- In alcune delle relazioni precedenti compaiono termini del tipo  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- Facendo uso dell'espressione dell'operatore nabla in coordinate cartesiane, si può verificare che

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} &= \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A} = \\ &= \left( B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( B_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + \left( B_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla A_x) \hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{B} \cdot \nabla A_y) \hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{B} \cdot \nabla A_z) \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

76