

# Richiami di teoria dell'elettromagnetismo

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)

(versione del 31-3-2019)

## Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

|                          | Forma locale   | Forma integrale  |
|--------------------------|--|--|
| Equazione di continuità  | $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$                  | $\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$  |
| Legge di Faraday         | $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$             | $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$  |
| Legge di Ampere-Maxwell  | $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$ | $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ |
| Legge di Gauss elettrica | $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$   | $\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$  |
| Legge di Gauss magnetica | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  | $\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$   |

# Grandezze fondamentali

- $\rho_c$  = densità di carica elettrica [C/m<sup>3</sup>]
- $\mathbf{E}$  = campo elettrico [V/m]
- $\mathbf{H}$  = campo magnetico [A/m]
- $\mathbf{D}$  = induzione elettrica (spostamento elettrico) [C/m<sup>2</sup>]
- $\mathbf{B}$  = induzione magnetica [T]
- $\mathbf{J}$  = densità di corrente elettrica [A/m<sup>2</sup>]

3

## Carica elettrica

- I fenomeni **elettromagnetici** sono i fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche
- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare [unità di misura coulomb, C]
  - L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
    - ◆ tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
    - ◆ tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

4

## Densità di carica

- Se si considerano fenomeni osservabili su scala macroscopica si può prescindere dalla natura granulare della carica e assumere che la carica si distribuisce con continuità nello spazio

► **Densità volumetrica di carica** [C/m<sup>3</sup>]

$$\rho_c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \Delta q = \text{carica contenuta nel volume } \Delta V$$

- In alcuni casi si hanno distribuzioni di carica che si sviluppano prevalentemente in una o due dimensioni

► **Densità superficiale di carica** [C/m<sup>2</sup>]

$$\sigma_c = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \Delta q = \text{carica associata alla superficie } \Delta S$$

► **Densità lineare di carica** [C/m]

$$\lambda_c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \Delta q = \text{carica associata al segmento } \Delta l$$

5

## Cariche libere e cariche di polarizzazione

- Cariche libere:** cariche che possono compiere spostamenti macroscopici e dare luogo a separazioni macroscopiche di carica
- Cariche di polarizzazione:** cariche legate alla struttura atomica o molecolare che possono compiere solo spostamenti microscopici (conseguenti a deformazione o orientamento di atomi o molecole)
- Conduttore:** mezzo materiale nel quale sono presenti cariche in grado di compiere spostamenti macroscopici
- Dielettrico:** mezzo materiale nel quale tutte le cariche possono compiere solo spostamenti microscopici
- In seguito quando si parlerà di cariche senza ulteriori indicazioni si farà riferimento alle cariche libere

6

# Corrente elettrica

- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- È descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata  $S$  in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo [unità di misura ampere, A]
- In generale si possono avere cariche positive e negative che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
  - ➡ La carica che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
  - ◆ Il segno del contributo di ciascuna carica dipende dal segno della carica stessa e dal verso del moto

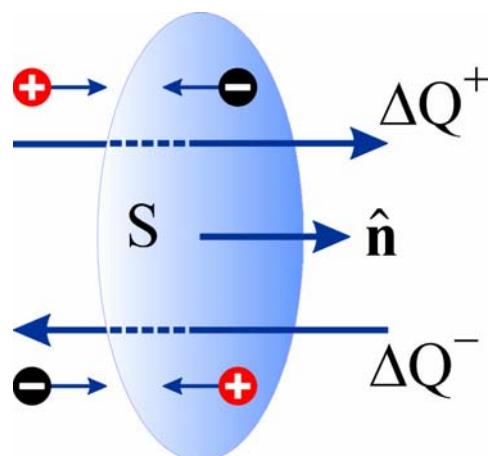
7

## Definizione della corrente elettrica

- Si indica con  $\Delta Q$  la carica che attraversa la superficie  $S$  in senso concorde con la normale  $\hat{n}$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$

$$\Delta Q = \Delta Q^+ - \Delta Q^-$$

- ◆ Contributo positivo ( $\Delta Q^+$ )
  - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
- ◆ Contributo negativo ( $-\Delta Q^-$ )
  - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
  - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



8

## Definizione della corrente elettrica

- La corrente,  $i(t)$ , è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- ➔ La corrente è la derivata della funzione  $Q(t)$  che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso  $S$  a partire da un certo istante iniziale fino all'istante  $t$
- $Q(t)$  non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante  $t$ 
  - ◆ è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a  $Q(t)$

9

## Densità di corrente

- La densità di **densità di corrente**  $\mathbf{J}$  [ $\text{A}/\text{m}^2$ ] è un vettore definito in modo che la sua componente lungo la normale ad una superficie orientata  $S$  rappresenti la corrente per unità di superficie che fluisce attraverso  $S$

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS}$$

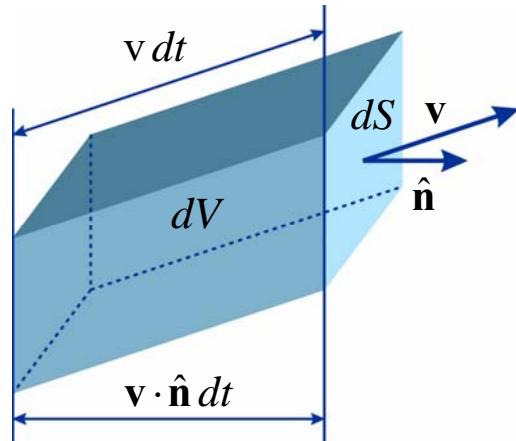
- ➔ La corrente attraverso una superficie orientata  $S$  è uguale al flusso del vettore  $\mathbf{J}$  attraverso  $S$

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

10

## Definizione della densità di corrente

- Si considera una superficie orientata infinitesima  $dS$  attraversata da corrente elettrica
  - Si assume che le cariche in moto abbiano densità  $\rho_c$  e velocità  $\mathbf{v}$
  - Nell'intervallo di tempo  $dt$  le cariche percorrono la distanza  $vdt$
  - La carica che attraversa la superficie  $dS$  nell'intervallo  $dt$  è pari alla carica totale contenuta nel volume  $dV$
- $$dQ = \rho_c dV = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dS$$
- La corrente attraverso  $dS$  è
- $$di = \frac{dQ}{dt} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$
- quindi si ha
- $$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



11

## Definizione della densità di corrente

- La densità di corrente è definita dalla relazione
- $$\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$$
- Nel caso più generale, in cui le cariche non si muovono tutte con la stessa velocità  $\mathbf{v}$  e sono presenti sia cariche positive sia cariche negative (con densità  $\rho^+$  e  $\rho^-$ ), la densità di corrente si definisce come
- $$\mathbf{J} = \rho_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle + \rho_- \langle \mathbf{v}_- \rangle$$
- $$\langle \mathbf{v}_+ \rangle, \langle \mathbf{v}_- \rangle = \text{velocità medie}$$

12

## Forza di Lorentz

- Una carica puntiforme  $q$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in una regione sede di un campo elettromagnetico è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

### Forza di Lorentz

- Questa relazione può essere assunta come definizione delle due funzioni vettoriali del punto e del tempo dette
  - campo elettrico  $\mathbf{E}$  [unità di misura volt/metro, V/m]
  - induzione magnetica  $\mathbf{B}$  [unità di misura tesla, T]
- Se si ha una distribuzione di carica con densità  $\rho_c$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$ , la forza per unità di volume  $\mathbf{f}$  è

$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

13

## Campo elettrico

- Si dice che una regione è sede di un **campo elettrico** se una carica di prova  $\Delta q$  puntiforme posta in quiete in un punto P della regione è soggetta ad una forza  $\mathbf{F}_e$  proporzionale al valore della carica
- Il vettore campo elettrico nel punto P è definito come

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{\Delta q}$$

- Il passaggio al limite indica che la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non perturbare il campo presente nella regione considerata

14

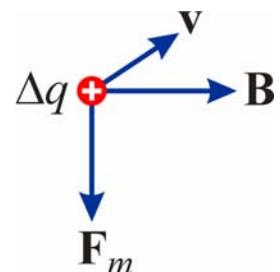
# Induzione magnetica

- Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova  $\Delta q$  puntiforme in moto con velocità istantanea  $\mathbf{v}$  in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza  $\mathbf{F}_e$  dovuta al campo elettrico) ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Il vettore **induzione magnetica**  $\mathbf{B}$  ha
  - direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza  $\mathbf{F}_m$  è nulla
  - verso tale che  $\mathbf{v}$   $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{F}_m$  formino una terna destra
  - modulo dato da

$$B = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{F_{m\max}}{\Delta q v}$$



dove  $F_{m\max}$  indica il valore massimo del modulo di  $\mathbf{F}_m$  (che si ottiene quando  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\mathbf{B}$ )

15

# Induzione elettrica e campo magnetico

- Come si vedrà in seguito, i vettori  $\mathbf{D}$  (**induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [ $C/m^2$ ]) e  $\mathbf{H}$  (**campo magnetico** [ $A/m$ ]) vengono introdotti per tenere conto di fenomeni che avvengono, in presenza di campi elettromagnetici, nei mezzi materiali
  - Nel vuoto valgono le relazioni
- $$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$
- $$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
- La costante  $\epsilon_0$  ( $= 1/(c_0^2 \mu_0) \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ) è detta **permittività elettrica** (o **costante dielettrica**) del vuoto
  - La costante  $\mu_0$  ( $= 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ ) è detta **permeabilità magnetica** del vuoto

( $c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  è la velocità della luce nel vuoto)

16

# Equazioni fondamentali

## Leggi primarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\end{aligned}$$

(Assunte come postulati)

## Leggi secondarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_c \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

(Derivano dalle leggi primarie)



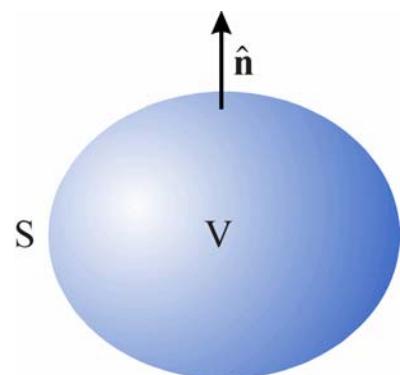
17

## Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

- Forma locale**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Per ricavare la forma integrale si considera una superficie chiusa  $S$  che delimita un volume  $V$
- Si orienta il versore normale a  $S$  verso l'esterno
- Si integrano primo e secondo membro sul volume  $V$  e si applica il teorema di Gauss (si possono scambiare l'integrale di volume e la derivata rispetto al tempo se  $S$ , e quindi  $V$ , non varia)



$$\left. \begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS\end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$$

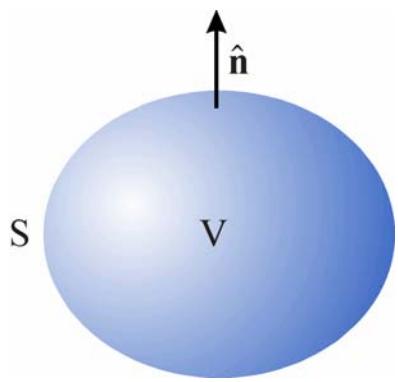
18

# Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_i = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho_c dV}_Q$$

- ◆  $i$  = corrente uscente dalla superficie  $S$
- ◆  $Q$  = carica contenuta nel volume  $V$



- La corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa
  - La carica elettrica non può essere né creata né distrutta, ma può essere solo spostata
  - Nel caso di un sistema isolato ( $i = 0$ ) la carica è costante nel tempo

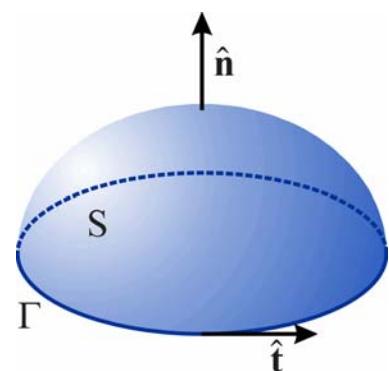
19

# Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- **Forma locale**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa  $\Gamma$  e una generica superficie  $S$  avente  $\Gamma$  come contorno
- Si orientano il versore tangente a  $\Gamma$  e il versore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra
- Si valutano i flussi attraverso  $S$  del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se  $\Gamma$ , e quindi  $S$ , non varia)



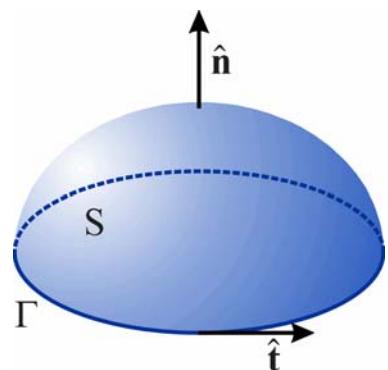
$$\left. \begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

20

# Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}_{e} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{\Phi}$$



- $e$  = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
- $\Phi$  = flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie arbitraria avente  $\Gamma$  come contorno (**flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con  $\Gamma$** )

- La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa
- A causa del segno del termine a secondo membro, la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che la ha generata (**legge di Lenz**)

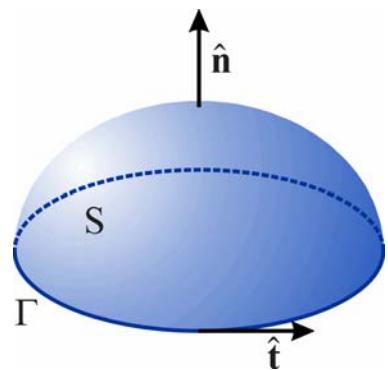
21

# Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma locale**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa  $\Gamma$  e una generica superficie  $S$  avente  $\Gamma$  come contorno
- Si orientano il versore tangente a  $\Gamma$  e il versore normale a  $S$  secondo la regola della mano destra
- Si valutano i flussi attraverso  $S$  del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se  $\Gamma$ , e quindi  $S$ , non varia)



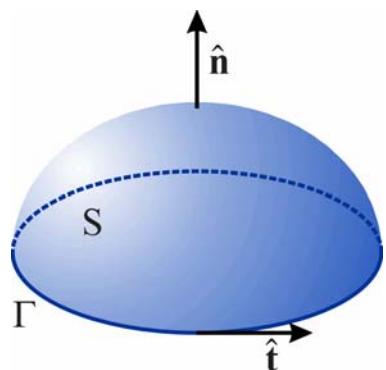
$$\left. \begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

22

# Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma integrale**

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c}$$



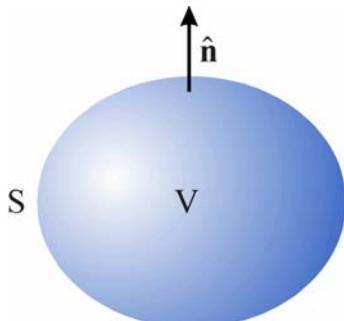
- $i_c$  = **corrente di conduzione** che attraversa  $S$
- $i_s$  = **corrente di spostamento** che attraversa  $S$
- $i_T = i_s + i_c$  = **corrente totale** concatenata con  $\Gamma$
- *La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa*

23

## Corrente di conduzione e di spostamento

- La corrente totale  $i_T$  non dipende dalla superficie  $S$ , ma solo dalla linea di contorno  $\Gamma$
- Attraverso superfici diverse aventi lo stesso contorno  $\Gamma$  i valori della corrente di conduzione  $i_c$  e della corrente di spostamento  $i_s$  possono risultare diversi, ma la loro somma  $i_T$  non varia
- ➔ Di conseguenza, la somma dei flussi attraverso una superficie chiusa della corrente di conduzione e della corrente di spostamento è sempre nullo

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c} + \underbrace{\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} = 0$$



24

# Corrente di conduzione e di spostamento

- Lo stesso risultato può esser ottenuto applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right)$$

- Dato che la divergenza del rotore è sempre nulla si ha

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Se si considera una superficie chiusa  $S$  e che delimita un volume  $V$ , applicando il teorema di Gauss si ricava

$$\int_V \left( \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) dV = \oint_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

25

## Esempio

- Si considera una linea  $\Gamma$  che circonda un terminale di un condensatore
- Attraverso  $S_1$  si ha solo corrente di conduzione

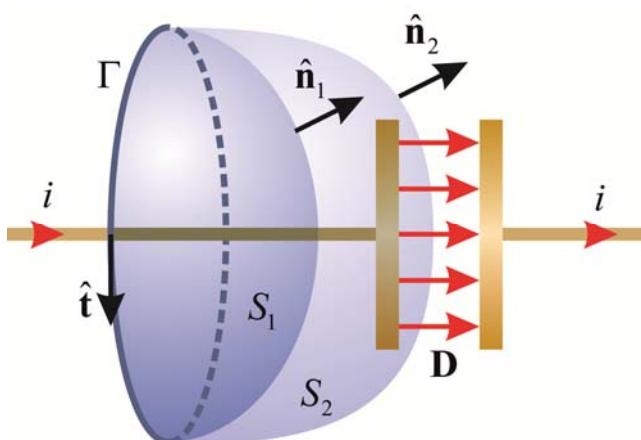
$$i_T = i_c = i = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS$$

- Attraverso  $S_2$  si ha solo corrente di spostamento

$$i_T = i_s = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

- Quindi risulta

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$



26

# Derivazione della legge di Gauss elettrica

- Come si è visto, applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell si ottiene
$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$
- Combinando questa relazione con l'equazione di continuità, si ha
$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = \text{cost}$$
- L'esperienza mostra che in una generica regione dello spazio è possibile realizzare le condizioni  $\mathbf{D} = 0$  e  $\rho_c = 0$
- In tali condizioni risulta  $\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = 0$
- Quindi la costante deve valere zero e, di conseguenza, vale la relazione
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

27

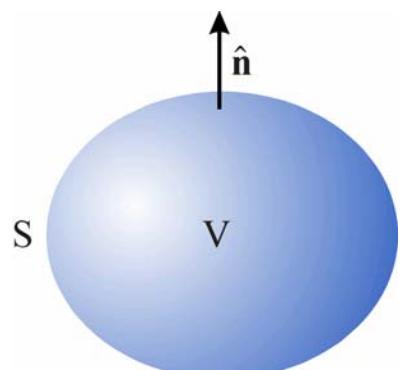
## Legge di Gauss elettrica

### Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

### Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV = Q$$



- $V =$  regione delimitata da una superficie chiusa  $S$
- Si orienta il versore normale a  $S$  verso l'esterno
- La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss
- Il flusso uscente da una superficie chiusa del vettore induzione elettrica è uguale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*

28

## Derivazione della legge di Gauss magnetica

- Si applica l'operatore divergenza a primo e secondo membro dell'equazione di Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

- Dato che la divergenza di un rotore è nulla si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost}$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione  $\mathbf{B} = 0$ , si deduce che la costante deve essere nulla  
➡  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

29

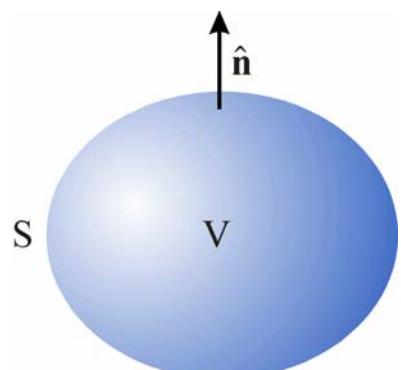
## Legge di Gauss magnetica

- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$



- $V$  = regione delimitata da una superficie chiusa  $S$

- Si orienta il versore normale a  $S$  verso l'esterno

- La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss

- Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è nullo

30

## Equazioni di legame materiale

- Le equazioni fondamentali non dipendono dalle proprietà dei mezzi materiali in cui ha sede il campo elettromagnetico
- L'effetto dei mezzi materiali sui campi elettromagnetici viene espresso mediante un insieme di equazioni dette **equazioni di legame materiale** o **relazioni costitutive**
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico le relazioni costitutive hanno la forma
  - $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$
  - $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
  - $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$
- Le relazioni costitutive possono dipendere, inoltre, da altre grandezze fisiche che definiscono lo stato del materiale (es. temperatura, pressione, ecc. )

31

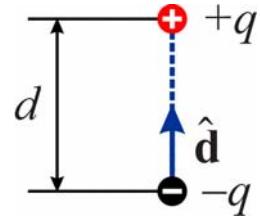
## Equazioni di legame materiale

- Materiali omogenei:**  
Le relazioni costitutive  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{E})$  non dipendono dal punto considerato
- Materiali isotropi:**  
Le relazioni costitutive  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{E})$  non dipendono dalle direzioni dei vettori
- Materiali lineari:**  
Le relazioni costitutive sono espresse da equazioni lineari del tipo  
$$\mathbf{D} = [\varepsilon] \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = [\sigma] \mathbf{E}$$
in cui  $[\varepsilon]$ ,  $[\mu]$  e  $[\sigma]$  rappresentano delle matrici
- Materiali lineari isotropi:**  
Le relazioni costitutive si riducono a relazioni di proporzionalità  
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$
in cui  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti scalari

32

# Dipolo elettrico

- Si considerano due cariche puntiformi uguali e opposte  $\pm q$  poste a distanza  $d$
- Si definisce **momento di dipolo elettrico** [ $C \cdot m$ ] la quantità  
$$\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{d}} = qd \hat{\mathbf{d}}$$
  
 $\hat{\mathbf{d}} =$  versore diretto dalla carica negativa alla carica positiva
- A una distanza dalle cariche molto grande rispetto a  $d$  il campo elettrico dipende solo da  $\mathbf{p}$  (non separatamente da  $d$  e  $q$ )
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui  $d \rightarrow 0$  (sistema praticamente puntiforme) e  $q \rightarrow \infty$  in modo tale che il prodotto  $qd$  tenda a un valore finito  $p \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo elettrico**



33

# Polarizzazione dei dielettrici

- Dal punto di vista macroscopico, si può ritenere che, in assenza di perturbazioni esterne, in un dielettrico siano presenti due distribuzioni continue di carica, una positiva (densità  $\rho_+$ ) e una negativa (densità  $\rho_-$ ), uguali e opposte in ogni punto  
$$\rho_+ + \rho_- = 0$$
- In un elemento di volume  $\Delta V$  sono contenute due cariche uguali e opposte  $\rho_+ \Delta V$  e  $\rho_- \Delta V$  i cui baricentri coincidono
  - ➡ carica totale e momento di dipolo nulli
- Un campo elettrico esterno può produrre *piccoli* spostamenti  $\mathbf{l}_+$  e  $\mathbf{l}_-$  delle cariche positive e delle cariche negative (➡ **polarizzazione del dielettrico**)
  - ➡ All'interno dell'elemento di volume  $\Delta V$ , lo spostamento relativo  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$  tra i baricentri delle cariche positive e negative dà origine a un momento di dipolo elettrico  
$$\Delta \mathbf{p} = \rho_+ \Delta V (\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-) = \rho_+ \mathbf{l} \Delta V$$

34

# Polarizzazione per deformazione e orientamento

- Materiali **non polari**: le molecole non possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - ◆ In presenza di un campo elettrico esterno si ha una **polarizzazione per deformazione**
    - deformazione della distribuzione elettronica
    - spostamenti relativi degli atomi costituenti la molecola
- Materiali **polari**: le molecole possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - ◆ In assenza di campi esterni, a causa dell'agitazione termica i dipoli sono orientati in modo aleatorio
    - ➡ i dipoli si compensano e l'effetto macroscopico è nullo
  - ◆ Un campo esterno, oltre a produrre una polarizzazione per deformazione, tende ad allineare i dipoli (**➡ polarizzazione per orientamento**)

35

## Vettore polarizzazione elettrica

- Lo stato di un dielettrico polarizzato può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **polarizzazione elettrica** [C/m<sup>2</sup>]  
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho_+ \mathbf{l}$$
- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli elettrici equivale ad una distribuzione volumetrica di carica con densità  
 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$     **densità di carica di polarizzazione**
- Se il campo elettrico varia nel tempo si ha una variazione di  $\mathbf{P}$  che equivale alla presenza di una **densità di corrente di polarizzazione elettrica**

$$\mathbf{J}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

36

# Induzione elettrica

- Legge di Gauss nel vuoto  
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c$$
  - In un dielettrico polarizzato, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche della carica di polarizzazione  
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c + \rho_p$$
  - Si esprime la carica di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$   
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c - \nabla \cdot \mathbf{P}$$
  - Si definisce **induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [ $C/m^2$ ] il vettore  
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$
- ➔ Si ottiene un'espressione della legge di Gauss, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di carica libera  $\rho_c$
- $$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

37

# Costante dielettrica

- In generale  $\mathbf{P}$ , e quindi  $\mathbf{D}$ , sono funzioni del campo elettrico  $\mathbf{E}$   
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$
- In un materiale lineare isotropo  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{D}$  sono proporzionali a  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$
$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

$\chi_e$  = **suscettività elettrica** del mezzo

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$  = **costante dielettrica relativa** del mezzo

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  = **permittività** o **costante dielettrica** del mezzo [F/m]

38

# Costanti dielettriche relative di alcuni materiali

|                   | $\epsilon_r$     |              | $\epsilon_r$   |
|-------------------|------------------|--------------|----------------|
| Titanato di bario | $10^3 \div 10^4$ | Nylon        | $3.7 \div 5.5$ |
| Ossido di titanio | $86 \div 173$    | Quarzo       | $4.3 \div 5$   |
| Acqua distillata  | 80               | Gomma        | 3              |
| Alcool etilico    | 28               | Polistirene  | $2.4 \div 3$   |
| Germanio          | 16               | Ebanite      | $2 \div 3$     |
| Silicio           | 12               | Porcellana   | $2.7 \div 2.9$ |
| Vetro             | $4 \div 10$      | Carta        | $2 \div 2.5$   |
| Allumina          | 9.5              | Teflon       | 2.1            |
| Bachelite         | $5.7 \div 7$     | Polietilene  | $1.6 \div 2.4$ |
| Mica              | $5.7 \div 6.5$   | Aria (1 atm) | 1.0006         |

(Valori a 20 °C)

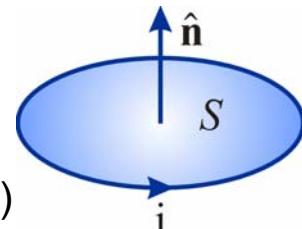
39

## Dipolo magnetico

- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente  $i$
- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [ $A \cdot m^2$ ] la quantità  

$$\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{n}} = i S \hat{\mathbf{n}}$$

$S$  = area della superficie piana delimitata dalla spira  
 $\hat{\mathbf{n}}$  = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)
- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico dipende solo da  $\mathbf{m}$
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui  $S \rightarrow 0$  (sistema praticamente puntiforme) e  $i \rightarrow \infty$  in modo tale che il prodotto  $Si$  tenda a un valore finito  $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**



40

## Vettore magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume  $\Delta V$  diviene sede di un momento di dipolo magnetico  $\Delta \mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [A/m]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d \mathbf{m}}{dV}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli magnetici equivale alla presenza nella materia di una **densità di corrente di polarizzazione magnetica**

$$\mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

41

## Campo magnetico

- Legge di Ampere - Maxwell nel vuoto

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Nella materia, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche delle correnti di polarizzazione elettrica e magnetica

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}$$

- Si esprimono le correnti di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

42

# Campo magnetico

- Nell'espressione precedente, a secondo membro, le somma delle derivate rispetto al tempo fornisce la derivata dell'induzione elettrica
- Si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- ➡ Si ottiene un'espressione della legge di Ampere - Maxwell, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di corrente  $\mathbf{J}$  associata alle cariche libere

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} + \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

43

# Equazione di continuità nei mezzi materiali

- Tenendo conto delle cariche e delle correnti di polarizzazione, l'equazione di continuità assume la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}) = - \frac{\partial(\rho_c + \rho_p)}{\partial t}$$

- Si esprimono le cariche e le correnti di polarizzazione in funzione di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M})}_{=0} = - \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t}$$

- ➡ Anche in presenza di cariche e correnti di polarizzazione si ottiene una relazione che coinvolge solo le cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

44

## Permeabilità magnetica

- In generale  $\mathbf{M}$ , e quindi  $\mathbf{B}$ , sono funzioni del campo magnetico  $\mathbf{H}$   
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$
- In un materiale lineare isotropo  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}$  sono proporzionali a  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$



$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$\chi_m$  = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$  = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0 \mu_r$  = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

45

## Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
  - ➡ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)
  - ➡ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato
    - ➡ suscettività magnetica  $\chi_m < 0$   
(valori tipici dell'ordine di  $-10^{-5}$ )
    - ➡ permeabilità magnetica relativa  $\mu_R = (1 + \chi_m) < 1$   
(valori tipici leggermente inferiori a 1)
- $\chi_m$  e  $\mu_R$  risultano indipendenti dalla temperatura

46

# Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
  - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - ◆ non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
  - ➡ suscettività magnetica  $\chi_m > 0$  (valori tipici dell'ordine di  $10^{-4} \div 10^{-5}$ )
  - ➡ permeabilità magnetica relativa  $\mu_R = (1 + \chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
  - ➡  $\chi_m$  e  $\mu_R$  diminuiscono all'aumentare della temperatura  $T$

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (C = \text{costante})$$

**Legge di Curie**

47

## Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

| Materiali diamagnetici | $\chi_m$             | Materiali paramagnetici | $\chi_m$            |
|------------------------|----------------------|-------------------------|---------------------|
| Bismuto                | $-1.7 \cdot 10^{-4}$ | Uranio                  | $4 \cdot 10^{-4}$   |
| Mercurio               | $-2.9 \cdot 10^{-5}$ | Platino                 | $2.6 \cdot 10^{-4}$ |
| Argento                | $-2.6 \cdot 10^{-5}$ | Tungsteno               | $6.8 \cdot 10^{-5}$ |
| Diamante               | $-2.1 \cdot 10^{-5}$ | Cesio                   | $5.1 \cdot 10^{-5}$ |
| Piombo                 | $-1.8 \cdot 10^{-5}$ | Alluminio               | $2.2 \cdot 10^{-5}$ |
| Grafite                | $-1.6 \cdot 10^{-5}$ | Litio                   | $1.4 \cdot 10^{-5}$ |
| Cloruro di sodio       | $-1.4 \cdot 10^{-5}$ | Magnesio                | $1.2 \cdot 10^{-5}$ |
| Rame                   | $-1.0 \cdot 10^{-5}$ | Sodio                   | $7.2 \cdot 10^{-6}$ |
| Acqua                  | $-9.1 \cdot 10^{-6}$ | Ossigeno (1 atm)        | $1.9 \cdot 10^{-6}$ |
| Azoto (1 atm)          | $-5 \cdot 10^{-9}$   | Aria (1 atm)            | $4 \cdot 10^{-7}$   |

(Valori a 20 °C)

48

# Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**
  - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - ◆ si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra **B** e **H** è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico  $T_C$  della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (C = \text{costante})$$

**Legge di Curie-Weiss**

49

# Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di  $10^{-6}$ - $10^{-3}$  m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno **H** i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di **H** si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di **H** produce un incremento di **B** uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto:  $\Delta B = \mu_0 \Delta H$

50

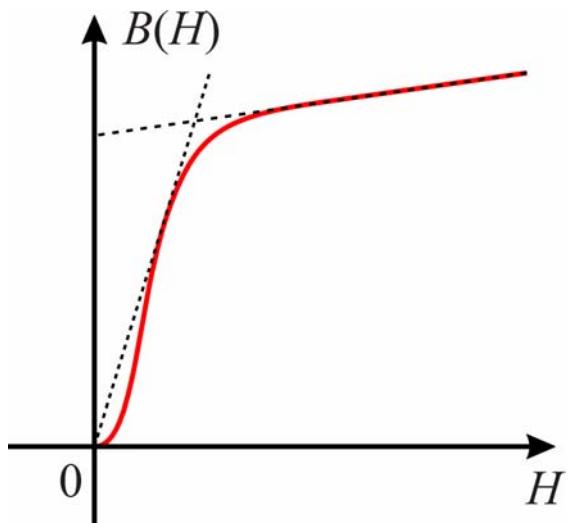
## Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato  $H = 0, B = 0$ , inizialmente si ha un tratto con pendenza elevata
  - ➡ Valori elevati della permeabilità relativa differenziale

$$\mu_{r(d)}(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



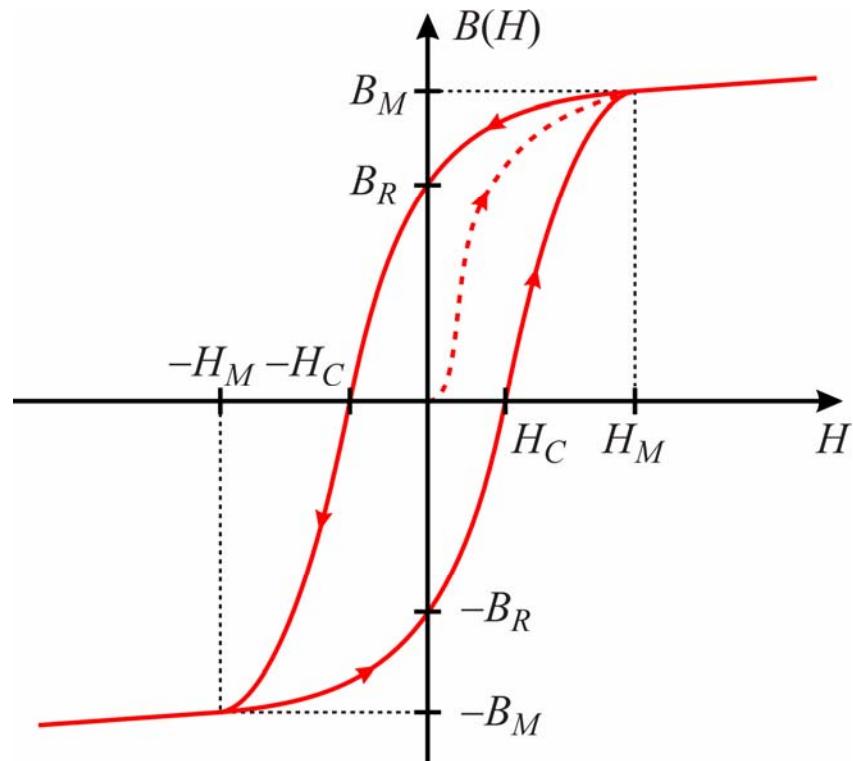
51

## Isteresi magnetica

- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso
- ➡ Riportando  $H$  a zero  $B$  non si annulla ma si porta ad un valore  $B_R$  (**induzione residua**)
- Per annullare  $B$  occorre applicare un campo magnetico inverso  $-H_C$  (**campo magnetico coercitivo**)
- Se  $H$  viene fatto variare ciclicamente tra due valori  $\pm H_M$  l'andamento di  $B$  è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

52

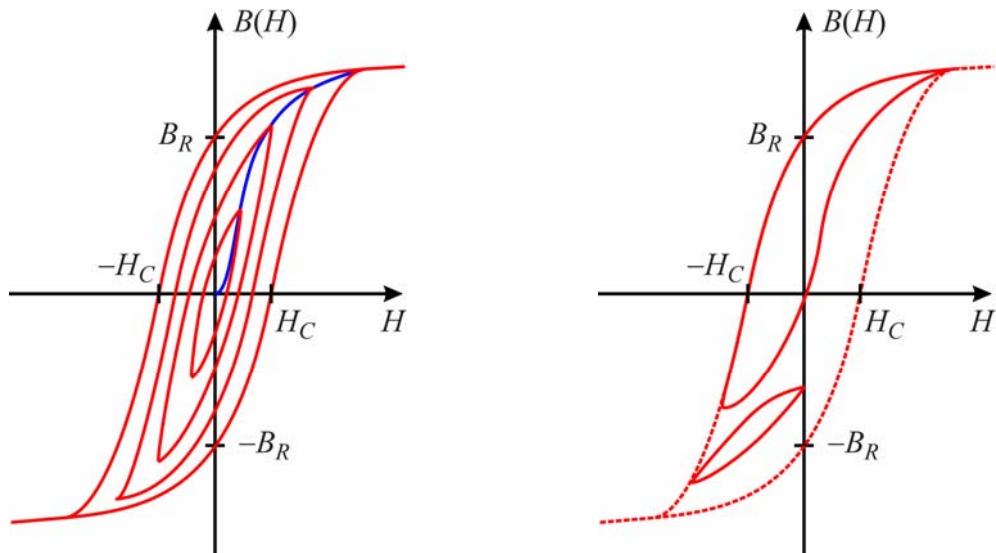
## Ciclo di isteresi



53

## Ciclo di isteresi

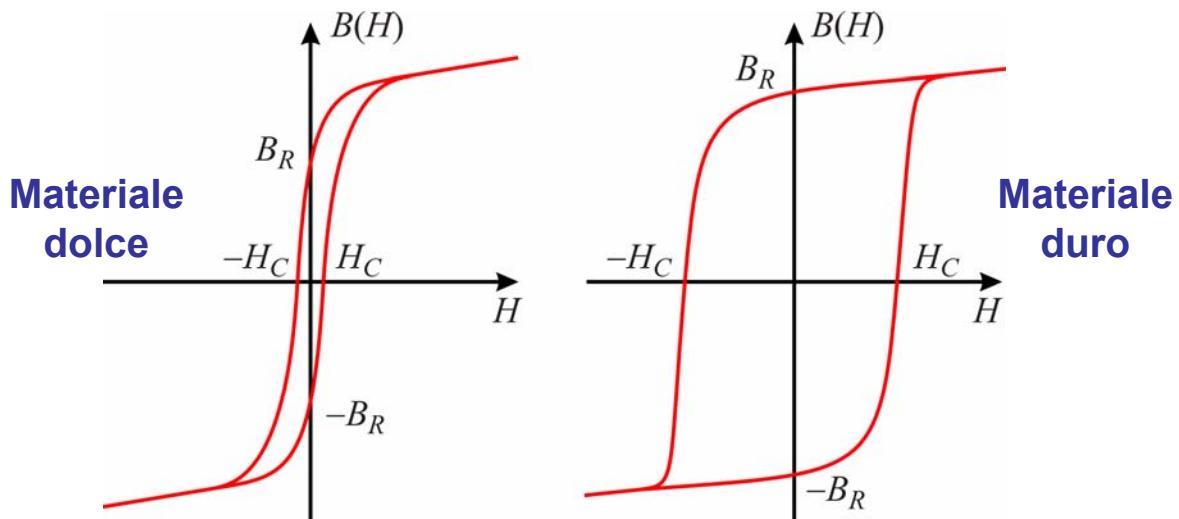
- Riducendo il valore di  $H_M$  si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici



54

# Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
  - Materiali dolci** ➔ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
  - Materiali duri** ➔ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo



55

## Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

| Materiali dolci                          | $\mu_{r(d)}$<br>iniziale | $\mu_{r(d)}$<br>massima | $B_R$ [T] | $H_C$<br>[A/m] |
|--|--------------------------|-------------------------|-----------|----------------|
| Cobalto                                  | 10                       | 175                     | 0.31      | 1000           |
| Nichel                                   | 400                      | 1100                    | 0.33      | 130            |
| Ferro puro                               | $10^4$                   | $2 \cdot 10^5$          | 1.2       | 4              |
| Ferro commerciale                        | 200                      | 5000                    | 1.2       | 80             |
| Ghisa                                    | 70                       | 600                     | 1.4       | 500            |
| Ferro-silicio 4%                         | 500                      | 7000                    | 0.8       | 40             |
| Permalloy (Ni, Fe 22%)                   | $10^4$                   | $5 \cdot 10^4$          | 0.6       | 4              |
| Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%) | $10^5$                   | $3 \cdot 10^5$          | 0.6       | 0.4            |
| Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)       | $2.5 \cdot 10^4$         | $1.5 \cdot 10^5$        | 0.6       | 1.2            |

(Valori a 20 °C)

56

# Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

| Materiali duri   | B <sub>R</sub> [T] | H <sub>C</sub> [kA/m] |
|--|--------------------|-----------------------|
| Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)                  | 1.05               | 5.6                   |
| Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)              | 1.28               | 51                    |
| Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)       | 1.05               | 120                   |
| Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)                              | 0.54               | 44                    |
| Ferrite di bario (BaFe <sub>12</sub> O <sub>19</sub> )   | 0.43               | 170                   |
| Samario-cobalto (SmCo <sub>5</sub> )                     | 0.87               | 640                   |
| Neodimio-ferro-boro (Nd <sub>2</sub> Fe <sub>14</sub> B) | 1.23               | 880                   |

(Valori a 20 °C)

57

## Legge di Ohm

- Per una vasta classe di materiali il legame tra la densità di corrente e il campo elettrico è lineare e isotropo ed è espresso dalla **legge di Ohm** (in forma locale)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

- ◆  $\sigma$  = **conducibilità** [siemens.metro, S/m]
- ◆  $\rho = 1/\sigma$  = **resistività** [ohm·metro,  $\Omega\cdot m$ ]

- Buoni conduttori      ➔  $\rho$  dell'ordine di  $10^{-7} \div 10^{-8} \Omega\cdot m$
- Conduttore ideale      ➔  $\rho = 0$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$
- Isolanti      ➔  $\rho$  dell'ordine di  $10^7 \div 10^{18} \Omega\cdot m$
- Isolante ideale      ➔  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\sigma = 0$

58

# Dipendenza della resistività dalla temperatura

- La resistività e la conducibilità sono in generale funzioni della temperatura
- Per variazioni di temperatura di ampiezza limitata la dipendenza può essere considerata praticamente lineare

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 + \alpha\theta)$$

$\rho_0$  = resistività valutata alla temperatura di riferimento  $T_0$  [ $\Omega \cdot m$ ]

$\theta = T - T_0$  = variazione di temperatura rispetto a  $T_0$  [ $^{\circ}C$ ]

$\alpha$  = coefficiente di temperatura [ $^{\circ}C^{-1}$ ]

59

## Resistività di alcuni materiali

| Conduttori           | $\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ]            | $\alpha$ [ $^{\circ}C^{-1}$ ] |
|----------------------|--|-------------------------------|
| Argento              | $1.59 \cdot 10^{-8}$                   | $3.8 \cdot 10^{-3}$           |
| Rame                 | $1.73 \cdot 10^{-8}$                   | $3.9 \cdot 10^{-3}$           |
| Oro                  | $2.36 \cdot 10^{-8}$                   | $3.4 \cdot 10^{-3}$           |
| Alluminio            | $2.82 \cdot 10^{-8}$                   | $3.9 \cdot 10^{-3}$           |
| Tungsteno            | $5.6 \cdot 10^{-8}$                    | $4.5 \cdot 10^{-3}$           |
| Ferro                | $1.0 \cdot 10^{-7}$                    | $4.5 \cdot 10^{-3}$           |
| Stagno               | $1.2 \cdot 10^{-7}$                    | $4.3 \cdot 10^{-3}$           |
| Piombo               | $2.2 \cdot 10^{-7}$                    | $3.9 \cdot 10^{-3}$           |
| Costantana (Cu-Ni)   | $4.9 \cdot 10^{-7}$                    | $2 \cdot 10^{-5}$             |
| Manganina (Cu-Ni-Mn) | $4.8 \cdot 10^{-7}$                    | $1.5 \cdot 10^{-5}$           |
| Mercurio             | $9.6 \cdot 10^{-7}$                    | $8.9 \cdot 10^{-4}$           |
| Grafite              | $3 \cdot 10^{-5} \div 6 \cdot 10^{-4}$ | $-5 \cdot 10^{-4}$            |

## Resistività di alcuni materiali

| Semiconduttori | $\rho [\Omega \cdot \text{m}]$ | $\alpha [{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$ |
|----------------|--------------------------------|------------------------------------|
| Germanio       | 0.47                           | $-4.8 \cdot 10^{-2}$               |
| Silicio        | $6.4 \cdot 10^2$               | $-7.5 \cdot 10^{-2}$               |
| Isolanti       | $\rho [\Omega \cdot \text{m}]$ |                                    |
| Carta          | $10^7 \div 10^{10}$            |                                    |
| Bachelite      | $10^9 \div 10^{10}$            |                                    |
| Porcellana     | $10^9 \div 10^{13}$            |                                    |
| Polietilene    | $10^{13}$                      |                                    |
| Vetro          | $10^{10} \div 10^{14}$         |                                    |
| Mica           | $10^{12} \div 10^{14}$         |                                    |
| Gomma          | $10^{12} \div 10^{14}$         |                                    |
| Ebanite        | $10^{16}$                      |                                    |
| Quarzo fuso    | $10^{18}$                      |                                    |

(Valori a 20 °C)

61

## Campo elettrico impresso

- Oltre alle forze elettromagnetiche, sulle cariche possono agire anche forze di natura non elettrica (ad es. meccanica o chimica)
- In questo caso la forza per unità di carica viene detta **campo elettrico impresso**,  $\mathbf{E}_i$ 
  - $\mathbf{E}_i$  è dimensionalmente omogeneo a un campo elettrico (forza per unità di carica), ma a rigore non è un campo elettrico
- In presenza di campi impressi la legge di Ohm assume la forma  

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$
da cui si ottiene anche  

$$\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J} + \mathbf{J}_i)$$
avendo posto:  $\mathbf{J}_i = -\sigma\mathbf{E}_i$  (**densità di corrente impressa**)

62

## Effetto Joule

- Si considera una densità di carica  $\rho_c$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in un mezzo di conducibilità  $\sigma$ 
  - ➡ densità di corrente  $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$
- In presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di un campo impresso  $\mathbf{E}_i$ , la forza per unità di volume che agisce sulla carica è
$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$
- La legge di Ohm indica che se la forza dovuta a  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{E}_i$  è costante, la velocità delle cariche è costante
  - ➡ sulle cariche devono agire delle forze frenanti (analoghe a forze di attrito viscoso)
  - ➡ dissipazione di energia

63

## Effetto Joule

- Il lavoro per unità di volume compiuto nell'intervallo  $dt$  dalle forze del campo elettrico e del campo impresso vale
$$\delta L = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{v} dt = \underbrace{\rho_c \mathbf{v}}_{= \mathbf{J}} \cdot \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)}_{= \mathbf{J}/\sigma} dt = \frac{J^2}{\sigma} dt$$
- Questo lavoro deve essere uguale all'energia dissipata per unità di volume
- In effetti l'esperienza mostra che in un conduttore di conducibilità  $\sigma$ , in presenza di una densità di corrente  $\mathbf{J}$ , nell'intervallo di tempo  $dt$  viene prodotta per unità di volume la quantità di calore

$$\delta Q = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

Legge di Joule

64

# Fenomeni stazionari

- **Fenomeni elettromagnetici stazionari:** fenomeni nei quali le grandezze elettromagnetiche non variano nel tempo
  - ➡ tutte le derivate rispetto al tempo nelle equazioni fondamentali sono identicamente nulle
- **Equazioni fondamentali in condizioni stazionarie**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$



Le equazioni relative  
al campo elettrico e  
al campo magnetico  
sono “disaccoppiate”

65

## Quadro generale dell'elettromagnetismo

- **Elettrostatica**
  - ◆ studio dei fenomeni stazionari in assenza di moto di cariche
  - ◆  $\mathbf{J} = 0$  ovunque
- **Elettromagnetismo stazionario**
  - ◆ studio dei fenomeni stazionari in presenza di moto di cariche
  - ◆  $\mathbf{J} \neq 0$  almeno in qualche regione del sistema considerato
- **Elettromagnetismo non stazionario**
  - ◆ studio dei fenomeni elettromagnetici non stazionari
- **Elettromagnetismo quasi stazionario**
  - ◆ studio approssimato di fenomeni nei quali le grandezze elettromagnetiche variano *lentamente* nel tempo
  - ◆ si assume che alcune delle derivate rispetto al tempo siano praticamente trascurabili
  - ➡ occorre specificare cosa significa “*lentamente*” e in base a quale criterio una derivata rispetto al tempo può essere trascurata

66

# Quadro generale dell'elettromagnetismo

