Elettromagnetismo stazionario

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 15-4-2018)

Campi statici e stazionari

- **Campo di corrente stazionario**

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

- **Campo elettrostatico**
  Campo elettrico stazionario

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

- **Campo magnetico stazionario**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Campi statici e stazionari

- Nello studio dei campi statici e stazionari si incontrano comunemente situazioni in cui sono verificate le seguenti condizioni:
  - Il campo in una regione τ è descritto mediante due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ localmente proporzionali
    (la costante di proporzionalità in generale dipende dal punto)
    $$\mathbf{b} = \kappa\mathbf{a} \qquad \kappa = \kappa(P)$$
  - Il vettore $\mathbf{a}$ è irrotazionale nella regione τ
    $$\nabla \times \mathbf{a} = 0$$
  - Il vettore $\mathbf{b}$ è indivergente nella regione τ
    $$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

Campi statici e stazionari

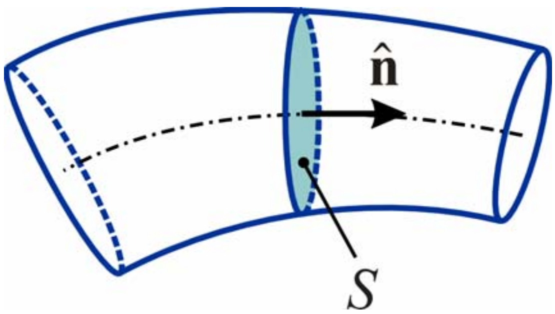
- Queste condizioni sono verificate
  - nelle regioni in cui non sono presenti campi elettrici impressi per il **campo stazionario di corrente**
    $$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{E} \quad \mathbf{b} = \mathbf{J} \quad \kappa = \sigma$$
    $$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$
  - nelle regioni in cui non sono presenti cariche elettriche per il **campo elettrostatico** e il **campo elettrico stazionario**
    $$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{E} \quad \mathbf{b} = \mathbf{D} \quad \kappa = \varepsilon$$
    $$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$
  - nelle regioni in cui è nulla la densità di corrente per il **campo magnetico stazionario**
    $$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{H} \quad \mathbf{b} = \mathbf{B} \quad \kappa = \mu$$
    $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Proprietà del vettori solenoidali

- Si assume che $\mathbf{b}$ sia indivergente all'interno una regione a connessione superficiale semplice τ (e quindi solenoidale nella regione τ)
- *Nella regione τ, il flusso di $\mathbf{b}$ attraverso ogni sezione trasversale di un tubo di flusso ha lo stesso valore*

$$\Phi = \int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \text{costante}$$

➡ Per un vettore solenoidale si può parlare di flusso associato al tubo di flusso (**portata del tubo di flusso**)



Costanza del flusso - dimostrazione

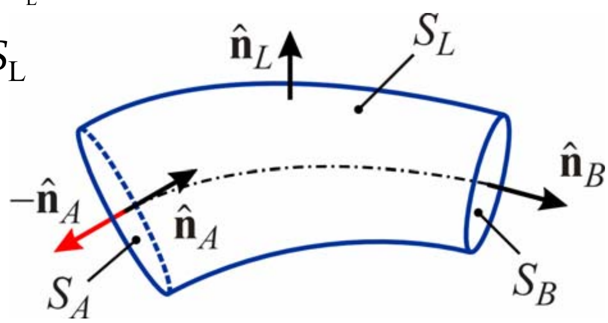
- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{b}$ delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B
- Se $\mathbf{b}$ è solenoidale è nullo il suo flusso attraverso la superficie chiusa S_T formata da S_A, S_B e dalla superficie laterale S_L

$$\oint_{S_T} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_{S_A} \mathbf{b} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_A)\, dS + \int_{S_B} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B\, dS + \int_{S_L} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L\, dS = 0$$

- Le linee di flusso di $\mathbf{b}$ sono tangenti a S_L
  - ➡ Il flusso di $\mathbf{b}$ attraverso S_L è nullo

➡ I flussi attraverso S_A e S_B sono uguali

$$\int_{S_A} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A\, dS = \int_{S_B} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B\, dS = \Phi$$



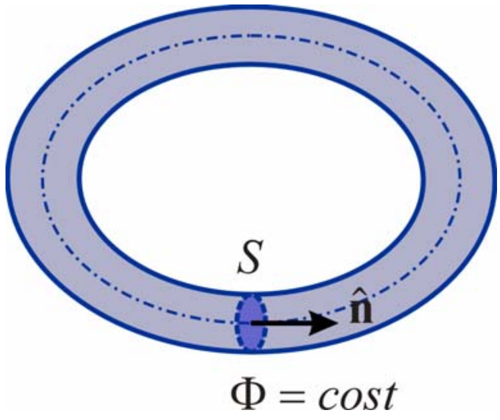
➡ Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A e S_B si può affermare che il flusso ha lo stesso valore Φ su tutte le superfici trasversali

Vettori ovunque solenoidali

- All'interno di una regione τ in cui $\mathbf{b}$ è solenoidale non possono esistere sezioni terminali del tubo di flusso
  - infatti se S_T fosse una sezione terminale dovrebbe essere

    $$\int_{S_T} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

    in contraddizione col fatto che il flusso deve essere uguale in tutte le sezioni trasversali



- Come caso particolare, *se $\mathbf{b}$ è solenoidale in tutto lo spazio, i tubi di flusso di $\mathbf{b}$, devono essere chiusi* (eventualmente all'infinito)

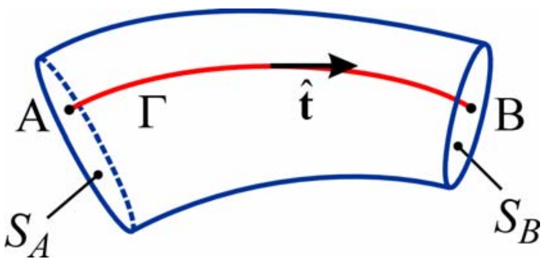
Potenziale

- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{b}$ delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso e interamente contenuto nella regione in cui valgono le condizioni

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0 \qquad \mathbf{b} = \kappa \mathbf{a}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

- La regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa
- All'interno del tronco di tubo di flusso possibile esprimere $\mathbf{a}$ come gradiente di un potenziale U

$$\mathbf{a} = -\nabla\, \mathrm{U}$$

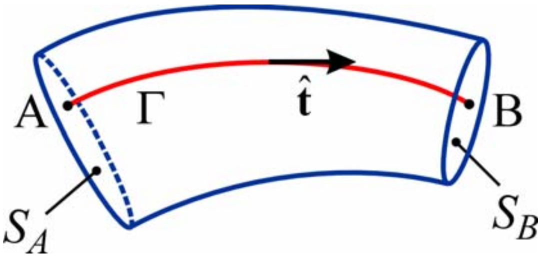


Potenziale

- Dato che **a** e **b** sono paralleli, S_A e S_B sono ortogonali alle linee di campo di **a**
  - ➡ S_A e S_B sono superfici equipotenziali
- La differenza di potenziale tra le superfici S_A e S_B è

$$\mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl$$

  - A e B sono due punti generici appartenenti rispettivamente a S_A e S_B
  - L'integrale è valutato lungo una linea arbitraria Γ che collega A e B



Relazione tra potenziale e flusso

- Come si è visto, a un tronco di tubo di flusso di **b** delimitato da due superfici trasversali ortogonali e contenuto in una regione in cui $\nabla\times\mathbf{a} = 0$ e $\nabla\cdot\mathbf{b} = 0$, possono essere associati in modo univoco
  - un flusso Φ attraverso la generica sezione trasversale
  - una differenza di potenziale U_{AB} tra le superfici terminali
- Nelle condizioni indicate valgono le seguenti proprietà:
  - *U_{AB} e Φ sono proporzionali tra loro*
  - *La costante di proporzionalità K_{AB} dipende unicamente dalle proprietà geometriche del tubo di flusso e dalle proprietà del mezzo in cui ha sede il campo*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{AB}}\Phi \qquad K_{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{\Phi} = \frac{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\, dl}{\int_S \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS}$$

Relazione tra potenziale e flusso

- Come si vedrà in seguito, la relazione

$$\mathrm{U}_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{AB}}\Phi$$

corrisponde

- alla **legge di Ohm** (in forma integrale), nel caso del campo di corrente stazionario ($\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$)

$$v_{AB} = R_{AB} i$$

- all'**equazione del condensatore**, nel caso del campo elettrico stazionario ($\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$)

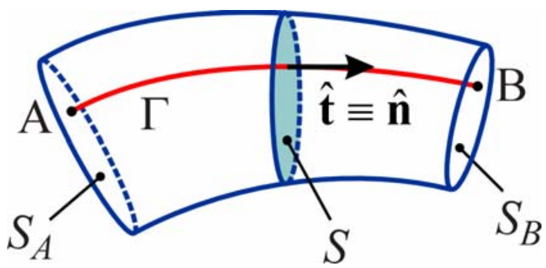
$$v_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} Q$$

- alla **legge di Hopkinson**, nel caso del campo magnetico stazionario ($\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$)

$$\psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB}\Phi$$

Determinazione della costante K_{AB}

- Per calcolare K_{AB} è conveniente fare coincidere
  - Γ con una linea di campo
  - S con una superficie equipotenziale (sezione normale)
- In questo modo
  - $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{\mathbf{n}}$
  - $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli a $\hat{\mathbf{t}}$



- Inoltre, dato che il flusso di $\mathbf{b}$ è indipendente dalla sezione, si può valutare considerando, al variare di x lungo Γ, la superficie $S(x)$ ortogonale a Γ e passante per x

$$K_{\mathrm{AB}} = \frac{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl}{\int_S \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS} = \frac{\int_0^l a(x)\,dx}{\int_S b\,dS} = \int_0^l \frac{a(x)}{\int_{S(x)} b\,dS}\,dx$$

$l =$ lunghezza di Γ
$x =$ ascissa curvilinea lungo Γ

Tubo di flusso filiforme

- Se l'area della sezione trasversale è molto piccola (➡ tubo filiforme) si può assumere che $\mathbf{b}$ e κ siano uniformi sulla superficie S
  - ➡ sia $\mathbf{b}$ che κ dipendono solo da x
  - ➡ L'espressione della costante K_{AB} è

$$K_{\mathrm{AB}} = \int_0^l \frac{a(x)dx}{\int_{S(x)} b(x)dS} = \int_0^l \frac{a(x)dx}{\kappa(x)a(x)\int_{S(x)} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\kappa(x)A(x)}$$

$A(x) =$ area della sezione $S(x)$

➡ Quindi K_{AB} non dipende da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, ma solo da κ e dalle proprietà geometriche del tubo di flusso

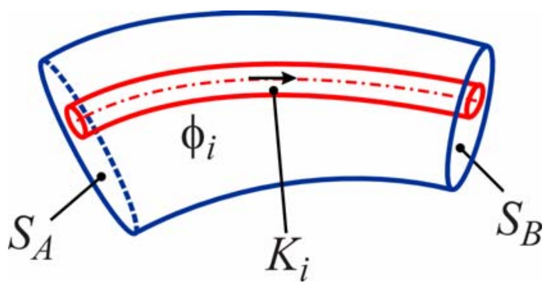
- Se, inoltre, κ e l'area della sezione hanno valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, si ottiene

$$K_{\mathrm{AB}} = \frac{l}{\kappa A}$$

Tubo di flusso generico

- Un tubo di flusso non filiforme può essere suddiviso in un insieme di tubi di flusso filiformi elementari, le cui sezioni terminali sono contenute nelle superfici S_{A} e S_{B}
- All'i-esimo tubo di flusso elementare è associato il flusso ϕ_i
- Per tutti i tubi di flusso la differenza di potenziale è pari a U_{AB}
- Per ciascun tubo elementare, applicando il procedimento precedente, si può definire una costante K_i, data da

$$K_i = \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{\phi_i}$$

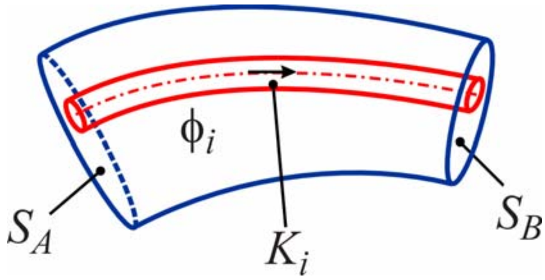


Tubo di flusso generico

- Il flusso totale è dato dalla somma dei flussi dei tubi elementari

$$\Phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{K_i}$$

- Quindi K_{AB} può essere ottenuta da



$$K_{AB} = \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{\Phi} = \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{\sum_i \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}}{K_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{K_i}}$$

➡ Dato che le K_i dipendono solo dalla configurazione geometrica e dalla costante κ, lo stesso vale anche per K_{AB}

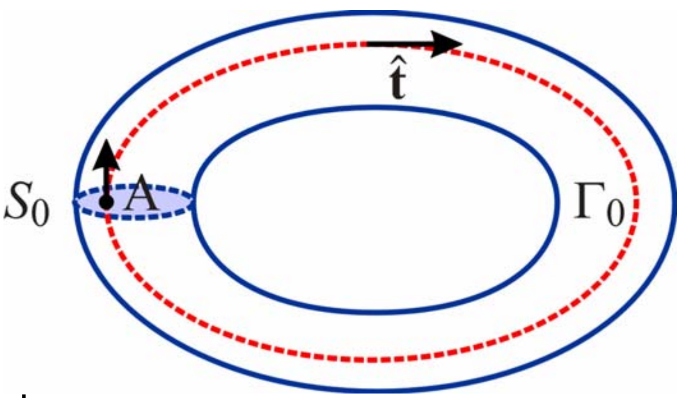
Tubi di flusso chiusi

- Si considera un tubo di flusso di $\mathbf{b}$ chiuso e si assume $\nabla\times\mathbf{a} = 0$ al suo interno mentre non si fanno ipotesi sul valore di $\nabla\times\mathbf{a}$ all'esterno

➡ La regione in cui $\mathbf{a}$ è irrotazionale non è semplicemente connessa

➡ E' possibile che la circuitazione di $\mathbf{a}$ su una linea chiusa Γ_0 contenuta nel tubo di flusso sia diversa da zero

$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = C \neq 0$$



- Si può rendere semplicemente connessa la regione interna al tubo di flusso tagliandola con una superficie S_0 ortogonale alle linee di campo

➡ Nella regione interna alla superficie formata da S_0 e dalla superficie laterale del tubo di flusso è possibile definire un potenziale U

Tubi di flusso chiusi

- Sulla superficie S_0 il potenziale in genere è discontinuo
- Se si indica con $\mathrm{U}(\mathrm{A}^+)$ il potenziale sulla faccia superiore di S_0 e con $\mathrm{U}(\mathrm{A}^-)$ il potenziale sulla faccia inferiore si ha

$$\mathrm{U}(\mathrm{A}^+) - \mathrm{U}(\mathrm{A}^-) = \int_{\mathrm{A}^+}^{\mathrm{A}^-} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \oint_{\Gamma_0} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = C$$

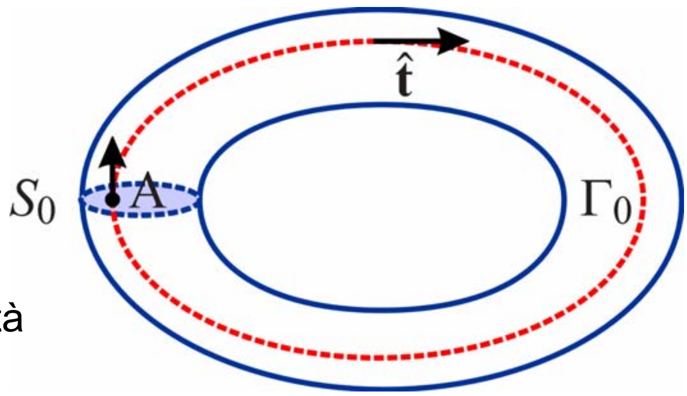
- Procedendo come nel caso di un tubo di flusso aperto si può esprimere il legame tra la circuitazione di $\mathbf{a}$ e il flusso di $\mathbf{b}$ nella forma

$C = K\Phi$

dove

$$K = \frac{\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl}{\int_S \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}$$

dipende solo da κ e dalle proprietà geometriche del tubo di flusso



Tubi di flusso chiusi

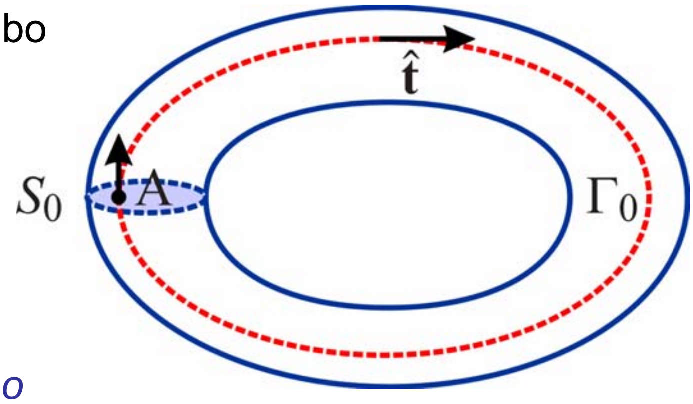
- Se il tubo di flusso chiuso fosse contenuto interamente in una regione τ semplicemente connessa in cui $\mathbf{a}$ è irrotazionale, la circuitazione di $\mathbf{a}$ su ogni linea chiusa Γ_0 sarebbe nulla

$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = 0$$

- In queste condizioni, per ogni tubo di flusso chiuso di $\mathbf{b}$ si avrebbe

$0 = K\Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0$

- quindi anche $\mathbf{b}$ sarebbe identicamente nullo

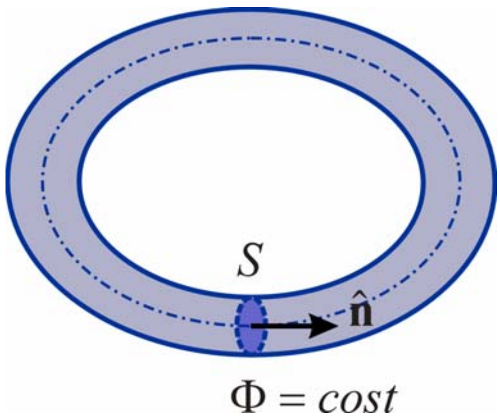


- *Tubi di flusso chiusi di* $\mathbf{b}$ *possono esistere solo se* $\mathbf{a}$ *non è ovunque irrotazionale*

Circuito elettrico elementare

- Il vettore $\mathbf{J}$ è ovunque solenoidale
- ➡ I tubi di flusso di $\mathbf{J}$ sono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di $\mathbf{J}$ costituisce un **circuito elettrico elementare**
  - Più in generale, si possono avere circuiti elettrici con struttura ramificata costituiti dall'unione di più tubi di flusso di $\mathbf{J}$
- ➡ Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore
- Questo valore rappresenta la **corrente** associata al tubo di flusso

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

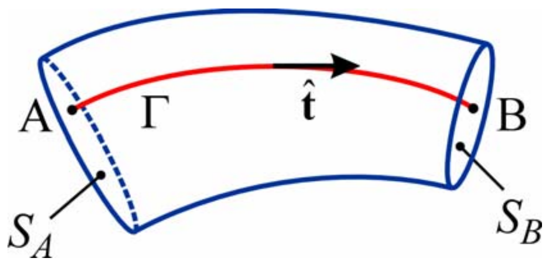


Tensione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{J}$ delimitato da due superfici trasversali S_{A} e S_{B} ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tronco di tubo di flusso non agiscano campi impressi (quindi $\mathbf{E} = \sigma\mathbf{J}$)
- Dato che $\mathbf{E}$ è ovunque irrotazionale, si può porre $\mathbf{E} = -\nabla \mathrm{V}$
- S_{A} e S_{B} sono ortogonali anche alle linee di campo di $\mathbf{E}$
  ➡ sono due superfici equipotenziali
- La **tensione** (differenza di potenziale) tra le due superfici è

$$v_{\mathrm{AB}} = \mathrm{V(A)} - \mathrm{V(B)} = \int_{\Gamma_{\mathrm{AB}}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl$$

dove A e B sono due generici punti rispettivamente di S_{A} e S_{B} e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ che collega A e B



Resistenza

- Si definisce **resistenza** (unità di misura ohm, Ω) del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione v_{AB} e la corrente i

$$R_{AB} = \frac{v_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS}$$

- Il reciproco della resistenza è detto **conduttanza** (unità di misura siemens, S)

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{i}{v_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl}$$

- *La resistenza e la conduttanza non dipendono da $\mathbf{E}$ e da $\mathbf{J}$, ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla conducibilità del materiale*

Legge di Ohm in forma integrale

- La differenza di potenziale (tensione) tra le sezioni terminali del tubo di flusso e la corrente attraverso il tubo di flusso sono legate dalla relazione

$$v_{AB} = R_{AB} i$$ **Legge di Ohm in forma integrale**

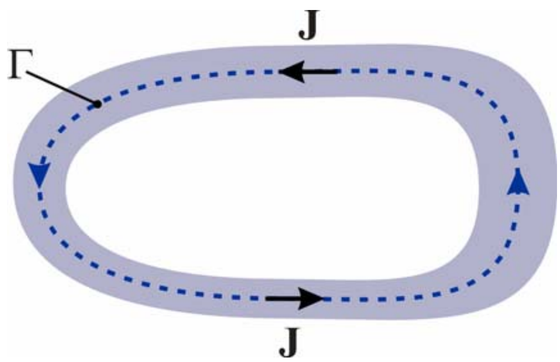
e quindi

$$i = G_{AB} v_{AB} \qquad (G_{AB} = 1/R_{AB})$$

Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- Se si considera un tubo di flusso chiuso (cioè si fanno coincidere le sezioni S_A e S_B), dato che $\mathbf{E}$ è conservativo risulta

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = 0$$



- Quindi si ha anche

$$Ri = 0$$

dove R rappresenta la resistenza del circuito

➡ Di conseguenza la corrente è nulla e quindi anche $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ si devono essere nulli

Necessità del campo impresso

- In presenza del solo campo elettrico $\mathbf{E}$ conservativo non si può avere corrente nel circuito
  - se le cariche percorrono traiettorie chiuse il lavoro compiuto dal campo elettrico è nullo
  - nel circuito non può circolare corrente, dato che questo richiederebbe che il campo fornisse un'energia pari a quella dissipata per effetto Joule

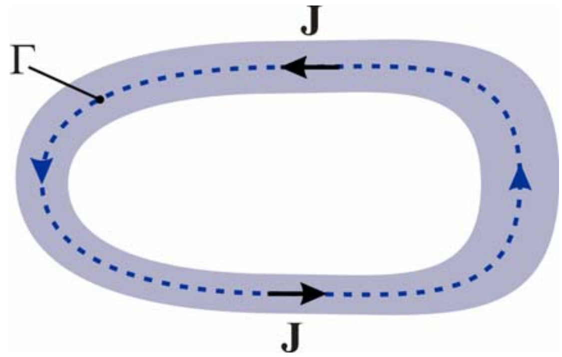
➡ Affinché si possa avere una corrente nel circuito è indispensabile la presenza si un campo impresso non conservativo

Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- In presenza di un campo impresso non conservativo, la circuitazione del campo totale vale

$$\oint_\Gamma (\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \oint_\Gamma \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = e \neq 0$$

dove e è la **forza elettromotrice** dovuta al campo impresso



- In queste condizioni si ottiene

$$R = \frac{\oint_\Gamma (\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl}{\int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dS} = \frac{e}{i}$$

➡ Quindi la legge di Ohm per un circuito elementare è

$$Ri = e$$

Generatori

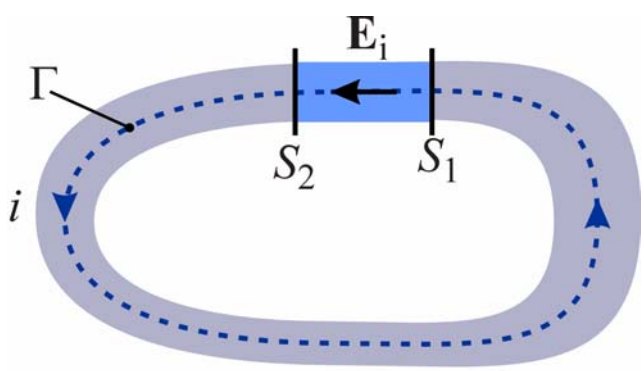
- Normalmente Il campo impresso è diverso da zero solo in alcune regioni del circuito
- Nell'esempio $\mathbf{E}_i \neq 0$ solo nel tratto compreso fra le sezioni S_1 e S_2 quindi

$$e = \oint_\Gamma \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl$$

dove Γ_{12} è il tratto di Γ compreso tra le due sezioni

- Le regioni in cui agiscono i campi impressi corrispondono a dispositivi nei quali avviene conversione in energia elettrica di energia di altro tipo (es. meccanica, termica, chimica)

  ➡ **generatori elettrici**



Tubo di flusso sede di f.e.m.

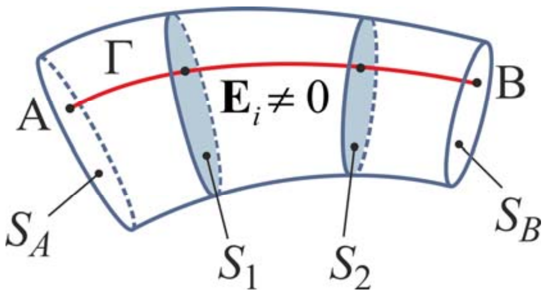
- Si considera un tronco di tubo di flusso all'interno del quale è presente una regione in cui il campo impresso è diverso da zero
- Integrando il campo elettrico totale si ottiene

$$\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = v_{AB}+e$$

($\mathbf{E}_i$ dà contributo solo nel tratto compreso fra S_1 e S_2)

- La resistenza può essere valutata come

$$R_{AB} = \frac{v_{AB}+e}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl}{\int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dS}$$



➡ Quindi la legge di Ohm può essere espressa come

$$v_{AB} = R_{AB}i - e$$

Nota

- Le considerazioni precedenti si basano sull'ipotesi che l'andamento dei tubi di flusso di $\mathbf{J}$ sia noto
- Generalmente i circuiti elettrici sono realizzati mediante conduttori circondati da un mezzo isolante (nel quale $\sigma \cong 0$ e quindi $\mathbf{J} \cong 0$)
- In condizioni stazionarie le componenti di $\mathbf{J}$ ortogonali alle superfici di separazione tra regioni occupate da materiali diversi devono essere continue
  - ➡ Dato che nel mezzo isolante $\mathbf{J}$ è praticamente uguale a zero, sulle superfici che delimitano i conduttori si deve annullare la componente ortogonale di $\mathbf{J}$
    (altrimenti si avrebbero dei tubi di flusso che terminano sulla superficie dei conduttori, ma questo non è possibile perché $\mathbf{J}$ è solenoidale)
  - ➡ $\mathbf{J}$ deve essere tangente alle superfici che delimitano i conduttori
  - ➡ E' possibile identificare i tubi di flusso di $\mathbf{J}$ con i conduttori

Modello circuitale

- Un sistema elettromagnetico sede di un campo di corrente stazionaria può essere descritto in forma un **modello circuitale**
- Il sistema viene suddiviso in sottosistemi detti **componenti** circuitali
- Ogni **componente** è idealmente delimitato da una superficie chiusa (**superficie limite**) attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero di regioni, ciascuna equipotenziale, (**poli** o **terminali**)
  - un terminale coincide con la sezione normale di un tubo di flusso di $\mathbf{J}$
  - ad ogni terminale può essere associata in modo univoco una corrente
  - ad ogni copia di terminali può essere associata in modo univoco una tensione

Modello circuitale

- Il comportamento del circuito è descritto mediante grandezze integrali, indipendenti dalle coordinate spaziali
  - **correnti** attraverso i terminali
  - **tensioni** (differenze di potenziale) tra i terminali
- Il modello circuitale fa riferimento solo alle relazioni tra le tensioni e le correnti ai terminali dei componenti
- Non viene messa in evidenza
  - la configurazione geometrica dei tubi di flusso di $\mathbf{J}$
  - la distribuzione di campo al loro interno

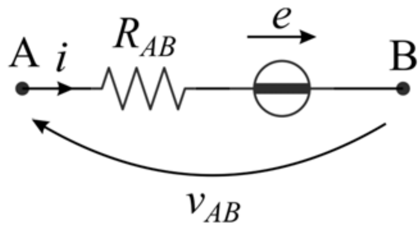
Equazioni dei componenti

- Le tensioni e le correnti di ciascun componente sono soggette a vincoli dipendenti dalle proprietà fisiche del componente (**equazioni dei componenti**)
  - Per esempio, nel caso in cui il componente si identifica con un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{J}$ in cui vale la relazione

    $$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

    l'equazione del componente è data, come si è visto, dalla legge di ohm in forma integrale

    $$v_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{AB}} i - e$$



  - ➡ Il componente può essere rappresentato come serie di un resistore e di un generatore ideale di tensione

Equazioni dei collegamenti

- Dalle equazioni fondamentali per il campo di corrente stazionario

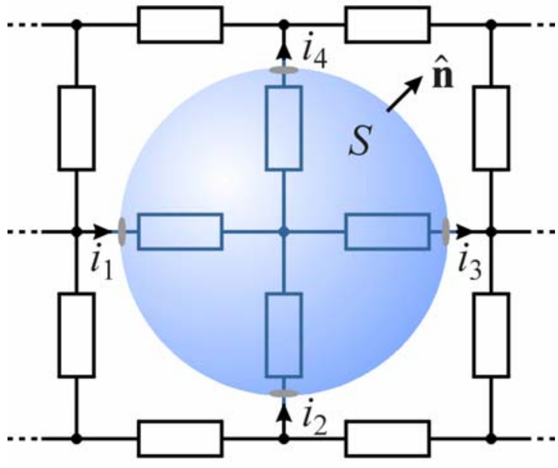
  $$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

  $$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

  è possibile derivare le leggi di Kirchhoff, che esprimono i vincoli tra le tensioni e tra le correnti dei componenti di un circuito dipendenti dalla struttura dei collegamenti

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- La legge di Kirchhoff per le correnti è diretta conseguenza del fatto che la densità di corrente in condizioni stazionarie è solenoidale
- Si considera una superficie chiusa orientata S che interseca i rami del circuito



- La densità di corrente è diversa da zero solo nelle aree S_k che rappresentano le intersezioni tra la superficie e il circuito, quindi

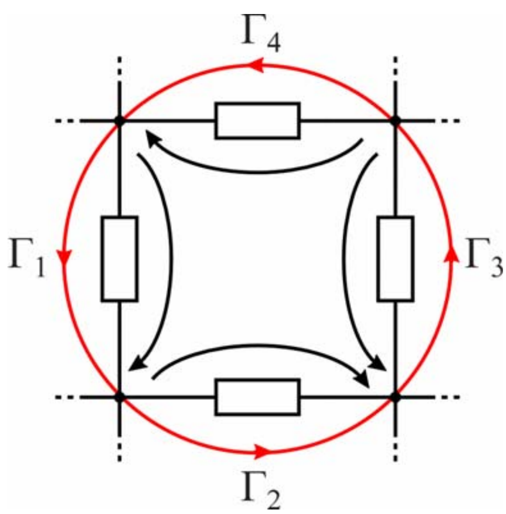
$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \sum_k \pm i_k = 0$$

- L'integrale di $\mathbf{J}$ sulla superficie S_k coincide con la corrente di un terminale o con il suo opposto a seconda che il verso della normale a S e il verso della corrente siano concordi o discordi

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- La legge di Kirchhoff per le tensioni è diretta conseguenza del fatto che il campo elettrico in condizioni stazionarie è irrotazionale e quindi su una generica linea chiusa si ha

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = 0$$



- Si considera una linea Γ passante per i nodi di un circuito e la si suddivide in una successione di curve Γ_k, ciascuna delle quali collega una coppia di nodi

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \sum_k \pm V_k = 0$$

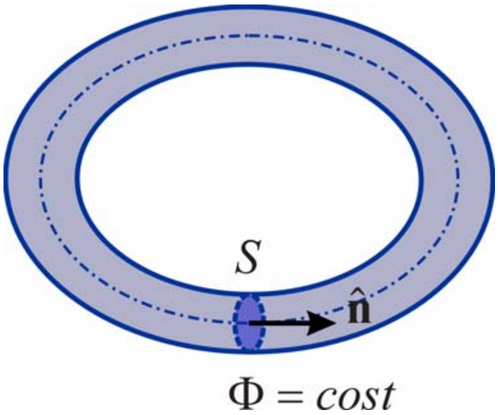
- L'integrale di $\mathbf{E}$ lungo la linea Γ_k rappresenta la tensione V_k tra i nodi collegati dalla linea Γ_k o il suo opposto $(-V_k)$ a seconda che il verso della tensione e il verso di Γ siano concordi o discordi

Circuito magnetico elementare

- Il vettore **B** è ovunque solenoidale
- ➡ I tubi di flusso di **B** non possono avere sezioni terminali, quindi devono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di **B** costituisce un **circuito magnetico elementare**
  - Più in generale, si possono avere circuiti magnetici con struttura ramificata costituiti dall'unione di più tubi di flusso di **B**

➡ Il flusso di **B** attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$



Potenziale scalare magnetico

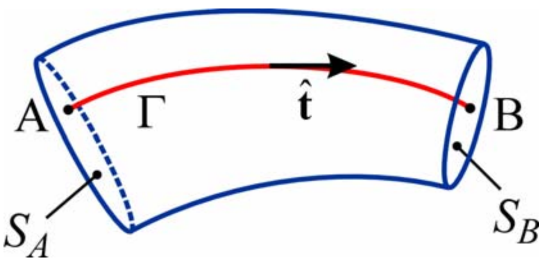
- Si considera un tronco di tubo di flusso di **B** delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Se all'interno del tronco di tubo di flusso la densità di corrente **J** è nulla si ha

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

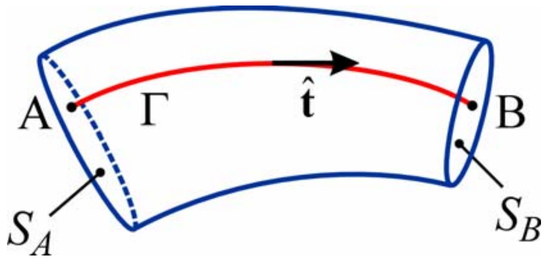
- Dato che la regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa, in tale regione è possibile definire un **potenziale scalare magnetico** ψ [unità di misura A]

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi$$

- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di **H**
  ➡ sono due superfici equipotenziali



Tensione magnetica



- La **tensione magnetica** [A] tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso è

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_{A} e S_{B} e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ, interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B

Riluttanza e permeanza

- Si definisce **riluttanza** [unità di misura henry^{-1} = H^{-1}] del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_{A} e S_{B} il rapporto tra la tensione magnetica ψ_{AB} e il flusso di induzione magnetica Φ

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl}{\displaystyle\int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dS}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto **permeanza** [unità di misura henry, H]

$$\mathcal{P}_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathcal{R}_{\mathrm{AB}}} = \frac{\Phi}{\psi_{\mathrm{AB}}} = \frac{\displaystyle\int_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS}{\displaystyle\int_{\Gamma_{\mathrm{AB}}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl}$$

- *La riluttanza e la permeanza non dipendono da* $\mathbf{B}$ *e da* $\mathbf{H}$*, ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del materiale*

Legge di Hopkinson

- La tensione magnetica tra le sezioni terminali di un tronco di tubo di flusso di $\mathbf{B}$ e il flusso magnetico attraverso il tubo sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB}\Phi \qquad \textbf{Legge di Hopkinson}$$

e quindi

$$\Phi = \mathcal{P}_{AB}\psi_{AB} \qquad \left(\mathcal{P}_{AB} = 1/\mathcal{R}_{AB}\right)$$

Tubi di flusso chiusi

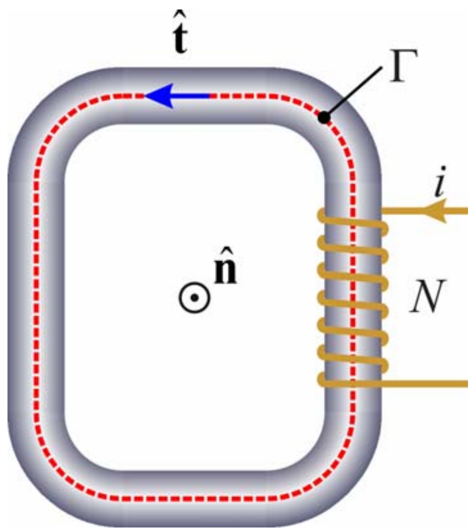
- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata, altrimenti $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ risulterebbero nulli
- In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = i_c$$

- Quindi la riluttanza del tubo di flusso chiuso può essere espressa come

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} H\, dl}{\int_{S} B\, dS} = \frac{i_c}{\Phi}$$

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico elementare



- Per un tubo di flusso chiuso la legge di Hopkinson assume la forma

  $\Re\Phi = i_c$

- In particolare, se il tubo di flusso è concatenato con un avvolgimento formato da N spire e percorso da una corrente i, si ha

  $\Re\Phi = Ni$

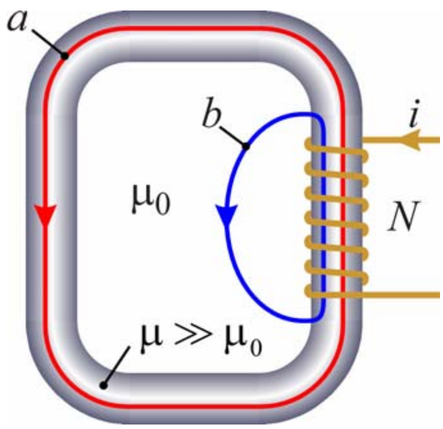
- La corrente concatenata i_c è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) (ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico)

Circuiti magnetici

- Per il campo magnetico stazionario è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff per i circuiti elettrici
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un circuito elettrico "equivalente"
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di $\mathbf{B}$ è noto a priori
  - sistemi dotati di particolari simmetrie
  - circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti
  (Tutti i mezzi, vuoto compreso, sono magneticamente permeabili)
- Mentre le conducibilità dei buoni conduttori e quelle degli isolanti possono differire di 18-24 ordini di grandezza, le permeabilità magnetiche possono differire, al più, di 5-6 ordini di grandezza
- **Esempio:**
  Circuito magnetico costituito da un materiale ad elevata permeabilità ($\mu >> \mu_0$) circondato da un mezzo con permeabilità relativamente bassa ($\mu \cong \mu_0$)
- Sono possibili due tipi di linee di flusso
  - a) linee che si sviluppano interamente nel mezzo ad elevata permeabilità
  - b) linee che in parte si sviluppano nel mezzo a bassa permeabilità



Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

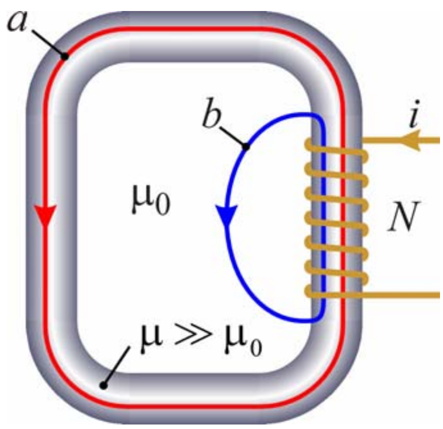
- Si considerano due tubi di flusso filiformi aventi assi coincidenti con le linee a e b
- Dalla legge di Hopkinson si ottiene

$$\Phi_a = \frac{Ni}{\mathcal{R}_a} \qquad \Phi_b = \frac{Ni}{\mathcal{R}_b}$$

- Dato che il tubo di flusso b comprende un tratto a bassa permeabilità risulta

$$\mathcal{R}_b \gg \mathcal{R}_a \quad \Rightarrow \quad \Phi_b \ll \Phi_a$$

➡ E' possibile trascurare il flusso dovuto a linee del tipo b e considerare l'anello di materiale ad elevata permeabilità come un tubo di flusso di $\mathbf{B}$

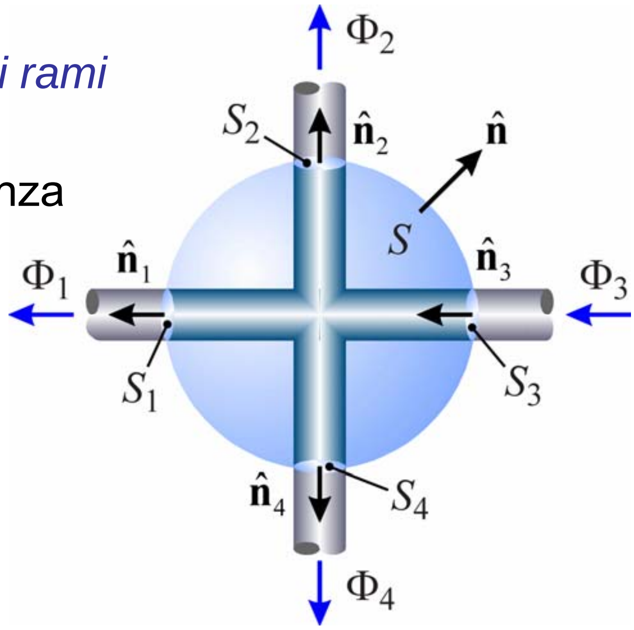


Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- *La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla*
- ➡ In particolare si ha che:
  La somma algebrica dei flussi dei rami afferenti ad un nodo è nulla
- Questa legge è diretta conseguenza del fatto che $\mathbf{B}$ è solenoidale

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \sum_k \pm \oint_{S_k} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}_k\,dS =$$

$$= \sum_k \pm \Phi_k = 0$$



$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

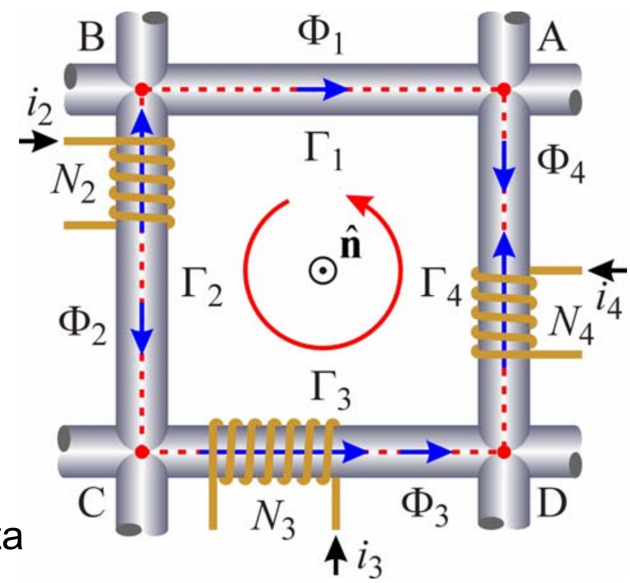
- *La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa*
- Questa legge si ottiene direttamente dalla legge di Ampere

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl =$$

$$= \sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathfrak{R}_k \Phi_k = i_C$$

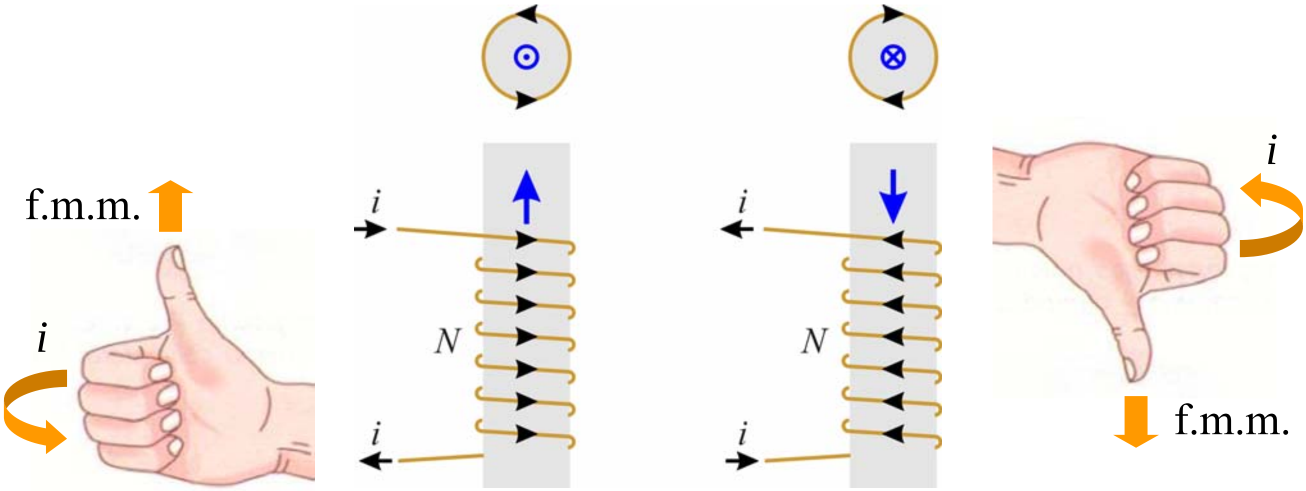
- Se la forza magnetomotrice è prodotta da un insieme di avvolgimenti concatenati con la maglia

$$\sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathfrak{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$-\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4 =$$
$$= -N_2 i_2 + N_3 i_3 + N_4 i_4$$

Versi di riferimento delle f.m.m.

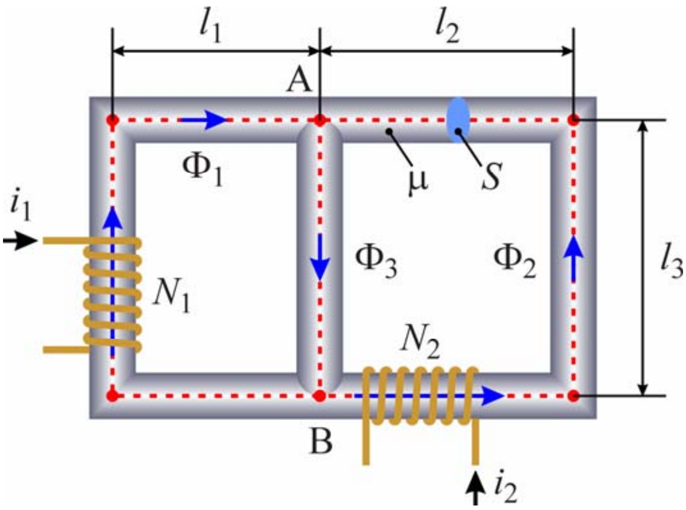


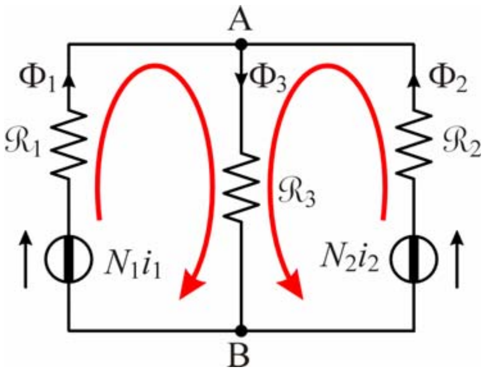
- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento orientati relativamente ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra
- A secondo membro dell'equazione di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, segno – se è discorde

Analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
R	$\mathcal{R}$
i	Φ
v	ψ
(f.e.m.) e	(f.m.m.) Ni
$v_k = R_k i_k$	$\psi_k = \mathcal{R}_k \Phi_k$
$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_k \pm \Phi_k = 0$
$\sum_k \pm R i_k = \sum_k \pm e_k$	$\sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$

Esempio



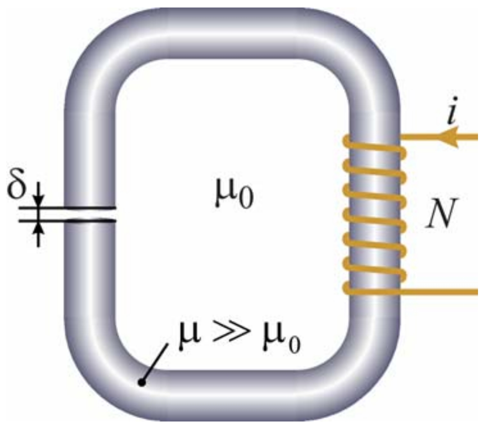


$$\mathcal{R}_1 = \frac{2l_1 + l_3}{\mu S} \qquad \mathcal{R}_2 = \frac{2l_2 + l_3}{\mu S} \qquad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

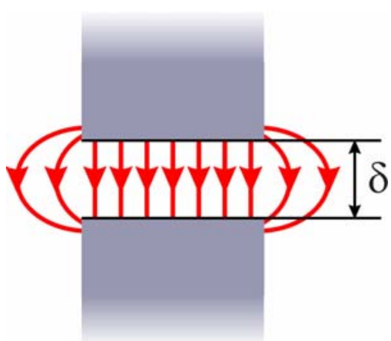
$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \mathcal{R}_1\Phi_1 + \mathcal{R}_3\Phi_3 = N_1 i_1 \\ \mathcal{R}_2\Phi_2 + \mathcal{R}_3\Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$

Circuiti magnetici con traferri

- In alcuni casi, in un circuito magnetico si possono avere delle interruzioni del materiale ad elevata permeabilità (**traferri**)



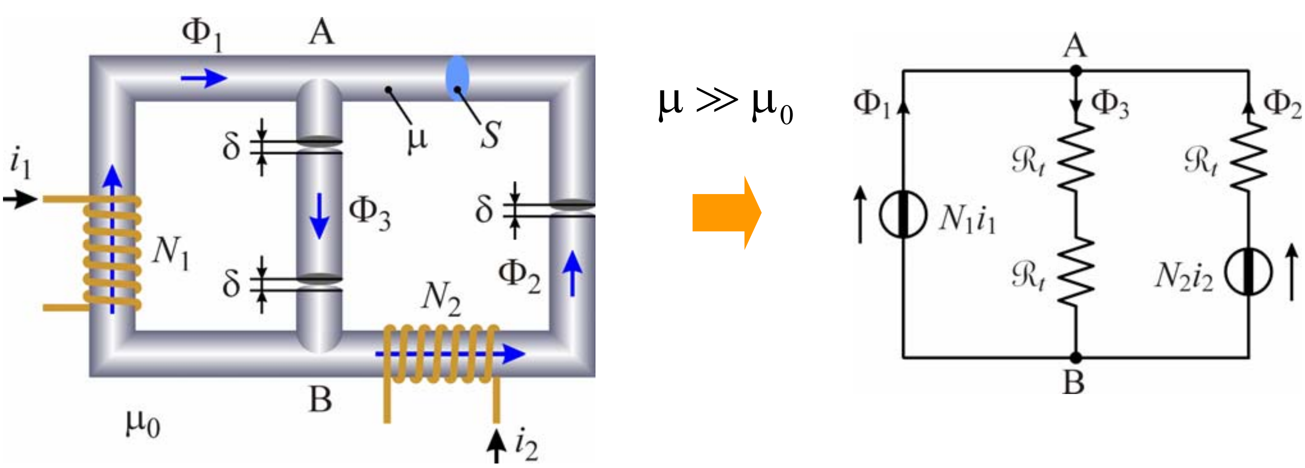
- La presenza di traferri di piccolo spessore non altera in modo significativo l'andamento delle linee di flusso di $\mathbf{B}$ (si hanno degli *effetti di bordo*, spesso trascurabili)



Circuiti magnetici con traferri

- Qualora sia necessario tenere conto degli effetti di bordo, si può valutare la riluttanza dei traferri assumendo un'area efficace $S' > S$ (S = sezione del nucleo in corrispondenza del traferro)
  - Un metodo empirico per definire l'area efficace consiste nell'aggiungere un bordo di larghezza pari allo spessore del traferro
- I traferri possono alterare notevolmente l'entità dei flussi magnetici, dato che le loro riluttanze possono essere molto elevate anche per valori modesti dello spessore δ
  - Spesso le riluttanze dei tratti di materiale ad elevata permeabilità risultano trascurabili rispetto alle riluttanze dei traferri
  - Nel circuito elettrico "equivalente" i tratti ad elevata permeabilità corrispondono a conduttori ideali e i traferri a corrispondono a resistori

Esempio

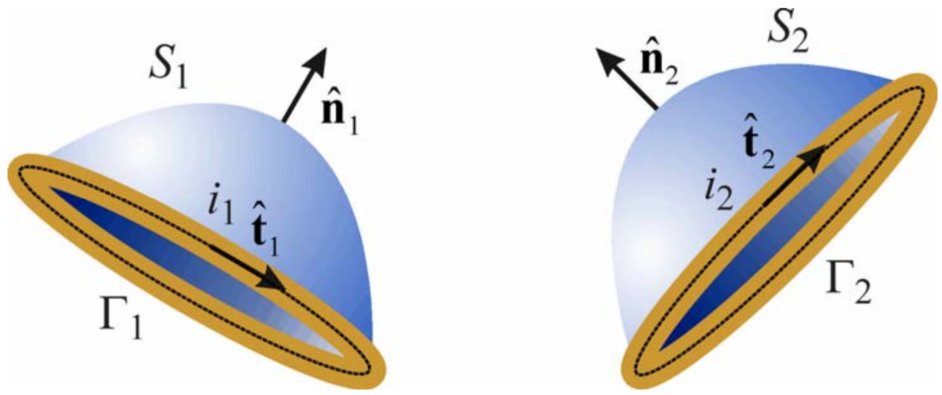


Traferri di uguale spessore δ

Riluttanza di un traferro: $\mathcal{R}_t = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Si considerano due circuiti elettrici Γ_1 e Γ_2 percorsi dalle correnti i_1 e i_2 e immersi in un mezzo lineare isotropo



- ➡ In questa ipotesi le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle correnti sono lineari
- ➡ I flussi di induzione magnetica concatenati con i due circuiti sono funzioni lineari delle correnti i_1 e i_2

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$
$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

- I coefficienti L_1 e L_2 sono detti **coefficienti di autoinduzione** o **(auto)induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti **coefficienti di mutua induzione** o **mutue induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- Si può dimostrare che risulta sempre verificata l'uguaglianza $M_{12} = M_{21} = M$ quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente i_k, quando la corrente nell'altro circuito è nulla

$$L_1 = \left.\frac{\Phi_{c1}}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad L_2 = \left.\frac{\Phi_{c2}}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

- Il coefficiente di mutua induzione rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente nell'altro circuito valutato quando la corrente i_k è nulla

$$M = \left.\frac{\Phi_{c1}}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{\Phi_{c2}}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le definizioni di coefficienti di auto e mutua induzione possono essere generalizzate al caso di N circuiti
- In questo caso risulta

$$\begin{aligned} \Phi_{c1} &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \cdots + M_{1N} i_N \\ \Phi_{c2} &= M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \cdots + M_{2N} i_N \\ &\vdots \\ \Phi_{cN} &= M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \cdots + L_N i_N \end{aligned}$$

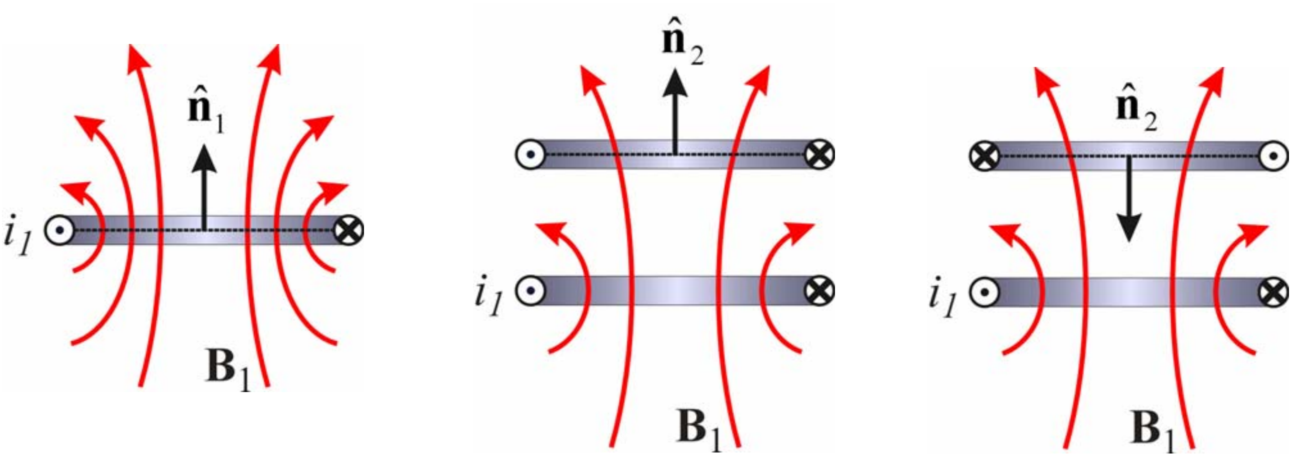
dove

$$L_k = \left.\frac{\Phi_{ck}}{i_k}\right|_{i_h=0\ \forall h\neq k} \qquad M_{kj} = \left.\frac{\Phi_{ck}}{i_j}\right|_{i_h=0\ \forall h\neq j}$$

- Inoltre si ha

$$M_{hk} = M_{kh}$$

Segni dei coefficienti di auto e mutua induzione



$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0 \Rightarrow L_1 > 0$

$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} > 0 \Rightarrow M > 0$

$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} < 0 \Rightarrow M < 0$

Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo

Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento

Esempio 1

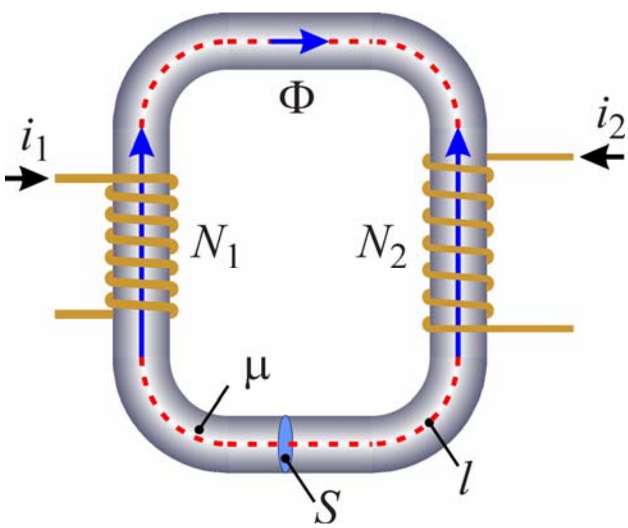
- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\Re} \qquad \left(\Re = \frac{l}{\mu S}\right)$$

- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\Re} i_1 - \frac{N_1 N_2}{\Re} i_2$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi = -\frac{N_1 N_2}{\Re} i_1 + \frac{N_2^2}{\Re} i_2$$



➡ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re} \qquad M = -\frac{N_1 N_2}{\Re} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\Re}$$

Esempio 2

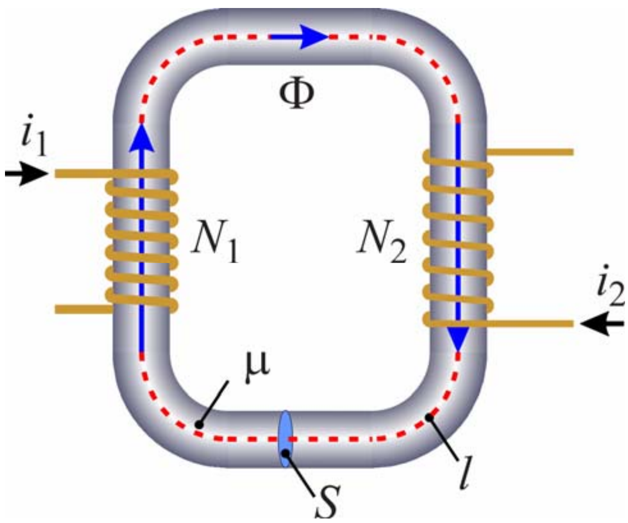
- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\Re} \qquad \left(\Re = \frac{l}{\mu S} \right)$$

- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\Re} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\Re} i_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2}{\Re} i_1 + \frac{N_2^2}{\Re} i_2$$



➡ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{\Re} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\Re}$$

Nota

- Per un avvolgimento formato da N spire disposto su un ramo di un circuito magnetico il flusso concatenato Φ_c si ottiene moltiplicando il flusso Φ del ramo per il numero di spire

$$\Phi_c = \pm N\Phi$$

- Al flusso concatenato si attribuisce segno + quando il verso della corrente nell'avvolgimento e il verso del flusso sono orientati secondo la regola della mano destra
- Si attribuisce segno – in caso contrario

Conduttori in regime elettrostatico

- In condizioni statiche $\mathbf{J} = 0$, quindi deve risultare $\sigma\mathbf{E} = 0$
- Di conseguenza si ha

  $\sigma \neq 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$

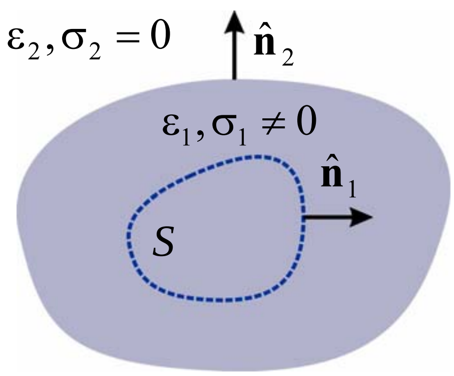
  $\mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \sigma = 0$
- Il campo elettrico può essere diverso da 0 solo in un mezzo isolante ($\sigma = 0$)
- All'interno di un conduttore ($\sigma \neq 0$)
  - il campo elettrico è nullo
  - il potenziale è costante
- La superficie esterna di un conduttore è una superficie equipotenziale
  - la componente tangente del campo elettrico è nulla
  - il campo elettrico all'esterno del conduttore è normale alla superficie

Conduttori in regime elettrostatico

- Per una generica superficie chiusa interamente contenuta all'interno del conduttore, dalla legge di Gauss si ottiene

$$Q = \varepsilon_1 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = 0$$

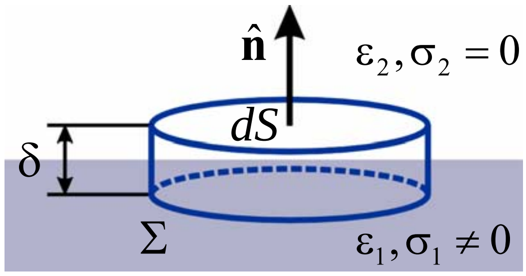
- La densità di carica all'interno del conduttore è nulla



Conduttori in regime elettrostatico

- Si considera una superficie cilindrica infinitesima con asse ortogonale alla superficie del conduttore e con una base all'interno del conduttore e una all'esterno
- Si assume che la superficie laterale sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'area di base dS
- In presenza di campo elettrico esterno il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso la superficie è dato dal solo contributo della base esterna

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = E dS$$



- Per la legge di Gauss, sulla superficie del conduttore deve essere presente una distribuzione di carica con densità superficiale σ_c tale che

$$Q = \sigma_c dS = \varepsilon_2 E dS \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \varepsilon_2 E = D$$

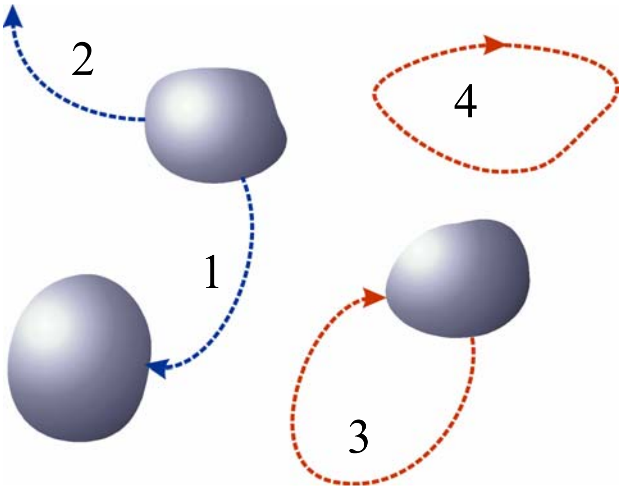
Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Si considera un sistema costituito da conduttori carichi separati da un mezzo isolante (dielettrico)
- Si assume $\rho_C = 0$ all'esterno dei conduttori
- ➡ Nella regione esterna ai conduttori, per un generico tubo di flusso di $\mathbf{D}$ il flusso è indipendente dalla sezione
- ➡ Per un tronco di tubo di flusso delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di campo, la differenza di potenziale tra le superfici terminali e il flusso di $\mathbf{D}$ sono legati da una relazione del tipo

$$v_{AB} = K_{AB} \Phi$$

Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Si possono avere solo tubi di flusso di **D** che vanno
  - da un conduttore a un altro (1)
  - da un conduttore all'infinito (2)
- Non è possibile che un tubo di flusso
  - abbia entrambe le sezioni terminali sullo stesso conduttore (3)
  - si richiuda su se stesso (4)



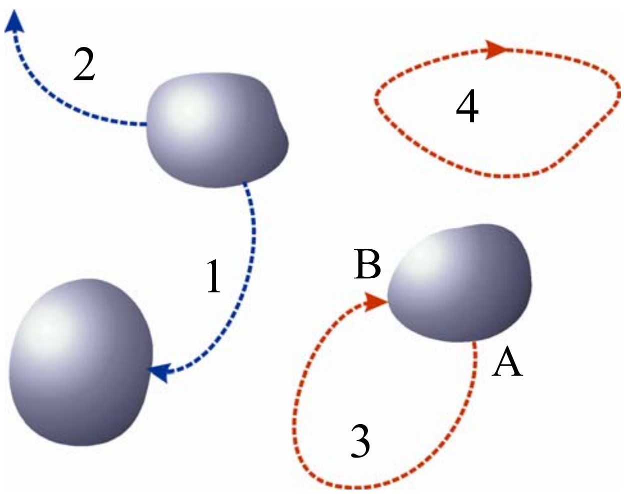
Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Dato che i conduttori sono equipotenziali, per un tubo di flusso del tipo (3) la tensione risulterebbe nulla
  - Quindi si annullerebbe il flusso di **D** e di conseguenza anche **D** dovrebbe essere nullo

$$K_{AB}\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 0$$

- In modo analogo, dato che **E** è conservativo, anche per un tubo di flusso di tipo (4) si otterrebbe

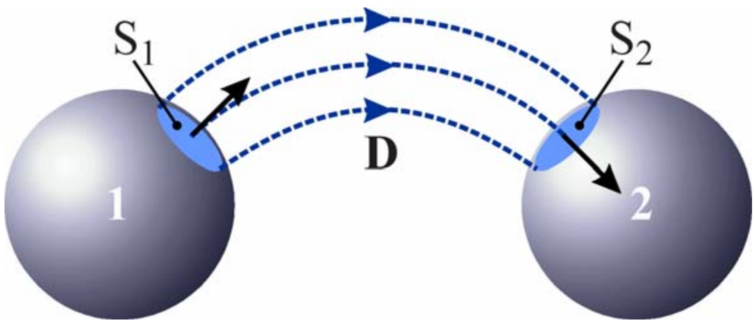
$$K_{AB}\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 0$$



Condensatore elementare

- Si considerano due conduttori separati da un dielettrico lineare nel quale la densità di carica è nulla
- Si considera inoltre un tubo di flusso di $\mathbf{D}$ che ha origine sul conduttore 1 e termina sul conduttore 2
- Sulle superfici terminali S_1 e S_2 $\mathbf{D}$ è discontinuo, quindi devono essere presenti due distribuzioni superficiali di carica
- ➡ Si può dimostrare che le cariche sulle superfici S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_{Q} = -\underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$

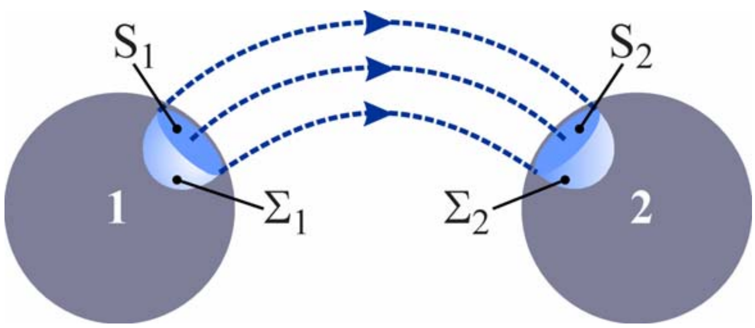


Condensatore elementare

- Si forma una superficie chiusa unendo alla superficie laterale del tubo di flusso e due superfici Σ_1 e Σ_2 interne ai conduttori
- Il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso questa superficie è nullo ($\mathbf{D}$ è nullo all'interno dei conduttori ed è tangente alla superficie laterale)
- ➡ Quindi risulta

$$\int_{S_1} \sigma_c dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = -\int_{S_2} \sigma_c dS_2 = Q$$

- ➡ Il sistema formato dalle superfici S_1 e S_2 e dal tubo di flusso che le collega costituisce un **condensatore elementare**

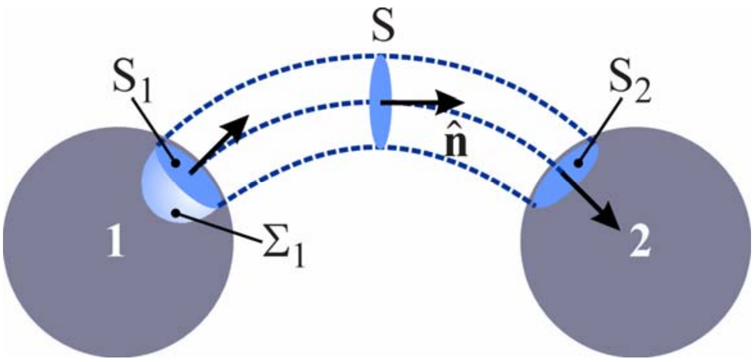


Flusso di D e carica

- All'esterno dei conduttori il flusso di $\mathbf{D}$ ha lo stesso valore attraverso ogni sezione trasversale S del tubo
- Si può verificare che, con i versi di riferimento indicati nella figura, questo valore coincide con la carica totale su S_1

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = Q$$

- Per dimostrarlo è sufficiente applicare la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1, S e dal tratto della superficie laterale del tubo compreso tra S_1 ed S

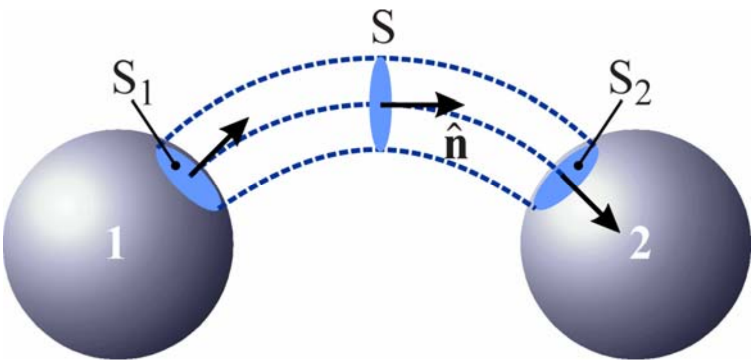


Tensione

- Le superfici S_1 e S_2 sono equipotenziali (e quindi ortogonali alle linee di campo di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{D}$)
- La tensione tra due sezioni terminali del tubo di flusso può essere espressa come

$$v_{12} = \mathrm{V}(P_1) - \mathrm{V}(P_2) = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl$$

- dove P_1 e P_2 sono due punti arbitrari di S_1 e S_2 e Γ è una linea arbitraria che unisce i due punti



Capacità

- Si definisce **capacità** C (unità di misura farad, F) del tubo di flusso il rapporto tra il valore assoluto della carica sulle sezioni terminali e la differenza di potenziale tra i conduttori

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- *La capacità dipende solo dalla geometria del sistema e dalle proprietà del mezzo interposto tra i conduttori*
- La definizione di capacità di un tubo di flusso di $\mathbf{D}$ è analoga alla definizione di conduttanza di un tubo di flusso di $\mathbf{J}$

Condensatore

- **Condensatore:** sistema formato da due conduttori (armature) disposti in modo tale che tutte le linee di campo uscenti da un conduttore terminino sull'altro

➡ Le cariche totali sulle superfici dei conduttori sono uguali e opposte

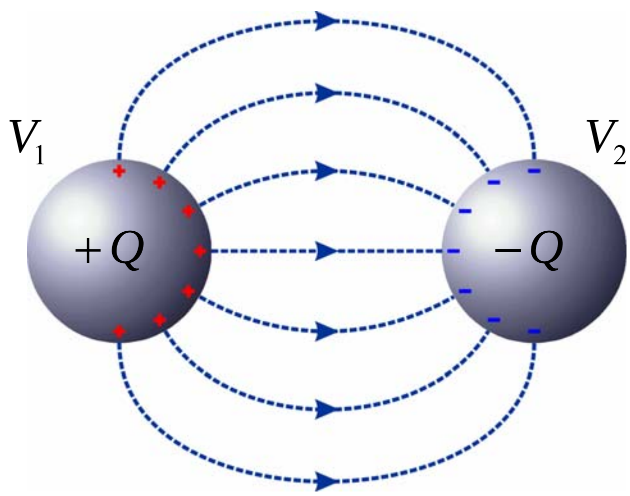
- Si definisce **capacità** del condensatore il rapporto

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Q = valore assoluto della carica

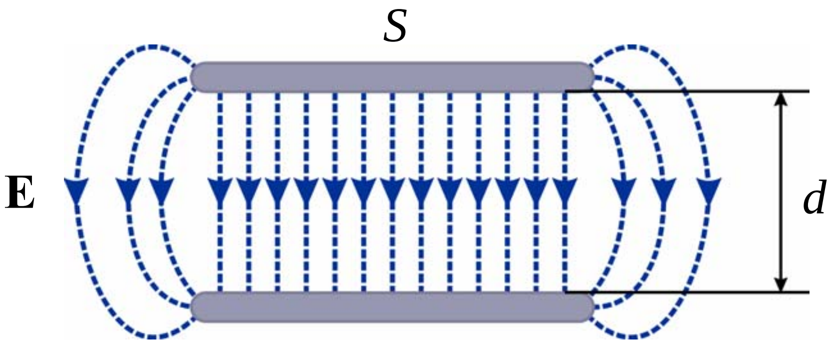
V_1 = potenziale del conduttore con carica $+Q$

V_2 = potenziale del conduttore con carica $-Q$



Esempio - condensatore a facce piane parallele

- Armature piane parallele di area S
- Distanza tra le armature d piccola rispetto alle dimensioni lineari delle armature
- Se si trascurano gli *effetti di bordo*, si può assumere che il campo elettrico tra le armature sia uniforme



$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Conduttori in condizioni stazionarie

- In condizioni stazionarie, all'interno di un conduttore i vettori $\mathbf{D}$ $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ soddisfano le equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

- Se il conduttore è omogeneo si ottiene

$$\rho_c = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon \mathbf{J}}{\sigma} \right) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

➡ All'interno di un conduttore omogeneo la densità volumetrica di carica è sempre nulla

- A differenza del caso elettrostatico, in presenza di correnti stazionarie questa proprietà vale solo se il mezzo è omogeneo

Campo elettrico all'esterno dei conduttori

- La superficie di un conduttore percorso da corrente non è equipotenziale
- ➡ Deve essere presente un campo elettrico anche all'esterno di un conduttore
  - Infatti l'integrale di linea del campo elettrico lungo una linea esterna al conduttore che collega due punti della superficie è uguale alla differenza di potenziale tra i due punti, quindi il campo elettrico all'esterno non può essere nullo
- ➡ A differenza di quanto avviene nel caso elettrostatico, esistono linee di campo che collegano punti appartenenti allo stesso conduttore
- ➡ Il campo elettrico all'esterno del conduttore in generale non è ortogonale alla superficie del conduttore

Condensatore elementare

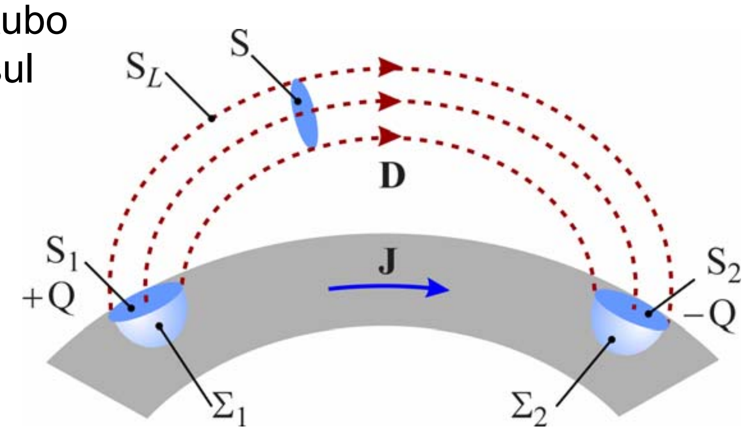
- Si considera un conduttore omogeneo percorso da corrente circondato da un dielettrico con permettività ε
- Si assume che all'esterno del conduttore sia $\rho_c = 0$
- Sulla superficie del conduttore è presente una distribuzione superficiale di carica con densità

$$\sigma_c = \varepsilon E_n = D_n$$

E_n, D_n = componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ ortogonali alla superficie

- Sulle superfici terminali di un tubo di flusso che inizia e termina sul conduttore sono presenti due cariche uguali e opposte

$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_{Q} = -\underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$

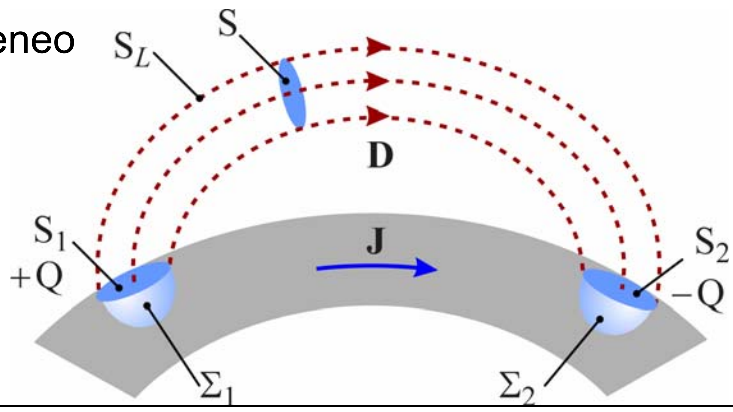


Condensatore elementare

- Per dimostrare le affermazioni precedenti, in primo luogo si osserva che è nullo il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso le superfici Σ_1 e Σ_2 interne al conduttore
  - $\mathbf{J}$ è solenoidale ➡ è nullo il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso le superfici chiuse formate da Σ_1 e S_1 e da Σ_2 e S_2
  - Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso S_1 e S_2 è nullo perché il conduttore costituisce un tubo di flusso di $\mathbf{J}$
  - ➡ Quindi devono annullarsi anche i flussi attraverso Σ_1 e Σ_2

- Il conduttore è lineare e omogeneo
  ➡ $\mathbf{D}$ è proporzionale a $\mathbf{J}$

➡ Quindi anche il flusso di $\mathbf{D}$ attraverso Σ_1 e Σ_2 è nullo



Condensatore elementare

- Applicando la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1, S e dal tratto della superficie laterale S_L compreso tra S_1 ed S si ottiene

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = Q = \int_{S_1} \sigma_c\,dS_1$$

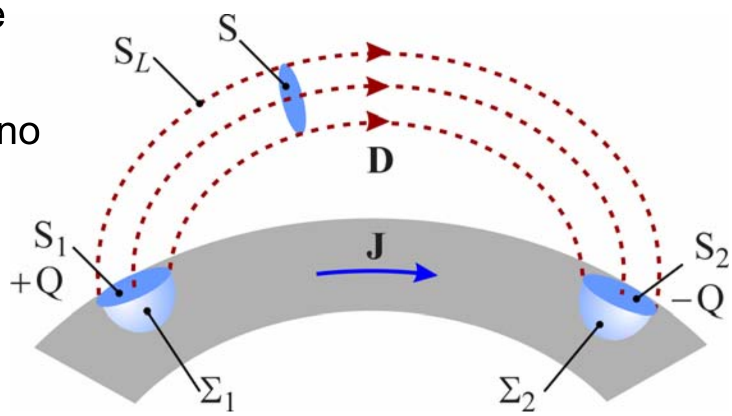
➡ Quindi la densità di carica sulla superficie del conduttore è

$$\sigma_c = \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

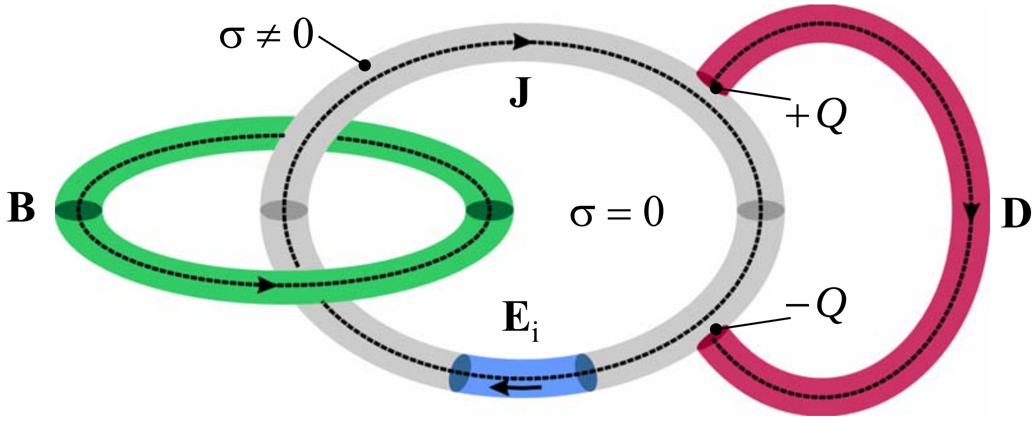
- Il flusso attraverso la superficie formata da S_L, Σ_1 e Σ_2 è nullo

➡ Quindi le cariche su S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\int_{S_1} \sigma_c\,dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c\,dS_2 = 0$$



Elettromagnetismo stazionario - riepilogo



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Legge di Hopkinson $\mathcal{R}\Phi = i_C$

Legge di Ohm $Ri = e$

$\dfrac{Q}{C} = V$ **Equazione del condensatore**

Elettromagnetismo stazionario - riepilogo

- **Resistenza**

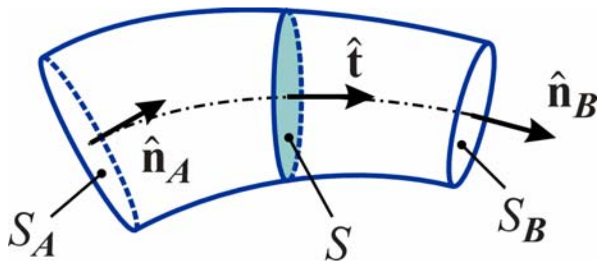
$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S J dS} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x) A(x)}$$

- **Riluttanza**

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} H dl}{\int_S B dS} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x) A(x)}$$

- **Capacità**

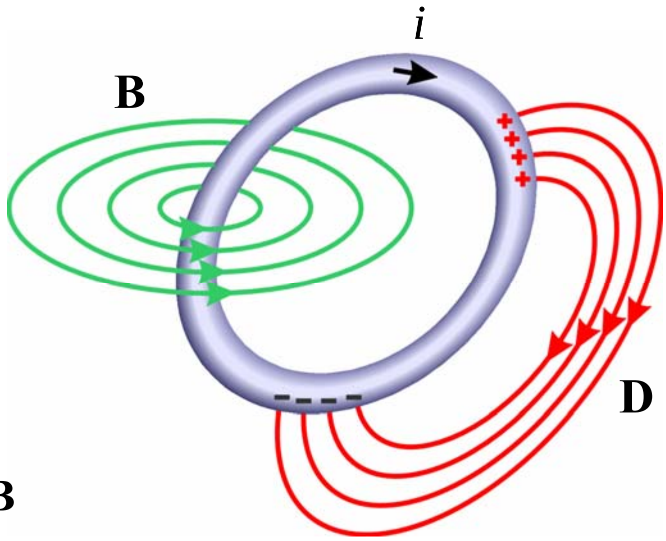
$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{V_{AB}}{Q} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S D dS} = \int_0^l \frac{dx}{\varepsilon(x) A(x)}$$



Le ultime uguaglianze valgono nel caso di tubi di flusso “filiformi”

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

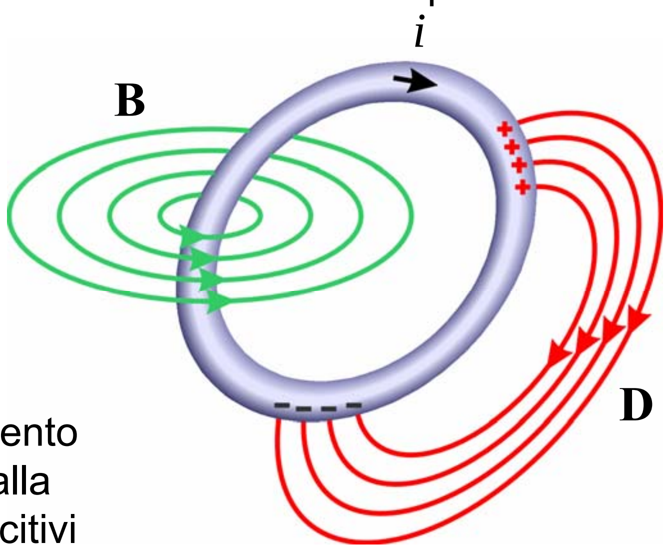
- Sulla superficie di un conduttore percorso da corrente è presente una distribuzione superficiale di carica
- ➡ Alla superficie del conduttore si appoggiano dei tubi di flusso di $\mathbf{D}$ sulle cui sezioni terminali si localizzano cariche uguali e opposte
- ➡ Questi tubi di flusso costituiscono dei condensatori elementari



- La corrente nel circuito genera un campo magnetico
- ➡ Un circuito elettrico è sempre concatenato con tubi di flusso di $\mathbf{B}$

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

- In **condizioni stazionarie** è possibile studiare il campo di corrente prescindendo dalla presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico all'esterno del conduttore
- Noti il potenziale e la corrente nel conduttore si possono determinare il campo magnetico e la distribuzione della carica sulla superficie

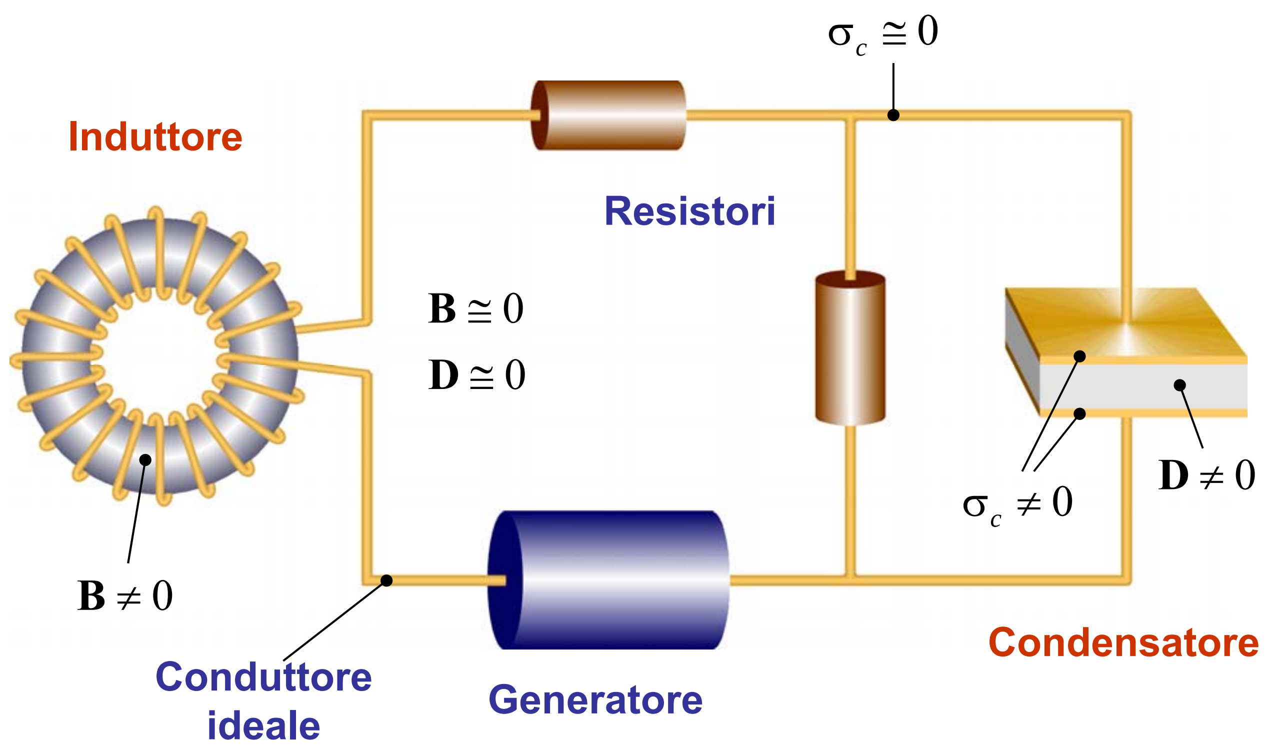


- In **condizioni non stazionarie** le equazioni che governano il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno del conduttore sono accoppiate con le equazioni del campo di corrente
- ➡ In queste condizioni il comportamento del circuito è influenzato anche dalla presenza di effetti induttivi e capacitivi

Induttori e condensatori

- Normalmente i circuiti elettrici sono realizzati in modo che gli effetti induttivi e capacitivi siano significativi solo all'interno di determinate regioni che corrispondono a componenti detti **induttori** e **condensatori**
  - ➡ Proprietà che a rigore dovrebbero essere associate all'intero circuito possono essere attribuite a singoli componenti
- All'interno di un induttore i valori di $\mathbf{B}$ sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
  - ➡ Il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con il circuito è praticamente determinato dai soli contributi dei flussi negli induttori
- All'interno di un condensatore i valori di $\mathbf{D}$ sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
  - ➡ La densità di carica sulla superficie del conduttore assume valori significativi solo sulle armature dei condensatori

Esempio

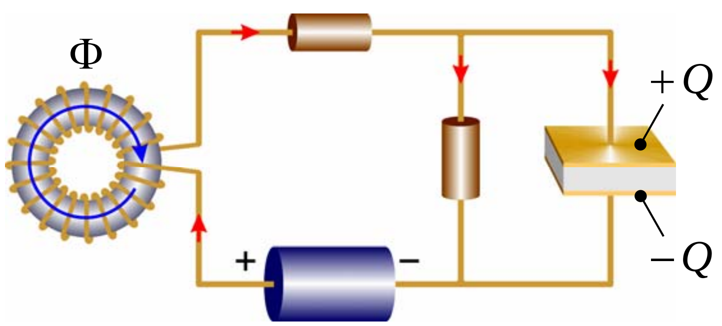


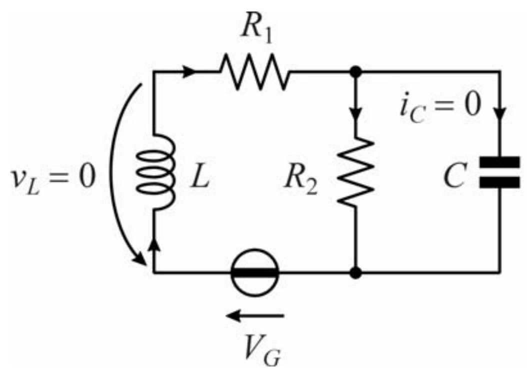
Induttori e condensatori in regime stazionario

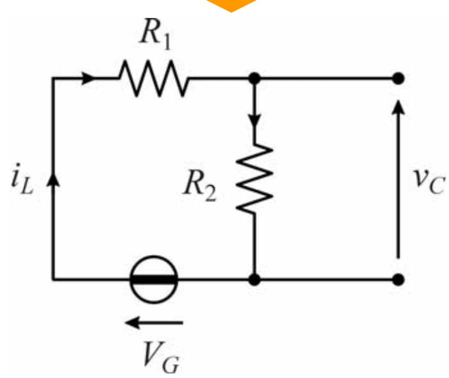
- Se il conduttore può essere considerato ideale, la tensione dell'induttore è nulla
  - ➡ In regime stazionario un induttore equivale a un cortocircuito
- Dato che le armature del condensatore sono separate da un dielettrico, la corrente nel condensatore è nulla
  - ➡ In regime stazionario un condensatore equivale a un circuito aperto

➡ In regime stazionario è possibile determinare le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori studiando circuiti formati solo da componenti resistivi
  - Per gli induttori, dai valori delle correnti si possono ricavare i flussi di induzione magnetica
  - Per i condensatori, dai valori delle tensioni si possono ricavare le cariche

Esempio







$$i_L = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

$$v_C = V_G \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Phi = L i_L$$

$$Q = C v_C$$