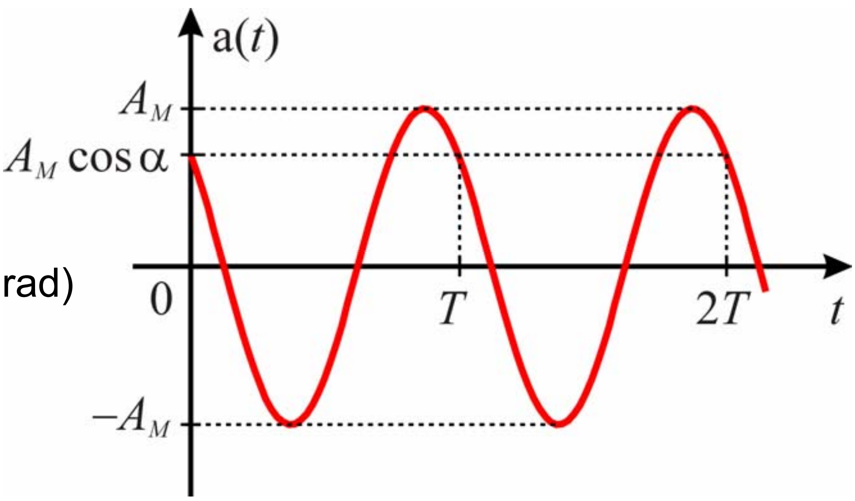
Circuiti in regime sinusoidale

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 26-4-2011)

Funzioni sinusoidali

$$\boxed{a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)}$$



A_M = ampiezza
α = fase iniziale (radianti, rad)
$(-\pi < \alpha \leq \pi)$
ω = pulsazione (rad/s)
f = frequenza (hertz, Hz)
T = periodo (secondi, s)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Regimi sinusoidali

- Si considera un circuito lineare in cui tutti i generatori indipendenti sono sinusoidali e hanno la stessa pulsazione ω
- Le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari nel quale i termini noti sono funzioni sinusoidali con pulsazione ω
- Le equazioni generalmente ammettono una soluzione sinusoidale con pulsazione ω
- Se il circuito è asintoticamente stabile, questa soluzione particolare rappresenta la componente di regime della risposta (➡ **regime sinusoidale**)

Regimi sinusoidali

- **Regime sinusoidale**: condizione di funzionamento di un circuito nella quale tutte le tensioni e le correnti sono funzioni sinusoidali del tempo aventi la stessa pulsazione ω
- Fissata la pulsazione, una funzione sinusoidale è definita da due parametri
  - Ampiezza
  - Fase
- Il problema della determinazione della soluzione particolare sinusoidale delle equazioni del circuito (cioè della determinazione delle ampiezze e delle fasi di tutte le tensioni e correnti) può essere ricondotto ad un problema di tipo algebrico mediante la **trasformata di Steinmetz**
- Il metodo di analisi basato sulla trasformata di Steinmetz è detto anche **metodo simbolico**

Trasformata di Steinmetz

- **Trasformata di Steinmetz:** $\mathcal{S}$
  - Ad ogni funzione sinusoidale di pulsazione ω
    $a(t) = A_M \cos(\omega t+\alpha)$
    si associa un numero complesso $\mathbf{A}$ avente
    - modulo A_M (= ampiezza della funzione sinusoidale)
    - argomento α (= fase della funzione sinusoidale)

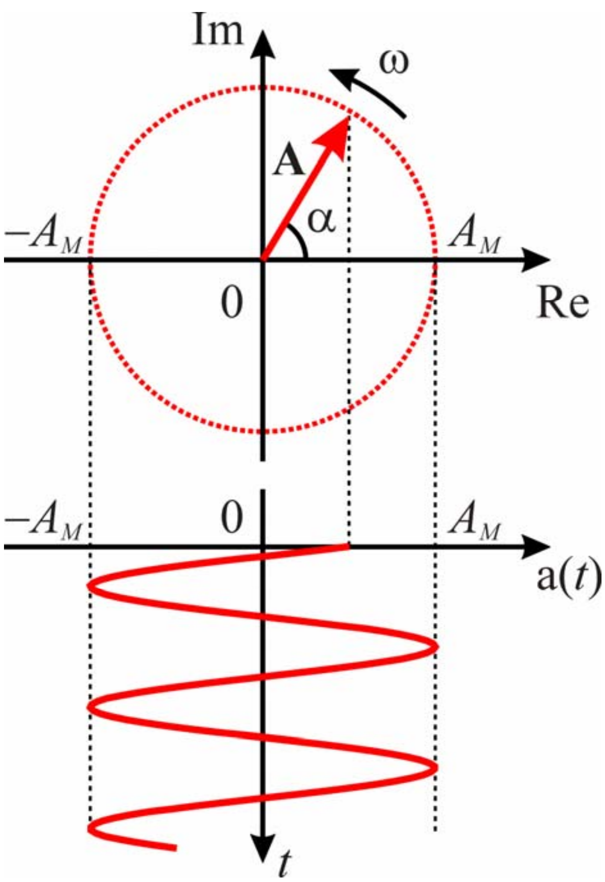
$$\mathbf{A} = \mathcal{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha} = A_M(\cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha)$$

  - $\mathbf{A}$ = **fasore** o **numero complesso rappresentativo** di $a(t)$

- **Antitrasformata di Steinmetz:** $\mathcal{S}^{-1}$

$$a(t) = \mathcal{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[A_M e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

Interpretazione geometrica



$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}\,e^{j\omega t} = A_M\,e^{j(\omega t+\alpha)}$$

$$a(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}\,e^{j\omega t}\right] = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz

Unicità

- La trasformata di Steinmetz stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni sinusoidali di pulsazione ω e i numeri complessi

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad && \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M\, \mathrm{e}^{j\alpha} \\ &\mathrm{b}(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) && \mathbf{B} = \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = B_M\, \mathrm{e}^{j\beta} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{b}(t) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz

Linearità

- La trasformata di Steinmetz è un'operazione lineare

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad && \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M\, \mathrm{e}^{j\alpha} \\ &\mathrm{b}(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) && \mathbf{B} = \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = B_M\, \mathrm{e}^{j\beta} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} &\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}: \\ &\mathbb{S}\{k_1\, \mathrm{a}(t) + k_2\, \mathrm{b}(t)\} = k_1 \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} + k_2 \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = k_1 \mathbf{A} + k_2 \mathbf{B} \end{aligned}$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz

Regola di derivazione

- La trasformata della derivata di una funzione sinusoidale si ottiene moltiplicando per $j\omega$ la trasformata della funzione

$$\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M \, \mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = j\omega \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = j\omega \mathbf{A}}$$

- Dimostrazione:

$$\frac{d\,\mathrm{a}}{dt} = -\omega A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = \omega A_M \, \mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A_M \, \mathrm{e}^{j\alpha}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega A_M \, \mathrm{e}^{j\alpha} = j\omega \mathbf{A} = j\omega \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\}$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz

Regola di derivazione

- Applicando ricorsivamente la regola di derivazione si possono ottenere le trasformate delle derivate di ordine superiore

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^2\,\mathrm{a}}{dt^2}\right\} = j\omega \cdot \mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = (j\omega)^2 \mathbf{A} = -\omega^2 \mathbf{A}$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^3\,\mathrm{a}}{dt^3}\right\} = j\omega \cdot \mathbb{S}\left\{\frac{d^2\,\mathrm{a}}{dt^2}\right\} = (j\omega)^3 \mathbf{A} = -j\omega^3 \mathbf{A}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^n\,\mathrm{a}}{dt^n}\right\} = j\omega \cdot \mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\} = (j\omega)^n \mathbf{A}$$

Antitrasformata

- Noto il numero complesso rappresentativo $\mathbf{A}$ di una funzione sinusoidale

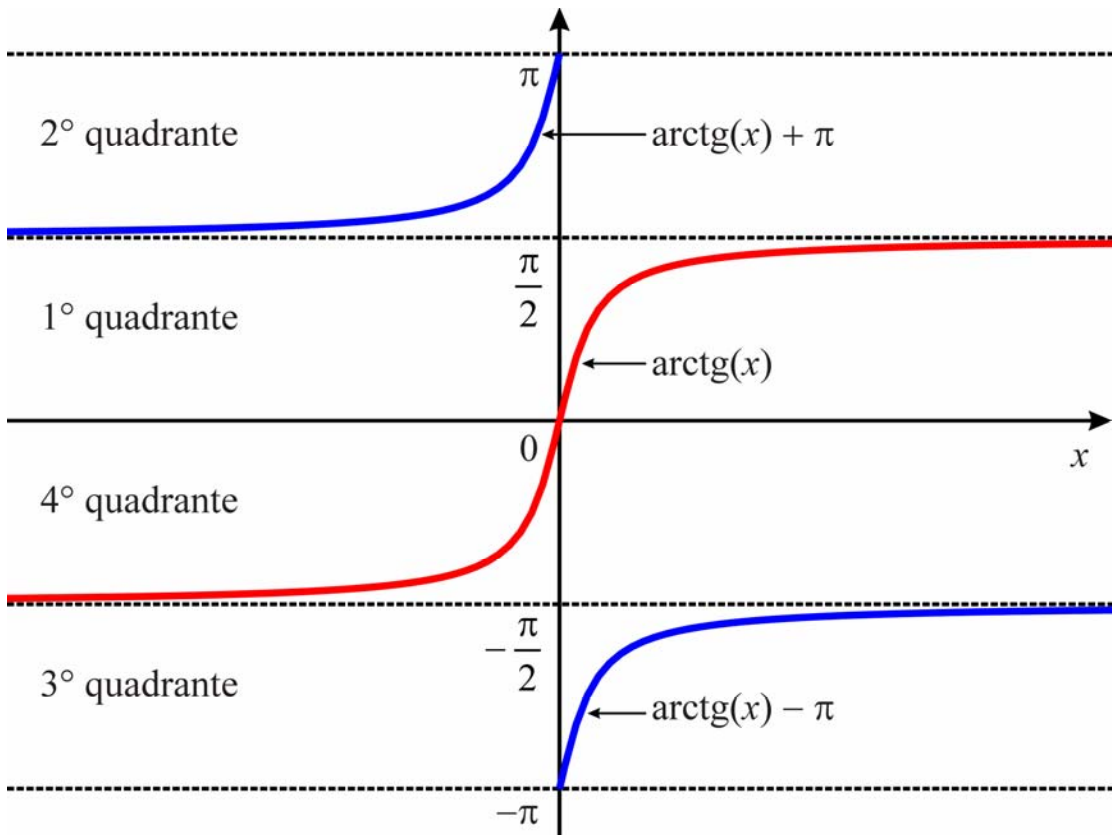
  $$\mathbf{A} = A_M e^{ja} = x + jy$$

  e nota la pulsazione ω, è possibile determinare in modo univoco la funzione sinusoidale $\mathrm{a}(t)$ mediante la relazione

  $$\mathrm{a}(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = A_M \cos(\omega t + \alpha) = |\mathbf{A}| \cos[\omega t + \arg(\mathbf{A})]$$

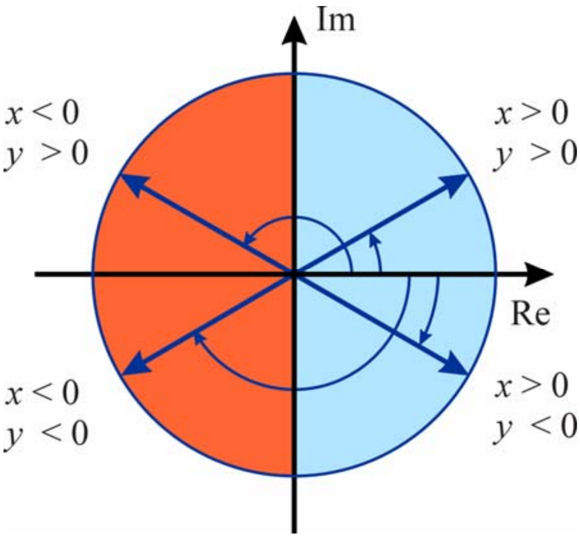
- **Nota:**
  - Vale la relazione $\mathrm{tg}\alpha = y/x$ ma questo non consente di affermare che $\alpha = \mathrm{arctg}(y/x)$
  - Dato che la funzione tangente ha periodo π esistono due valori di α nell'intervallo $]-\pi\ \pi]$ in cui la tangente ha lo stesso valore
  - ➡ Per determinare α occorre tenere conto dei segni di x e y

Antitrasformata – determinazione della fase



Antitrasformata – determinazione della fase

$$\mathbf{A} = x + jy = A_M e^{j\alpha}$$

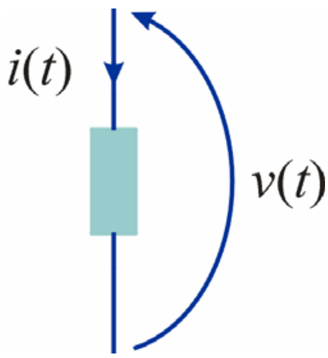


$$A_M = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \cdot \mathrm{sgn}(y) & \text{per } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \mathrm{sgn}(y) & \text{per } x = 0 \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} -1 & \text{per } y < 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ 1 & \text{per } y > 0 \end{cases}$$

Bipoli in regime sinusoidale



- Condizioni di regime sinusoidale
- Tensione e corrente orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore:

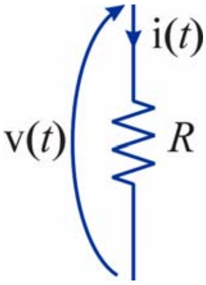
$$\mathrm{v}(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V) \qquad \mathbf{V} = \mathbb{S}\{\mathrm{v}(t)\} = V_M e^{j\varphi_V}$$

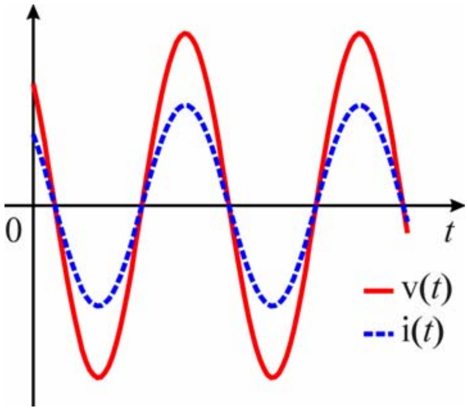
$$\mathrm{i}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathbb{S}\{\mathrm{i}(t)\} = I_M e^{j\varphi_I}$$

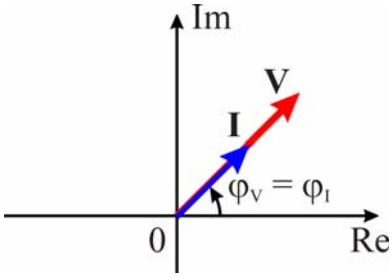
- **Sfasamento fra tensione e corrente**: $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$

Resistore in regime sinusoidale

$$\mathrm{v}(t) = R\,\mathrm{i}(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_I)$$
$$\mathrm{i}(t) = G\,\mathrm{v}(t) = GV_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = G\mathbf{V}$$



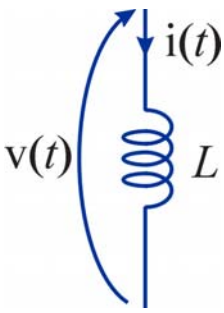


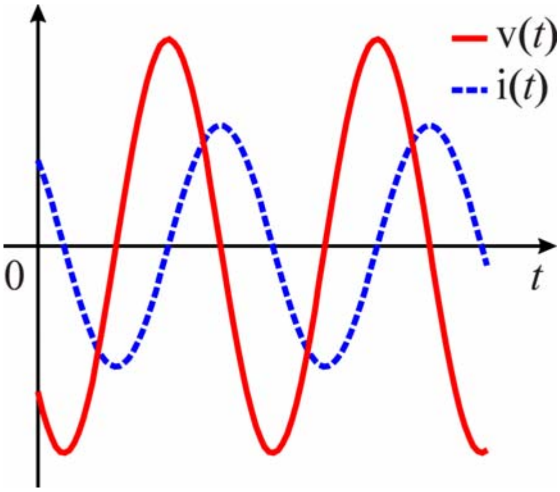


$V_M = RI_M$

$\varphi_V = \varphi_I$ ➡ $\varphi = 0$ ➡ la tensione e la corrente sono **in fase**

Induttore in regime sinusoidale





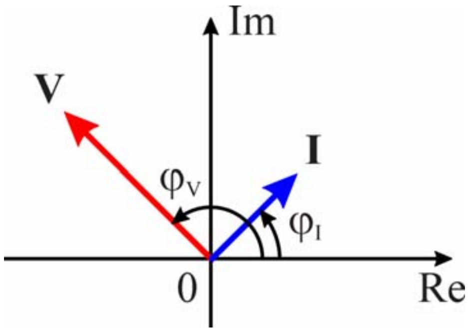
$$\mathrm{v}(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}}{dt} = -\omega L I_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_I) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2})$$

$V_M = \omega L I_M$

$\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$ ➡ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ➡ la corrente è **in quadratura in ritardo** rispetto alla tensione

Induttore – relazioni tra i fasori

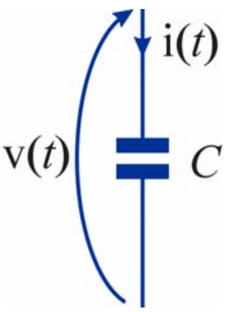
$$v(t) = L\frac{d\,i}{dt} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L\mathbf{I} = jX_L\mathbf{I} \\ \mathbf{I} &= -j\frac{1}{\omega L}\mathbf{V} = jB_L\mathbf{V} \end{aligned}$$

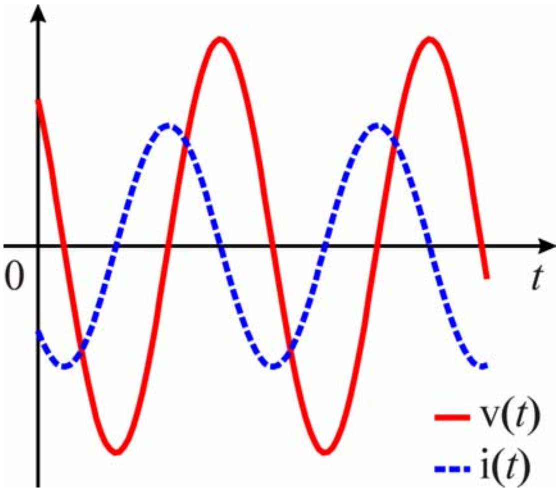


Reattanza: $X_L = \omega L$

Suscettanza: $B_L = -\frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{X_L}$

Condensatore in regime sinusoidale





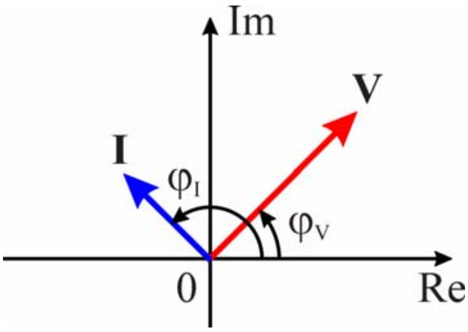
$$i(t) = C\frac{d\,v}{dt} = -\omega C V_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_V) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_V + \frac{\pi}{2})$$

$$I_M = \omega C V_M$$

$\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la corrente è **in quadratura in anticipo** rispetto alla tensione

Condensatore – relazioni tra i fasori

$$\mathrm{i}(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} = jB_C\mathbf{V} \\ \mathbf{V} = -j\dfrac{1}{\omega C}\mathbf{I} = jX_C\mathbf{I} \end{array}$$



Suscettanza: $B_C = \omega C$

Reattanza: $X_C = -\dfrac{1}{\omega C} = -\dfrac{1}{B_C}$

Impedenza e ammettenza

- Le relazioni tra i fasori della tensione e della corrente per il resistore, l'induttore e il condensatore sono casi particolari delle equazioni

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZI} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{YV}$$

Componente	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$
Resistore	R	G
Induttore	$j\omega L$	$-j\dfrac{1}{\omega L}$
Condensatore	$-j\dfrac{1}{\omega C}$	$j\omega C$

Impedenza e ammettenza

- Più in generale, per un bipolo lineare non contenente generatori indipendenti, la tensione e la corrente sono legate tra loro da relazioni differenziali lineari omogenee

➡ Per la proprietà di linearità e la regola di derivazione della trasformata di Steinmetz, le corrispondenti relazioni tra i fasori della tensione e della corrente sono lineari algebriche omogenee, e quindi ancora del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

- Nel caso generale $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ sono funzioni complesse della pulsazione

$$\mathbf{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\mathbf{Y}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

Impedenza

- Per un bipolo lineare non contenente generatori si definisce **impedenza** il rapporto

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad ➡ \quad \begin{matrix} R = \textbf{resistenza} \\ X = \textbf{reattanza} \end{matrix}$$

(unità di misura ohm)

- Il modulo dell'impedenza è uguale al rapporto tra le ampiezze della tensione e della corrente

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_M}{I_M}$$

- L'argomento dell'impedenza è uguale allo sfasamento tra la tensione e la corrente

$$\arg(\mathbf{Z}) = \varphi = \varphi_V - \varphi_I$$

$\varphi > 0$ ➡ corrente in ritardo sulla tensione

$\varphi < 0$ ➡ corrente in anticipo sulla tensione

Ammettenza

- Il reciproco dell'impedenza è detto **ammettenza**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{I_M}{V_M} e^{-j\varphi}$$

$\mathbf{Y} = G + jB$ ➡ $G =$ **conduttanza**, $B =$ **suscettanza** (unità di misura siemens)

- Valgono le relazioni

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \qquad \mathbf{Z} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

➡ $G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} = \dfrac{R}{|\mathbf{Z}|^2} \qquad B = -\dfrac{X}{R^2 + X^2} = -\dfrac{X}{|\mathbf{Z}|^2}$

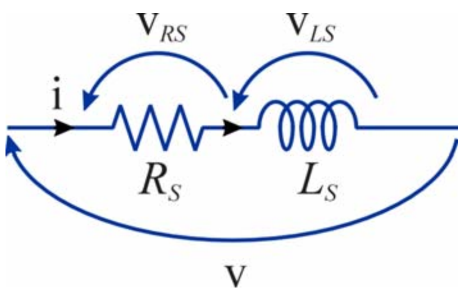
➡ $R = \dfrac{G}{G^2 + B^2} = \dfrac{G}{|\mathbf{Y}|^2} \qquad X = -\dfrac{B}{G^2 + B^2} = -\dfrac{B}{|\mathbf{Y}|^2}$

Esempio - Bipolo RL serie

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_{RS}(t) + \mathrm{v}_{LS}(t) = R_S i(t) + L_S \frac{d\,\mathrm{i}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{LS} = (R_S + j\omega L_S)\mathbf{I}$$

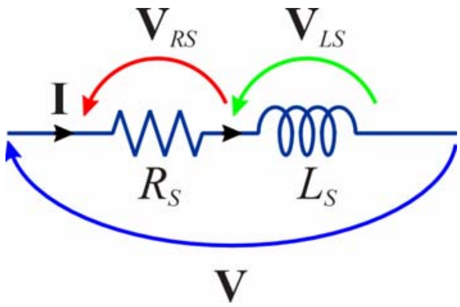


$$\mathbf{Z} = R_S + j\omega L_S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = R_S \\ X = \omega L_S \end{cases}$$

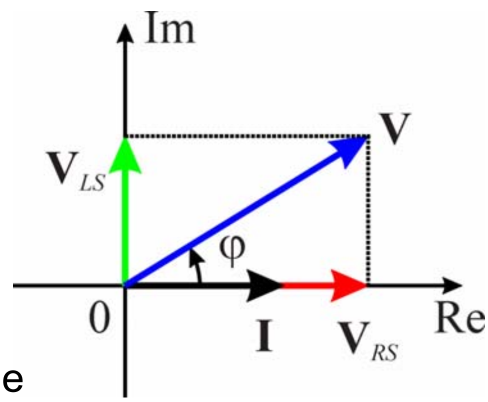
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} - j\frac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \\ B = -\dfrac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \end{cases}$$

Esempio - Bipolo RL serie

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R_S^2 + (\omega L_S)^2}$$



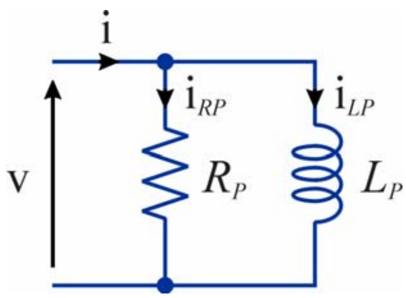
$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L_S}{R_S}\right)$$



$$R_S > 0, L_S > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$$

La corrente è in ritardo rispetto alla tensione

Esempio - Bipolo RL parallelo



$$\mathrm{i}(t) = \mathrm{i}_{RP}(t) + \mathrm{i}_{LP}(t) = \frac{1}{R_P}\mathrm{v}(t) + \frac{1}{L_P}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{v}(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\mathrm{i}}{dt} = \frac{1}{R_P}\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{1}{L_P}\mathrm{v}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$j\omega\mathbf{I} = j\omega\frac{1}{R_P}\mathbf{V} + \frac{1}{L_P}\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{RL} = \left(\frac{1}{R_P} - j\frac{1}{\omega L_P}\right)\mathbf{V}$$

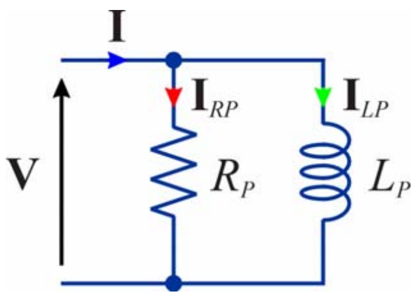
Esempio - Bipolo RL parallelo

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_P} - j\frac{1}{\omega L_P} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{R_P} \\ B = -\dfrac{1}{\omega L_P} \end{cases}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{\omega^2 R_P L_P^2}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\frac{\omega R_P^2 L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{\omega^2 R_P L_P^2}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \\ X = \dfrac{\omega R_P^2 L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \end{cases}$$

Esempio - Bipolo RL parallelo

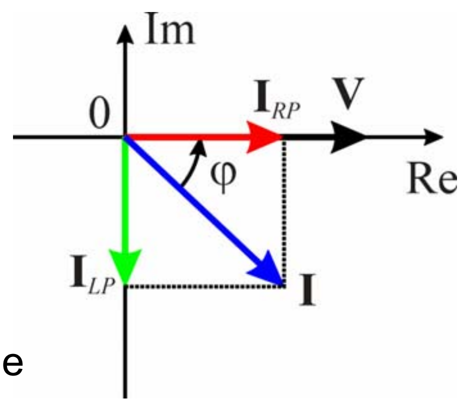
$$|\mathbf{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R_P^2} + \dfrac{1}{(\omega L_P)^2}}}$$



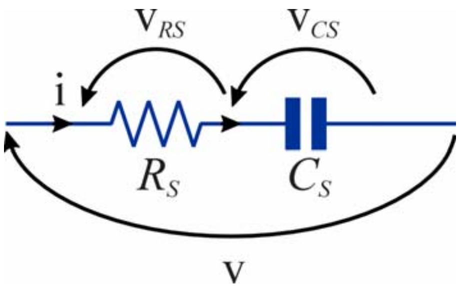
$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{R_P}{\omega L_P}\right)$$

$$R_P > 0, L_P > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

La corrente è in ritardo rispetto alla tensione



Esempio - Bipolo RC serie



$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_{RS}(t) + \mathrm{v}_{CS}(t) = R_S\,\mathrm{i}(t) + \frac{1}{C_S}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{i}(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = R_S\frac{d\,\mathrm{i}}{dt} + \frac{1}{C_S}\mathrm{i}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$j\omega\mathbf{V} = R_S\, j\omega\mathbf{I} + \frac{1}{C_S}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{CS} = \left(R_S - j\frac{1}{\omega C_S}\right)\mathbf{I}$$

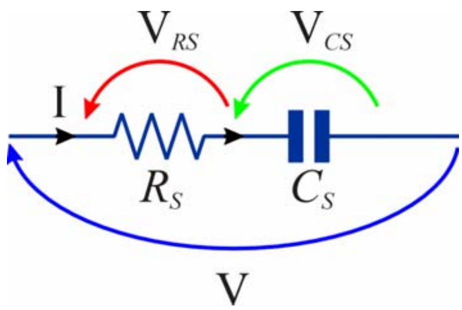
Esempio - Bipolo RC serie

$$\mathbf{Z} = R_S - j\frac{1}{\omega C_S} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = R_S \\ X = -\dfrac{1}{\omega C_S} \end{cases}$$

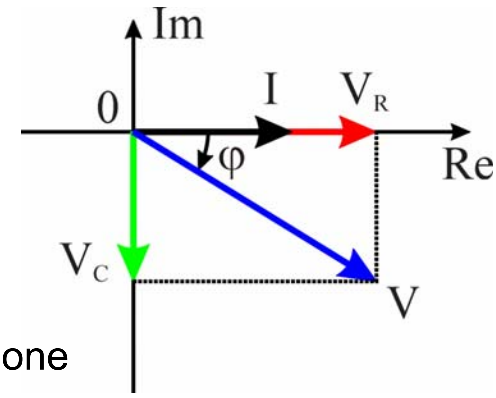
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\omega^2 R_S C_S^2}{1+(\omega R_S C_S)^2} + j\frac{\omega C_S}{1+(\omega R_S C_S)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{\omega^2 R_S C_S^2}{1+(\omega R_S C_S)^2} \\ B = \dfrac{\omega C_S}{1+(\omega R_S C_S)^2} \end{cases}$$

Esempio - Bipolo RC serie

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R_S^2 + \frac{1}{(\omega C_S)^2}}$$



$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_S C_S}\right)$$



$$R_C > 0, L_C > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi < 0$$

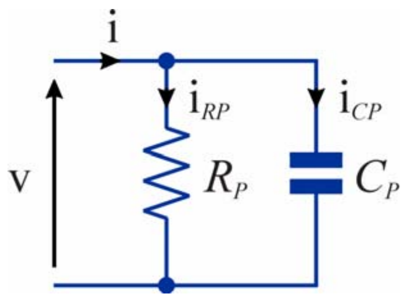
La corrente è in anticipo rispetto alla tensione

Esempio - Bipolo RC parallelo

$$\mathrm{i}(t) = \mathrm{i}_{RP}(t) + \mathrm{i}_{CP}(t) = \frac{1}{R_P}\mathrm{v}(t) + C_P\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{CP} = \left(\frac{1}{R_P} + j\omega C_P\right)\mathbf{V}$$

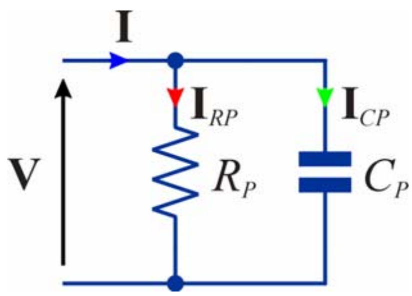


$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_P} + j\omega C_P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{R_P} \\ B = \omega C_P \end{cases}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{R_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} - j\frac{\omega R_P^2 C_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{R_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \\ X = -\dfrac{\omega R_P^2 C_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \end{cases}$$

Esempio - Bipolo RC parallelo

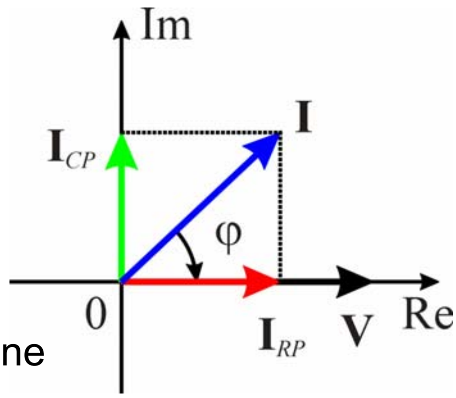
$$|\mathbf{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_P^2} + (\omega C_P)^2}}$$



$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\operatorname{arctg}(\omega R_P C_P)$$

$$R_C > 0, L_C > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$$

La corrente è in anticipo rispetto alla tensione



Analisi di circuiti in regime sinusoidale

Equazioni dei componenti

- Generatori indipendenti:
  sono note le tensioni o le correnti ➡ sono noti anche i loro fasori
  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_G$
  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_G$
- Bipoli lineari:
  $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$
  $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$
- Generatori dipendenti:
  per la proprietà di linearità, le relazioni tra i fasori sono
  $\mathbf{I}_2 = \alpha \mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 = g\mathbf{V}_1$
  $\mathbf{V}_2 = r\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{V}_2 = \mu \mathbf{V}_1$

Analisi di circuiti in regime sinusoidale

Equazioni dei collegamenti

- Le relazioni tra le grandezze funzioni del tempo sono espresse da equazioni algebriche lineari omogenee del tipo

$$\sum_k \pm \mathrm{i}_k(t) = 0$$

$$\sum_k \pm \mathrm{v}_k(t) = 0$$

- Per le proprietà di unicità e di linearità della trasformata di Steinmetz

$$\sum_k \pm \mathbf{I}_k = 0 \qquad \mathbf{I}_k = \mathcal{S}\{\mathrm{i}_k(t)\} \quad \mathbf{V}_k = \mathcal{S}\{\mathrm{v}_k(t)\}$$

$$\sum_k \pm \mathbf{V}_k = 0$$

- *Le leggi di Kirchhoff valgono anche per i fasori delle tensioni e delle correnti*

Analisi di circuiti in regime sinusoidale

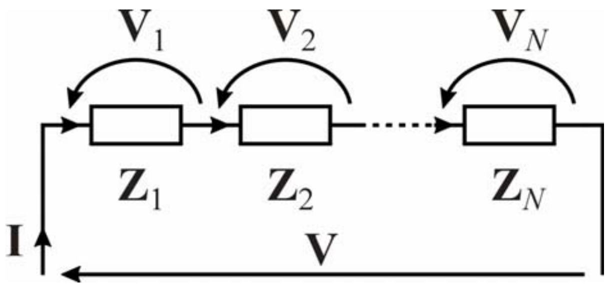
- Le equazioni di un circuito lineare in regime sinusoidale, scritte in termini di fasori, hanno la stessa forma delle equazioni di un circuito lineare resistivo in regime stazionario
- Le proprietà e metodi di analisi dedotti a partire delle equazioni generali dei circuiti resistivi possono essere estesi ai circuiti in regime sinusoidale con le sostituzioni:
  - Resistenza ➡ Impedenza
  - Conduttanza ➡ Ammettenza
  - Tensione ➡ Fasore della tensione
  - Corrente ➡ Fasore della corrente
- In particolare si possono estendere ai circuiti in regime sinusoidale
  - le relazioni di equivalenza riguardanti collegamenti tra resistori o generatori (serie, parallelo, stella-triangolo, formule di Millman ecc.)
  - i metodi di analisi generali (metodo delle maglie,metodo dei nodi e metodo degli anelli)
  - il teorema di sovrapposizione
  - i teoremi di Thévenin e Norton

Impedenze in serie e in parallelo

- **Impedenze in serie**

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k \qquad \mathbf{I}_k = \mathbf{I} \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{I}_k$$

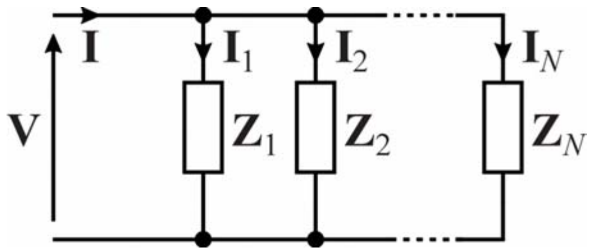
$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}_S \mathbf{I} \qquad \mathbf{Z}_S = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{Z}_K$$



- **Impedenze in parallelo**

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{I}_k \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{V} \qquad \mathbf{I}_k = \mathbf{Y}_k \mathbf{V}_k$$

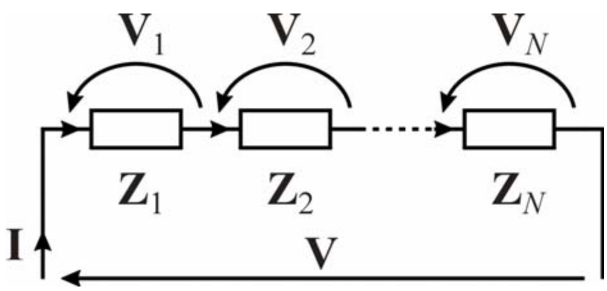
$$\Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}_P \mathbf{V} \qquad \mathbf{Y}_P = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{Y}_K \qquad \mathbf{Z}_P = \frac{1}{\mathbf{Y}_P} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mathbf{Z}_k}}$$



Partitore di tensione e di corrente

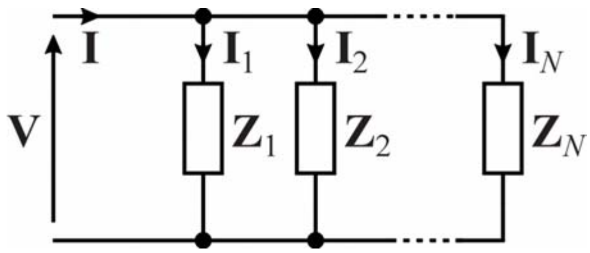
- **Partitore di tensione**

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V} \frac{\mathbf{Z}_j}{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Z}_k}$$

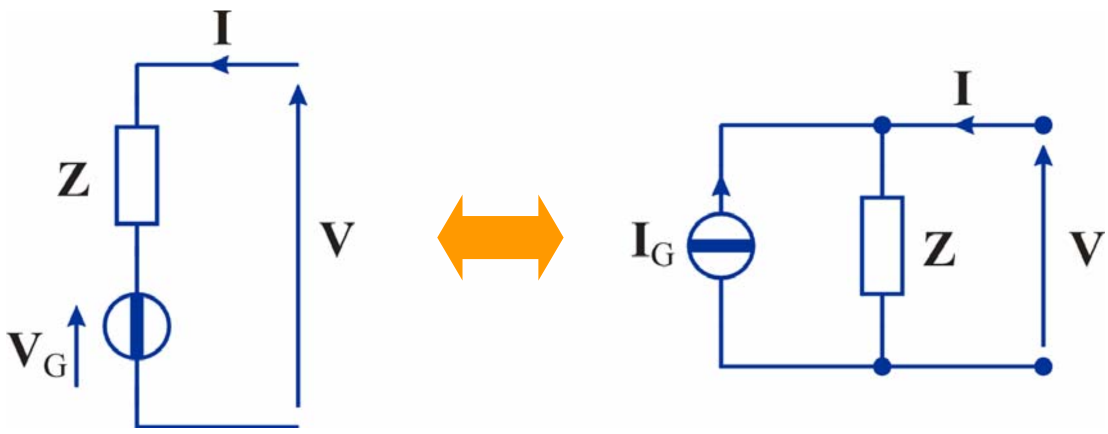


- **Partitore di corrente**

$$\mathbf{I}_j = \mathbf{I} \frac{\mathbf{Y}_j}{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{Y}_k}$$

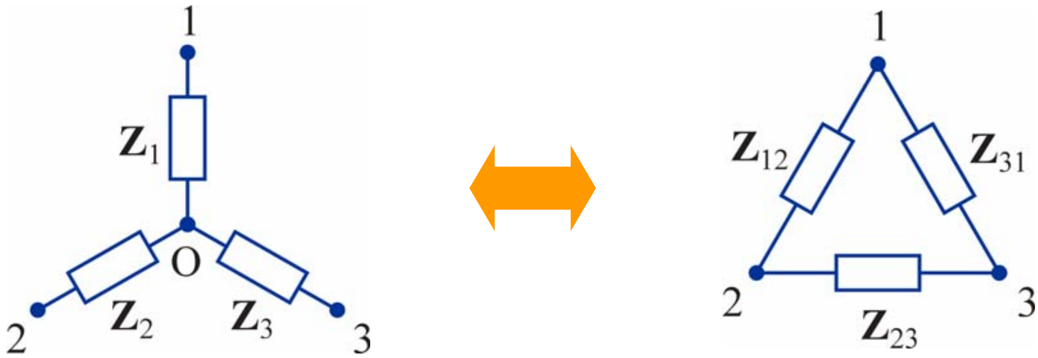


Trasformazioni dei generatori



$$\mathbf{V}_G = \mathbf{Z}\mathbf{I}_G \qquad \mathbf{I}_G = \mathbf{Y}\mathbf{V}_G$$

Equivalenza stella-triangolo



$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{13}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{13} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_{13}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{23} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

Teorema di sovrapposizione

- **Ipotesi:**
  - circuito lineare contenente
    - N_V generatori indipendenti di tensione $\mathrm{v}_{G1}(t), \ldots, \mathrm{v}_{GN_V}(t)$
    - N_I generatori indipendenti di corrente $\mathrm{i}_{G1}(t), \ldots, \mathrm{i}_{GN_I}(t)$
  - tutti i generatori sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω
  - condizioni di regime sinusoidale
- ➡ I fasori della tensione e della corrente del generico lato i sono combinazioni lineari dei fasori delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti

$$\mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^{N_V} \boldsymbol{\alpha}_{ik}\mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \mathbf{z}_{ik}\mathbf{I}_{Gk}$$

$$\mathbf{I}_i = \sum_{k=1}^{N_V} \mathbf{y}_{ik}\mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \boldsymbol{\beta}_{ik}\mathbf{I}_{Gk}$$

Funzioni di rete

- I coefficienti delle combinazioni sono funzioni complesse della pulsazione ω e sono detti **funzioni di di rete**

$$\boldsymbol{\alpha}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$

(adimensionale)

$$\mathbf{z}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

(ha le dimensioni di un'impedenza)

$$\mathbf{y}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$

(ha le dimensioni di un'ammettenza)

$$\boldsymbol{\beta}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

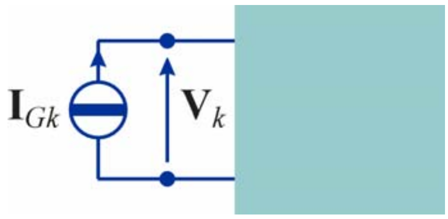
(adimensionale)

- Le funzioni di rete che mettono in relazione i fasori della tensione e della corrente dello stesso lato sono dette **funzioni di immettenza**
- Le funzioni di rete che mettono in relazione fasori di tensioni e correnti di lati diversi sono dette **funzioni di trasferimento**

Funzioni di immettenza

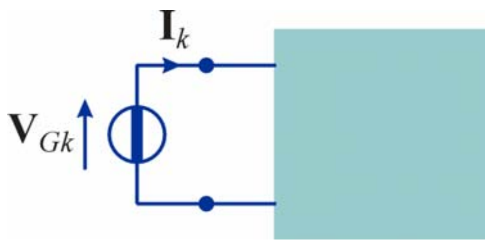
- **Impedenza di ingresso**

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{IN}k}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$



- **Ammettenza di ingresso**

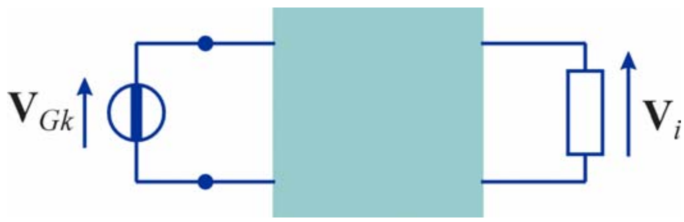
$$\mathbf{Y}_{\mathrm{IN}k}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



Funzioni di trasferimento

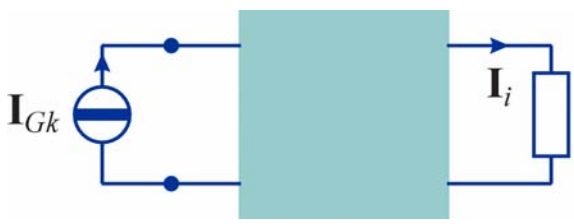
- **Rapporto di trasferimento di tensione**

$$\boldsymbol{\alpha}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



- **Rapporto di trasferimento di corrente**

$$\boldsymbol{\beta}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$



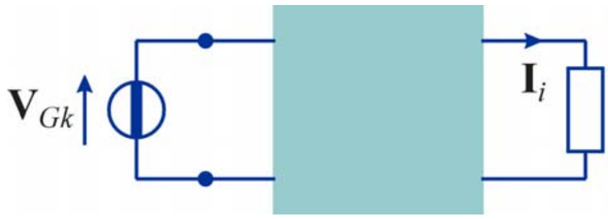
Funzioni di trasferimento

- **Impedenza di trasferimento**

$$\mathbf{z}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

- **Ammettenza di trasferimento**

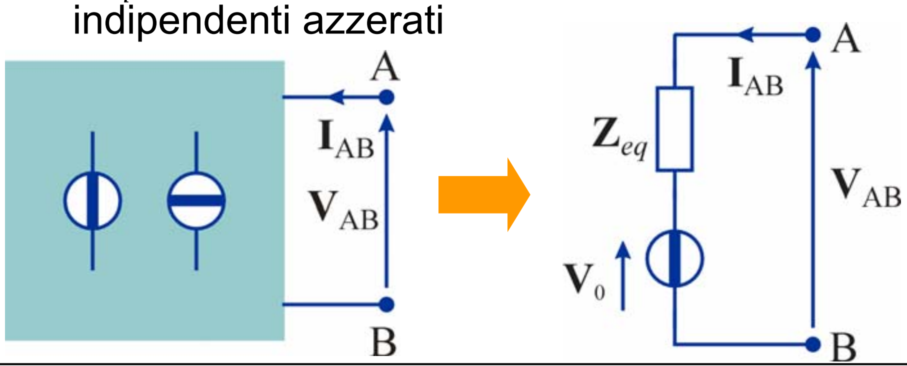
$$\mathbf{y}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



Teorema di Thévenin

- **Ipotesi:**
  - condizioni di regime sinusoidale
  - il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - il bipolo A-B è comandato in corrente

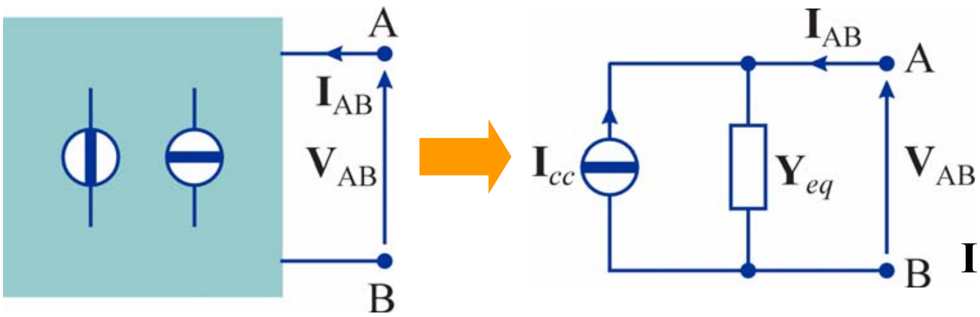
➡ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di tensione $\mathbf{V}_0$ in serie con un'impedenza $\mathbf{Z}_{eq}$
  - $\mathbf{V}_0$ è la tensione a vuoto del bipolo A-B
  - $\mathbf{Z}_{eq}$ è l'impedenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}_{AB}$$

Teorema di Norton

- **Ipotesi:**
  - condizioni di regime sinusoidale
  - il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - il bipolo A-B è comandato in tensione
- Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di corrente $\mathbf{I}_{cc}$ in parallelo con un'ammettenza $\mathbf{Y}_{eq}$
  - $\mathbf{I}_{cc}$ è la corrente di cortocircuito del bipolo A-B
  - $\mathbf{Y}_{eq}$ è l'ammettenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



$$\mathbf{I}_{\mathrm{AB}} = -\mathbf{I}_{cc} + \mathbf{Y}_{eq}\mathbf{V}_{\mathrm{AB}}$$

N-porte lineari in regime sinusoidale

- Per un N-porte lineare in condizioni di regime sinusoidale le relazioni costitutive, in termini di fasori, sono del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N1} & \cdots & \mathbf{a}_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \cdots & \mathbf{b}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{N1} & \cdots & \mathbf{b}_{NN} \end{bmatrix}$$

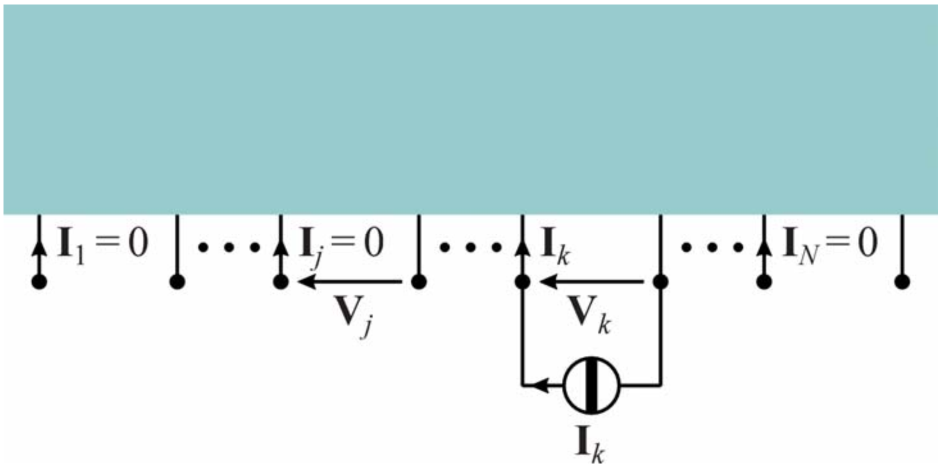
- Nel caso di componenti resistivi i coefficienti delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono reali, mentre nel caso di componenti dinamici, in generale, sono complessi
- Se il componente è comandato in corrente oppure in tensione è possibile rappresentarlo mediante **parametri di impedenza o di ammettenza** che costituiscono una generalizzazione dei parametri di resistenza e di conduttanza

Matrice di impedenza

- **Matrice di impedenza**

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \cdots & \mathbf{z}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{N1} & \cdots & \mathbf{z}_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{V}_j}{\mathbf{I}_k}\right|_{\mathbf{I}_h = 0\ \forall h \neq k}$$

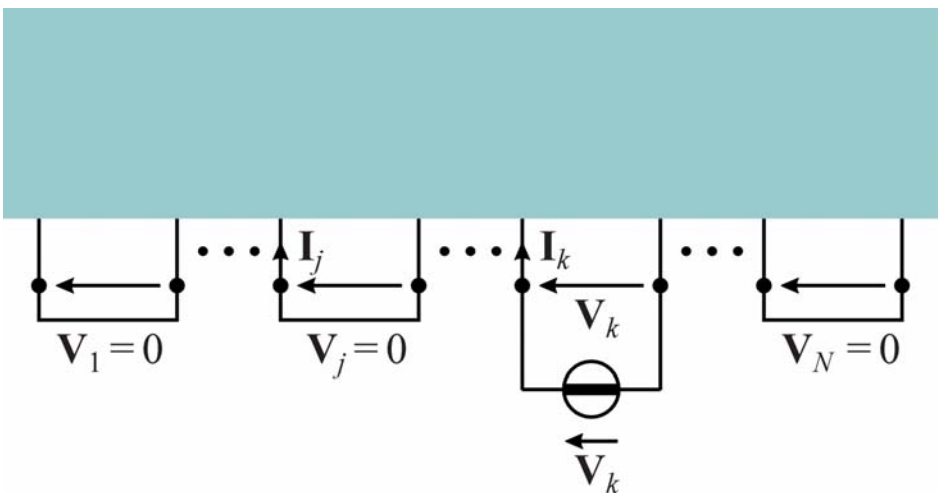


Matrice di ammettenza

- **Matrice di ammettenza**

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \cdots & \mathbf{y}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{N1} & \cdots & \mathbf{y}_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{jk} = \left.\frac{\mathbf{I}_j}{\mathbf{V}_k}\right|_{\mathbf{V}_h = 0\ \forall h \neq k}$$



Doppi bipoli lineari in regime sinusoidale

- Per i doppi bipoli lineari in regime sinusoidale è possibile generalizzare anche le matrici ibride e di trasmissione
- Nel caso di componenti dinamici i coefficienti delle matrici, in generale, sono complessi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice ibrida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}'_{11} & \mathbf{h}'_{12} \\ \mathbf{h}'_{21} & \mathbf{h}'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice ibrida inversa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

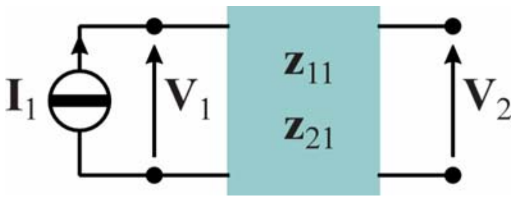
Matrice di trasmissione (matrice catena)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasmissione inversa (matrice catena inversa)

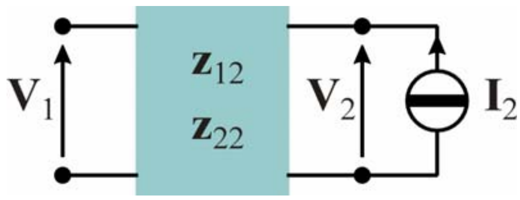
Significato dei parametri di impedenza

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad \mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$



- $\mathbf{z}_{11}$ = impedenza di ingresso a vuoto alla porta 1
- $\mathbf{z}_{21}$ = impedenza di trasferimento a vuoto dalla porta 1 alla porta 2

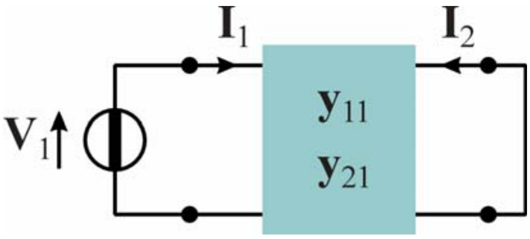
$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \qquad \mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$



- $\mathbf{z}_{22}$ = impedenza di ingresso a vuoto alla porta 2
- $\mathbf{z}_{12}$ = impedenza di trasferimento a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

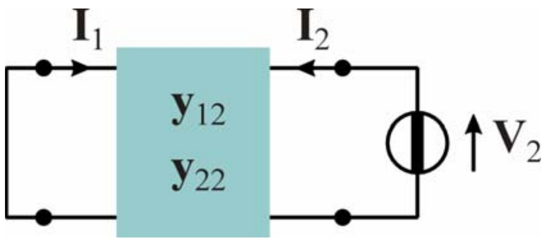
Significato dei parametri di ammettenza

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$



- y_{11} = ammettenza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- y_{21} = ammettenza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

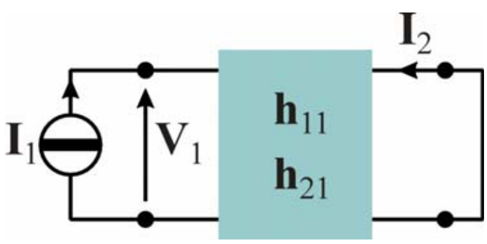
$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$



- y_{22} = ammettenza di ingresso in cortocircuito alla porta 2
- y_{12} = ammettenza di trasferimento in cortocircuito dalla porta 2 alla porta 1

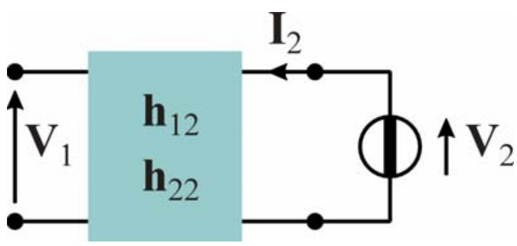
Significato dei parametri ibridi

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$



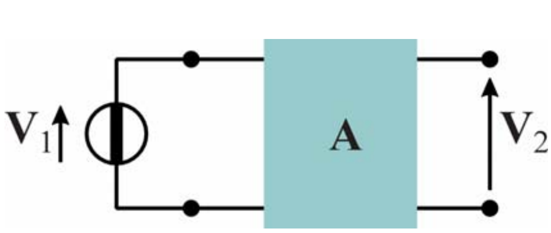
- h_{11} = impedenza di ingresso in cortocircuito alla porta 1
- h_{21} = rapporto di trasferimento di corrente in cortocircuito dalla porta 1 alla porta 2

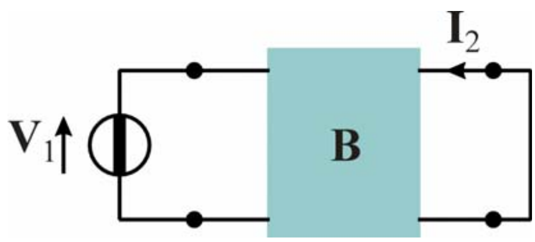
$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$



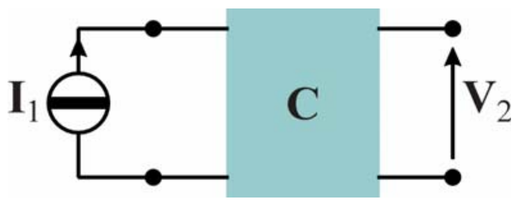
- h_{22} = ammettenza di ingresso a vuoto alla porta 2
- h_{12} = rapporto di trasferimento di tensione a vuoto dalla porta 2 alla porta 1

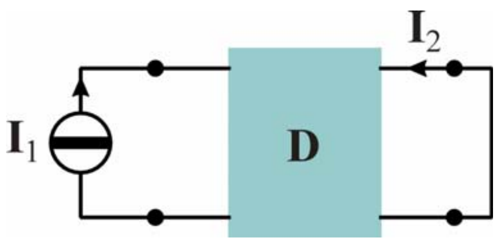
Significato dei parametri di trasmissione





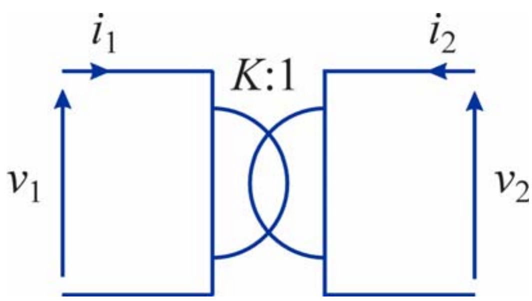
$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad \frac{1}{\mathbf{B}} = \left.\frac{-\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$





$$\frac{1}{\mathbf{C}} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad \frac{1}{\mathbf{D}} = \left.\frac{-\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

Trasformatore ideale in regime sinusoidale

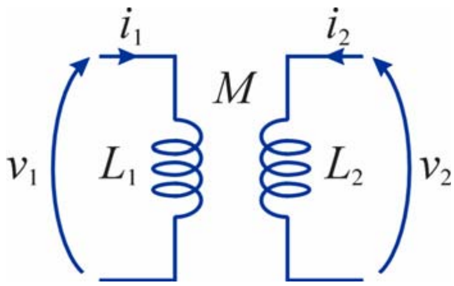


$$v_1 = K v_2 \qquad \mathbf{V}_1 = K\mathbf{V}_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{K} i_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 = -\frac{1}{K}\mathbf{I}_2$$

- Le tensioni alla porta 1 e alla porta 2 sono in fase tra loro
- Le correnti alla porta 1 e alla porta 2 sono in opposizione di fase

Induttori accoppiati in regime sinusoidale



$$v_1(t) = L_1 \frac{d\,i_1(t)}{dt} + M \frac{d\,i_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \frac{d\,i_1(t)}{dt} + L_2 \frac{d\,i_2(t)}{dt}$$

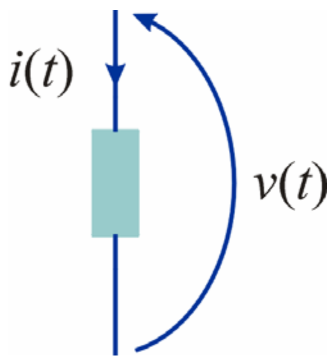
$\Rightarrow$

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

- Le equazioni sono un caso particolare di rappresentazione mediante di coefficienti di impedenza

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Potenza assorbita da un bipolo in regime sinusoidale

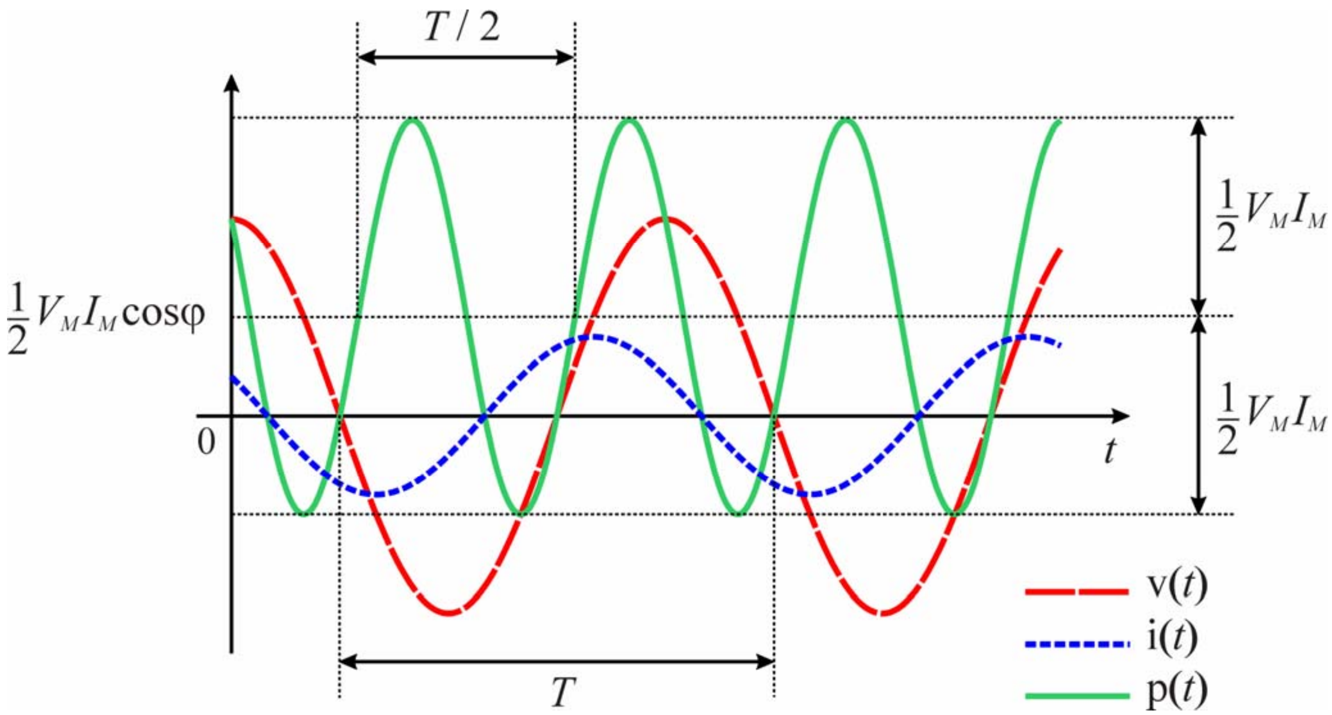


$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \varphi_V) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t + \varphi_I) \\ \varphi &= \varphi_V - \varphi_I \end{aligned}}$$

- **Potenza assorbita dal bipolo**

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)\,i(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V) \cdot I_M \cos(\omega t + \varphi_I) = \\ &= \frac{1}{2} V_M I_M \left[\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)\right] = \\ &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi \end{aligned}$$

Potenza assorbita da un bipolo in regime sinusoidale



Potenza assorbita da un bipolo in regime sinusoidale

- La potenza è data dalla somma di un termine sinusoidale con pulsazione 2ω (**potenza fluttuante**) e di un termine costante
- L'ampiezza del termine oscillante è $\frac{1}{2}V_M I_M$
- Il termine costante rappresenta il **valore medio sul periodo** della potenza istantanea

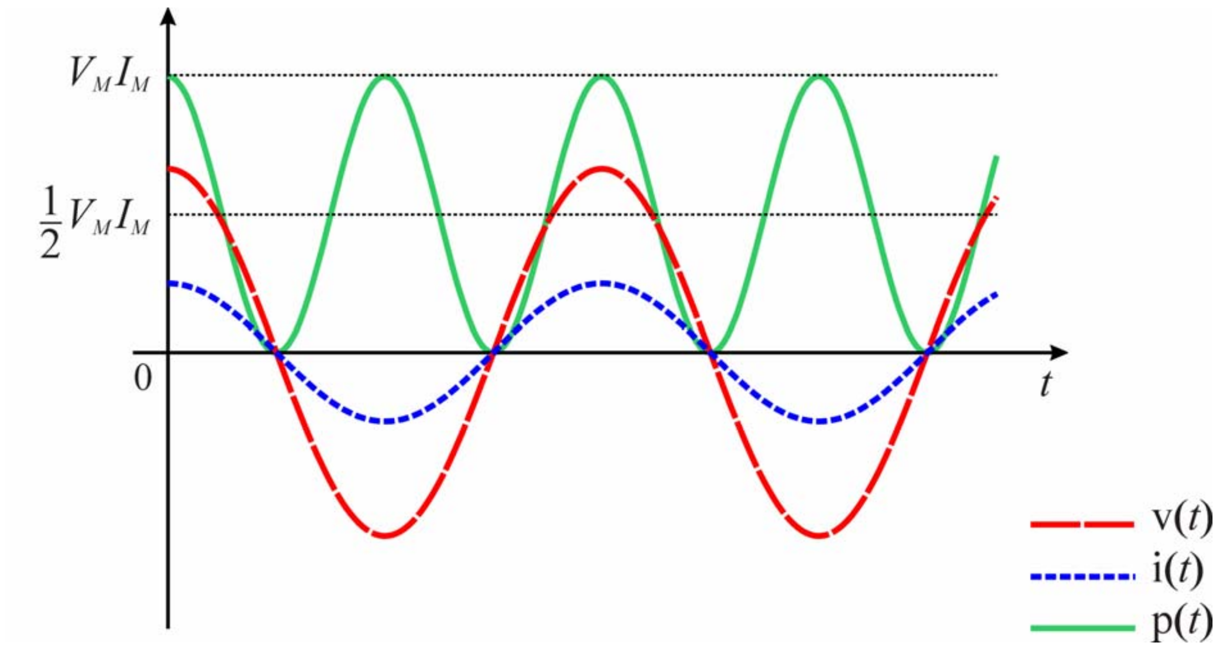
$$p_m = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{p}(t)dt = \frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi$$

- $\cos\varphi$ è detto **fattore di potenza**
  - Il fattore di potenza è il rapporto tra il termine costante e l'ampiezza del termine oscillante
  - A parità di ampiezza di v e i, il valore medio sul periodo della potenza istantanea aumenta al crescere del fattore di potenza

Potenza assorbita da un bipolo in regime sinusoidale

- Il fattore di potenza $\cos\varphi$ vale 1 se la tensione e la corrente sono in fase ($\varphi = 0$)
- Aumentando $|\varphi|$ il fattore di potenza si riduce fino ad annullarsi quando tensione e corrente sono in quadratura
- Per $|\varphi| > \pi/2$ il fattore di potenza diventa negativo e vale -1 se la tensione e la corrente sono in opposizione di fase
- $\cos\varphi > 0$ ➡ in ogni semiperiodo l'energia assorbita dal bipolo è > 0
- $\cos\varphi < 0$ ➡ in ogni semiperiodo l'energia assorbita dal bipolo è < 0
  - ➡ questa condizione si può verificare solo se il bipolo è attivo
  - ➡ per un bipolo passivo si ha necessariamente $\cos\varphi \geq 0$

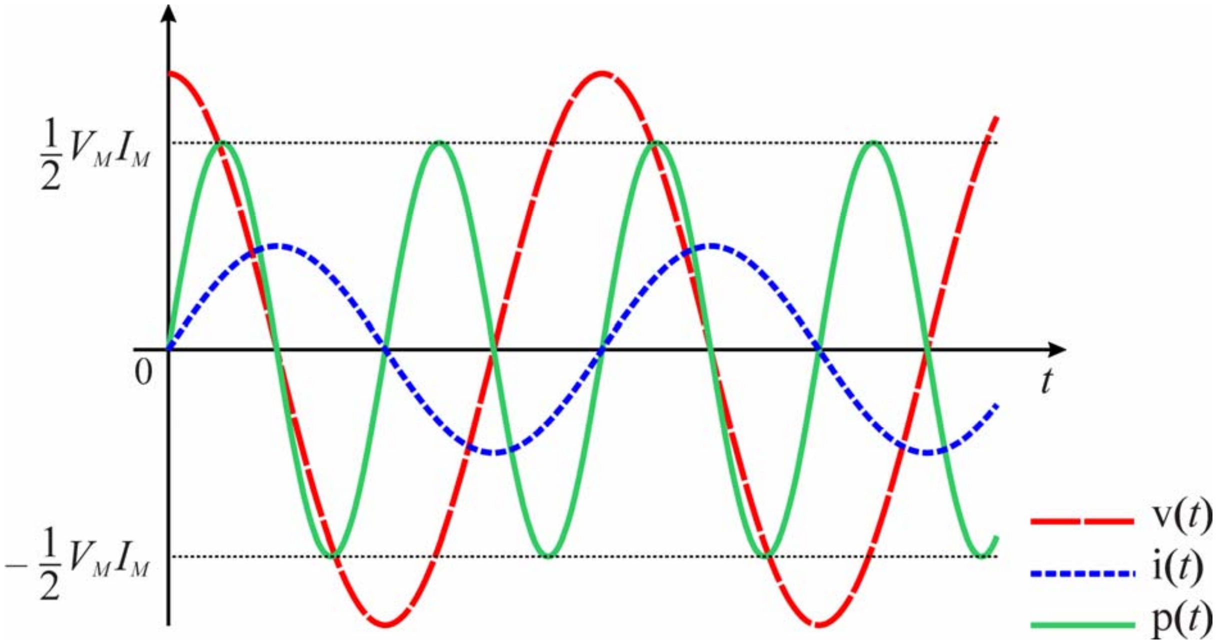
Potenza assorbita da un resistore



$$\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V)\right]$$

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad p_m = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2$$

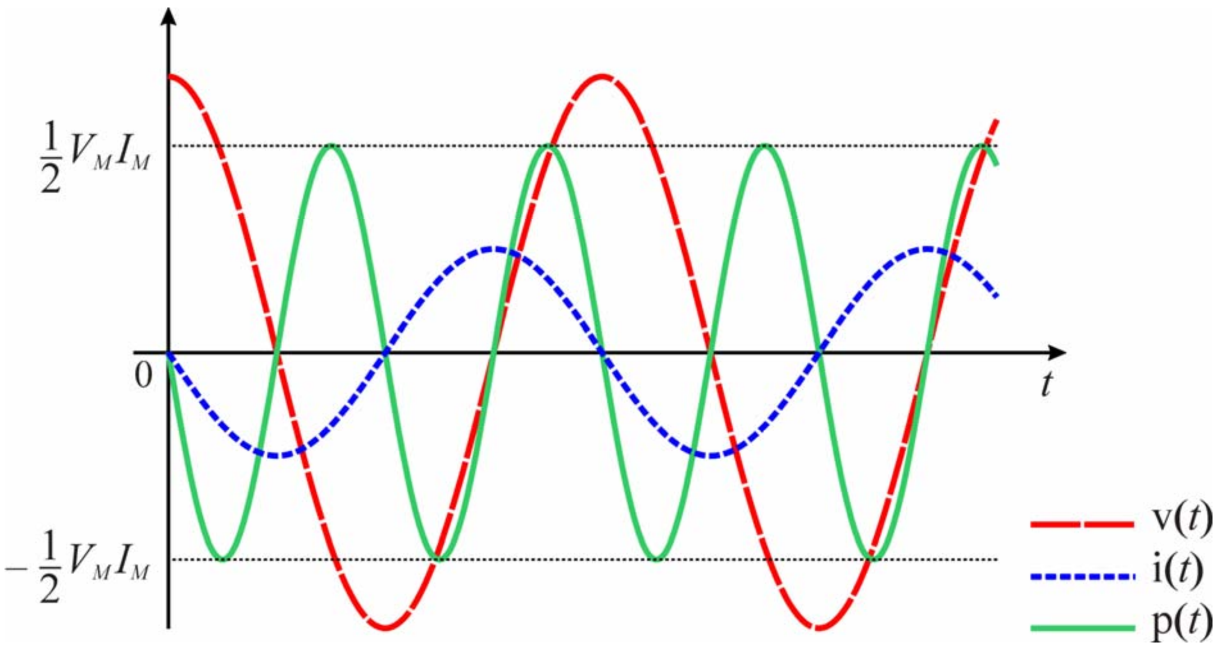
Potenza assorbita da un induttore



$$p(t)=\frac{1}{2}V_M I_M\cos\left(2\omega t+2\varphi_V-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\omega L I_M^2\cos\left(2\omega t+2\varphi_V-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_m=\frac{1}{2}V_M I_M\cos\varphi=0$$

Potenza assorbita da un condensatore



$$p(t)=\frac{1}{2}V_M I_M\cos\left(2\omega t+2\varphi_V+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\omega C V_M^2\cos\left(2\omega t+2\varphi_V+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi=-\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_m=\frac{1}{2}V_M I_M\cos\varphi=0$$

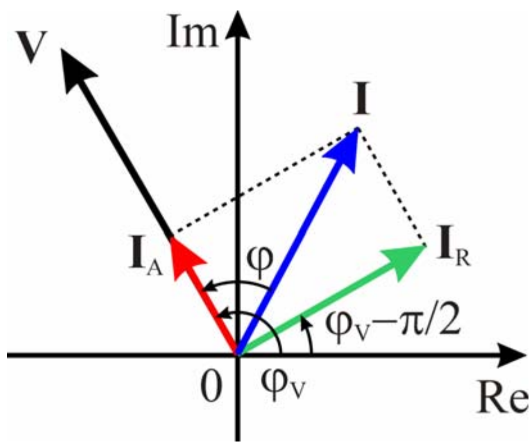
Componenti attiva e reattiva della corrente

- Nel caso generale, si può scomporre la corrente istantanea nella somma di due termini:
  - uno in fase con la tensione (come nei resistori)
  - ➡ **componente attiva**: $\mathrm{i}_A(t)$
  - uno in quadratura con la tensione (come negli induttori e nei condensatori)
  - ➡ **componente reattiva**: $\mathrm{i}_R(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}(t) &= I_M \cos(\omega t + \varphi_I) = \\
&= I_M \cos[(\omega t + \varphi_V) - \underbrace{(\varphi_V - \varphi_I)}_{\varphi}] = \\
&= I_M \cos\varphi \cos(\omega t + \varphi_V) + I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_V) = \\
&= \underbrace{I_M \cos\varphi \cos(\omega t + \varphi_V)}_{\mathrm{i}_A(t)} + \underbrace{I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos(\omega t + \varphi_V - \pi/2)}_{\mathrm{i}_R(t)}
\end{aligned}
$$

Componenti attiva e reattiva della corrente

Rappresentazione nel piano complesso



$$\mathbf{I}_A = I_M \cos\varphi \, \mathrm{e}^{j\varphi_V}$$

$$\mathbf{I}_R = I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi \, \mathrm{e}^{j\left(\varphi_V - \frac{\pi}{2}\right)} = -j\, I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi \, \mathrm{e}^{j\varphi_V}$$

Potenza istantanea attiva e reattiva

- Scomposizione della potenza istantanea

$$\mathrm{p}(t)=\mathrm{v}(t)\left[\mathrm{i}_A(t)+\mathrm{i}_R(t)\right]=\mathrm{v}(t)\,\mathrm{i}_A(t)+\mathrm{v}(t)\,\mathrm{i}_R(t)=\mathrm{p}_A(t)+\mathrm{p}_R(t)$$

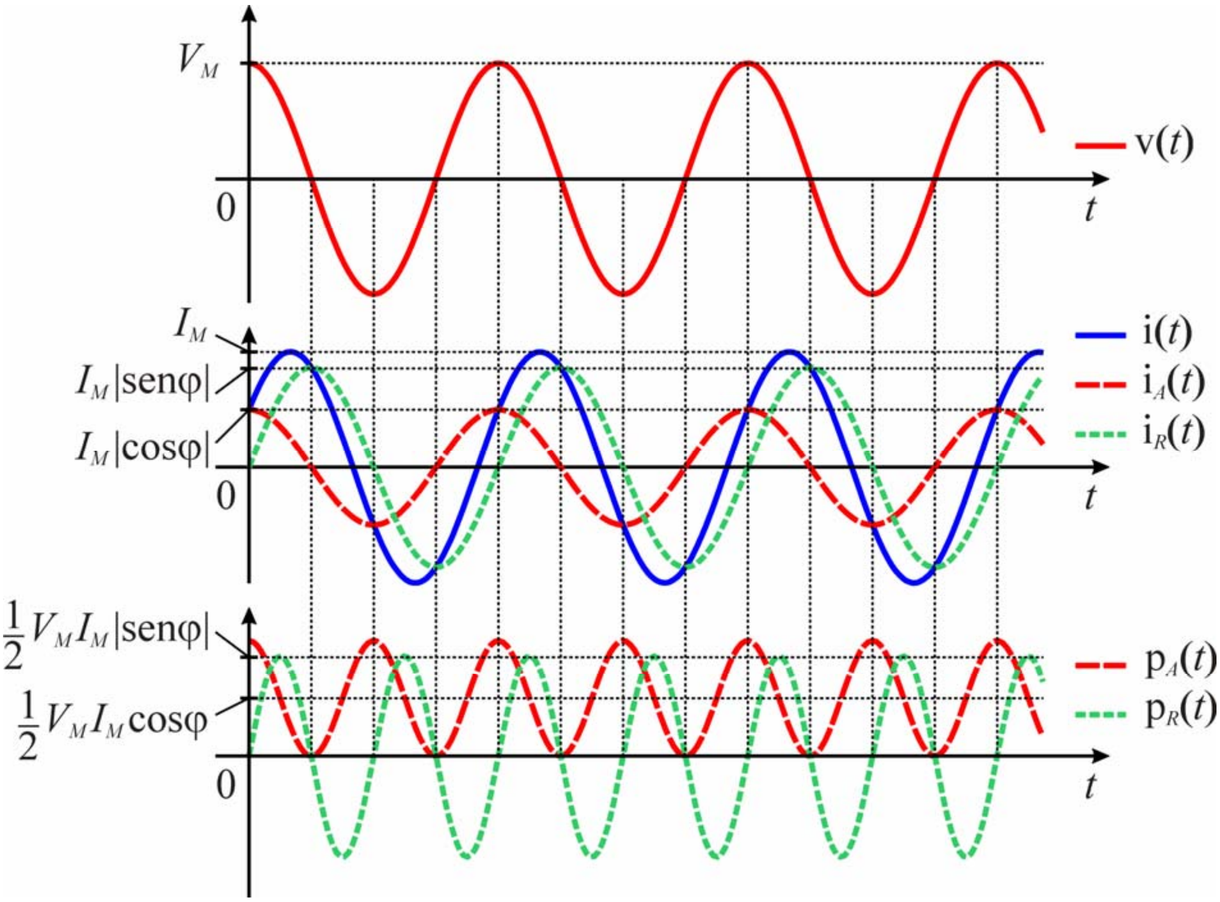
- **Potenza istantanea attiva**

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_A(t)&=V_M\cos(\omega t+\varphi_V)\cdot I_M\cos\varphi\cos(\omega t+\varphi_V)=\\&=V_M I_M\cos\varphi\left[\cos(\omega t+\varphi_V)\right]^2=\\&=\frac{1}{2}V_M I_M\cos\varphi\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_V)\right]\end{aligned}$$

- **Potenza istantanea reattiva**

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_R(t)&=V_M\cos(\omega t+\varphi_V)\cdot I_M\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_V)=\\&=\frac{1}{2}V_M I_M\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}(2\omega t+2\varphi_V)\end{aligned}$$

Potenza istantanea attiva e reattiva



Potenza istantanea attiva e reattiva

- La potenza istantanea attiva non cambia mai segno (se $\cos\varphi > 0$ è sempre ≥ 0)
  - ➡ flusso unidirezionale di energia (dall'esterno verso il bipolo se $\cos\varphi > 0$)
- La potenza istantanea reattiva è una funzione sinusoidale del tempo con pulsazione 2ω
  - ➡ l'energia ad essa associata fluisce alternativamente dall'esterno verso il bipolo e viceversa
  - ➡ in un intervallo di durata pari a un semiperiodo di v e i, l'energia complessivamente scambiata tra il circuito e il bipolo è nulla

Potenza attiva

- **Potenza attiva:** valore medio sul periodo della potenza istantanea attiva = valore medio sul periodo della potenza istantanea (unità di misura watt, W)

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{p}_A(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{p}(t)\,dt = \frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi$$

- Un intervallo $\Delta t >> \mathrm{T}$ può essere approssimato con un numero intero di periodi

➡ L'energia assorbita da un bipolo in un intervallo di durata molto grande rispetto al periodo può essere ottenuta dalla relazione

$$w_a(0,\Delta t) \cong P\Delta t$$

Potenza reattiva

- **Potenza reattiva:** valore massimo della potenza istantanea reattiva col segno di φ

$$Q = \max\left[\mathrm{p}_R(t)\right]\mathrm{sgn}(\varphi) = \frac{1}{2}V_M I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

- L'unità di misura della potenza reattiva è il volt-ampere reattivo (VAR)
- Q è un indice dell'entità degli scambi energetici associati alla potenza istantanea reattiva
- Convenzionalmente si attribuisce
  - segno + alla potenza reattiva assorbita dagli induttori
  - segno – alla potenza reattiva assorbita dai condensatori

Potenza apparente

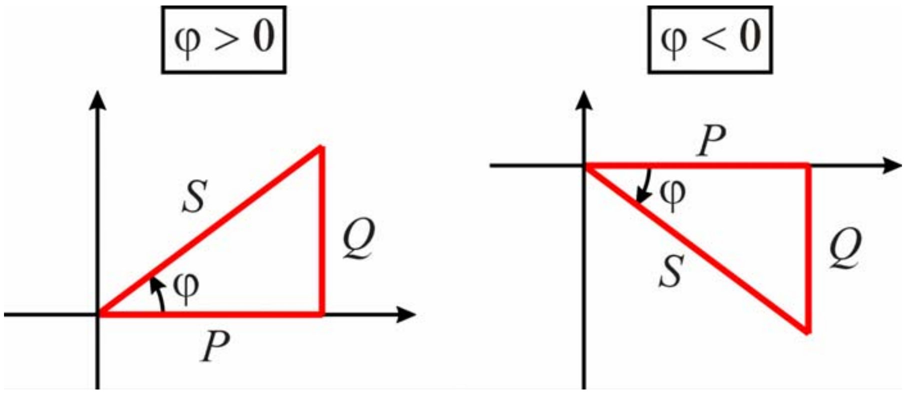
- **Potenza apparente:** è definita dalla relazione

$$S = \frac{1}{2}V_M I_M$$

- L'unità di misura della potenza apparente è il volt-ampere (VA)
- La potenza apparente coincide con l'ampiezza del termine oscillante della potenza istantanea
- S dipende solo dalle ampiezze della tensione e della corrente

Triangolo delle potenze

- Rappresentazione grafica delle relazioni tra potenza attiva reattiva e apparente



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S \cos\varphi$$

$$Q = S \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$Q = P \,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Potenza complessa

- Si definisce **potenza complessa** la quantità

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*$$

($\mathbf{I}^*$ indica il coniugato di $\mathbf{I}$)

- Inserendo le espressioni di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$ si ottiene

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}V_M\, e^{j\varphi_V} \cdot I_M\, e^{-j\varphi_I} = \frac{1}{2}V_M I_M\, e^{j\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi + j\frac{1}{2}V_M I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi = P + jQ$$

➡ Quindi si ha

$$\mathrm{Re}[\mathbf{N}] = \frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi = P$$

$$\mathrm{Im}[\mathbf{N}] = \frac{1}{2}V_M I_M \,\mathrm{sen}\,\varphi = Q$$

$$|\mathbf{N}| = \frac{1}{2}V_M I_M = S$$

$$\arg(\mathbf{N}) = \varphi$$

Conservazione delle potenze complesse (Teorema di Boucherot)

- **Ipotesi:**
  - Circuito con l lati
  - Versi di riferimento scelti per tutti i lati secondo la convenzione dell'utilizzatore
  - Condizioni di regime sinusoidale
  - $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{I}_k$ $(k = 1, ..., l)$ = fasori delle tensioni e delle correnti

➡ La somma delle potenze complesse assorbite dai componenti del circuito è nulla

➡ Le somme delle potenze attive e delle potenze reattive assorbite dai componenti sono nulle

$$\sum_{k=1}^{l} \mathbf{N}_k = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{l} P_k = 0 \quad \sum_{k=1}^{l} Q_k = 0$$

- **Dimostrazione:**
  - I fasori $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{I}_k$ soddisfano le leggi di Kirchhoff. Se i fasori delle correnti soddisfano la LKI, anche i loro coniugati la soddisfano
  - ➡ La proprietà deriva direttamente dal teorema di Tellegen

Additività delle potenze complesse

- Si assume che il lato l del circuito sia costituito da un bipolo
- Si divide il circuito in due parti
  - una formata dal solo lato l
  - una formata dagli altri lati (che complessivamente costituiscono un bipolo)
- Per il teorema di Boucherot vale la relazione

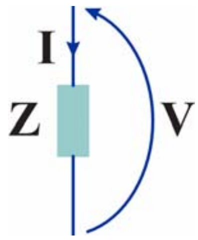
$$-\mathbf{N}_l = \sum_{k=1}^{l-1} \mathbf{N}_k \Rightarrow -P_l = \sum_{k=1}^{l-1} P_k, \quad -Q_l = \sum_{k=1}^{l-1} Q_k$$

- $-\mathbf{N}_l$ è la potenza erogata dal bipolo l, cioè la potenza assorbita dal bipolo formato dagli altri componenti

➡ La potenza complessa assorbita da un bipolo formato da più componenti collegati tra loro è pari alla somma delle potenze assorbite dai singoli componenti

➡ La stessa proprietà vale per le potenze attive e per le potenze reattive

Potenza complessa in funzione di Z e Y



$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} = (R + jX)\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V} = (G + jB)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}\mathbf{Z}\mathbf{I}\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}\mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{V}(\mathbf{Y}\mathbf{V})^* = \frac{1}{2}\mathbf{Y}^*|\mathbf{V}|^2$$
$$P = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2\right] = \frac{1}{2}R|\mathbf{I}|^2 = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{Y}^*|\mathbf{V}|^2\right] = \frac{1}{2}G|\mathbf{V}|^2$$
$$Q = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2\right] = \frac{1}{2}X|\mathbf{I}|^2 = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\mathbf{Y}^*|\mathbf{V}|^2\right] = -\frac{1}{2}B|\mathbf{V}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} P > 0 \Leftrightarrow R > 0,\ G > 0 \\ Q > 0 \Leftrightarrow X > 0,\ B < 0 \end{array}}$$

Segni delle parti reali e immaginarie di Z e Y

- Si considera un bipolo formato da componenti R, L, C passivi
- Dalle espressioni delle potenze complesse in funzione di $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ e dalla proprietà di additività delle potenze, a seconda del tipo di componenti contenuti nel bipolo, si ricavano le seguenti condizioni:

Componenti	P	Q	$\mathrm{Re}[\mathbf{Z}]$	$\mathrm{Im}[\mathbf{Z}]$	$\mathrm{Re}[\mathbf{Y}]$	$\mathrm{Im}[\mathbf{Y}]$
R	>0	$=0$	>0	$=0$	>0	$=0$
L	$=0$	>0	$=0$	>0	$=0$	<0
C	$=0$	<0	$=0$	<0	$=0$	>0
R-L	>0	>0	>0	>0	>0	<0
R-C	>0	<0	>0	<0	>0	>0
L-C	$=0$		$=0$		$=0$	
R-L-C	≥ 0		≥ 0		≥ 0	

Valori efficaci

- Si definisce **valore efficace** di una funzione $\mathrm{a}(t)$ periodica di periodo T la quantità

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{a}^2(t)dt}$$

- In particolare, se $\mathrm{a}(t)$ è sinusoidale, risulta

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi)dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\frac{A_M^2}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}[1+\cos(2\omega t + 2\varphi)]dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

Valori efficaci

- Espressioni della potenza attiva e reattiva in funzione dei valori efficaci

$$P = \frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi = \frac{V_M}{\sqrt{2}}\frac{I_M}{\sqrt{2}}\cos\varphi = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

$$Q = \frac{1}{2}V_M I_M \operatorname{sen}\varphi = V_{eff} I_{eff} \operatorname{sen}\varphi$$

- Potenza assorbita da un resistore

$$P = RI_{eff}^2 = GV_{eff}^2$$

➡ *Il valore efficace di una tensione (corrente) sinusoidale corrisponde al valore di una tensione (corrente) costante che applicata a un resistore dà luogo ad una dissipazione di potenza pari al valore medio sul periodo della potenza assorbita dal resistore in regime sinusoidale*

Valori efficaci

- E' possibile definire la trasformata di Steinmetz anche facendo riferimento ai valori efficaci invece che ai valori massimi

$$\mathbf{A}_e = \mathfrak{S}_e\{a(t)\} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

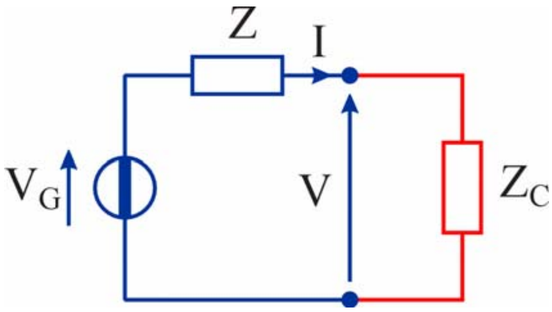
$$a(t) = \mathfrak{S}_e^{-1}\{\mathbf{A}_e\} = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\mathbf{A}_e e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[A_M e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

- La trasformata così definita conserva le stesse proprietà della trasformata basata sui valori massimi
- Le impedenze e le ammettenze (essendo definite come rapporti tra fasori) non cambiano se si fa riferimento ai valori efficaci
- L'espressione della potenza complessa diviene

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_e \mathbf{I}_e^*$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva

- Si considera un bipolo formato da un generatore di tensione sinusoidale $\mathbf{V}_G$ in serie con un impedenza $\mathbf{Z}$ caricato da un'impedenza $\mathbf{Z}_C$



$$\mathbf{Z} = R + jX$$

$$\mathbf{Z}_C = R_C + jX_C$$

➡ Al variare di $\mathbf{Z}_C$, la potenza attiva ceduta al carico è massima quando vale la condizione $\mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}^*$ (**adattamento coniugato**)

➡ In queste condizioni la potenza attiva (**potenza disponibile**) vale

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8R} = \frac{V_{Geff}^{\ 2}}{4R}$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva dimostrazione (1)

- Corrente e tensione nel carico

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_G}{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_G \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C}$$

- Potenza attiva ceduta al carico

$$P_C = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathbf{V}_G \mathbf{Z}_C}{(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C)}\frac{\mathbf{V}_G^*}{(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C)^*}\right] = \frac{|\mathbf{V}_G|^2 \,\mathrm{Re}[\mathbf{Z}_C]}{2|\mathbf{Z}+\mathbf{Z}_C|^2} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2 R_C}{2[(R+R_C)^2+(X+X_C)^2]}$$

- Al variare di X_C il denominatore è minimo (e quindi P_C è massimo) se $X_C = -X$
- In queste condizioni

$$P_C = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{2}\frac{R_C}{(R+R_C)^2}$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva dimostrazione (2)

- Al variare di P_C il massimo si ottiene per

$$\frac{\partial P_C}{\partial R_C} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{2}\frac{(R+R_C)^2 - 2R_C(R+R_C)}{(R+R_C)^4} = 0$$

cioè $R_C = R$ infatti:
  - P_C è positivo per $R_C > 0$ e si annulla per $R \to 0$ e $R \to \infty$
  - la derivata di P_C si annulla solo per $R_C = R$
  - ➡ questo punto deve corrispondere a un massimo

➡ Quindi deve essere $R_C = R$, $X_C = -X$ ➡ $\mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}^*$

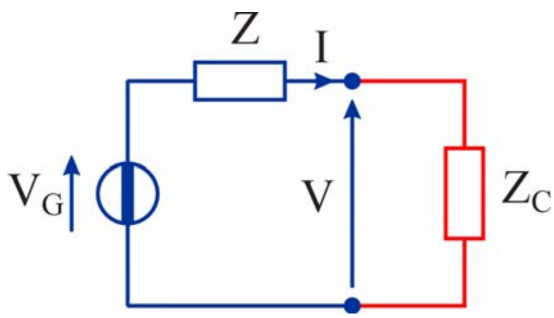
- In queste condizioni si ha

$$P_{C\max} = P_d = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{2}\frac{R}{(R+R)^2} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8R}$$

Rendimento

- In condizioni di adattamento coniugato la potenza attiva erogata dal generatore vale

$$P_G = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{V}_G \frac{\mathbf{V}_G^*}{2R}\right] = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{4R}$$



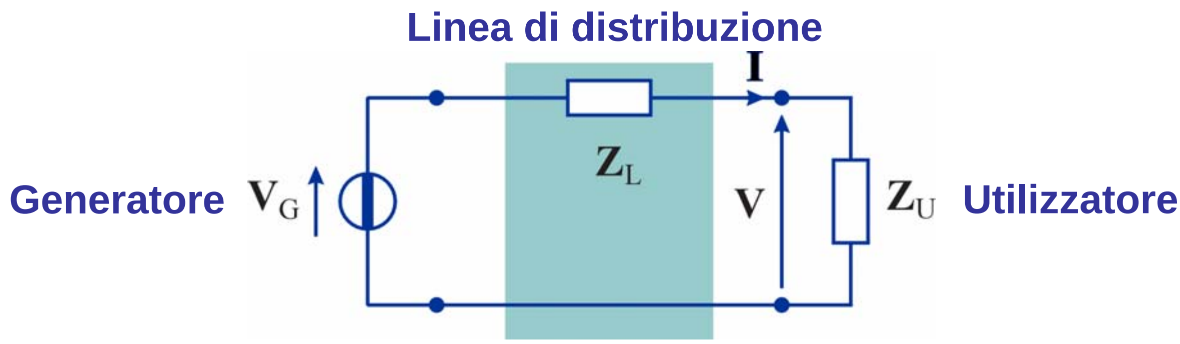
➡ Il rendimento η definito come rapporto tra la potenza attiva erogata dal generatore e la potenza attiva ceduta al carico è

$$\eta = \frac{P_C}{P_G} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8R}\frac{4R}{|\mathbf{V}_G|^2} = 0.5$$

➡ La condizione di adattamento coniugato non rappresenta una soluzione ottimale nel caso in cui è importante ottenere rendimenti elevati

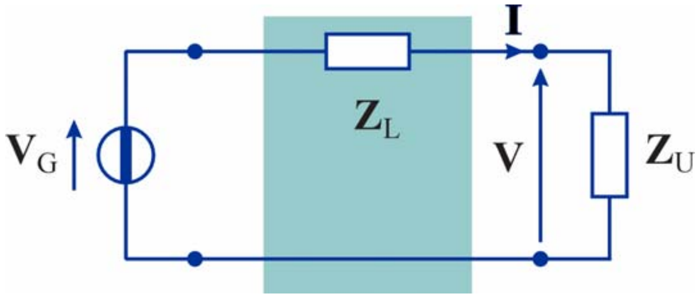
Rifasamento

- Distribuzione dell'energia elettrica (schema semplificato)



- Impedenza equivalente della linea: $\mathbf{Z}_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} + jX_\mathrm{L}$
- Condizioni di funzionamento ottimali:
  - Ampiezza della tensione sul carico praticamente indipendente dalla corrente (normalmente gli utilizzatori sono progettati facendo riferimento a un valore nominale della tensione ➡ sono tollerati scostamenti di pochi percento dal valore nominale prefissato)
  - Minima dissipazione di potenza nella linea

Rifasamento



- Al crescere dell'ampiezza della corrente $\mathbf{I}$ nella linea
  - si riduce l'ampiezza della tensione sul $\mathbf{V}$ carico

    $$V_\mathrm{M} = |\mathbf{V}| = |\mathbf{V}_\mathrm{G} - \mathbf{Z}_\mathrm{L}\mathbf{I}|$$

  - aumentano le perdite per effetto Joule lungo la linea

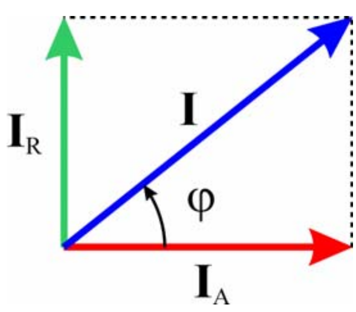
    $$P_\mathrm{L} = \frac{1}{2} R_\mathrm{L} I_\mathrm{M}^2$$

Rifasamento

- Fissata l'ampiezza tensione V_M, a parità di potenza attiva P assorbita dal carico l'ampiezza della corrente è inversamente proporzionale al fattore di potenza

$$I_\mathrm{M} = \frac{2P}{V_\mathrm{M} \cos\varphi}$$

  - L'ampiezza della componente attiva della corrente è fissata dal valore della potenza attiva
  - Al diminuire del fattore di potenza (cioè all'aumentare dell'angolo φ) aumenta l'ampiezza della componente reattiva della corrente (e quindi l'ampiezza della corrente totale)

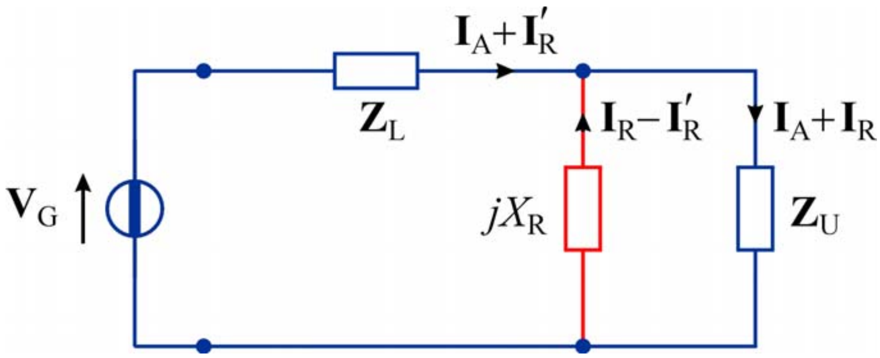


➡ Per ridurre le perdite occorre aumentare il fattore di potenza del carico

Rifasamento

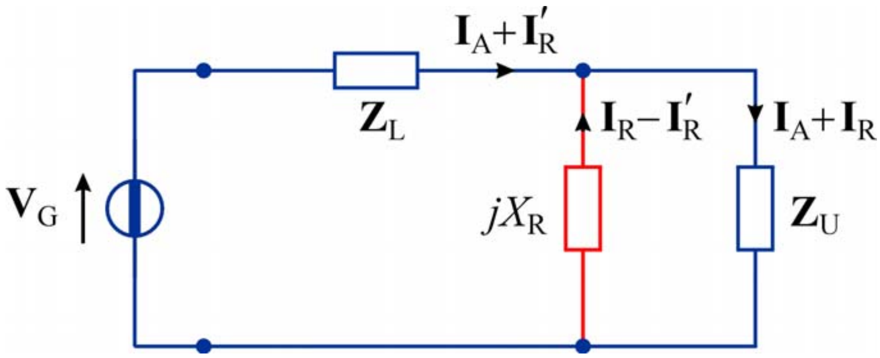
- Un basso fattore di potenza risulta svantaggioso per il fornitore di energia elettrica
- ➡ Se il valore medio mensile del fattore di potenza risulta inferiore a certi limiti vengono applicate delle maggiorazioni sul costo dell'energia
- Le norme attuali, per impianti a bassa tensione con potenza impegnata $\geq$ 15 kW, prevedono:
  - per $\cos\varphi \geq 0.9$ ➡ nessuna penale
  - per $0.7 \leq \cos\varphi < 0.9$ ➡ pagamento di una penale commisurata al rapporto tra l'integrale della potenza reattiva (energia reattiva) e quello della potenza attiva (energia attiva) nel periodo di fatturazione
    - i limiti sono prossimi ai valori di $\cos\varphi$ per cui l'energia attiva e quella reattiva sono uguali ($\cos\varphi \cong 0.707$) e l'energia reattiva è pari al 50% dell'energia attiva ($\cos\varphi \cong 0.894$)
  - per $\cos\varphi < 0.7$ ➡ obbligo da parte dell'utente di prendere provvedi-menti per aumentare il fattore di potenza

Rifasamento



- Per aumentare il fattore di potenza si ricorre al **rifasamento** del carico
- Si collega in parallelo all'utilizzatore un bipolo puramente reattivo con reattanza di segno opposto a quella del utilizzatore stesso
- Se il carico è ohmico-induttivo ➡ $X_U > 0$, $\varphi > 0$ (caso più comune) la reattanza X_R deve essere negativa (➡ condensatore)

Rifasamento



- Dimensionando opportunamente la reattanza X_R si può fare in modo che
  - gli scambi di potenza reattiva avvengano prevalentemente tra il carico e il bipolo di rifasamento, riducendo gli scambi di potenza reattiva con il generatore
  - la componente reattiva $\mathbf{I}_R$ della corrente nel carico circoli prevalentemente nel bipolo di rifasamento, riducendo l'ampiezza della corrente reattiva $\mathbf{I}'_R$ nella linea

Rifasamento

- La potenza reattiva assorbita complessivamente dal carico e dal bipolo di rifasamento è

$$Q' = Q + Q_R$$

- Per portare il fattore di potenza da cosφ ad un valore accettabile cosφ′ la potenza reattiva assorbita dal bipolo di rifasamento deve essere

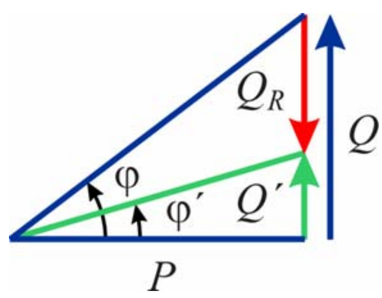
$$Q_R = (Q' - Q) = P(tg\varphi' - tg\varphi)$$

- Se il bipolo di rifasamento è un condensatore (capacità = C_R) si ha

$$Q_R = -\frac{1}{2}\omega C_R V_M^2$$

➡ Quindi la capacità di rifasamento vale

$$C_R = \frac{2P(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi')}{\omega V_M^2} = \frac{P(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi')}{\omega V_{eff}^2}$$

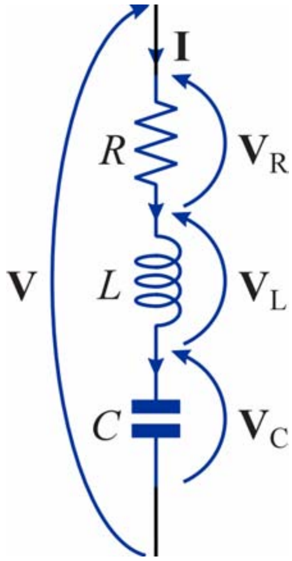


Risonanza serie

- Bipolo RLC serie in regime sinusoidale
- Si studia il comportamento del bipolo al variare della pulsazione ω

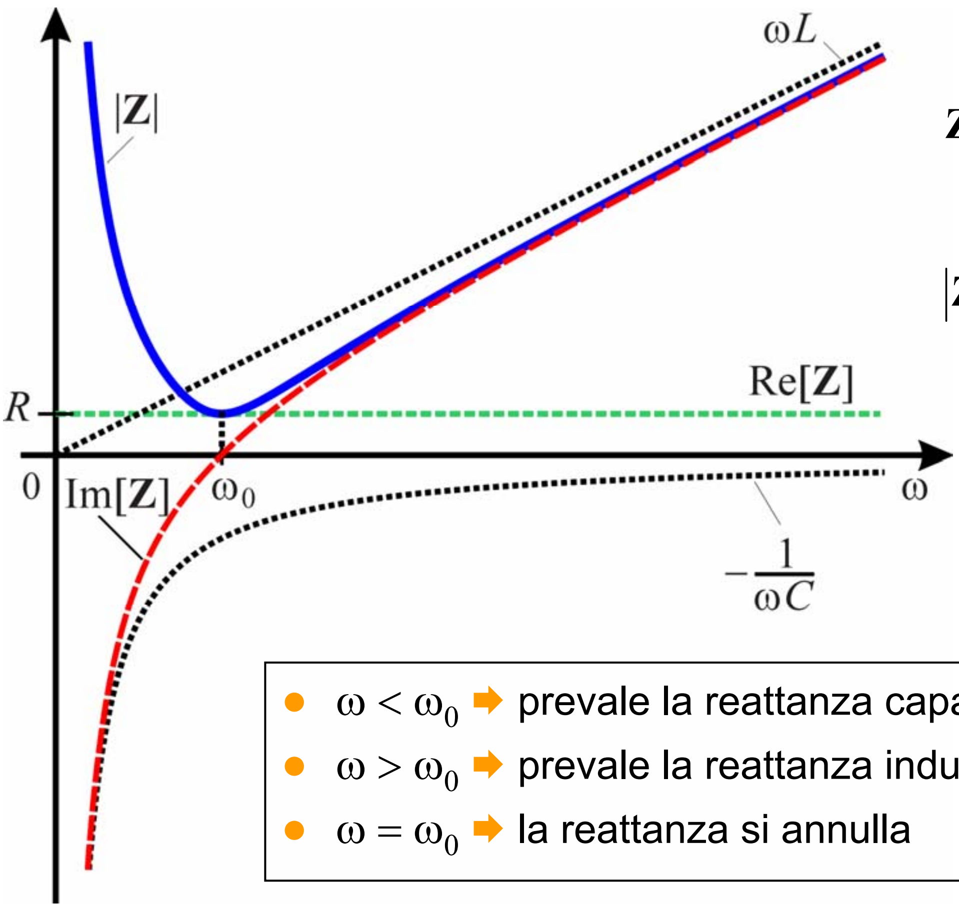
$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \arg(\mathbf{Z}) = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



- **Pulsazione di risonanza:** $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- Per $\omega = \omega_0$
  - ➡ $\mathrm{Im}[\mathbf{Z}] = 0$
  - ➡ $|\mathbf{Z}|$ è minimo
  - ➡ $\arg(\mathbf{Z}) = 0$

Risonanza serie

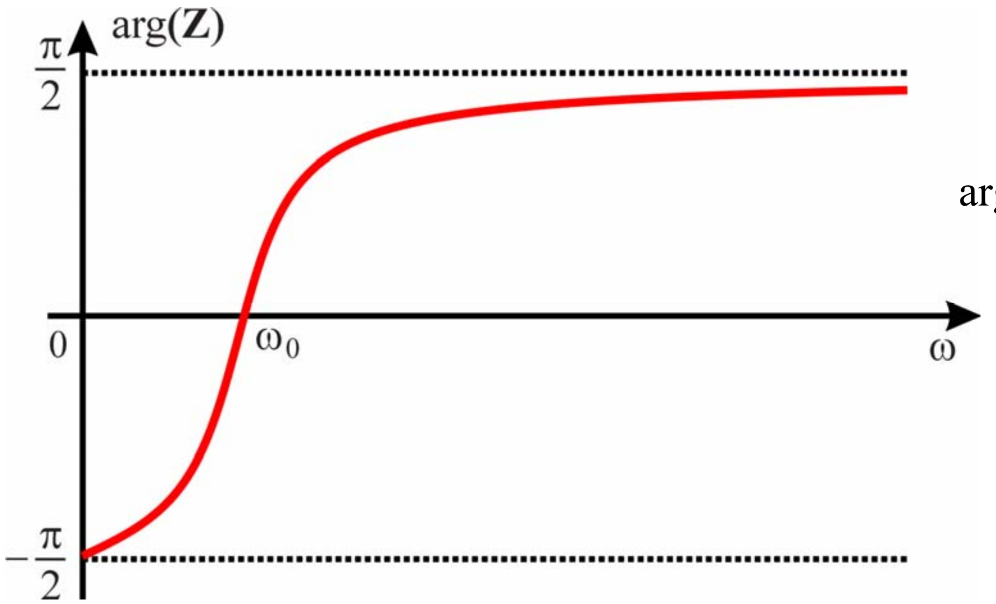


$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- $\omega < \omega_0$ ➡ prevale la reattanza capacitiva
- $\omega > \omega_0$ ➡ prevale la reattanza induttiva
- $\omega = \omega_0$ ➡ la reattanza si annulla

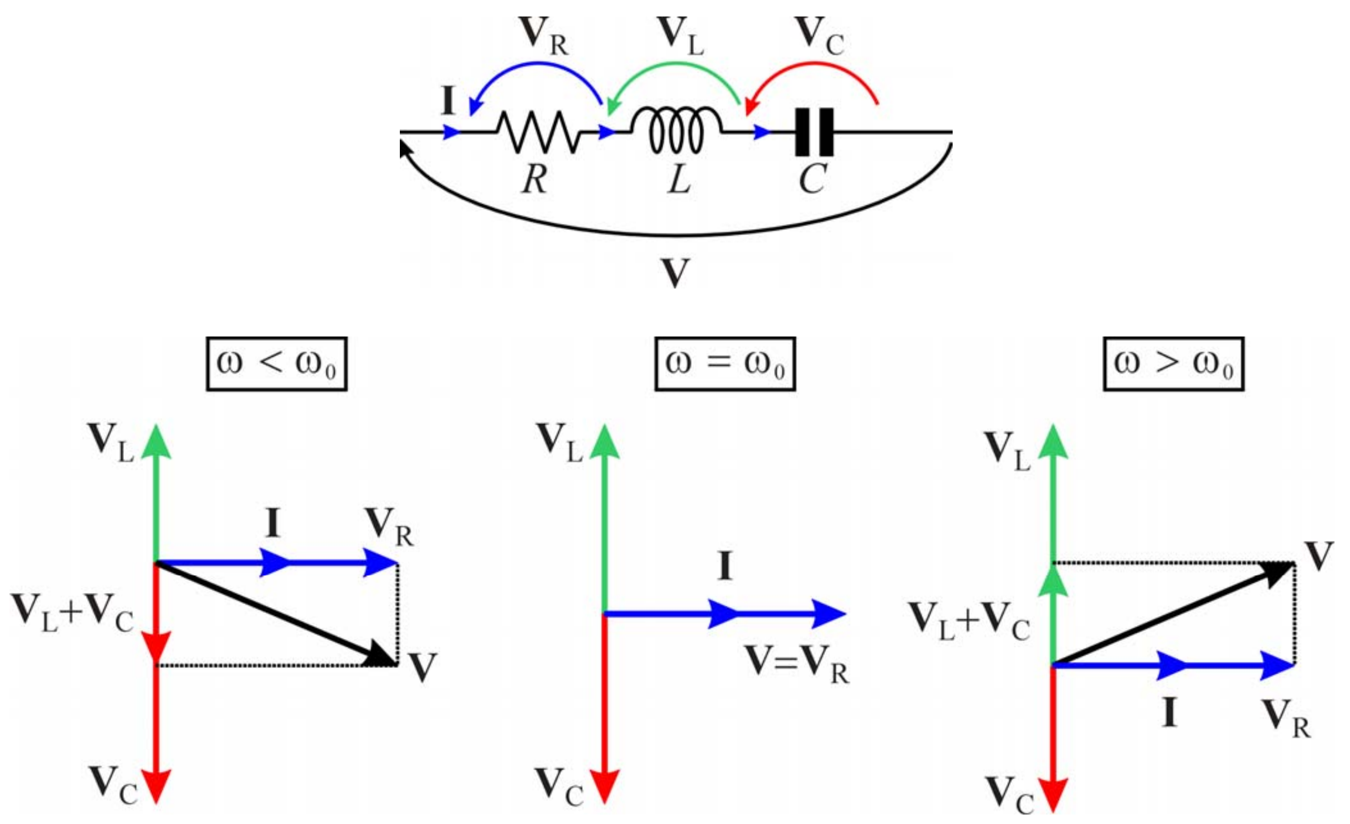
Risonanza serie



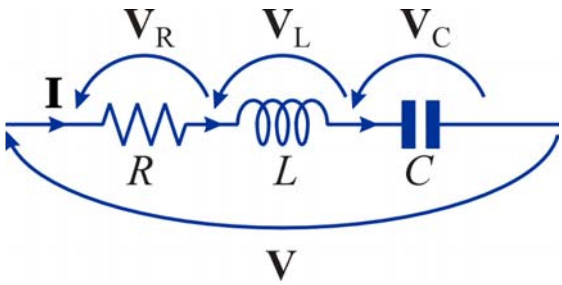
$$\arg(\mathbf{Z}) = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

- $\omega < \omega_0$ ➡ la corrente è in anticipo sulla tensione
- $\omega > \omega_0$ ➡ la tensione è in anticipo sulla corrente
- $\omega = \omega_0$ ➡ la tensione e la corrente sono in fase

Risonanza serie



Risonanza serie



- **Potenza complessa assorbita**: $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2}\left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right]I_M^2$
- **Potenza attiva**: $P = \frac{1}{2}RI_M^2$
- **Potenza reattiva**: $Q = \frac{1}{2}\omega L I_M^2 - \frac{1}{2\omega C}I_M^2$
  - $\omega < \omega_0 \Rightarrow Q < 0$
  - $\omega > \omega_0 \Rightarrow Q > 0$
  - $\omega = \omega_0 \Rightarrow Q = 0$

Risonanza serie

- Corrente nell'induttore: $i_L(t) = i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_I)$

➡ Energia nell'induttore: $w_L(t) = \frac{1}{2}L\, i^2(t) = \frac{1}{2}LI_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi_I)$

- Tensione del condensatore: $\mathbf{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} \Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{\omega C}I_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_I)$

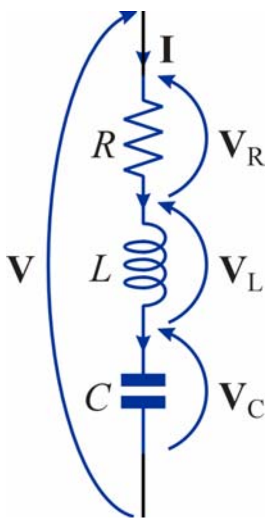
➡ Energia nel condensatore:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}C\, v_C^2(t) = \frac{1}{2\omega^2 C}I_M^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_I)$$

- In condizioni di risonanza:

$$w_C(t) = \frac{1}{2\omega_0^2 C}I_{M0}^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_I) = \frac{1}{2}LI_{M0}^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_I)$$

➡ $w_L(t) + w_C(t) = \frac{1}{2}LI_{M0}^2$



➡ In condizioni di risonanza l'energia totale accumulata nel bipolo RLC si mantiene costante

Fattore di merito

- In condizioni di risonanza, si definisce **fattore di merito** la quantità

$$Q_0 = 2\pi \frac{Energia\ accumulata}{Energia\ dissipata\ in\ un\ periodo}$$

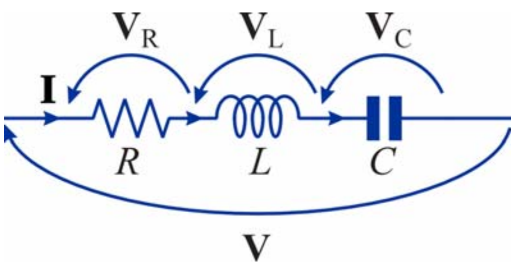
- Per un bipolo RLC serie, se l'ampiezza della corrente in condizioni di risonanza è I_{M0} si ottiene

$$Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_{M0}^2}{\frac{1}{2} R I_{M0}^2 \cdot T_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \qquad \left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right)$$

- L'espressione dell'impedenza del bipolo può essere posta nella forma

$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R\left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)\right] = R\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

Curve di risonanza



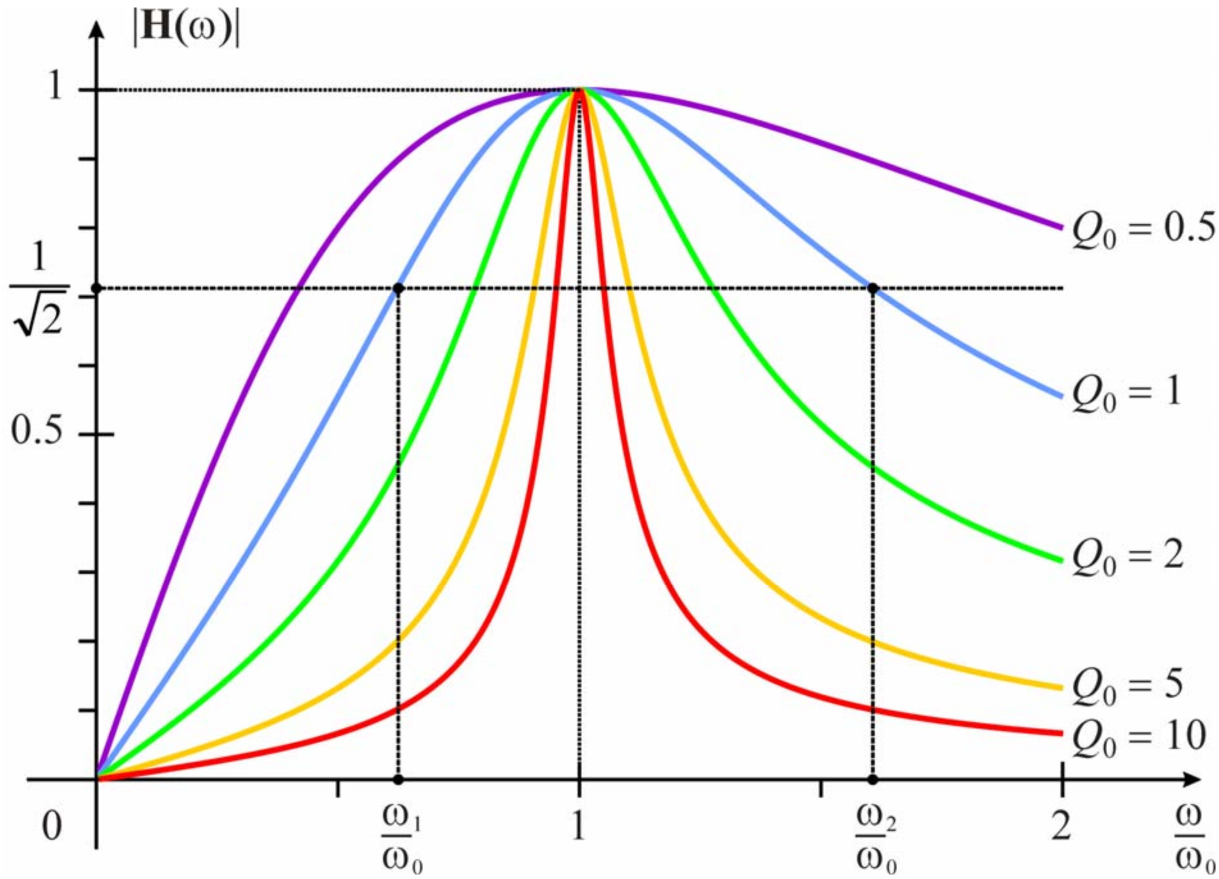
- Per caratterizzare la risposta in frequenza di un bipolo RLC serie, di solito si considera la funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}} = \frac{R}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

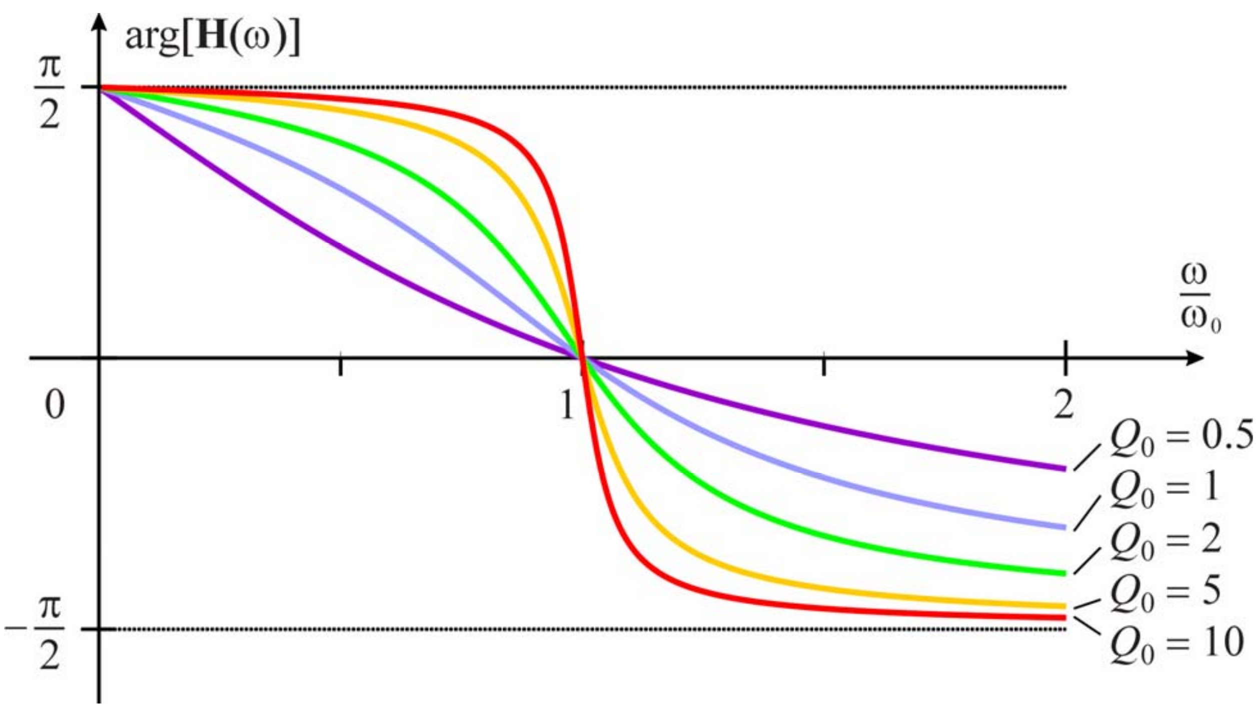
- Se $\mathbf{V}$ è fissato, $\mathbf{H}$ rappresenta anche il rapporto tra la corrente nel bipolo al variare di ω e la corrente in condizioni di risonanza $\mathbf{I}_0$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_0}$$

Curve di risonanza



Curve di risonanza



Larghezza di banda

- Se $\mathbf{V}$ è fissato, l'ampiezza della corrente nel bipolo, e quindi la potenza attiva assorbita, sono massime per $\omega = \omega_0$
- In queste condizioni si ha

$$P_0 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R} = \frac{1}{2} R I_{M0}^2$$

- La potenza attiva assorbita può essere espressa in funzione di ω come

$$P = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} R |\mathbf{H}(\omega)|^2 I_{M0}^2 = |\mathbf{H}(\omega)|^2 P_0$$

- **Larghezza di banda** (a metà potenza), B: ampiezza dell'intervallo compreso tra le pulsazioni ω_1 e ω_2 per cui risulta $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0/2$

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

- All'aumentare di Q_0 il modulo di $\mathbf{H}(\omega)$ presenta un picco sempre più stretto nell'intorno di ω_0

➡ La larghezza di banda diminuisce con l'aumentare del fattore di merito

Larghezza di banda

- La potenza attiva assorbita dal bipolo vale $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0/2$ se è verificata la relazione

$$Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q_0}\omega + \omega_0^2 = 0$$

- Le soluzioni positive di questa equazione sono

$$\omega_1, \omega_2 = \omega_0\left(\pm\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_o^2}}\right)$$

➡ Quindi si ha

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{L}{R} = \omega_0^2 RC$$

- Per valori sufficientemente elevati di Q_0 (in pratica per $Q_0 \geq 10$), si può ritenere

$$\omega_1, \omega_2 \approx \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q_0}\right) = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

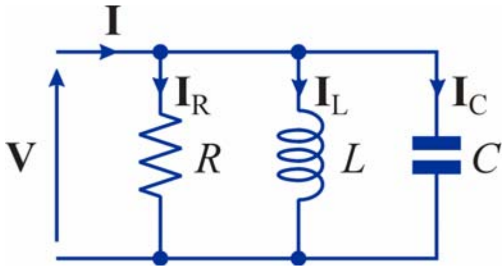
Risonanza parallelo

- Bipolo RLC parallelo in regime sinusoidale
- Si studia il comportamento del bipolo al variare della pulsazione ω

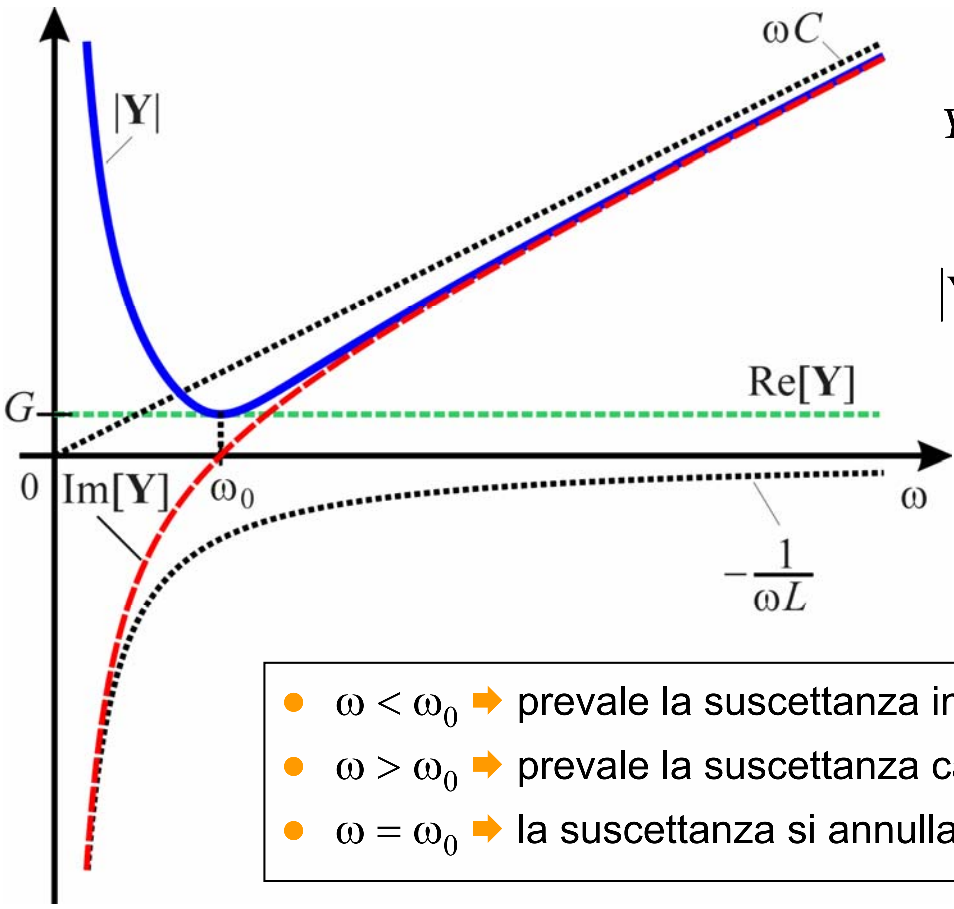
$$\mathbf{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad \arg(\mathbf{Y}) = \operatorname{arctg}\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

- **Pulsazione di risonanza:** $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Per $\omega = \omega_0$
  - ➡ $\mathrm{Im}[\mathbf{Y}] = 0$
  - ➡ $|\mathbf{Y}|$ è minimo
  - ➡ $\arg(\mathbf{Y}) = 0$



Risonanza parallelo

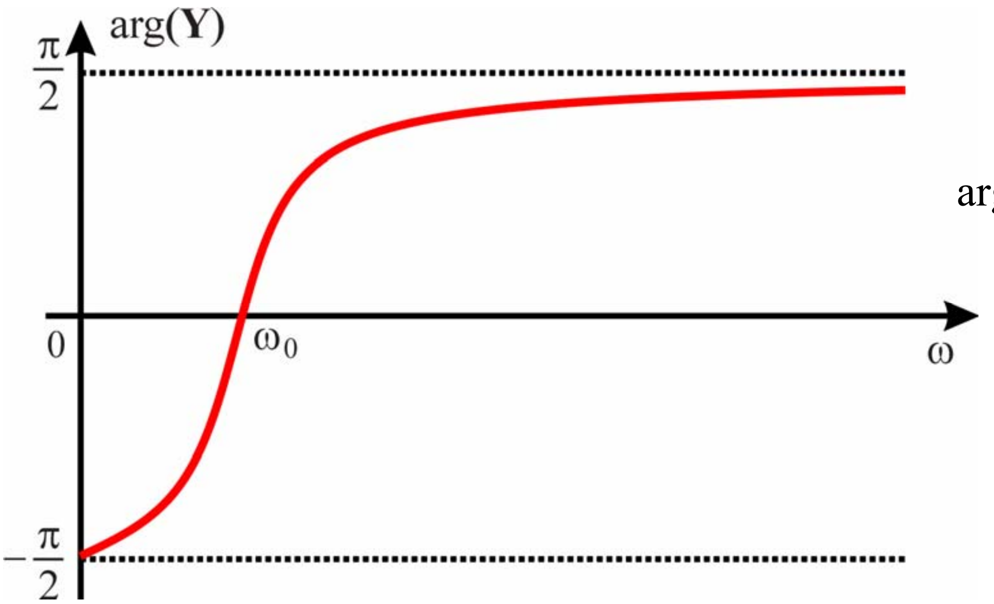


$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

- $\omega < \omega_0$ ➡ prevale la suscettanza induttiva
- $\omega > \omega_0$ ➡ prevale la suscettanza capacitiva
- $\omega = \omega_0$ ➡ la suscettanza si annulla

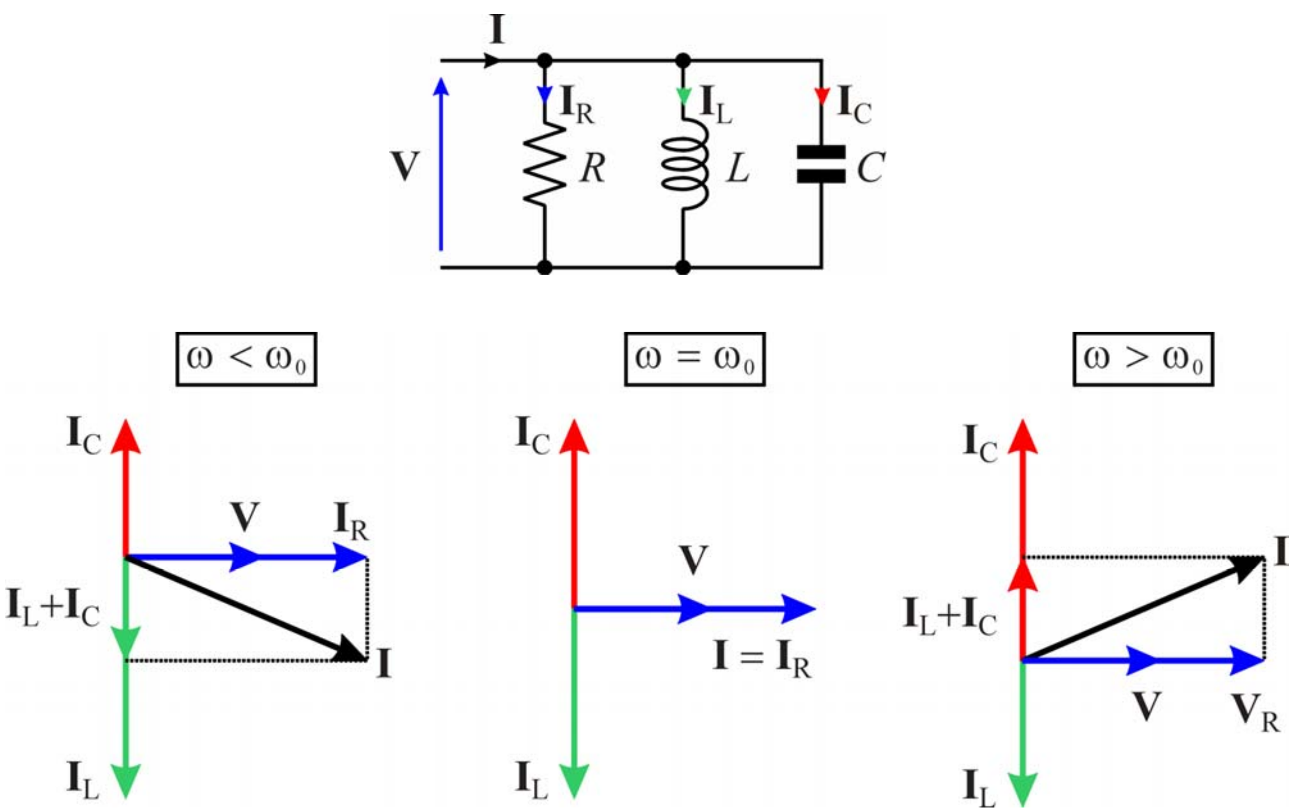
Risonanza parallelo



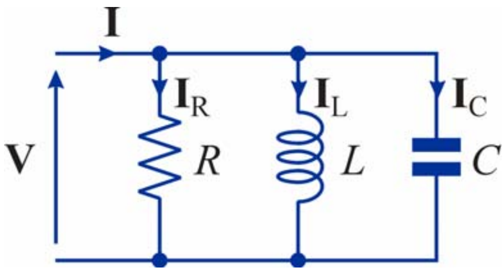
$$\arg(\mathbf{Y}) = \operatorname{arctg}\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

- $\omega < \omega_0$ ➡ la tensione è in anticipo sulla corrente
- $\omega > \omega_0$ ➡ la corrente è in anticipo sulla tensione
- $\omega = \omega_0$ ➡ la tensione e la corrente sono in fase

Risonanza parallelo



Risonanza parallelo



- **Potenza complessa assorbita**: $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}^*|\mathbf{V}|^2 = \frac{1}{2}\left[G - j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]V_M^2$
- **Potenza attiva**: $P = \frac{1}{2}GV_M^2$
- **Potenza reattiva**: $Q = \frac{1}{2\omega L}V_M^2 - \frac{1}{2}\omega CV_M^2$
  - $\omega < \omega_0$ ➡ $Q > 0$
  - $\omega > \omega_0$ ➡ $Q < 0$
  - $\omega = \omega_0$ ➡ $Q = 0$

Risonanza parallelo

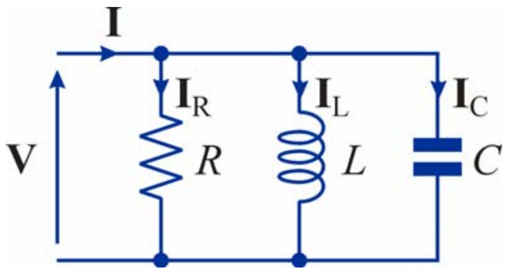
- Tensione del condensatore: $v_C(t) = v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$

➡ Energia nel condensatore: $w_C(t) = \frac{1}{2}C\,v^2(t) = \frac{1}{2}CV_M^2\cos^2(\omega t + \varphi_V)$

- Corrente nell'induttore: $\mathbf{I}_L = -j\frac{1}{\omega L}\mathbf{V}$ ➡ $i_L(t) = \frac{1}{\omega L}V_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_V)$

➡ Energia nell'induttore:

$$w_L(t) = \tfrac{1}{2}L\,i_L^2(t) = \frac{1}{2\omega^2 L}V_M^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_V)$$



- In condizioni di risonanza:

$$w_L(t) = \frac{1}{2\omega_0{}^2 L}V_{M0}^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_V) = \tfrac{1}{2}CV_{M0}^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

➡ $w_L(t) + w_C(t) = \frac{1}{2}CV_{M0}^2$

➡ In condizioni di risonanza l'energia totale accumulata nel bipolo RLC si mantiene costante

Fattore di merito

- Per un bipolo RLC parallelo il fattore di merito è

$$Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_{M0}^2}{\frac{1}{2} G V_{M0}^2 \cdot T_0} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 L G}$$

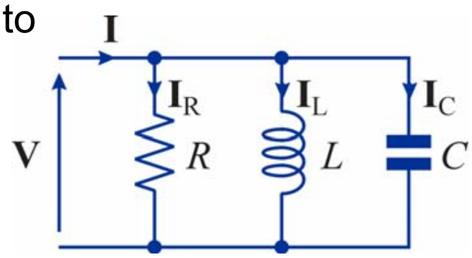
➡ In questo caso l'ammettenza può essere espressa come

$$\mathbf{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G\left[1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{1}{\omega L G}\right)\right] = G\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

Larghezza di banda

- Per caratterizzare la risposta in frequenza di un bipolo RLC serie, di solito si considera la funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_R}{\mathbf{I}} = \frac{G}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$



- Se $\mathbf{I}$ è fissato, $\mathbf{H}$ rappresenta anche il rapporto tra la tensione nel bipolo al variare di ω e la tensione in condizioni di risonanza $\mathbf{V}_0$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_0}$$

- L'andamento di $\mathbf{H}$ in funzione di ω coincide con quello visto per il bipolo RLC serie
- La larghezza di banda in questo caso vale

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{C}{G} = \omega_0^2 L G$$