Sistemi trifase

Parte 2
Cenni sull'analisi sequenziale

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm

(versione del 20-10-2013)

Terne simmetriche e omopolari

- Una terna di grandezze sinusoidali isofrequenziali è detta **simmetrica** se può essere espressa nei modi seguenti

Terna di sequenza diretta

$$a_{d1}(t) = \sqrt{2}A_d \cos(\omega t + \varphi_d)$$
$$a_{d2}(t) = \sqrt{2}A_d \cos(\omega t + \varphi_d - \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$a_{d3}(t) = \sqrt{2}A_d \cos(\omega t + \varphi_d + \tfrac{2}{3}\pi)$$

Terna di sequenza inversa

$$a_{i1}(t) = \sqrt{2}A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$a_{i2}(t) = \sqrt{2}A_i \cos(\omega t + \varphi_i + \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$a_{i3}(t) = \sqrt{2}A_i \cos(\omega t + \varphi_i - \tfrac{2}{3}\pi)$$

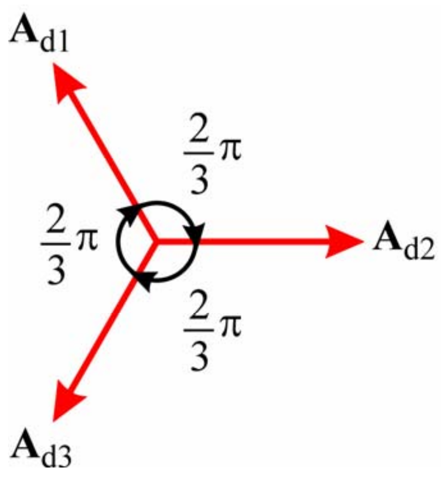
- Una terna di grandezze sinusoidali identiche è detta **omopolare**

Terna di sequenza omopolare

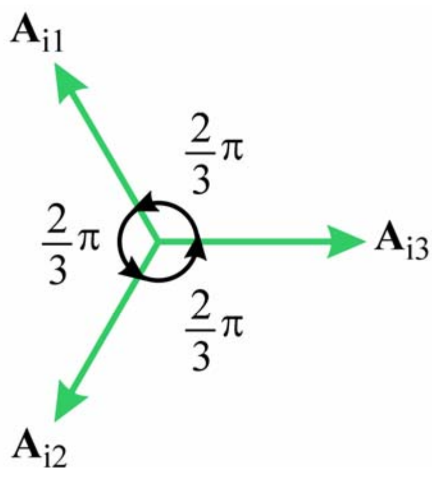
$$a_{o1}(t) = \sqrt{2}A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$
$$a_{o2}(t) = \sqrt{2}A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$
$$a_{o3}(t) = \sqrt{2}A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Terne di sequenza

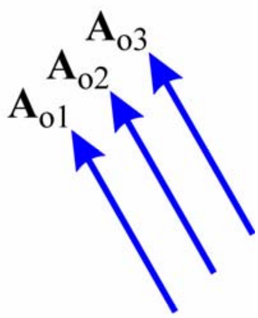
Terna diretta



Terna inversa



Terna omopolare



Terne pure e spurie

- Una terna di grandezze sinusoidali isofrequenziali è detta **pura** se ha somma nulla per ogni t

  $$a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) = 0$$

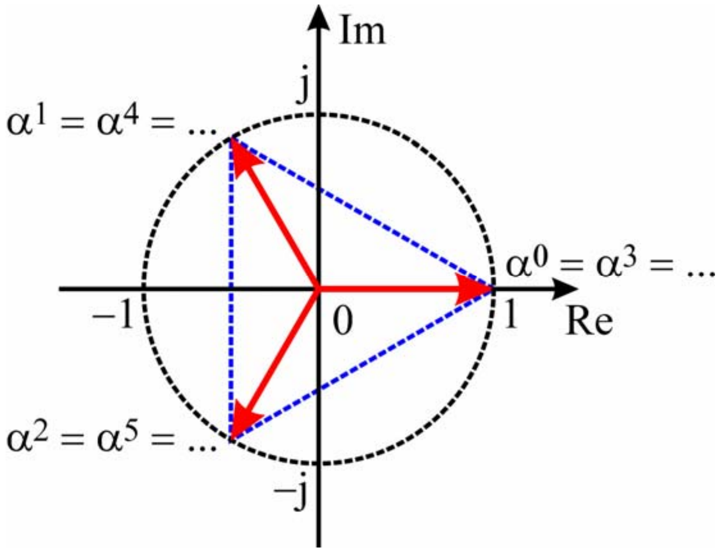
- Una terna che non soddisfa questa condizione è detta **spuria**
  - Le terne simmetriche dirette e inverse sono esempi di terne pure
  - Una terna omopolare è un esempio di terna spuria

Operatore di rotazione

- Nello studio delle terne di sequenza, conviene introdurre l'**operatore di rotazione** α, definito come

$$\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

➡ α ha modulo unitario e opera una rotazione di 120° in senso antiorario



- Con successive applicazioni dell'operatore α si ottengono rotazioni di multipli di 120°

$$\alpha^2 = e^{-j\frac{2}{3}\pi} \qquad \alpha^3 = \alpha^0 = 1$$

- L'operatore α ha quindi periodicità 3

$$\alpha^{3k} = 1 \qquad \alpha^{3k+1} = \alpha \qquad \alpha^{3k+2} = \alpha^2 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Operatore di rotazione

- Si può verificare che risulta

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0$$

- Inoltre valgono le seguenti relazioni

$$1 - \alpha = \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad 1 - \alpha^2 = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \qquad \alpha^2 - \alpha = -j\sqrt{3}$$

- Mediante l'operatore α si possono rappresentare in questo modo le terne unitarie di sequenza
  - diretta

    $1,\ \alpha^2,\ \alpha$
  - inversa

    $1,\ \alpha,\ \alpha^2$
  - omopolare

    $\alpha^0,\ \alpha^0,\ \alpha^0 \quad \Rightarrow \quad 1,\ 1,\ 1$

Operatore di rotazione

- Una terna di sequenza è individuata dal primo fasore

➡ Posto

$$\mathbf{A}_\mathrm{d} = A_\mathrm{d} e^{j\varphi_\mathrm{d}} \qquad \mathbf{A}_\mathrm{i} = A_\mathrm{i} e^{j\varphi_\mathrm{i}} \qquad \mathbf{A}_\mathrm{o} = A_\mathrm{o} e^{j\varphi_\mathrm{o}}$$

è possibile esprimere una generica terna simmetrica diretta, simmetrica inversa o omopolare nel modo seguente

$$\mathbf{A}_{\mathrm{d}1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{d}2} = \alpha^2 \mathbf{A}_\mathrm{d}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{d}3} = \alpha \mathbf{A}_\mathrm{d} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_\mathrm{d}\left(1, \alpha^2, \alpha\right)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{i}1} = \mathbf{A}_\mathrm{i}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{i}2} = \alpha \mathbf{A}_\mathrm{i}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{i}3} = \alpha^2 \mathbf{A}_\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_\mathrm{i}\left(1, \alpha, \alpha^2\right)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{o}1} = \mathbf{A}_\mathrm{o}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{o}2} = \mathbf{A}_\mathrm{o}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{o}3} = \mathbf{A}_\mathrm{o} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_\mathrm{o}\left(1, 1, 1\right)$$

Teorema di Fortescue

- Ogni terna di fasori $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ può essere espressa univocamente come somma di
  - una terna simmetrica diretta: $\mathbf{A}_\mathrm{d}(1,\alpha^2,\alpha)$
  - una terna simmetrica inversa: $\mathbf{A}_\mathrm{i}(1,\alpha,\alpha^2)$
  - una terna omopolare: $\mathbf{A}_\mathrm{o}(1,1,1)$

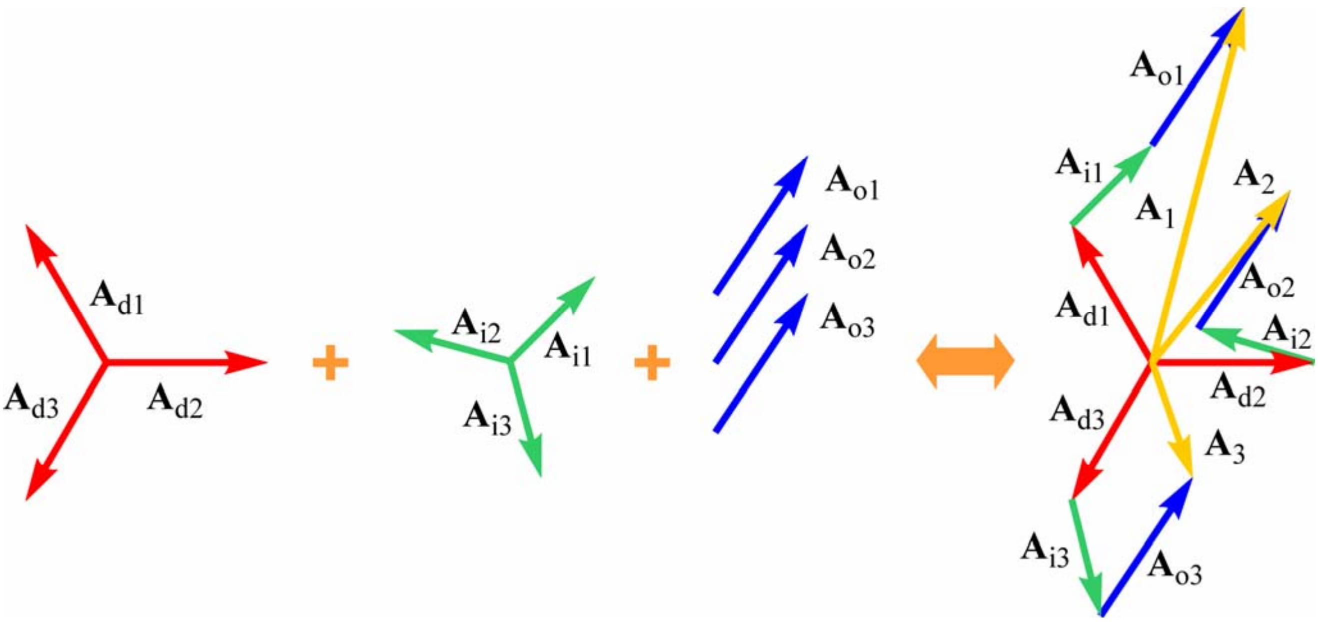
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_\mathrm{d} + \mathbf{A}_\mathrm{i} + \mathbf{A}_\mathrm{o}$$

$$\mathbf{A}_2 = \alpha^2 \mathbf{A}_\mathrm{d} + \alpha \mathbf{A}_\mathrm{i} + \mathbf{A}_\mathrm{o}$$

$$\mathbf{A}_3 = \alpha \mathbf{A}_\mathrm{d} + \alpha^2 \mathbf{A}_\mathrm{i} + \mathbf{A}_\mathrm{o}$$

- I tre fasori $\mathbf{A}_\mathrm{d}$, $\mathbf{A}_\mathrm{i}$, $\mathbf{A}_\mathrm{o}$ sono detti **componenti sequenziali** o **componenti simmetriche** della terna $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$

Teorema di Fortescue



Teorema di Fortescue - dimostrazione

- La dimostrazione del teorema è immediata se si osserva che le espressioni dei fasori $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ in funzione delle componenti simmetriche costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_o$ che ammette sempre soluzione

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_d + \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_o \\ \mathbf{A}_2 = \alpha^2 \mathbf{A}_d + \alpha \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_o \\ \mathbf{A}_3 = \alpha \mathbf{A}_d + \alpha^2 \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_d = \frac{1}{3}\left(\mathbf{A}_1 + \alpha \mathbf{A}_2 + \alpha^2 \mathbf{A}_3\right) \\ \mathbf{A}_i = \frac{1}{3}\left(\mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2 + \alpha \mathbf{A}_3\right) \\ \mathbf{A}_o = \frac{1}{3}\left(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right) \end{cases}$$

- Questo risultato mostra anche che per una terna pura la componente omopolare è sempre nulla

Matrice di sequenza

- Introdotti i vettori

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_o \end{bmatrix}$$

e la **matrice di sequenza** S

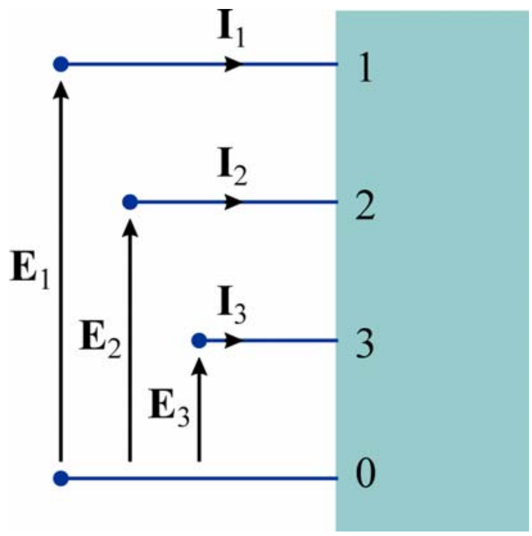
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

le relazioni tra una terna di fasori e le sue componenti sequenziali possono essere espresse nella forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{A}_S \qquad \mathbf{A}_S = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}$$

Carico trifase con neutro

- In un sistema trifase con neutro, un carico generico può essere considerato un triplo bipolo (tre porte)
- La relazione tra le tensione stellate e le correnti di linea, in generale può essere espressa in termini di matrice di impedenza o ammettenza



$$\mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}$$

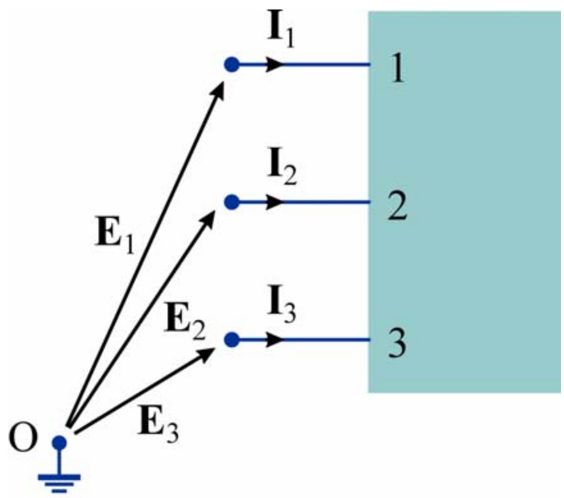
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix}$$

Carico trifase senza neutro

- Per un carico a tre terminali è sempre possibile definire la matrice di ammettenza considerando i potenziali dei terminali rispetto ad un punto O scelto in modo arbitrario (cioè scegliendo arbitrariamente il centro delle tensioni stellate)
- Al variare di O non variano le correnti, perché non variano le tensioni concatenate

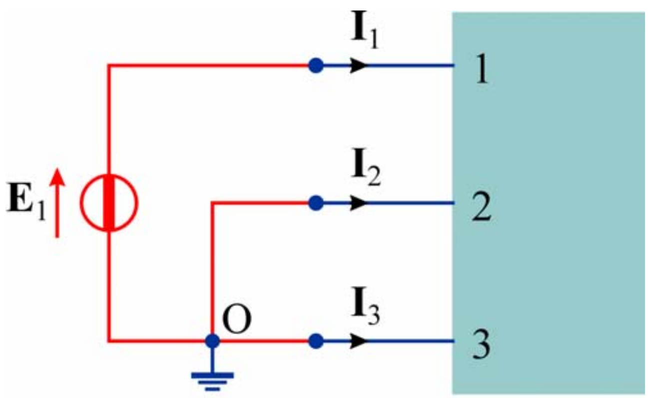
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$$

- In questo caso la matrice di ammettenza è sempre singolare, quindi non esiste la matrice di impedenza



Carico trifase senza neutro

- Per determinare gli elementi della matrice $\mathbf{Y}$ si può applicare una tensione arbitraria tra uno dei terminali e il punto O e collegare gli altri due terminali al punto O
- Ad esempio, considerando il terminale 1 si ha



$$\mathbf{Y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_1}\right|_{\substack{\mathbf{E}_2=0 \\ \mathbf{E}_3=0}} \qquad \mathbf{Y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_1}\right|_{\substack{\mathbf{E}_2=0 \\ \mathbf{E}_3=0}} \qquad \mathbf{Y}_{31} = \left.\frac{\mathbf{I}_3}{\mathbf{E}_1}\right|_{\substack{\mathbf{E}_2=0 \\ \mathbf{E}_3=0}}$$

Carico trifase senza neutro

- Dato che la somma delle correnti è uguale a zero, dalle relazioni precedenti si ricava che la somma degli elementi di ogni colonna è uguale a zero

$$\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}_{31} = \left. \frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3}{\mathbf{E}_1} \right|_{\substack{\mathbf{E}_2 = 0 \\ \mathbf{E}_3 = 0}} = 0$$

(relazioni simili valgono per le altre due colonne)

- Nel caso in cui le tensioni stellate hanno uguale valore $\mathbf{E}$, le tensioni concatenate sono nulle, di conseguenza anche le correnti si annullano
  - Quindi anche la somma degli elementi di ogni riga è uguale a zero

$$\mathbf{I}_i = \left(\mathbf{Y}_{i1} + \mathbf{Y}_{i2} + \mathbf{Y}_{i3}\right) \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

Simmetria

- Un triplo bipolo è **simmetrico** se uno scambio sequenziale delle porte (es. $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$) non altera le tensioni e le correnti ai terminali
- Questo richiede che i coefficienti della matrice di ammettenza soddisfino le condizioni

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{Y}_{22} = \mathbf{Y}_{33}$$
$$\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{23} = \mathbf{Y}_{31}$$
$$\mathbf{Y}_{13} = \mathbf{Y}_{21} = \mathbf{Y}_{32}$$

- Di conseguenza la matrice ammettenza è una *matrice circolante*

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_\mathrm{p} & \mathbf{Y}_\mathrm{q} & \mathbf{Y}_\mathrm{r} \\ \mathbf{Y}_\mathrm{r} & \mathbf{Y}_\mathrm{p} & \mathbf{Y}_\mathrm{q} \\ \mathbf{Y}_\mathrm{q} & \mathbf{Y}_\mathrm{r} & \mathbf{Y}_\mathrm{p} \end{bmatrix}$$

Reciprocità

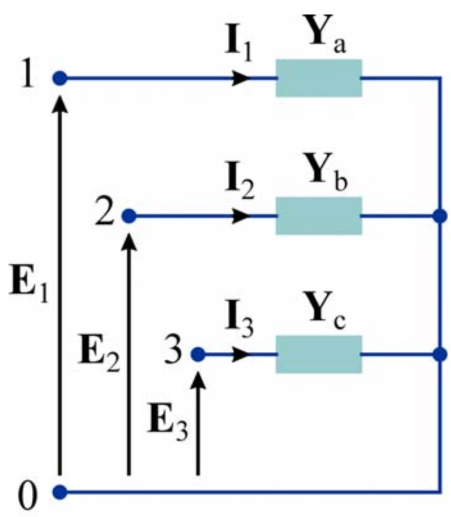
- Un triplo bipolo è **reciproco** se la risposta alla porta i dovuta all'applicazione di un ingresso alla porta j è uguale alla risposta prodotta alla porta j dallo stesso ingresso applicato alla porta i
- Se il triplo bipolo è reciproco, gli elementi della matrice di ammettenza devono soddisfate le relazioni

$$\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21}$$
$$\mathbf{Y}_{23} = \mathbf{Y}_{32}$$
$$\mathbf{Y}_{31} = \mathbf{Y}_{13}$$

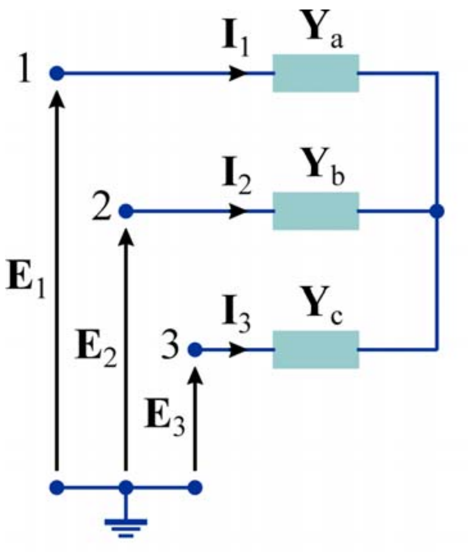
- Un triplo bipolo costituito dall'interconnessione di bipoli è sempre reciproco
- Un triplo bipolo che rappresenta il circuito equivalente di una macchina rotante in generale non è reciproco

Esempio - Stella spuria

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_c \end{bmatrix}$$



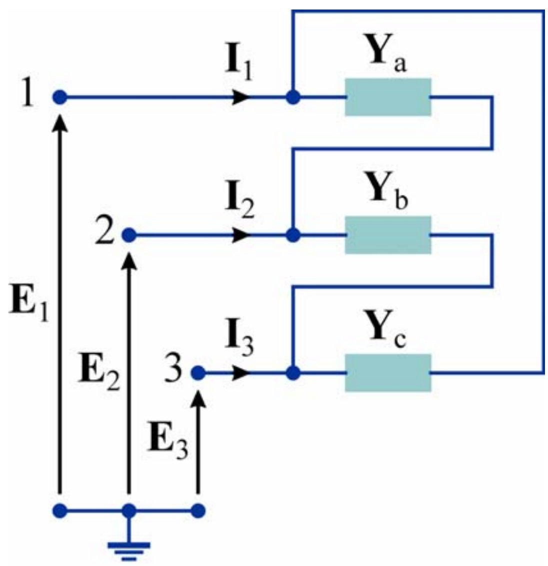
Esempio - Stella pura



$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a(\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c) & -\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b & -\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_c \\ -\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b & \mathbf{Y}_b(\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c) & -\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c \\ -\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_c & -\mathbf{Y}_b\mathbf{Y}_c & \mathbf{Y}_c(\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b) \end{bmatrix}$$

Esempio - Triangolo

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c & -\mathbf{Y}_a & -\mathbf{Y}_c \\ -\mathbf{Y}_a & \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b & -\mathbf{Y}_b \\ -\mathbf{Y}_c & -\mathbf{Y}_b & \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c \end{bmatrix}$$



Ammettenze alle sequenze

- Si considera un carico trifase rappresentato mediante la matrice di ammettenza $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}$$

- Si esprimono le tensioni stellate e le correnti di linea in funzione delle componenti sequenziali

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I} \qquad \mathbf{E}_S = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{E}$$

- La relazione tra le componenti sequenziali delle correnti e delle tensioni è

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{S}\mathbf{E}_S = \mathbf{Y}_S\mathbf{E}_S$$

- Per un carico generico ogni componente sequenziale delle correnti di linea dipende da tutte le componenti sequenziali delle tensioni stellate

Ammettenze alle sequenze

- Se il carico è simmetrico, la matrice $\mathbf{Y}_S$ risulta diagonale

$$\mathbf{Y}_S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p & \mathbf{Y}_q & \mathbf{Y}_r \\ \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_p & \mathbf{Y}_q \\ \mathbf{Y}_q & \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p + \alpha^2\mathbf{Y}_q + \alpha\mathbf{Y}_r & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_p + \alpha\mathbf{Y}_q + \alpha^2\mathbf{Y}_r & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_p + \mathbf{Y}_q + \mathbf{Y}_r \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_d & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Y}_o \end{bmatrix}$$

Ammettenze alle sequenze

- In queste condizioni, ciascuna delle componenti sequenziali delle correnti di linea dipende unicamente dalla corrispondente componente sequenziale (*componente omologa*) delle tensioni stellate

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{E}_d$$
$$\mathbf{I}_i = \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{E}_i$$
$$\mathbf{I}_o = \mathbf{Y}_o \cdot \mathbf{E}_o$$

- In queste espressioni, $\mathbf{Y}_d$, $\mathbf{Y}_i$ e $\mathbf{Y}_o$ rappresentano le **ammettenze alle sequenze**

$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{Y}_p + \alpha^2 \mathbf{Y}_q + \alpha \mathbf{Y}_r$$
$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_p + \alpha \mathbf{Y}_q + \alpha^2 \mathbf{Y}_r$$
$$\mathbf{Y}_o = \mathbf{Y}_p + \mathbf{Y}_q + \mathbf{Y}_r$$

Ammettenze alle sequenze

- Se il carico è anche reciproco le ammettenze alla sequenza diretta e alla sequenza inversa sono uguali

$$\mathbf{Y}_q = \mathbf{Y}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}_d = \mathbf{Y}_i$$

- Per un carico privo di neutro, dato che la somma degli elementi di una riga o di una colonna della matrice $\mathbf{Y}$ è uguale a zero, l'ammettenza alla sequenza omopolare è uguale a zero

$$\mathbf{Y}_p + \mathbf{Y}_q + \mathbf{Y}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}_o = 0$$

Impedenze alle sequenze

- Per un triplo bipolo simmetrico che ammette la rappresentazione in termini di matrice di impedenza

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

procedendo in modo analogo, si ricavano anche le relazioni

$$\mathbf{E}_\mathrm{d} = \mathbf{Z}_\mathrm{d} \cdot \mathbf{I}_\mathrm{d}$$
$$\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{Z}_\mathrm{i} \cdot \mathbf{I}_\mathrm{i}$$
$$\mathbf{E}_\mathrm{o} = \mathbf{Z}_\mathrm{o} \cdot \mathbf{I}_\mathrm{o}$$

dove $\mathbf{Z}_\mathrm{d}$, $\mathbf{Z}_\mathrm{i}$ e $\mathbf{Z}_\mathrm{o}$ rappresentano le **impedenze alle sequenze**

$$\mathbf{Z}_\mathrm{d} = \mathbf{Z}_\mathrm{p} + \alpha^2 \mathbf{Z}_\mathrm{q} + \alpha \mathbf{Z}_\mathrm{r}$$
$$\mathbf{Z}_\mathrm{i} = \mathbf{Z}_\mathrm{p} + \alpha \mathbf{Z}_\mathrm{q} + \alpha^2 \mathbf{Z}_\mathrm{r}$$
$$\mathbf{Z}_\mathrm{o} = \mathbf{Z}_\mathrm{p} + \mathbf{Z}_\mathrm{q} + \mathbf{Z}_\mathrm{r}$$

Impedenze alle sequenze

- Evidentemente le impedenze e le ammettenze alle sequenze sono legate dalle relazioni

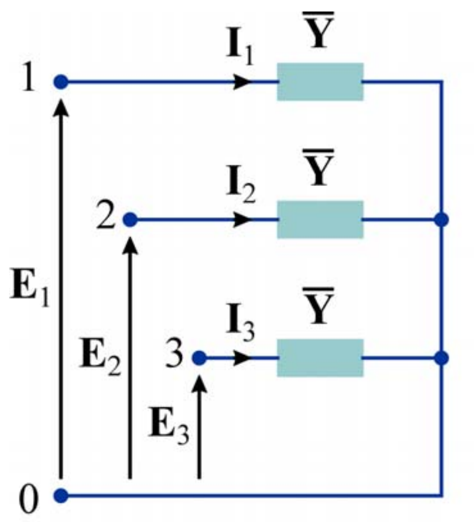
$$\mathbf{Y}_\mathrm{d} = \frac{1}{\mathbf{Z}_\mathrm{d}} \qquad \mathbf{Y}_\mathrm{i} = \frac{1}{\mathbf{Z}_\mathrm{i}} \qquad \mathbf{Y}_\mathrm{o} = \frac{1}{\mathbf{Z}_\mathrm{o}}$$

➡ Per un carico simmetrico privo di neutro, anche se la matrice di impedenza non è definita, si possono definire comunque le impedenze alla sequenza diretta e alla sequenza inversa

- In questo caso, l’impedenza alla sequenza omopolare è infinita

Esempio - Stella spuria regolare

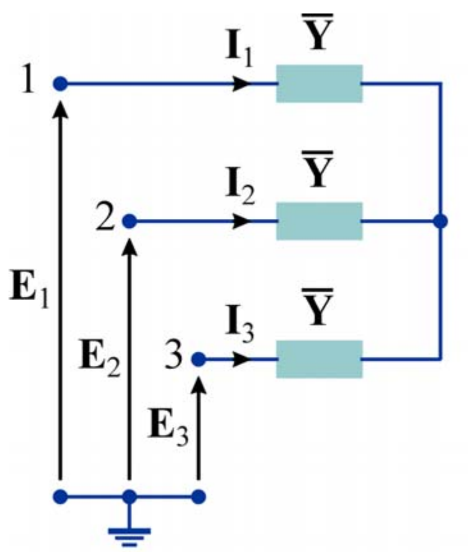
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{Y}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Y}_\mathrm{d} = \overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_\mathrm{i} = \overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_\mathrm{o} = \overline{\mathbf{Y}}$$

Esempio - Stella pura regolare

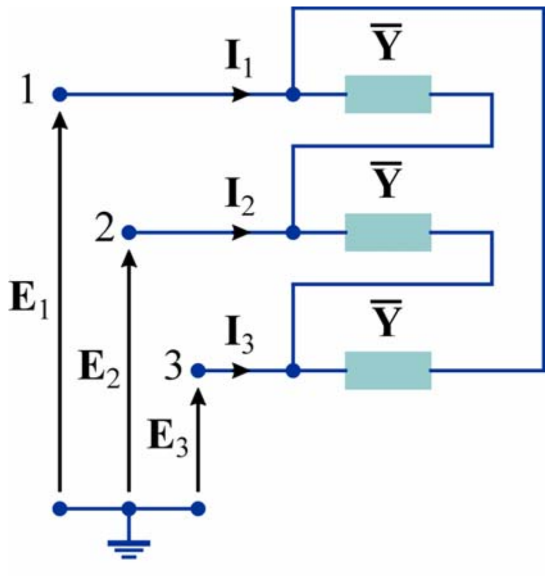
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} & -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} & -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} \\ -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} & \frac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} & -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} \\ -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} & -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} & \frac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Y}_\mathrm{d} = \tfrac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\alpha^2\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\alpha\overline{\mathbf{Y}} =$$
$$= \overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\left(1 + \alpha^2 + \alpha\right)\overline{\mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_\mathrm{i} = \tfrac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\alpha\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\alpha^2\overline{\mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_\mathrm{o} = \tfrac{2}{3}\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} - \tfrac{1}{3}\overline{\mathbf{Y}} = 0$$

Esempio – Triangolo regolare

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} 2\overline{\mathbf{Y}} & -\overline{\mathbf{Y}} & -\overline{\mathbf{Y}} \\ -\overline{\mathbf{Y}} & 2\overline{\mathbf{Y}} & -\overline{\mathbf{Y}} \\ -\overline{\mathbf{Y}} & -\overline{\mathbf{Y}} & 2\overline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Y}_d = 2\overline{\mathbf{Y}} - \alpha^2\overline{\mathbf{Y}} - \alpha\overline{\mathbf{Y}} =$$
$$= 3\overline{\mathbf{Y}} - \left(1+\alpha^2+\alpha\right)\overline{\mathbf{Y}} = 3\overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_i = 2\overline{\mathbf{Y}} - \alpha\overline{\mathbf{Y}} - \alpha^2\overline{\mathbf{Y}} = 3\overline{\mathbf{Y}}$$
$$\mathbf{Y}_o = 2\overline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{Y}} = 0$$

Sistema simmetrico ed equilibrato

- Se un carico simmetrico è alimentato mediante una terna di tensioni simmetrica (diretta o inversa), le correnti di linea costituiscono una terna equilibrata

$$\mathbf{I}_{d1} = \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{E}_{d1} \qquad \mathbf{I}_{i1} = \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{E}_{i1}$$
$$\mathbf{I}_{d2} = \mathbf{Y}_d \cdot \alpha^2\mathbf{E}_{d1} = \alpha^2\mathbf{I}_{d1} \qquad \mathbf{I}_{i2} = \mathbf{Y}_i \cdot \alpha\mathbf{E}_{i1} = \alpha\mathbf{I}_{i1}$$
$$\mathbf{I}_{d3} = \mathbf{Y}_d \cdot \alpha\mathbf{E}_{d1} = \alpha\mathbf{I}_{d1} \qquad \mathbf{I}_{i3} = \mathbf{Y}_i \cdot \alpha^2\mathbf{E}_{i1} = \alpha^2\mathbf{I}_{i1}$$

➡ In queste condizioni il carico risulta equivalente ad una stella di impedenze di uguale valore $1/\mathbf{Y}_d$ o $1/\mathbf{Y}_i$

- Se il carico non è reciproco le stelle equivalenti per la sequenza diretta e per la sequenza inversa sono diverse

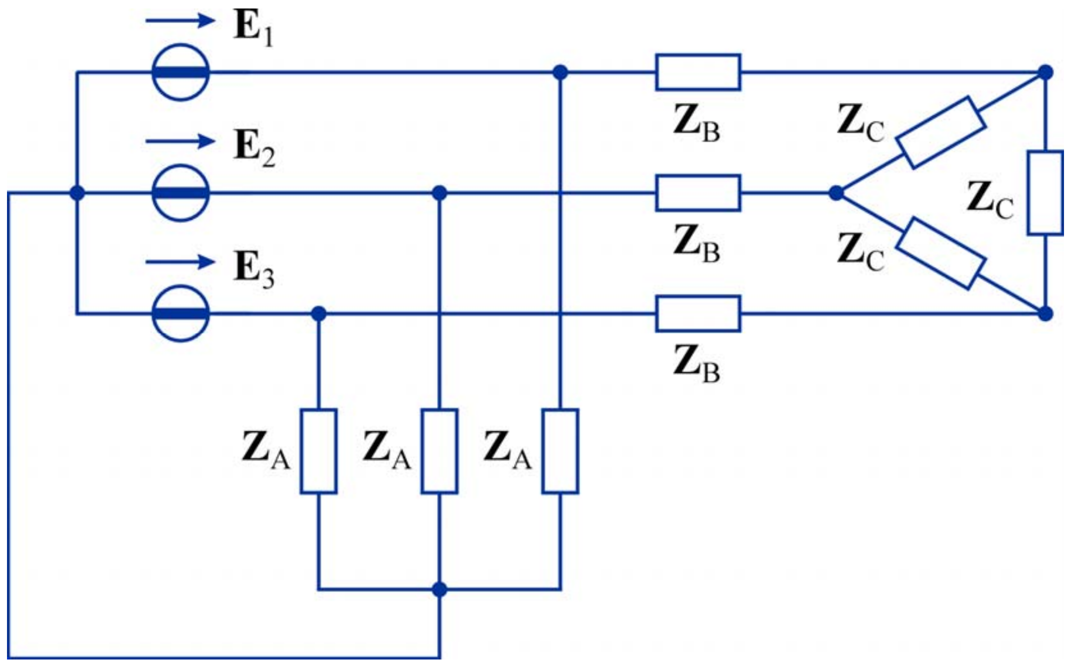
Reti monofase di sequenza

- Si considera un sistema trifase in cui tutti i carichi sono simmetrici, alimentato con terna generiche di tensioni
- Le tensioni e le correnti possono essere determinate analizzando tre reti ridotte monofase
  - **rete monofase di sequenza diretta**: formata dalle impedenze o ammettenze alla sequenza diretta e avente come ingressi le componenti di sequenza diretta delle tensioni di alimentazione
  - **rete monofase di sequenza inversa**: relativa alle sole componenti di sequenza inversa
  - **rete monofase di sequenza omopolare**: relativa alle sole componenti di sequenza omopolare

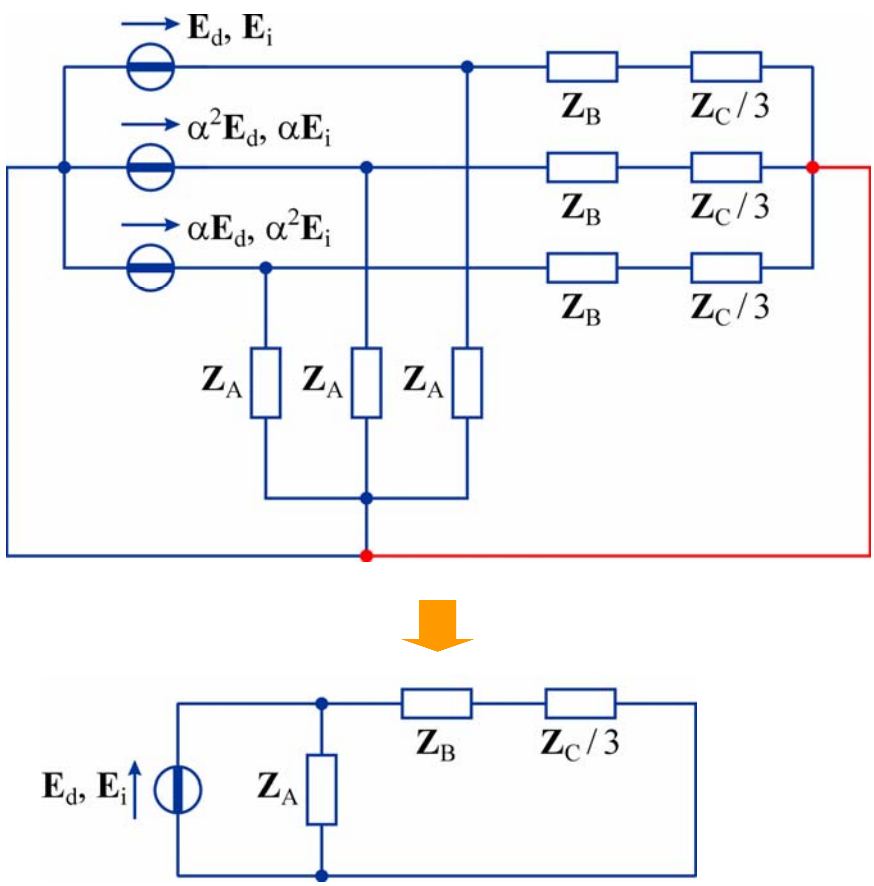
Reti monofase di sequenza

- Per costruire le reti monofase di sequenza diretta o inversa si rappresentano tutti i carichi mediante circuiti equivalenti a stella e quindi si procede come già visto per la rete ridotta monofase di un sistema simmetrico ed equilibrato
  - In questo caso tutti i centri delle stelle sono allo stesso potenziale, quindi la presenza del conduttore neutro è irrilevante
  - Se il sistema è reciproco, le reti di sequenza diretta e inversa differiscono solo per quanto riguarda l'alimentazione
- Nella rete monofase di sequenza omopolare le stelle prive di neutro, che hanno ammettenza alla sequenza omopolare uguale a zero, non vengono considerate

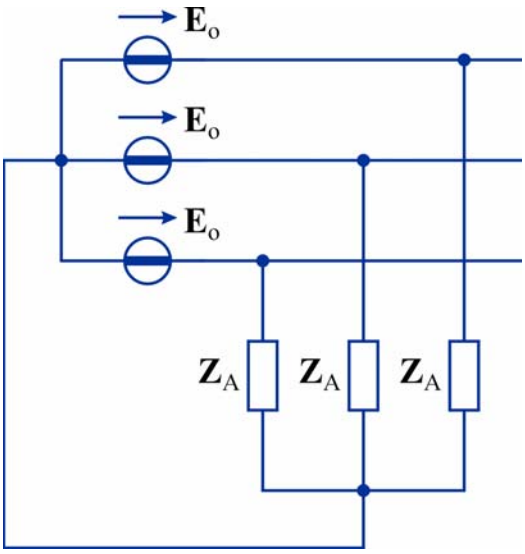
Esempio



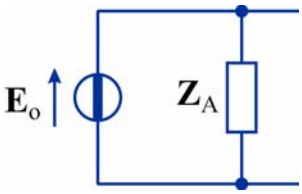
Reti monofase di sequenza diretta e inversa



Rete monofase di sequenza omopolare



$$Z_{BCo} = \infty$$

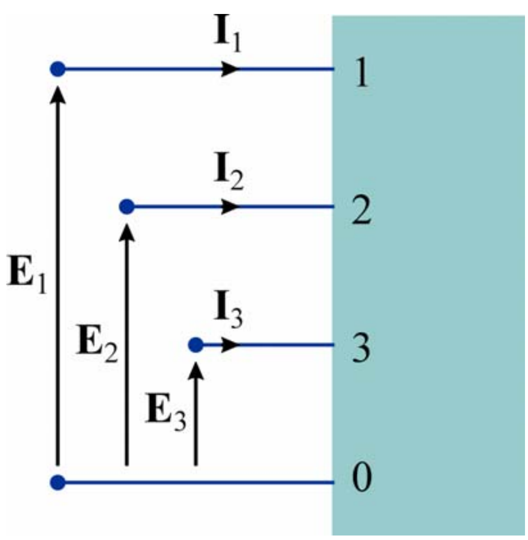


$$Z_{BCo} = \infty$$

Potenza complessa

- La potenza complessa di un carico trifase con neutro è

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* + \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^*$$



- Esprimendo le tensioni e le correnti in termini di componenti simmetriche si ricava

$$\mathbf{N} = 3\mathbf{E}_d\mathbf{I}_d^* + 3\mathbf{E}_i\mathbf{I}_i^* + 3\mathbf{E}_o\mathbf{I}_o^*$$

- Questo risultato vale anche per un carico privo di neutro
  - In questo caso la terna delle correnti di linea è pura e quindi la componente omopolare delle correnti $\mathbf{I}_o$ è nulla

    $$\mathbf{N} = 3\mathbf{E}_d\mathbf{I}_d^* + 3\mathbf{E}_i\mathbf{I}_i^*$$

  - ➡ Un'eventuale componente omopolare delle tensioni stellate non ha effetto sul valore della potenza complessa (in accordo col fatto che il centro di fase può essere scelto in modo arbitrario)

Determinazione dell'espressione della potenza complessa

- Si inseriscono le espressioni delle tensioni e delle correnti (tenendo conto del fatto che $\alpha^* = \alpha^2$)

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = {} & \mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \\ & + \alpha^2\mathbf{E}_d(\alpha\mathbf{I}_d^* + \alpha^2\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \alpha\mathbf{E}_i(\alpha\mathbf{I}_d^* + \alpha^2\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\alpha\mathbf{I}_d^* + \alpha^2\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \\ & + \alpha\mathbf{E}_d(\alpha^2\mathbf{I}_d^* + \alpha\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \alpha^2\mathbf{E}_i(\alpha^2\mathbf{I}_d^* + \alpha\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\alpha^2\mathbf{I}_d^* + \alpha\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*)\end{aligned}$$

- Si combinano gli operatori di rotazione

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = {} & \mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \\ & + \mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d^* + \alpha\mathbf{I}_i^* + \alpha^2\mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_i(\alpha^2\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \alpha\mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\alpha\mathbf{I}_d^* + \alpha^2\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*) + \\ & + \mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d^* + \alpha^2\mathbf{I}_i^* + \alpha\mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_i(\alpha\mathbf{I}_d^* + \mathbf{I}_i^* + \alpha^2\mathbf{I}_o^*) + \mathbf{E}_o(\alpha^2\mathbf{I}_d^* + \alpha\mathbf{I}_i^* + \mathbf{I}_o^*)\end{aligned}$$

- Quindi (dato che $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$) si ottiene

$$\mathbf{N} = 3\mathbf{E}_d\mathbf{I}_d^* + 3\mathbf{E}_i\mathbf{I}_i^* + 3\mathbf{E}_o\mathbf{I}_o^*$$

Potenza attiva e reattiva

- La potenza attiva e la potenza reattiva possono essere espresse nella forma

$$Q = 3E_d I_d \,\mathrm{sen}\,\varphi_d + 3E_i I_i \,\mathrm{sen}\,\varphi_i + 3E_o I_o \,\mathrm{sen}\,\varphi_o$$

$$P = 3E_d I_d \cos\varphi_d + 3E_i I_i \cos\varphi_i + 3E_o I_o \cos\varphi_o$$

dove φ_d, φ_i, φ_o rappresentano gli angoli di sfasamento tra le componenti sequenziali omologhe delle tensioni e delle correnti

Potenza fluttuante

- Si indicano le tensioni stellate e le correnti di linea con

$$e_k(t) = \sqrt{2}E_k \cos(\omega t + \varphi_{Ek}) \qquad (k = 1,2,3)$$
$$i_k(t) = \sqrt{2}I_k \cos(\omega t + \varphi_{Ik})$$

- La potenza istantanea assorbita dal carico trifase è

$$\begin{aligned} p(t) &= e_1(t)i_1(t) + e_1(t)i_1(t) + e_1(t)i_1(t) = \\ &= E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 + E_3 I_3 \cos\varphi_3 + \\ &+ E_1 I_1 \cos(2\omega t + \varphi_{E1} + \varphi_{I1}) + E_2 I_2 \cos(2\omega t + \varphi_{E2} + \varphi_{I2}) + \\ &+ E_3 I_3 \cos(2\omega t + \varphi_{E3} + \varphi_{I3}) = \\ &= P + p_F(t) \end{aligned}$$

- Il primo termine corrisponde alla potenza attiva P
- Il secondo termine rappresenta la **potenza fluttuante** $p_F(t)$ ed è dato dalla somma delle potenze fluttuanti alle tre porte del carico

Potenza fluttuante

- La potenza fluttuante è una funzione sinusoidale con pulsazione 2ω

$$\begin{aligned} p_f(t) &= E_1 I_1 \cos(2\omega t + \varphi_{E1} + \varphi_{I1}) + E_2 I_2 \cos(2\omega t + \varphi_{E2} + \varphi_{I2}) + \\ &+ E_3 I_3 \cos(2\omega t + \varphi_{E3} + \varphi_{I3}) \end{aligned}$$

- Alla potenza fluttuante si può associare un fasore $\mathbf{P}_F$ definito dalla relazione

$$\mathbf{P}_F = \mathbf{E}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2 + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3$$

- Procedendo come nel caso della potenza complessa, si può ricavare che l'espressione della potenza fluttuante in funzione delle componenti simmetriche delle tensioni e delle correnti è

$$\mathbf{P}_F = 3\mathbf{E}_d\mathbf{I}_i + 3\mathbf{E}_i\mathbf{I}_d + 3\mathbf{E}_o\mathbf{I}_o$$

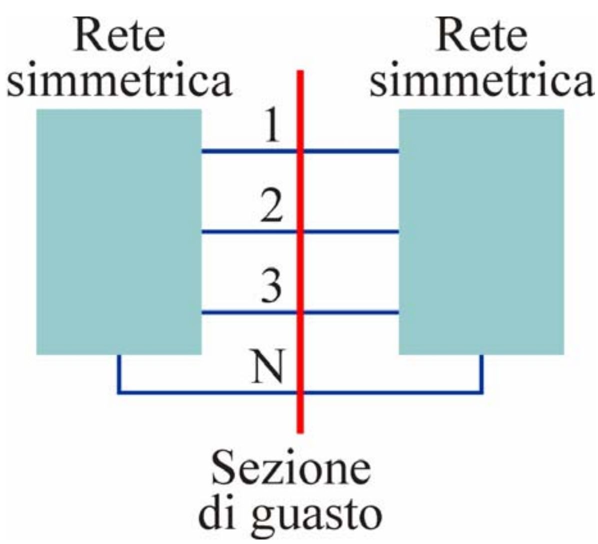
- Nel caso di un sistema privo di neutro alimentato con una terna simmetrica la potenza fluttuante si annulla se e solo se il carico dà luogo a correnti simmetriche della stessa sequenza delle tensioni di alimentazione

Determinazione dell'espressione della potenza fluttuante

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_f &= \mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_o(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\\
&+\alpha^2\mathbf{E}_d(\alpha^2\mathbf{I}_d+\alpha\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\alpha\mathbf{E}_i(\alpha^2\mathbf{I}_d+\alpha\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_o(\alpha^2\mathbf{I}_d+\alpha\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\\
&+\alpha\mathbf{E}_d(\alpha\mathbf{I}_d+\alpha^2\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\alpha^2\mathbf{E}_i(\alpha\mathbf{I}_d+\alpha^2\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_o(\alpha\mathbf{I}_d+\alpha^2\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)=\\
&=\mathbf{E}_d(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)\quad+\mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)\quad+\mathbf{E}_o(\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\\
&+\mathbf{E}_d(\alpha\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\alpha^2\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d+\alpha^2\mathbf{I}_i+\alpha\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_o(\alpha^2\mathbf{I}_d+\alpha\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)+\\
&+\mathbf{E}_d(\alpha^2\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_i+\alpha\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_i(\mathbf{I}_d+\alpha\mathbf{I}_i+\alpha^2\mathbf{I}_o)+\mathbf{E}_o(\alpha\mathbf{I}_d+\alpha^2\mathbf{I}_i+\mathbf{I}_o)=\\
&=3\mathbf{E}_d\mathbf{I}_i+3\mathbf{E}_i\mathbf{I}_d+3\mathbf{E}_o\mathbf{I}_o
\end{aligned}
$$

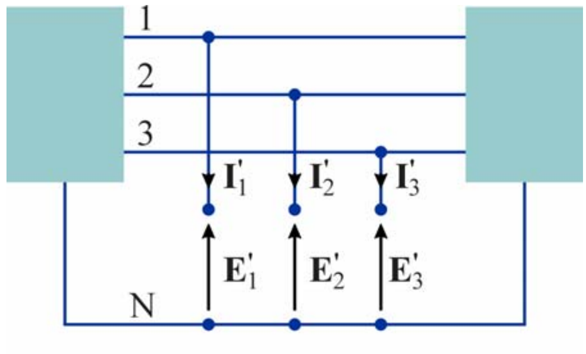
Calcolo delle tensioni e correnti di guasto

- Si considera una rete trifase simmetrica, in una sezione della quale si verifica un "guasto" (ad esempio un cortocircuito tra due o più conduttori)
- In genere il guasto rende la rete dissimmetrica, quindi non si può applicare direttamente il metodo delle componenti di sequenza
- E' possibile, però, rappresentare la condizione di guasto imponendo opportune tensioni e correnti alle rete in corrispondenza della sezione di guasto

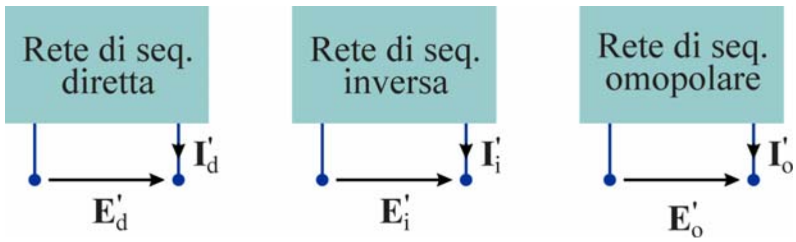


- In questo modo, dalla sezione di guasto la rete può essere vista come un triplo bipolo simmetrico a cui, per effetto del guasto, sono applicati sistemi dissimmetrici di tensioni o correnti

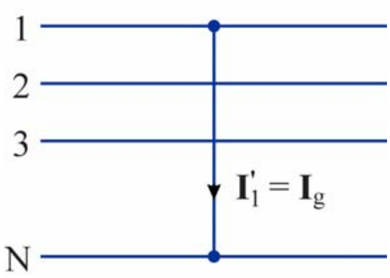
Calcolo delle tensioni e correnti di guasto



- Il triplo bipolo può essere studiato con il metodo delle reti monofase di sequenza
- Per ciascuna componente si può determinare un bipolo equivalente di Thévenin
- In assenza di guasto il triplo bipolo, e quindi le reti monofase sono a vuoto (e le correnti alle porte sono nulle)
- I guasti impongono vincoli alle tensioni e correnti alle porte che possono essere rappresentati mediante opportuni collegamenti fra le tre reti monofase



Cortocircuito tra fase e neutro

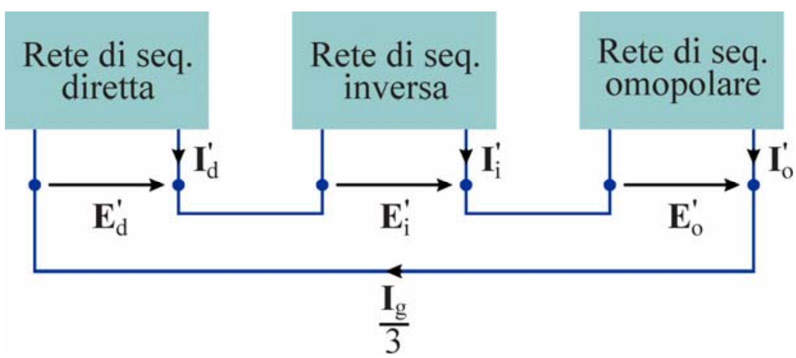


$$\mathbf{E}_1' = 0$$
$$\mathbf{I}_1' = \mathbf{I}_g$$
$$\mathbf{I}_2' = \mathbf{I}_3' = 0$$

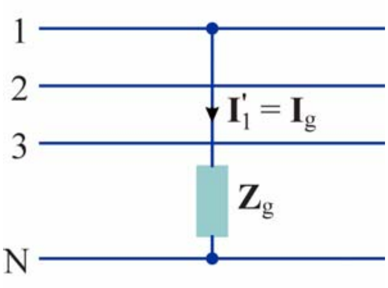
$$\mathbf{E}_d' + \mathbf{E}_i' + \mathbf{E}_o' = \mathbf{E}_1' = 0$$

$$\mathbf{I}_d' = \mathbf{I}_i' = \mathbf{I}_o' = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1' = \frac{1}{3}\mathbf{I}_g$$

- Le tre reti di sequenza sono in serie e collegate a un cortocircuito
- La corrente comune è pari a un terzo della corrente di guasto $\mathbf{I}_g$



Impedenza “di guasto” Z_g tra fase e neutro

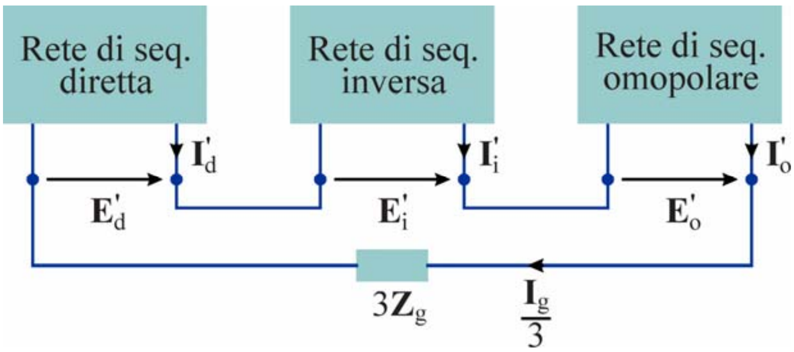


$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{Z}_g \mathbf{I}_g$$
$$\mathbf{I}'_1 = \mathbf{I}_g$$
$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}'_3 = 0$$

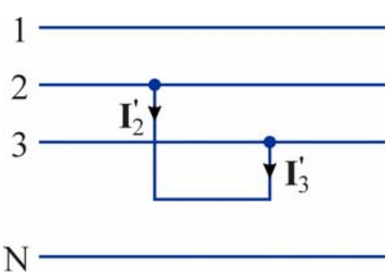
$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}'_d + \mathbf{E}'_i + \mathbf{E}'_o = \mathbf{E}'_1 = \mathbf{Z}_g \mathbf{I}_g$$
$$\mathbf{I}'_d = \mathbf{I}'_i = \mathbf{I}'_o = \frac{1}{3}\mathbf{I}'_1 = \frac{1}{3}\mathbf{I}_g$$

- Le tre reti di sequenza sono in serie e collegate a un’impedenza $3\mathbf{Z}_g$
- La corrente comune è pari a un terzo della corrente di guasto



Cortocircuito fra due fasi

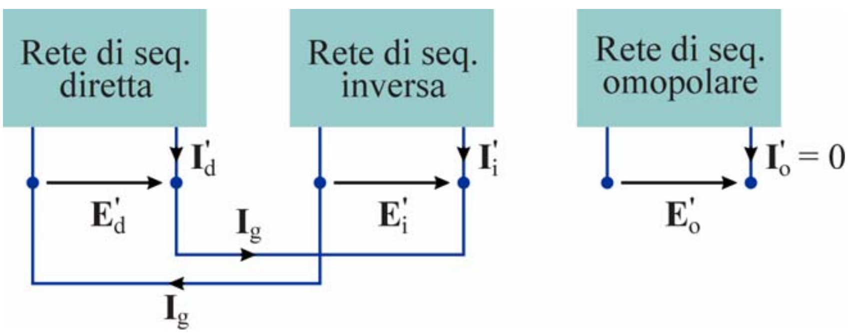


$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}'_3$$
$$\mathbf{I}'_1 = 0$$
$$\mathbf{I}'_2 = -\mathbf{I}'_3$$

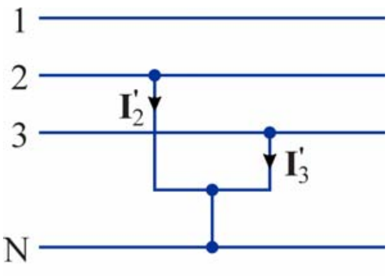
$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}'_d = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{E}'_1 + \alpha\mathbf{E}'_2 + \alpha^2\mathbf{E}'_2\right)$$
$$\mathbf{E}'_i = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{E}'_1 + \alpha^2\mathbf{E}'_2 + \alpha\mathbf{E}'_2\right) = \mathbf{E}'_d$$
$$\mathbf{I}'_d = \tfrac{1}{3}\left(\alpha\mathbf{I}'_2 - \alpha^2\mathbf{I}'_2\right)$$
$$\mathbf{I}'_i = \tfrac{1}{3}\left(\alpha^2\mathbf{I}'_2 - \alpha\mathbf{I}'_2\right) = -\mathbf{I}'_d$$
$$\mathbf{I}'_o = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{I}'_2 - \mathbf{I}'_2\right) = 0$$

- Le reti di sequenza diretta e inversa sono in parallelo
- La rete di sequenza omopolare è a vuoto



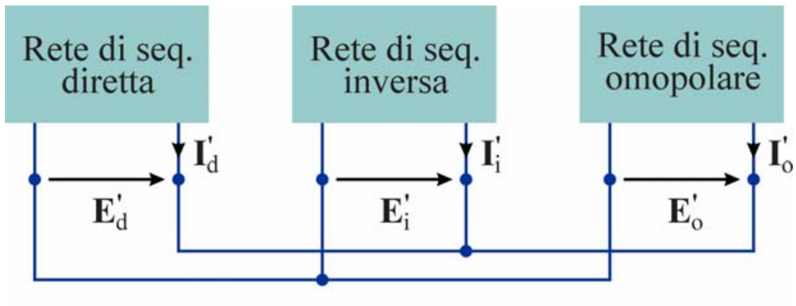
Cortocircuito tra due fasi e neutro



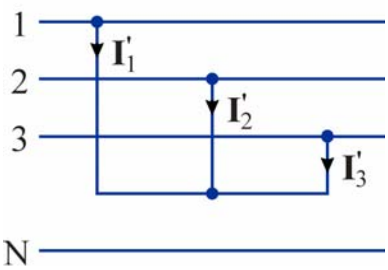
$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}'_3 = 0 \qquad \mathbf{I}'_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}'_d = \mathbf{E}'_i = \mathbf{E}'_o = \tfrac{1}{3}\mathbf{E}'_1 \qquad \mathbf{I}'_d + \mathbf{I}'_i + \mathbf{I}'_o = \mathbf{I}'_1 = 0$$

- Le tre reti di sequenza sono in parallelo



Cortocircuito fra tre fasi



$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}'_3 \qquad \mathbf{I}'_1 + \mathbf{I}'_2 + \mathbf{I}'_3 = 0$$

$$\Rightarrow$$

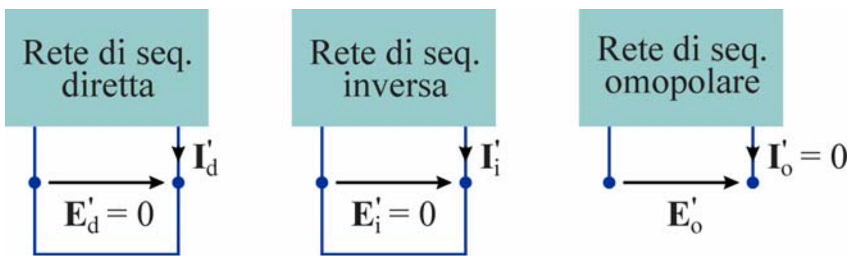
$$\mathbf{E}'_d = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{E}'_1 + \alpha\mathbf{E}'_1 + \alpha^2\mathbf{E}'_1\right) = 0$$

$$\mathbf{E}'_i = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{E}'_1 + \alpha^2\mathbf{E}'_1 + \alpha\mathbf{E}'_1\right) = 0$$

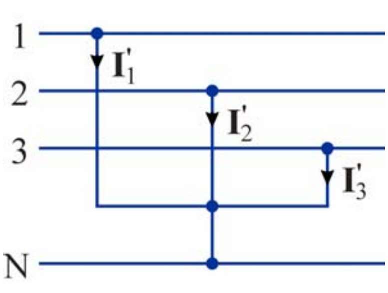
$$\mathbf{E}'_o = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_1\right) = \mathbf{E}'_1$$

$$\mathbf{I}'_o = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{I}'_1 + \mathbf{I}'_2 + \mathbf{I}'_3\right) = 0$$

- Le reti di sequenza diretta e inversa sono in cortocircuito
- La rete di sequenza omopolare è a vuoto

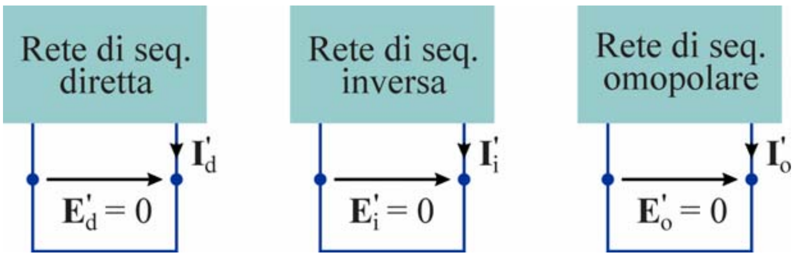


Cortocircuito fra tre fasi e neutro



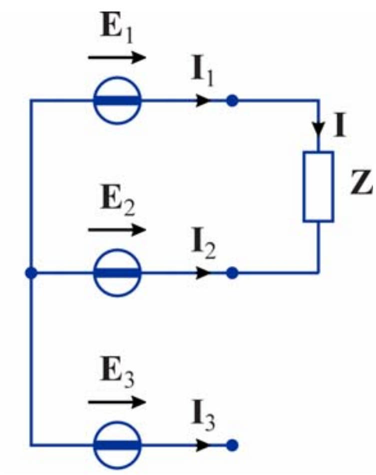
$$\mathbf{E}_1' = \mathbf{E}_2' = \mathbf{E}_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_d' = \mathbf{E}_i' = \mathbf{E}_o' = 0$$

- Le tre reti di sequenza sono in cortocircuito



Equilibratura di un carico monofase

- Si considera una linea trifase alimentata mediante una terna simmetrica diretta a cui viene collegato un carico monofase ($\mathbf{Z} = R + jX$)



$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E}_2 = \alpha^2\mathbf{E}$$
$$\mathbf{E}_3 = \alpha\mathbf{E}$$

Correnti di linea

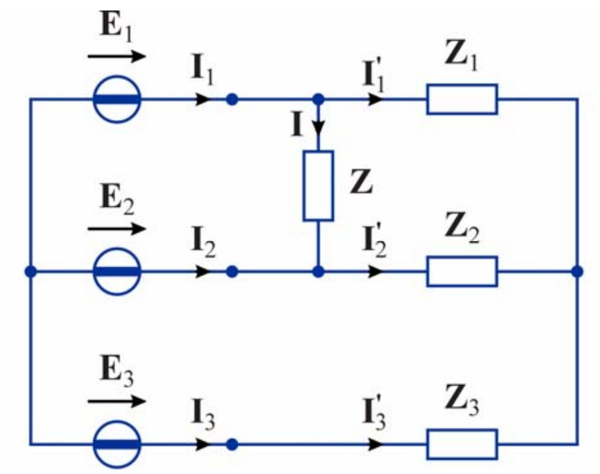
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} = \frac{(1-\alpha^2)\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$$
$$\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}_3 = 0$$

Componenti simmetriche

$$\mathbf{I}_d = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{I}_1 + \alpha\mathbf{I}_2 + \alpha^2\mathbf{I}_3\right) = \tfrac{1}{3}(1-\alpha)\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{I}_1 + \alpha^2\mathbf{I}_2 + \alpha\mathbf{I}_3\right) = \tfrac{1}{3}\left(1-\alpha^2\right)\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}_o = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3\right) = 0$$

Equilibratura di un carico monofase

- Si può equilibrare il carico collegando alla linea una stella di impedenze ($\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$) cha assorbano correnti uguali e opposte alle componenti della terna inversa dovuta all'impedenza $\mathbf{Z}$



$$\mathbf{I}'_1 = -\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{3}\left(\alpha^2 - 1\right)\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}'_2 = -\alpha\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{3}\left(1 - \alpha\right)\mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}'_3 = -\alpha^2\mathbf{I}_i = \tfrac{1}{3}\left(\alpha - \alpha^2\right)\mathbf{I}$$

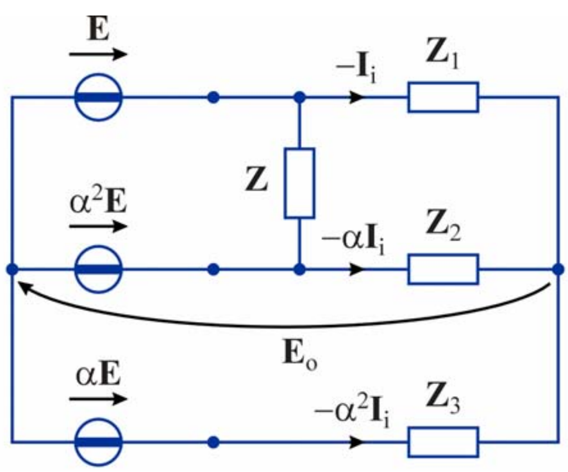
$$\mathbf{I}_1 = \tfrac{1}{3}\left(1 - \alpha\right)\mathbf{I} = \mathbf{I}_d$$
$$\mathbf{I}_2 = \tfrac{1}{3}\left(\alpha^2 - 1\right)\mathbf{I} = \alpha^2\mathbf{I}_d$$
$$\mathbf{I}_3 = \tfrac{1}{3}\left(\alpha - \alpha^2\right)\mathbf{I} = \alpha\mathbf{I}_d$$

Equilibratura di un carico monofase

- Le tensioni sulle impedenze della stella (irregolare) sono date dalla somma delle tensioni dei generatori (componente diretta) e di una tensione che rappresenta lo spostamento del centro di fase (componente omopolare $\mathbf{E}_o$)
- Quindi devono valere le condizioni

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_o = -\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_i$$
$$\alpha^2\mathbf{E} + \mathbf{E}_o = -\mathbf{Z}_2\alpha\mathbf{I}_i$$
$$\alpha\mathbf{E} + \mathbf{E}_o = -\mathbf{Z}_3\alpha^2\mathbf{I}_i$$

(sistema di 3 equazioni complesse in 4 incognite: $\mathbf{E}_o$, $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$)



Equilibratura di un carico monofase

- Si moltiplica la seconda equazione per α^2 e la terza per α (in modo da eliminare α a secondo membro), quindi si sommano membro a membro le tre equazioni

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{o}} = -\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_{\mathrm{i}}$$
$$\alpha\mathbf{E} + \alpha^2\mathbf{E}_{\mathrm{o}} = -\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_{\mathrm{i}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = 0$$
$$\alpha^2\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E}_{\mathrm{o}} = -\mathbf{Z}_3\mathbf{I}_{\mathrm{i}}$$

- Escludendo l'impiego di componenti attivi, per soddisfare questa condizione si devono utilizzare tre bipoli puramente reattivi

$$\mathbf{Z}_1 = jX_1$$
$$\mathbf{Z}_2 = jX_2$$
$$\mathbf{Z}_3 = jX_3 = -j(X_1 + X_2)$$

(Imponendo valore nullo alla parte reale di $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ si eliminano due incognite reali, quindi si ha un'unica soluzione)

Equilibratura di un carico monofase

- Dalla prima equazione si ricava l'espressione di $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{o}} = -\mathbf{E} - jX_1\mathbf{I}_{\mathrm{i}}$$

- Si sostituisce nella seconda

$$\mathbf{E}(1-\alpha^2) = (jX_1 - \alpha \cdot jX_2)\tfrac{1}{3}(1-\alpha^2)\mathbf{I} = \tfrac{1}{3}(jX_1 - \alpha \cdot jX_2)(1-\alpha^2)^2 \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$$

$$jX_1 - \alpha \cdot jX_2 = -\frac{3\mathbf{Z}}{(1-\alpha^2)}$$

$$jX_1 - \left(-\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot jX_2 = -\frac{3(R+jX)}{\tfrac{3}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\tfrac{1}{2}\left[\left(3R + \sqrt{3}X\right) + j\left(3X - \sqrt{3}R\right)\right]$$

- ➡ Quindi si ottiene

$$X_1 = \sqrt{3}R - X$$
$$X_2 = -\sqrt{3}R - X$$
$$X_3 = 2X$$

(La terza equazione è stata sostituita dalla relazione $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = 0$, che è stata ottenuta come combinazione delle tre equazioni)

Equilibratura di un carico monofase - Nota

- Il tripolo utilizzato per equilibrare il carico è alimentato con una terna simmetrica diretta ed ha correnti che costituiscono una terna simmetrica inversa

➡ Il tripolo equilibrante non assorbe né potenza attiva né potenza reattiva, ma solo una potenza fluttuante opposta a quella assorbita dal carico monofase

$$\mathbf{N}' = 3\mathbf{E}_\mathrm{d}\mathbf{I}_\mathrm{d}'^* + 3\mathbf{E}_\mathrm{i}\mathbf{I}_\mathrm{i}'^* + 3\mathbf{E}_\mathrm{o}\mathbf{I}_\mathrm{o}'^* = 3\mathbf{E}\cdot 0 - 0\cdot \mathbf{I}_i^* + 0 = 0$$

$$\mathbf{P}_\mathrm{F}' = 3\mathbf{E}_\mathrm{d}\mathbf{I}_\mathrm{i}' + 3\mathbf{E}_\mathrm{i}\mathbf{I}_\mathrm{d}' + 3\mathbf{E}_\mathrm{o}\mathbf{I}_\mathrm{o}' = -3\mathbf{E}\mathbf{I}_\mathrm{i} \qquad (\mathbf{E}_\mathrm{d} = \mathbf{E},\ \mathbf{I}_\mathrm{i}' = -\mathbf{I}_\mathrm{i})$$

➡ Il carico risultante assorbe la stessa potenza attiva e la stessa potenza reattiva del carico monofase, mentre la potenza fluttuante si annulla