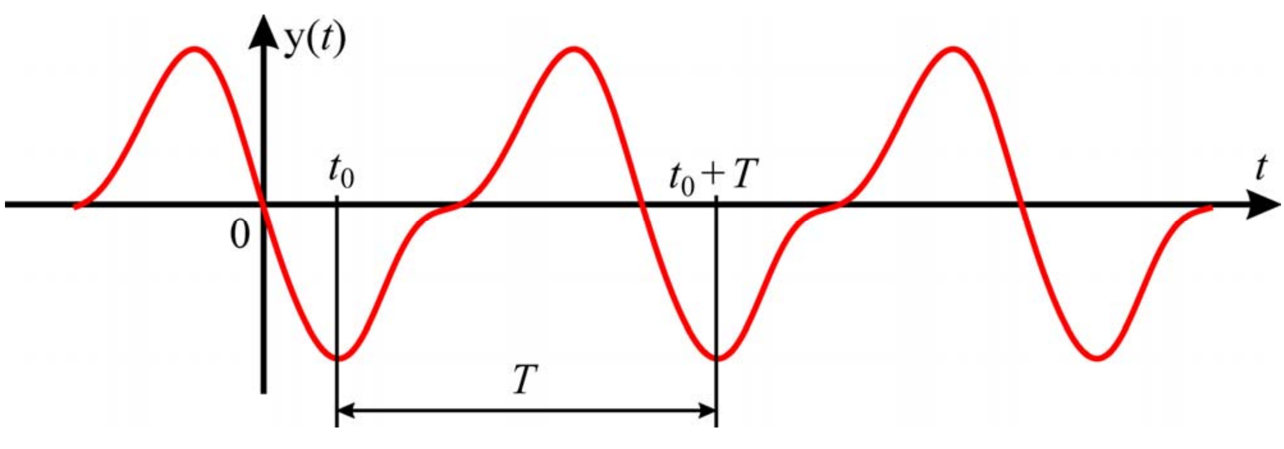
Regimi periodici non sinusoidali

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 20-10-2013)

Funzioni periodiche

- Si dice che una funzione $\mathrm{y}(t)$ è periodica se esiste un $T > 0$ tale che per ogni t e per ogni k intero
  $\mathrm{y}(t + kT) = \mathrm{y}(t)$
- Il più piccolo valore di T per cui è soddisfatta la relazione precedente è detto **periodo** di $\mathrm{y}(t)$



Valore medio e valore efficace

- **Valore medio** (nel periodo) di una funzione periodica $\mathrm{y}(t)$

$$Y_{\mathrm{med}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{y}(t)dt$$

- Se $Y_{\mathrm{med}} = 0$, si dice che $\mathrm{y}(t)$ è **alternata**
- Per le grandezze alternate si considera anche il valore medio del modulo

$$Y'_{\mathrm{med}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |\mathrm{y}(t)|dt$$

- Il **valore efficace** o **valore r.m.s** (*root mean square*) di una grandezza periodica $\mathrm{y}(t)$ è dato dalla radice quadrata del valore medio nel periodo del quadrato di $\mathrm{f(t)}$

$$Y_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{y}^2(t)dt}$$

Fattore di forma e fattore di cresta

- Si definisce **fattore di forma** di una grandezza periodica il rapporto tra il valore efficace e il valore medio

$$k_{\mathrm{f}} = \frac{Y_{\mathrm{eff}}}{Y_{\mathrm{med}}}$$

- Per le grandezze alternate il fattore di forma è definito con riferimento al valore medio del modulo

$$k_{\mathrm{f}} = \frac{Y_{\mathrm{eff}}}{Y'_{\mathrm{med}}}$$

- Si definisce **fattore di cresta** il rapporto tra il valore massimo e il valore efficace

$$k_{\mathrm{c}} = \frac{Y_{\mathrm{M}}}{Y_{\mathrm{eff}}}$$

Funzioni sinusoidali

- Si considera una funzione sinusoidale di ampiezza Y_M

  $y(t) = Y_\mathrm{M}\cos(\omega t)$
- Il valore medio è nullo
- Il valore medio del modulo è

$$Y'_\mathrm{med} = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left|Y_\mathrm{M}\cos(\omega t)\right| dt = \frac{Y_\mathrm{M}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t)\, d(\omega t) = \frac{2}{\pi} Y_\mathrm{M} \cong 0.637 Y_\mathrm{M}$$

- Il valore efficace è

$$Y_\mathrm{eff} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Y_\mathrm{M}^2 \cos^2(\omega t)\, dt} = \sqrt{\frac{Y_\mathrm{M}^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} [1+\cos(2\omega t)]\, d(\omega t)} = \frac{Y_\mathrm{M}}{\sqrt{2}} \cong 0.707 Y_\mathrm{M}$$

Funzioni sinusoidali

- Quindi per una funzione sinusoidale il fattore di forma vale

$$k_\mathrm{f} = \frac{Y_\mathrm{eff}}{Y'_\mathrm{med}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111$$

- e il fattore di cresta è

$$k_\mathrm{c} = \frac{Y_\mathrm{M}}{Y_\mathrm{eff}} = \sqrt{2} \cong 1.414$$

Serie di Fourier

- Si considera una funzione $\mathrm{y}(t)$ periodica di periodo T che soddisfa le seguenti **condizioni di Dirichlet**
  - ha un numero finito di discontinuità all'interno di un periodo
  - ha un numero finito di massimi e di minimi all'interno di un periodo
  - l'integrale sul periodo del modulo di $\mathrm{y}(t)$ è finito
- ➡ $\mathrm{y}(t)$ può essere rappresentata dalla **serie di Fourier**

$$\mathrm{y}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\mathrm{sen}(k\omega t)$$

- $\omega = 2\pi / \mathrm{T}$ è detta **pulsazione fondamentale**
- I coefficienti a_0, a_k e b_k sono

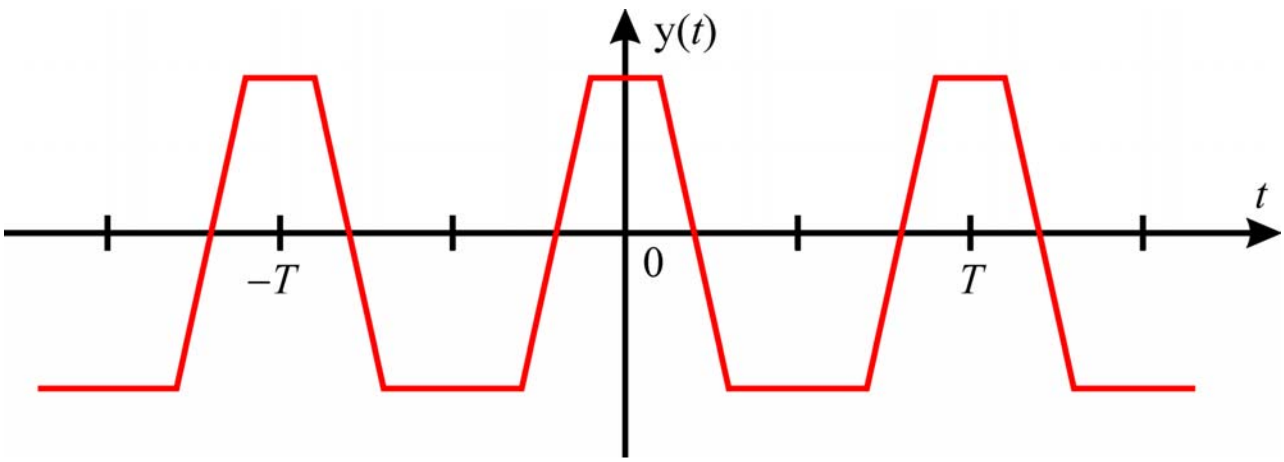
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{y}(t)dt$$ (= valore medio)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{y}(t)\cos(k\omega t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{y}(t)\,\mathrm{sen}(k\omega t)dt$$

Casi particolari

- $\mathrm{y}(t)$ è **alternata** $\Leftrightarrow a_0 = 0$
- Se $\mathrm{y}(t)$ è **pari**: $\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(-t)$
  - ➡ $b_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini coseno

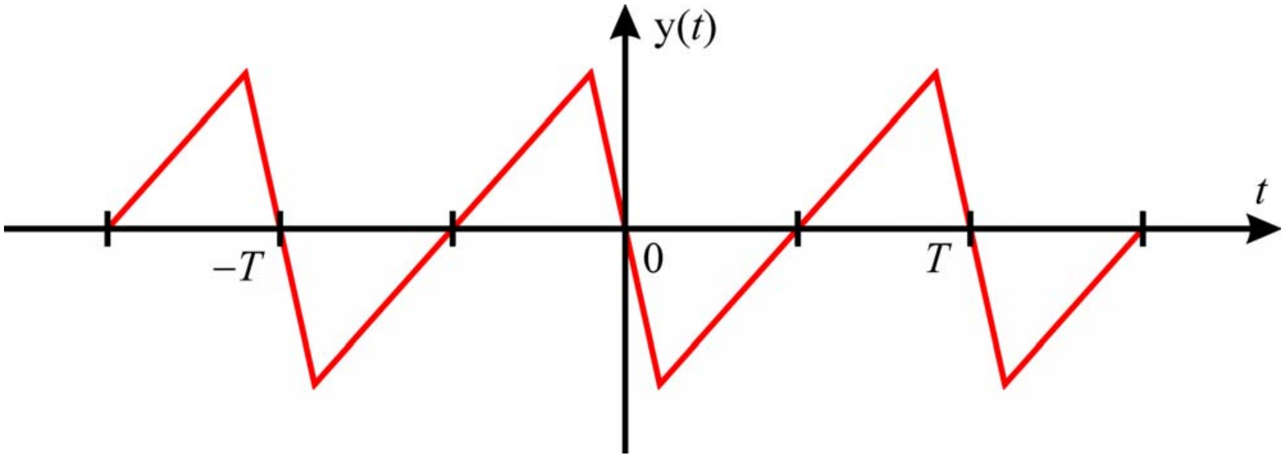
Funzione pari



Casi particolari

- Se $\mathrm{y}(t)$ è **dispari**: $\mathrm{y}(t) = -\mathrm{y}(-t)$
  - ➡ $a_0 = 0$, $a_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini seno
  - una funzione dispari è sempre alternata

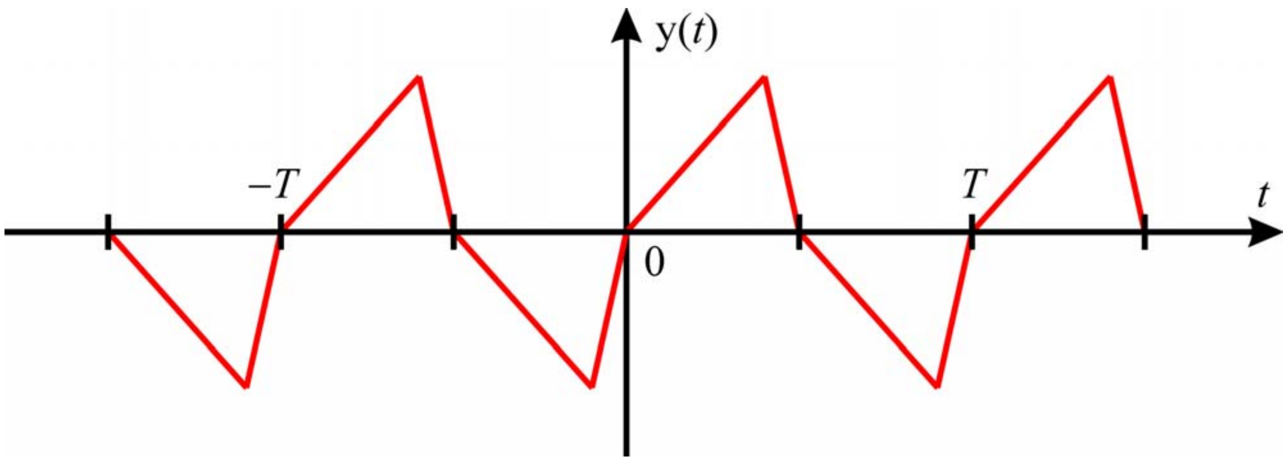
Funzione dispari



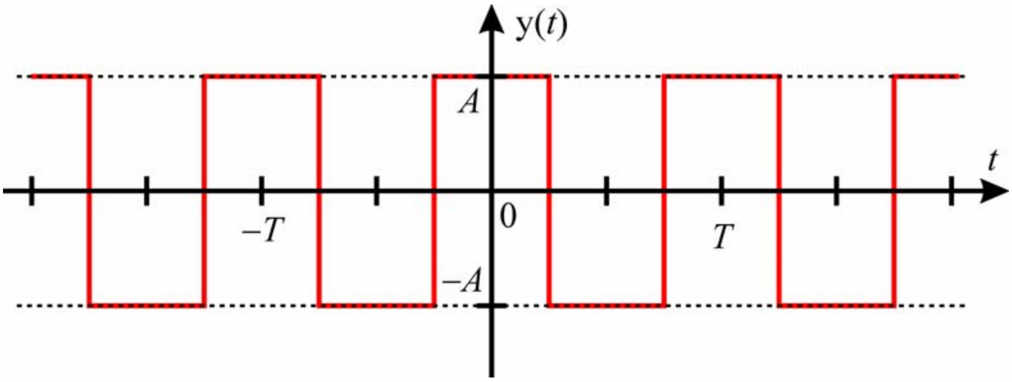
Casi particolari

- Se $\mathrm{y}(t)$ ha **simmetria di semionda**: $\mathrm{y}(t) = -\mathrm{y}(t+T/2)$
  - ➡ $a_0 = 0$, $a_k = b_k = 0$ per k pari
  - la serie di Fourier contiene solo i termini di ordine dispari
  - una funzione con simmetria di semionda è sempre alternata

Funzione con simmetria di semionda



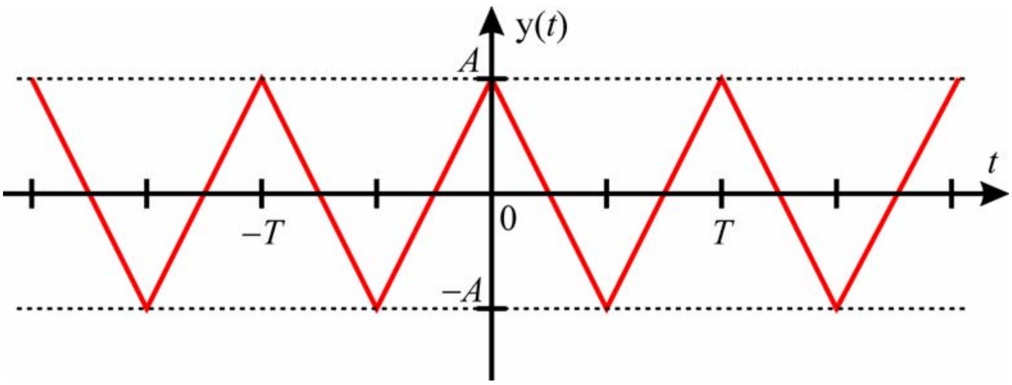
Esempio: onda rettangolare



$$\mathrm{y}(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos[(2k-1)\omega t]}{2k-1}$$

$$Y'_{\text{med}}=A \qquad Y_{\text{eff}}=A \qquad k_{\text{f}}=1 \qquad k_{\text{c}}=1$$

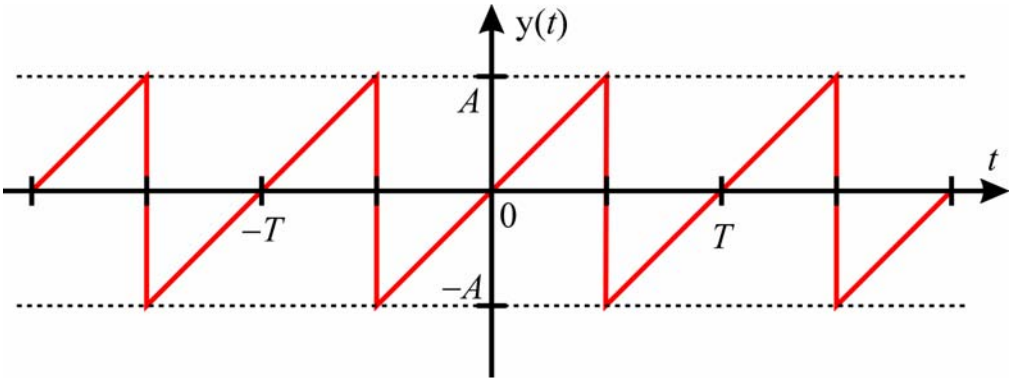
Esempio: onda triangolare



$$\mathrm{y}(t)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[(2k-1)\omega t]}{(2k-1)^2}$$

$$Y'_{\text{med}}=\frac{A}{2} \qquad Y_{\text{eff}}=\frac{A}{\sqrt{3}} \qquad k_{\text{f}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cong 1.155 \qquad k_{\text{c}}=\sqrt{3}\cong 1.732$$

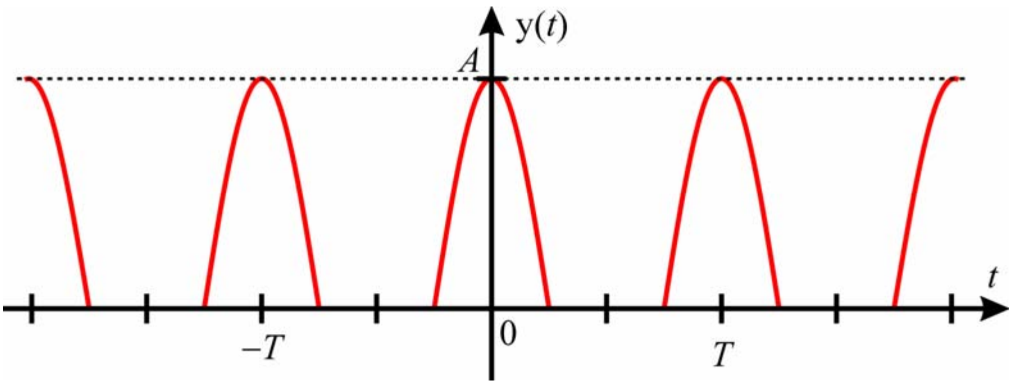
Esempio: onda a dente di sega



$$y(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{sen}(k\omega t)$$

$$Y'_{\text{med}} = \frac{A}{2} \qquad Y_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \qquad k_{\text{f}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.155 \qquad k_{\text{c}} = \sqrt{3} \cong 1.732$$

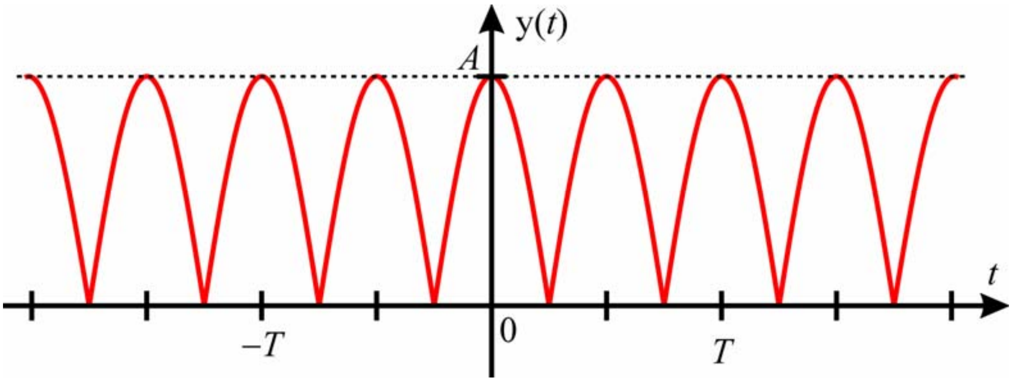
Esempio: sinusoide raddrizzata a semionda



$$y(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\cos(\omega t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(2k\omega t)}{4k^2-1}$$

$$Y_{\text{med}} = \frac{A}{\pi} \qquad Y_{\text{eff}} = \frac{A}{2} \qquad k_{\text{f}} = \frac{\pi}{2} \cong 1.571 \qquad k_{\text{c}} = 2$$

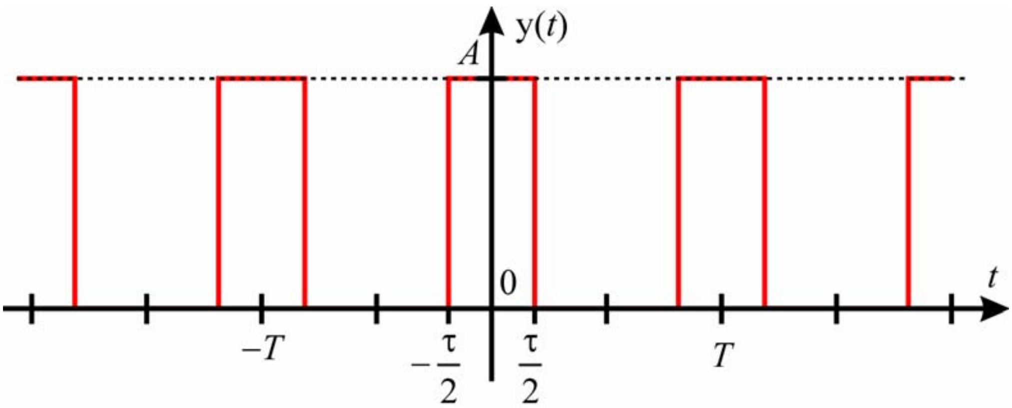
Esempio: sinusoide raddrizzata a onda intera



$$y(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos(k\omega t)}{4k^2 - 1}$$

$$Y_{\text{med}} = \frac{2A}{\pi} \qquad Y_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \qquad k_{\text{f}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111 \qquad k_{\text{c}} = \sqrt{2} \cong 1.141$$

Esempio: treno di impulsi rettangolari



$$y(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \cos(k\omega t)$$

$$Y_{\text{med}} = \frac{A\tau}{T} \qquad Y_{\text{eff}} = A\sqrt{\frac{\tau}{T}} \qquad k_{\text{f}} = \sqrt{\frac{T}{\tau}} \qquad k_{\text{c}} = \sqrt{\frac{T}{\tau}}$$

Seconda forma della serie di Fourier

- La serie di Fourier può essere espressa anche nella forma

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

dove

$$A_0 = a_0 \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \mathrm{tg}(\alpha_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

- La costante A_0 è detta **componente continua** di $y(t)$
- La funzione sinusoidale $A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$ è detta **componente fondamentale** o **prima armonica** di $y(t)$
- La funzione $A_k\cos(k\omega t + \alpha_k)$ è detta ***k*-esima armonica** di $y(t)$
- Gli andamenti di A_k e α_k in funzione di k definiscono, rispettivamente lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase** di $y(t)$

Valore efficace della serie di Fourier

- Per determinare il valore efficace occorre, in primo luogo, valutare il quadrato della serie

$$y^2(t) = \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) \right]^2 =$$

$$= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \cos^2(k\omega t + \alpha_k) + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{\infty} A_k A_h \cos(k\omega t + \alpha_k)\cos(h\omega t + \alpha_h)$$

- Il secondo addendo della somma precedente può essere posto nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos(2k\omega t + 2\alpha_k)$$

Valore efficace della serie di Fourier

- Nell'espressione precedente tutti i termini oscillanti hanno valore medio nullo
- Il valore efficace è determinato dai termini costanti presenti nei primi due addendi, quindi si ha

$$Y_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^2}{2}\right]dt} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k\,\text{eff}}^2}$$

dove

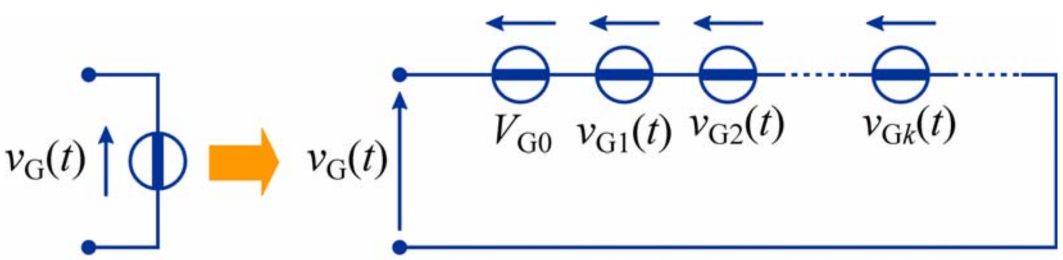
$$A_{k\,\text{eff}} = \frac{A_k}{\sqrt{2}}$$

- *Il valore efficace di una grandezza periodica è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle sue componenti armoniche* (**teorema di Parseval**)

Generatori periodici

- Un generatore di tensione $v_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in serie
  - un generatore di tensione costante V_{G0} pari al valore medio di $v_G(t)$
  - infiniti generatori di tensione sinusoidale, $v_{Gk}(t)$ $(k = 1,\ldots,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

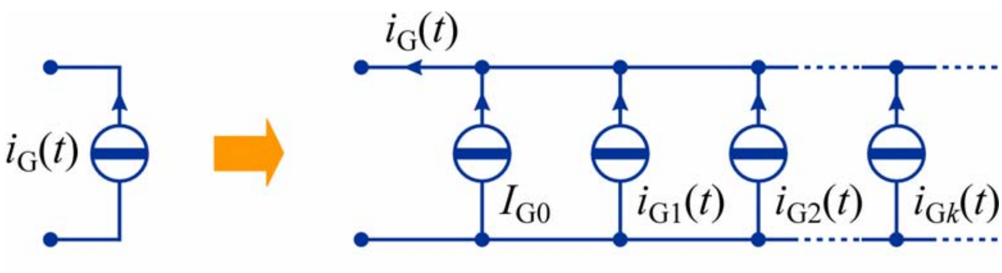
$$v_G(t) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{Gk}\cos(k\omega t + \alpha_k) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{Gk}(t)$$



Generatori periodici

- Un generatore di corrente $i_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in parallelo
  - un generatore di tensione costante I_{G0} pari al valore medio di $i_G(t)$
  - infiniti generatori di corrente sinusoidale, $i_{Gk}(t)$ $(k = 1,\ldots,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

$$i_G(t) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} I_{Gk} \cos(k\omega t + \beta_k) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} i_{Gk}(t)$$



Circuiti lineari in regime periodico

- Si considera un circuito lineare alimentato da generatori periodici con periodo T
- Se il circuito è asintoticamente stabile, in condizioni di regime tutte le tensioni e le correnti sono periodiche con periodo T (➡ **regime periodico**)
- Se si rappresentano nel modo appena visto i generatori, è possibile determinare la risposta a regime mediante il principio di sovrapposizione
  - ➡ Si valutano separatamente i contributi dovuti ai generatori che hanno la stessa pulsazione
- Normalmente è possibile approssimare le funzioni periodiche utilizzando un numero limitato N di componenti armoniche
  - ➡ La determinazione della riposta periodica richiede
    - un'analisi in continua
    - N analisi di risposte in regime sinusoidale

Circuiti lineari in regime periodico

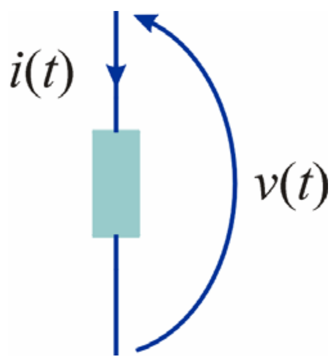
- Per un bipolo lineare in regime periodico la tensione e la corrente non sono deformate l'una rispetto all'altra se le funzioni $v(t)$ e $i(t)$ differiscono per un fattore di proporzionalità e una traslazione nel tempo
  $$v(t) = Ai(t - t_0)$$
- Questo richiede che l'impedenza del bipolo soddisfi le condizioni
  $$|\mathbf{Z}(k\omega)| = \frac{V_k}{I_k} = A \qquad \arg[\mathbf{Z}(k\omega)] = \varphi_{Vk} - \varphi_{Ik} = -k\omega t_0 \qquad \forall k$$
- Analogamente, in un circuito con un solo generatore periodico, le forme d'onda delle risposte non sono deformate rispetto alla forma d'onda del generatore se le corrispondenti funzioni di trasferimento soddisfano proprietà analoghe
  $$|\mathbf{H}(k\omega)| = A \qquad \arg[\mathbf{H}(k\omega)] = -k\omega t_0 \qquad \forall k$$
- Queste condizioni sono sempre soddisfatte nei circuiti puramente resistivi, mentre in generale, le risposte dei circuiti dinamici sono deformate

Componenti non lineari

- Un componente non lineare alimentato con tensioni o correnti sinusoidali genera armoniche

Esempio: conduttanza non lineare

- Si considera un bipolo avente equazione caratteristica del tipo
  $$i(t) = \mathrm{f}[v(t)]$$
  dove f è una generica funzione non lineare
- Si rappresenta f mediante uno sviluppo in serie di Taylor
  $$\mathrm{f}(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + c_4 v^4 + \ldots$$



Componenti non lineari

- Si assume che $v(t)$ sia sinusoidale
  $v(t) = V_M \cos(\omega t)$
- Si sostituisce $v(t)$ nell'espressione di f

$$i(t) = c_0 + c_1 V_M \cos(\omega t) + c_2 V_M^2 \cos^2(\omega t) + c_3 V_M^3 \cos^3(\omega t) + c_4 V_M^4 \cos^4(\omega t) + \ldots =$$

$$= c_0 + c_1 V_M \cos(\omega t) + \frac{c_2 V_M^2}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + \frac{c_3 V_M^3}{4}\left[3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right] +$$

$$+ \frac{c_4 V_M^4}{8}\left[3 + 4\cos(2\omega t) + \cos(4\omega t)\right] + \ldots$$

- Le potenze di v di grado n dispari danno origine ad armoniche dispari di ordine $\leq n$
- Le potenze di v di grado n pari danno origine ad armoniche pari di ordine $\leq n$ e a termini costanti
- ➨ La corrente è periodica con pulsazione fondamentale ω

Circuiti non lineari in regime periodico

- In condizioni di regime, in un circuito non lineare alimentato da generatori sinusoidali isofrequenziali, o più in generale periodici con la stessa pulsazione fondamentale ω, tutte le tensioni e le correnti sono periodiche con la stessa pulsazione fondamentale
- Mentre le risposte di un circuito lineare possono contenere solo componenti armoniche presenti nella tensione o corrente di almeno uno dei generatori, le risposte dei circuiti non lineari possono contenere armoniche non presenti negli ingressi
- In genere, se gli ingressi sono sinusoidali, le risposte sono periodiche, e quindi distorte
- A differenza dei circuiti lineari, i circuiti non lineari possono introdurre distorsione anche se sono puramente resistivi

Distorsione armonica totale

- L'entità della distorsione della forma d'onda di una tensione o di una corrente rispetto all'andamento sinusoidale è rappresentata mediante un parametro detto **distorsione armonica totale** o **THD** (*total harmonic distortion*)
- Per una funzione periodica

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

la THD è definita come rapporto tra la radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle armoniche superiori e il valore efficace della componente fondamentale

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_{k\,\mathrm{eff}}^2}}{A_{1\mathrm{eff}}} \qquad \left(A_{k\mathit{eff}} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)$$

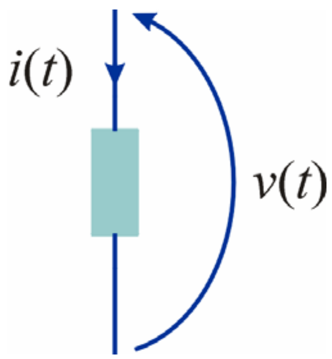
$$\mathrm{THD}\,\% = 100 \cdot \mathrm{THD}$$

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- Condizioni di regime periodico con pulsazione fondamentale ω

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik})$$



- Si indica con

$$\varphi_k = \varphi_{Vk} - \varphi_{Ik}$$

lo sfasamento tra le k-esime componenti armoniche della tensione e della corrente

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- La potenza istantanea assorbita dal bipolo è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk})\cos(k\omega t + \varphi_{Ik}) +$$

$$+V_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik}) + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{Vk}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{\infty} V_k I_h \cos(k\omega t + \varphi_{Vk})\cos(h\omega t + \varphi_{Ih})$$

- Il secondo addendo può essere posto anche nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_{Vk} - \varphi_{Ik}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(2k\omega t + \varphi_{Vk} + \varphi_{Ik})$$

➡ La potenza istantanea è costituita da un termine costante pari a

$$V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos\varphi_k$$

e da un termine oscillante avente valore medio nullo

Potenza attiva

- La **potenza attiva** è definita come valore medio nel periodo della potenza istantanea (e quindi coincide con il termine costante)

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)i(t)dt = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos\varphi_k =$$

$$= V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \cos\varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

- Nell'espressione compaiono solo prodotti tra armoniche della tensione e della corrente dello stesso ordine k
- *La potenza attiva è pari alla somma delle potenze attive associate alle singole componenti armoniche*

Potenza apparente e fattore di potenza

- La **potenza apparente** è definita, come in regime sinusoidale, come prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{\left(V_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\text{eff}}^2\right)\left(I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{k\,\text{eff}}^2\right)}$$

- Si può dimostrare che risulta sempre $S \geq |P|$ e che $S = P$ se e solo se il bipolo è un resistore lineare

➡ Si può definire il **fattore di potenza** rapporto tra la potenza attiva e la potenza apparente

$$PF = \cos\Phi = \frac{P}{S}$$

  - La definizione dell'angolo Φ è puramente convenzionale
  - L'angolo Φ non rappresenta uno sfasamento tra una tensione e una corrente

Traccia della dimostrazione

- La dimostrazione di basa sul fatto il valore medio del prodotto di due funzioni periodiche ha proprietà analoghe al prodotto interno tra due vettori

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)dt = < x(t), y(t) >$$

- Quindi il valore efficace corrisponde alla norma di un vettore

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T x(t)x(t)dt} = \|x(t)\|$$

➡ Il fattore di potenza PF è analogo al coseno dell'angolo tra due vettori

$$PF = \frac{< v(t), i(t) >}{\|v(t)\| \cdot \|i(t)\|} = \cos\Phi$$

e quindi assume valore unitario se e solo se i due vettori sono paralleli, cioè legati da una costante scalare

Potenza non attiva

- In regime periodico non sinusoidale la quantità

  $$P_{\text{NA}} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

  è indicata con il nome di **potenza non attiva**
- La potenza non attiva assorbita da un bipolo si annulla se e solo se il bipolo è lineare e puramente resistivo
- In questo caso si ha

  $$V_k = RI_k \qquad \varphi_k = 0 \qquad \forall k$$

  e quindi

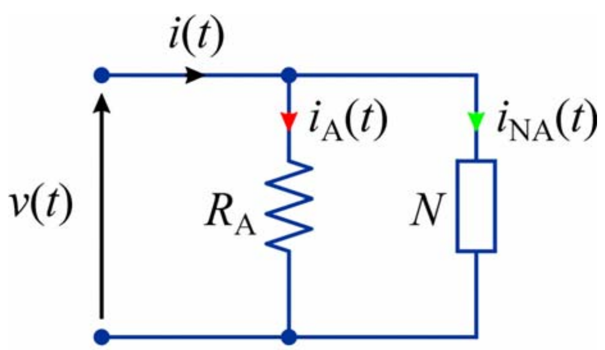
  $$S = P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = RI_{\text{eff}}^2$$

Potenza non attiva

- Un bipolo generico che assorbe potenza attiva P e potenza non attiva P_{NA}, può essere rappresentato collegando in parallelo un resistore

  $$R_{\text{A}} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{P}$$

  e un bipolo N che assorbe solo potenza non attiva



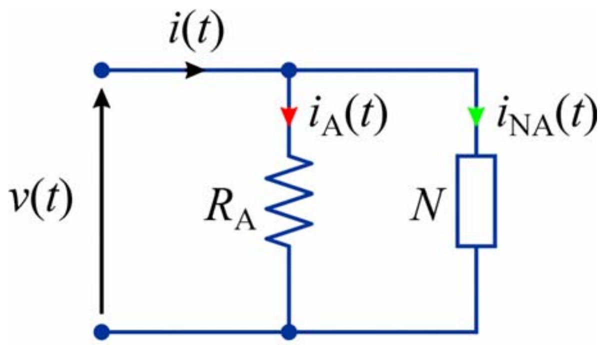
Corrente attiva e non attiva

- La corrente nel resistore R_{A} è detta **corrente attiva**

$$i_{\mathrm{A}}(t) = \frac{v(t)}{R_{\mathrm{A}}}$$

- La corrente nei bipolo N è detta **corrente non attiva**

$$i_{\mathrm{NA}}(t) = i(t) - i_{\mathrm{A}}(t)$$



Potenza istantanea attiva e non attiva

- La potenza istantanea associata ad $i_{\mathrm{A}}(t)$ è detta **potenza istantanea attiva**

$$p_{\mathrm{A}}(t) = v(t) i_{\mathrm{A}}(t) = \frac{v^2(t)}{R_{\mathrm{A}}} = P\frac{v^2(t)}{V_{\mathrm{eff}}^2}$$

- La potenza istantanea associata ad $i_{\mathrm{NA}}(t)$ è detta **potenza istantanea non attiva**

$$p_{\mathrm{NA}}(t) = v(t) i_{\mathrm{NA}}(t) = v(t)\left[i(t) - i_{A}(t)\right]$$

- ➡ Quindi si ha

$$p(t) = p_{\mathrm{A}}(t) + p_{\mathrm{NA}}(t)$$

- Il valore medio sul periodo di $p_{\mathrm{A}}(t)$ vale P e quindi coincide con il valore medio sul periodo di $p(t)$
- ➡ Il valore medio sul periodo di $p_{\mathrm{NA}}(t)$ è nullo

Ortogonalità delle componenti della corrente

- I valori efficaci della corrente e delle componenti attiva e non attiva sono legati dalla relazione

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{\text{Aeff}}^2 + I_{\text{NAeff}}^2}$$

- Infatti si ha

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[i_{\text{A}}^2(t) + i_{\text{NA}}^2(t) + 2i_{\text{A}}(t)i_{\text{NA}}(t)\right]dt =$$

$$= I_{\text{Aeff}}^2 + I_{\text{NAeff}}^2 + \frac{1}{T}\int_0^T 2\frac{v(t)}{R_{\text{A}}} i_{\text{NA}}(t)dt =$$

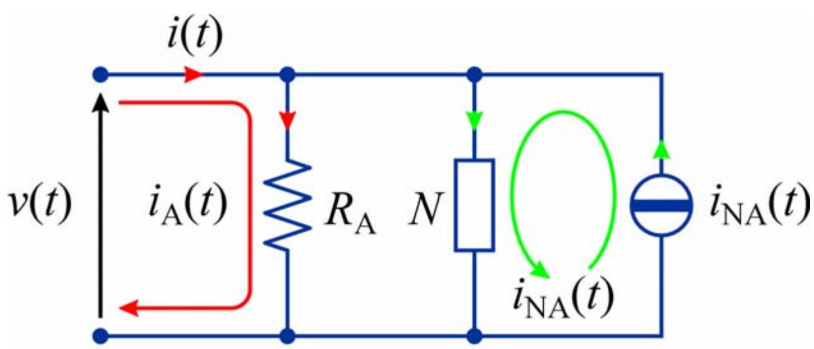
$$= I_{\text{Aeff}}^2 + I_{\text{NAeff}}^2 + \frac{2}{TR_{\text{A}}}\int_0^T p_{\text{NA}}(t)dt = I_{\text{Aeff}}^2 + I_{\text{NAeff}}^2$$

- Quindi valgono anche le relazioni

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{Aeff}} \qquad P_{\text{NA}} = V_{\text{eff}} I_{\text{NAeff}}$$

Compensazione di un carico distorcente

- Nel caso periodico non sono sufficienti le tecniche di rifasamento viste nel caso sinusoidale
- Per ridurre la potenza non attiva (*compensazione del carico*) è possibile
  - utilizzare filtri passivi per eliminare le armoniche
  - collegare in parallelo al carico un bipolo (realizzato mediante un circuito elettronico) che eroghi una corrente uguale alla corrente non attiva
    - in questo modo la corrente $i(t)$ si identifica con la corrente attiva



Potenza reattiva e potenza deformante

- Per la **potenza reattiva** in regime periodico non sinusoidale è stata introdotta la seguente definizione formale

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \operatorname{sen} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} V_{k\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \operatorname{sen} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

  - ➡ Q è definita come somma delle potenze reattive associate alle singole armoniche

- Diversamente del caso sinusoidale, con questa definizione risulta

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \leq S$$

- Per chiudere il bilancio delle potenze, si introduce un ulteriore termine detto **potenza deformante**

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

Potenza reattiva e potenza deformante

- L'espressione della potenza deformante in termini di armoniche di tensione e di corrente è

$$D = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{\infty} \left[V_{k\,\mathrm{eff}}^2 I_{h\,\mathrm{eff}}^2 + V_{h\,\mathrm{eff}}^2 I_{k\,\mathrm{eff}}^2 - 2 V_{k\,\mathrm{eff}} I_{h\,\mathrm{eff}} V_{h\,\mathrm{eff}} I_{k\,\mathrm{eff}} \cos(\varphi_k - \varphi_h) \right]}$$

➡ D si annulla se sono verificate le condizioni

$$\frac{V_k}{I_k} = \frac{V_h}{I_h} \qquad \varphi_k = \varphi_h \qquad \forall h, k$$

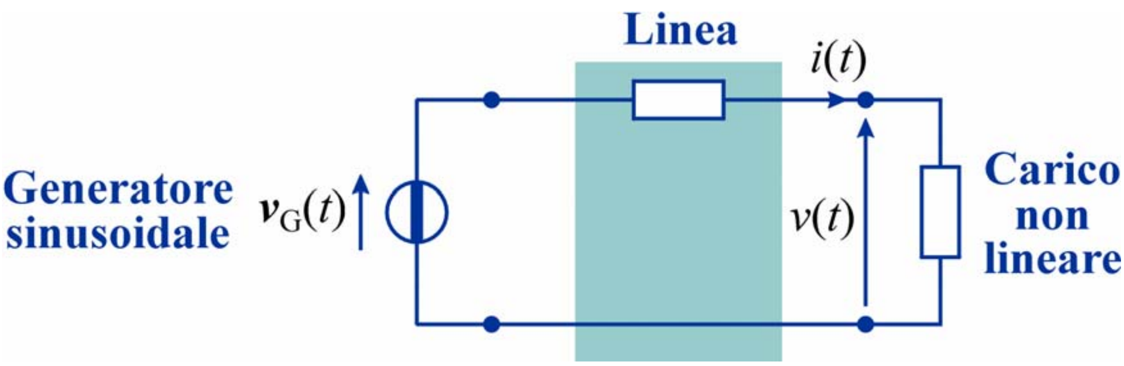
e quindi, in particolare, nel caso di un resistore lineare

- in questo caso la tensione e la corrente del bipolo non sono deformate l'una rispetto all'altra

Potenza reattiva e potenza deformante

- Le definizioni di potenza reattiva e potenza deformante possono risultare prive di significato e quindi di scarsa utilità pratica in presenza di regimi fortemente distorti
  - Attualmente questa situazione è piuttosto frequente in seguito allo sviluppo delle tecnologie elettroniche di potenza
- La potenza reattiva si annulla anche se le potenze associate alle diverse armoniche non sono nulle, ma i loro valori si compensano
- La potenza deformante non risulta strettamente correlata alla deformazione della corrente rispetto alla tensione
  - può annullarsi anche in presenza di deformazioni o assumere valori diversi da zero con tensioni e correnti solo sfasate tra loro

Linee con carichi non lineari



- Se il carico non è lineare, in generale la tensione e la corrente sono distorte
- Se le cadute di tensione lungo la linea sono trascurabili, la tensione può essere considerata praticamente sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{Ik})$$ (si assume che sia $I_0 = 0$)

Fattore di potenza di un carico non lineare

- Se la tensione è sinusoidale, le armoniche superiori della corrente non danno contributo alla potenza attiva che vale

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos\varphi_1 \qquad\qquad \varphi_1 = \varphi_V - \varphi_{I1}$$

- Il valore efficace della corrente nella linea, e quindi la potenza dissipata dipende anche dalle armoniche superiori della corrente
- ➡ La potenza dissipata nella linea aumenta
  - all’aumentare dello sfasamento tra la tensione e la componete fondamentale della corrente
  - all’aumentare del contenuto armonico della corrente
- Il fattore di potenza può essere espresso nel modo seguente

$$\cos\Phi = \frac{P}{S} = \frac{V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}}}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} \cdot \cos\varphi_1 = \cos\theta \cdot \cos\varphi_1$$

Fattore di sfasamento e di distorsione

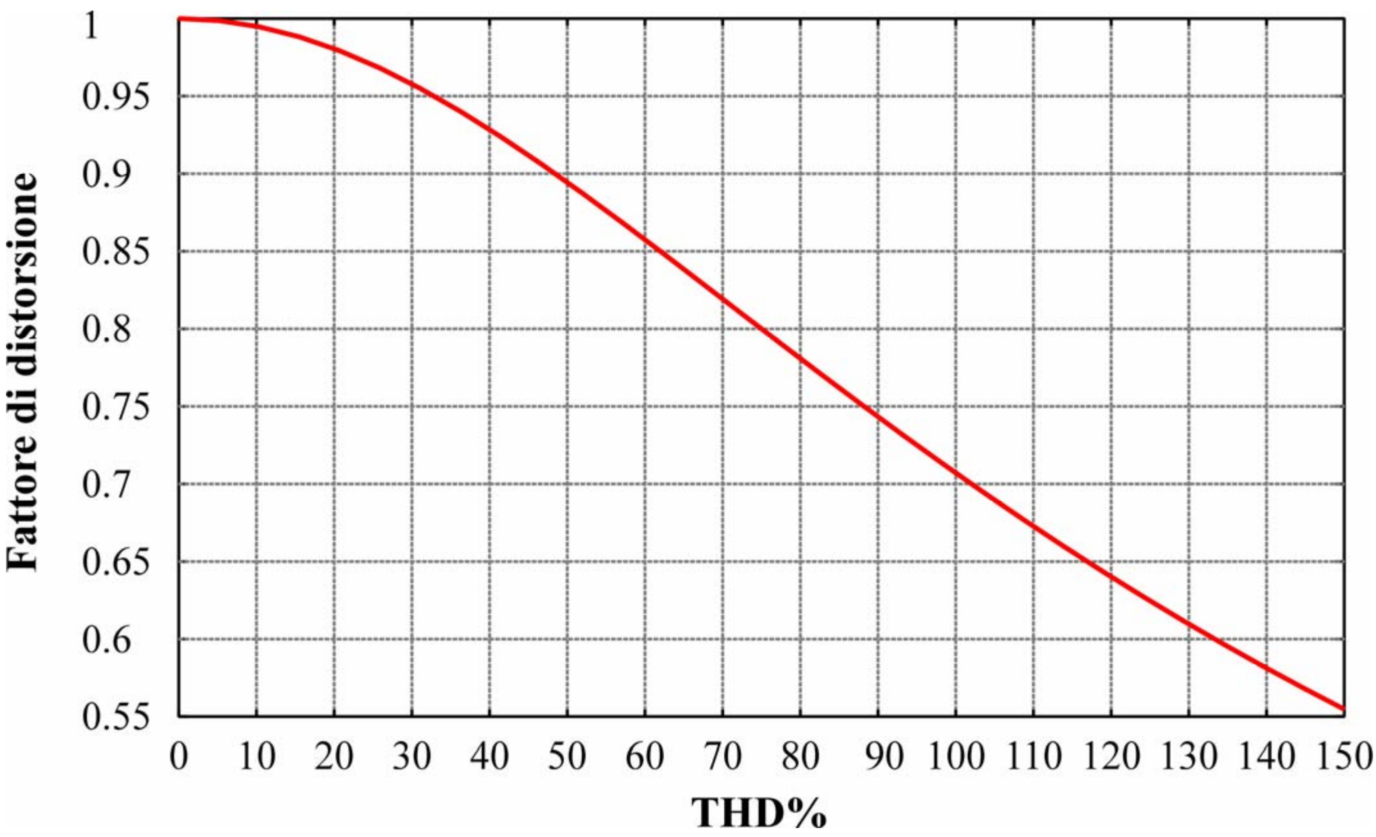
- Il fattore $\cos\varphi_1$, che ha significato analogo al fattore di potenza definito in regime sinusoidale, è detto **fattore di sfasamento**
- Il primo termine è detto **fattore di distorsione** ed è definito dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$$

- Dato che è sempre compreso tra 0 e 1 è possibile rappresentarlo come coseno di un angolo θ detto **angolo di distorsione**
- Il fattore di distorsione è legato alla distorsione armonica totale della corrente THD_I, dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{THD}_\text{I}^2}} \qquad \left(I_0 = 0 \Rightarrow \text{TDH}_\text{I} = \sqrt{\frac{I_{\text{eff}}^2 - I_{1\text{eff}}^2}{I_{1\text{eff}}^2}} \Rightarrow \text{TDH}_\text{I}^2 = \frac{1}{\cos\theta} - 1 \right)$$

Fattore di distorsione



Potenza reattiva e potenza deformante

- Se la tensione del carico è sinusoidale
  - la potenza reattiva è dovuta solo allo sfasamento tra la tensione e la componente fondamentale della corrente

    $$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \operatorname{sen} \varphi_1$$

    ➡ha significato analogo a quello visto in regime sinusoidale
  - la potenza deformante e dovuta solo alla presenza di armoniche nella corrente

    $$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = V_{\text{eff}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{k\text{eff}}^2}$$

Relazioni tra le potenze

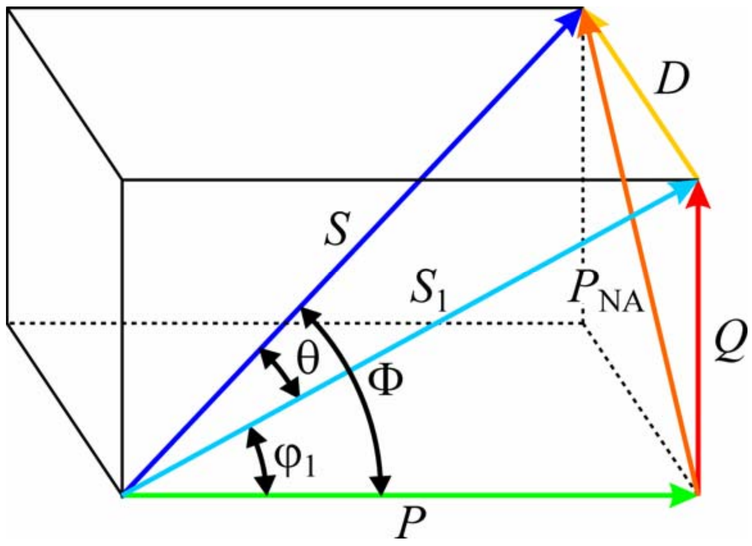
$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos\varphi_1$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \operatorname{sen}\varphi_1$$

$$S_1 = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P = S_1 \cos\varphi_1$$



$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_1 = S \cdot \frac{I_{1\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = S\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$P = S\cos\theta \cdot \cos\varphi_1 = S\cos\Phi$$