Richiami di teoria dell'elettromagnetismo

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 9-11-2010)

Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\dfrac{d}{dt}\int_V \rho_c\, dV$
Legge di Ampere-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \dfrac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$
Legge di Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = -\dfrac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$
Legge di Gauss elettrica	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \rho_c\, dV$
Legge di Gauss magnetica	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$

Grandezze fondamentali

- ρ_c = densità di carica elettrica [C/m^3]
- $\mathbf{E}$ = campo elettrico [V/m]
- $\mathbf{H}$ = campo magnetico [A/m]
- $\mathbf{D}$ = induzione elettrica (spostamento elettrico) [C/m^2]
- $\mathbf{B}$ = induzione magnetica [T]
- $\mathbf{J}$ = densità di corrente elettrica [A/m^2]

Carica elettrica

- I fenomeni **elettromagnetici** sono i fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche
- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare
[unità di misura coulomb, C]
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
  - tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
  - tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

Densità di carica

- Se si considerano fenomeni osservabili su scala macroscopica si può prescindere dalla natura granulare della carica e assumere che la carica si a distribuita con continuità nello spazio
  - **Densità volumetrica di carica** [C/m^3]

$$\rho_c = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Δq = carica contenuta nel volume ΔV

- In alcuni casi si hanno distribuzioni di carica che si sviluppano prevalentemente in una o due dimensioni
  - **Densità superficiale di carica** [C/m^2]

$$\sigma_c = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

Δq = carica associata alla superficie ΔS

  - **Densità lineare di carica** [C/m]

$$\lambda_c = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Δq = carica associata al segmento Δl

Cariche libere e cariche di polarizzazione

- **Cariche libere:** cariche che possono compiere spostamenti macroscopici e dare luogo a separazioni macroscopiche di carica
- **Cariche di polarizzazione:** cariche legate alla struttura atomica o molecolare che possono compiere solo spostamenti microscopici (conseguenti a deformazione o orientamento di atomi o molecole)
- **Conduttore:** mezzo materiale nel quale sono presenti cariche in grado di compiere spostamenti macroscopici
- **Dielettrico:** mezzo materiale nel quale tutte le cariche possono compiere solo spostamenti microscopici
- In seguito quando si parlerà di cariche senza ulteriori specificazioni si farà riferimento alle cariche libere

Corrente elettrica

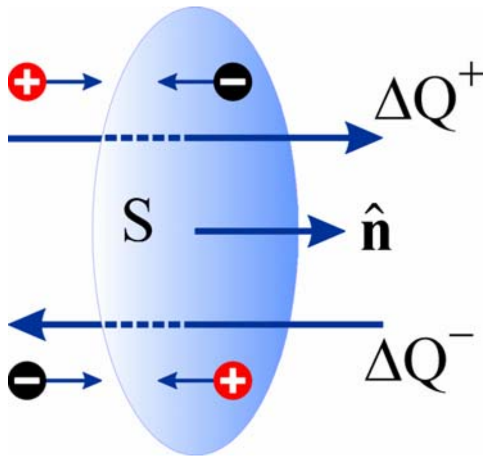
- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata S in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo [unità di misura ampere, A]
- In generale si possono avere cariche positive e negative che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
  - ➡ La carica che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
  - Il segno del contributo di ciascuna carica dipende dal segno della carica stessa e dal verso del moto

Definizione della corrente elettrica

- Si indica con ΔQ la carica che attraversa la superficie S in senso concorde con la normale $\hat{\mathbf{n}}$ nell'intervallo di tempo Δt

$$\Delta Q = \Delta Q^{+} - \Delta Q^{-}$$

  - Contributo positivo (ΔQ^{+})
    - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
    - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
  - Contributo negativo ($-\Delta Q^{-}$)
    - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
    - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



Definizione della corrente elettrica

- La corrente, $\mathrm{i}(t)$, è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

➡ La corrente è la derivata della funzione $Q(t)$ che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso S a partire da un certo istante iniziale fino all'istante t

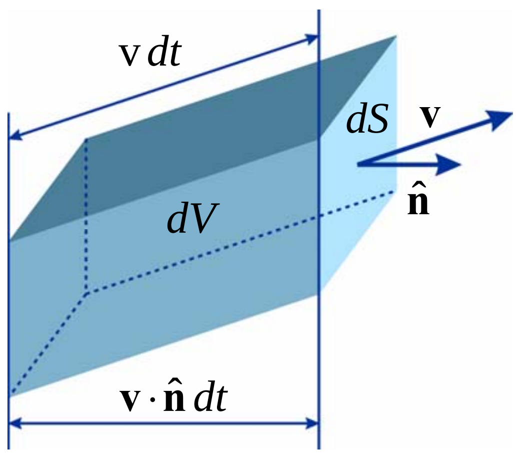
- $Q(t)$ non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante t
  - è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a $Q(t)$

Densità di corrente

- Si consideri una superficie orientata infinitesima dS attraversata da una corrente elettrica
- Si assuma che le cariche in moto abbiano densità ρ_c e velocità $\mathbf{v}$
- Nell'intervallo di tempo dt le cariche percorrono la distanza vdt

➡ La carica che attraversa la superficie dS nell'intervallo dt è pari alla carica totale contenuta nel volume dV

$$dQ = \rho_c dV = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dt\, dS$$



➡ La corrente attraverso dS è

$$d\mathrm{i} = \frac{dQ}{dt} = \rho_c\, \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

dove

$$\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$$

rappresenta la **densità di corrente** [A/m^2]

Densità di corrente

- La densità di corrente $\mathbf{J}$ è un vettore definito in modo che la sua componente lungo la normale ad una superficie orientata S rappresenti la corrente per unità di superficie che fluisce attraverso S

$$\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{d\,\mathrm{i}}{dS}$$

- ➡ La corrente attraverso una superficie orientata S è uguale al flusso del vettore $\mathbf{J}$ attraverso S

$$\mathrm{i} = \int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

- ➡ Nel caso più generale, in cui le cariche non si muovono tutte con la stessa velocità $\mathbf{v}$ e sono presenti sia cariche positive che negative (con densità ρ_+ e ρ_-), la densità di corrente si definisce mediante la relazione

$$\mathbf{J} = \rho_+\langle\mathbf{v}_+\rangle + \rho_-\langle\mathbf{v}_-\rangle \qquad \langle\mathbf{v}_+\rangle, \langle\mathbf{v}_-\rangle = \text{velocità medie}$$

Forza di Lorentz

- Una carica puntiforme q in moto con velocità $\mathbf{v}$ in una regione sede di un campo elettromagnetico è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

Forza di Lorentz

- Questa relazione può essere assunta come definizione delle due funzioni vettoriali del punto e del tempo dette
  - **campo elettrico** $\mathbf{E}$ [unità di misura volt/metro, V/m]
  - **induzione magnetica** $\mathbf{B}$ [unità di misura tesla, T]
- Se si ha una distribuzione di carica con densità ρ_c in moto con velocità $\mathbf{v}$, la forza per unità di volume $\mathbf{f}$ è

$$\mathbf{f} = \rho_c(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \rho_c\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$$

Campo elettrico

- Si dice che una regione è sede di un **campo elettrico** se una carica di prova Δq puntiforme posta in quiete in un punto P della regione è soggetta ad una forza $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ proporzionale al valore della carica
- Il vettore campo elettrico nel punto P è definito come

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\mathbf{F}_e}{\Delta q}$$

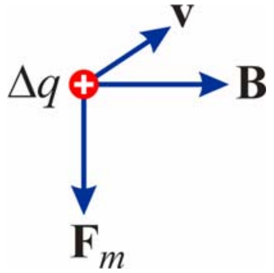
  - Il passaggio al limite indica che la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non perturbare il campo presente nella regione considerata

Induzione magnetica

- Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova Δq puntiforme in moto con velocità istantanea $\mathbf{v}$ in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ dovuta al campo elettrico) ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Il vettore **induzione magnetica** $\mathbf{B}$ ha
  - direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza $\mathbf{F}_m$ è nulla
  - verso tale che $\mathbf{v}$ $\mathbf{B}$ e $\mathbf{F}_m$ formino una terna destra
  - modulo dato da



$$B = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{F_{m\max}}{\Delta q\, v}$$

dove $F_{m\max}$ indica il valore massimo del modulo di $\mathbf{F}_m$ (che si ottiene quando $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{B}$)

Induzione elettrica e campo magnetico

- Come si vedrà in seguito, i vettori $\mathbf{D}$ (**induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m^2]) e $\mathbf{H}$ (**campo magnetico** [A/m]) vengono introdotti per tenere conto di fenomeni che avvengono, in presenza di campi elettromagnetici, nei mezzi materiali
- Nel vuoto valgono le relazioni

  $$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

  $$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

- La costante ε_0 $(= 1/(c_0^2\mu_0) \cong 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m})$ è detta **permittività elettrica** (o **costante dielettrica**) del vuoto
- La costante μ_0 $(= 4\pi \cdot 10^{-7} \cong 1.257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m})$ è detta **permeabilità magnetica** del vuoto

  ($c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ è la velocità della luce nel vuoto)

Equazioni di legame materiale

- In generale $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{J}$ dipendono sia da $\mathbf{E}$ che da $\mathbf{H}$
- Le equazioni che legano $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ dipendono dalle proprietà del mezzo in cui ha sede il campo elettromagnetico e sono dette **equazioni di legame materiale** o **relazioni costitutive**
- Nella maggior parte dei materiali di interesse pratico
  - la dipendenza di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{H}$ è trascurabile ➡ $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$
  - la dipendenza di $\mathbf{B}$ da $\mathbf{E}$ è trascurabile ➡ $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
  - la dipendenza di $\mathbf{J}$ da $\mathbf{H}$ è trascurabile ➡ $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$
- Le relazioni costitutive possono dipendere, inoltre, da altre grandezze fisiche che definiscono lo stato del materiale (es. temperatura, pressione, ecc.)

Equazioni di legame materiale

- **Materiali omogenei**:
  Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dal punto considerato
- **Materiali isotropi**:
  Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dalle direzioni dei vettori
- **Materiali lineari**:
  Le relazioni costitutive sono espresse da equazioni lineari del tipo
  $$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = [\sigma]\mathbf{E}$$
  in cui $[\varepsilon]$, $[\mu]$ e $[\sigma]$ rappresentano delle matrici
- **Materiali lineari isotropi**:
  Le relazioni costitutive si riducono a relazioni di proporzionalità
  $$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$
  in cui ε, μ e σ sono costanti scalari

Equazioni fondamentali

Leggi primarie

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(Assunte come postulati)

Leggi secondarie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(Derivano dalle leggi primarie)

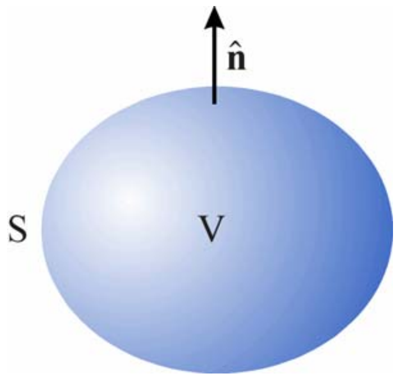
Equazione di continuità
(Principio di conservazione della carica elettrica)

- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Forma integrale

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS}_{i} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_c \, dV = -\frac{dQ}{dt}$$



  - V = regione delimitata da una superficie chiusa S
  - Versore normale a S orientato verso l'esterno
  - i = corrente uscente dalla superficie S
- *La corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*
  - ➡ La carica elettrica non può essere né creata né distrutta, ma può essere solo spostata

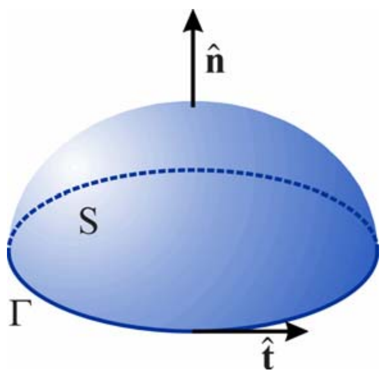
Legge di Ampere-Maxwell

- Forma locale

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Forma integrale

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS}_{i_c} = i_T$$



  - Γ = curva chiusa
  - S = generica superficie avente Γ come contorno
  - Versore tangente a Γ e normale a S orientati come indicato in figura
  - i_s = **corrente di spostamento** concatenata con S
  - i_c = corrente di conduzione concatenata con S
  - i_T = **corrente totale** concatenata con S
- *La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa*

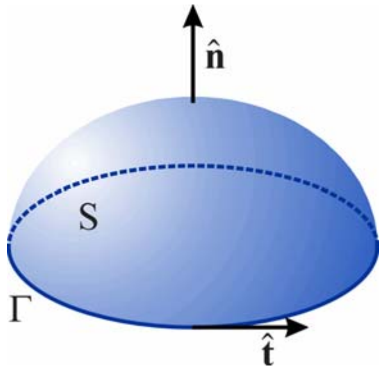
Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- Forma locale

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Forma integrale

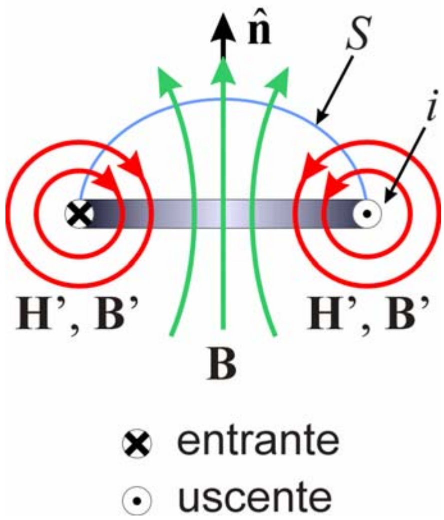
$$\underbrace{\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl}_{e} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$



  - Γ = curva chiusa
  - S = generica superficie avente Γ come contorno
  - Versore tangente a Γ e normale a S orientati come indicato in figura
  - e = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
- *La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa*

Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- A causa del segno del termine a secondo membro, *la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che la ha generata* (legge di Lenz)
- **Esempio:**
  - Si considera il caso in cui la linea Γ coincide con un conduttore
  - In presenza di f.e.m. indotta, nel conduttore circola corrente
  - Un incremento del flusso di $\mathbf{B}$ dà origine a una corrente indotta che risulta positiva se si assume il verso di riferimento indicato in figura
  - Questa corrente genera un campo magnetico $\mathbf{H}$', diretto in modo tale da produrre un flusso di induzione magnetica negativo attraverso S



Legge di Gauss elettrica

- Si applica l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right)$$

- La divergenza di un rotore è nulla, quindi

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Utilizzando l'equazione di continuità si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = cost$$

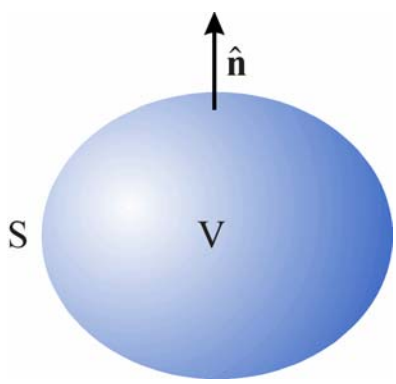
- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione $\mathbf{D} = 0$ e $\rho_c = 0$, si deduce che la costante deve essere nulla

➡ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$

Legge di Gauss elettrica

- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$



- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \rho_c \, dV = Q$$

  - V = regione delimitata da una superficie chiusa S
  - Versore normale a S orientato verso l'esterno

- *Il flusso uscente da una superficie chiusa del vettore induzione elettrica è uguale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*

Legge di Gauss magnetica

- Si applica l'operatore divergenza a primo e secondo membro dell'equazione di Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

- Dato che la divergenza di un rotore è nulla

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = cost$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione $\mathbf{B} = 0$, si deduce che la costante deve essere nulla

➨ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

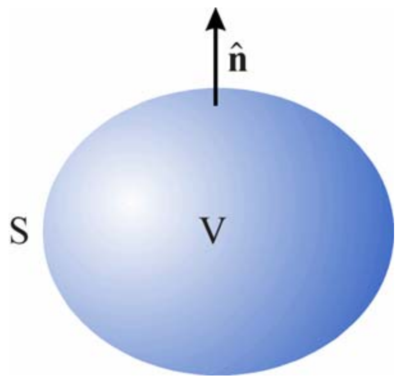
Legge di Gauss magnetica

- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

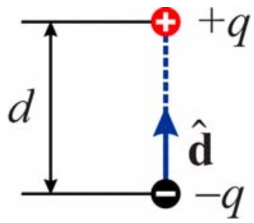


  - V = regione delimitata da una superficie chiusa S
  - Versore normale a S orientato verso l'esterno

- *Il flusso attraverso una superficie chiusa del vettore induzione magnetica è nullo*

Dipolo elettrico

- Si considerano due cariche puntiformi uguali e opposte $\pm q$ poste a distanza d



- Si definisce **momento di dipolo elettrico** [C·m] la quantità

  $$\mathbf{p} = p\,\hat{\mathbf{d}} = qd\,\hat{\mathbf{d}}$$

  $\hat{\mathbf{d}}$ = versore diretto dalla carica negativa alla carica positiva

- A una distanza dalle cariche molto grande rispetto a d il campo elettrico dipende solo da $\mathbf{p}$ (non separatamente da d e q)
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $d \to 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $q \to \infty$ in modo tale che il prodotto qd tenda a un valore finito $p \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo elettrico**

Polarizzazione dei dielettrici

- Dal punto di vista macroscopico, si può ritenere che, in assenza di perturbazioni esterne, in un dielettrico siano presenti due distribuzioni continue di carica, una positiva (densità ρ_+) e una negativa (densità ρ_-), uguali e opposte in ogni punto

  $$\rho_+ + \rho_- = 0$$

- In un elemento di volume ΔV sono contenute due cariche uguali e opposte $\rho_+ \Delta V$ e $\rho_- \Delta V$ i cui baricentri coincidono
  - ➡ carica totale e momento di dipolo nulli
- Un campo elettrico esterno può produrre *piccoli* spostamenti $\mathbf{l}_+$ e $\mathbf{l}_-$ delle cariche positive e delle cariche negative (➡ **polarizzazione del dielettrico**)

➡ All'interno dell'elemento di volume ΔV, lo spostamento relativo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$ tra i baricentri delle cariche positive e negative dà origine a un momento di dipolo elettrico

$$\Delta\mathbf{p} = \rho_+ \Delta V \left(\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-\right) = \rho_+ \mathbf{l} \Delta V$$

Nota

- Nella trattazione precedente si assume che il volume ΔV sia piccolo rispetto alle dimensioni macroscopiche, ma grande rispetto alle dimensioni atomiche
  - ➡ all'interno di ΔV si può parlare di densità volumetrica di carica
- Gli spostamenti $\mathbf{l}_+$ e $\mathbf{l}_-$ avvengono su scala microscopica
  - ➡ rispetto alle dimensioni lineari di ΔV possono essere considerati degli infinitesimi di ordine superiore
- Si assume, quindi, che la densità di carica sia molto grande, in modo che $\rho_+\mathbf{l}$ sia una quantità finita
  - ➡ $\Delta\mathbf{p}$ e ΔV sono infinitesimi dello stesso ordine

Polarizzazione per deformazione e orientamento

- Materiali **non polari**: le molecole non possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - In presenza di un campo elettrico esterno si ha una **polarizzazione per deformazione**
    - deformazione della distribuzione elettronica
    - spostamenti relativi degli atomi costituenti la molecola
- Materiali **polari**: le molecole possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - In assenza di campi esterni, a causa dell'agitazione termica i dipoli sono orientati in modo aleatorio
    - ➡ i dipoli si compensano e l'effetto macroscopico è nullo
  - Un campo esterno, oltre a produrre una polarizzazione per deformazione, tende ad allineare i dipoli (➡ **polarizzazione per orientamento**)

Vettore polarizzazione elettrica

- Lo stato di un dielettrico polarizzato può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **polarizzazione elettrica** [C/m^2]

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho_+ \mathbf{l}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli elettrici equivale ad una distribuzione volumetrica di carica con densità

$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ **densità di carica di polarizzazione**

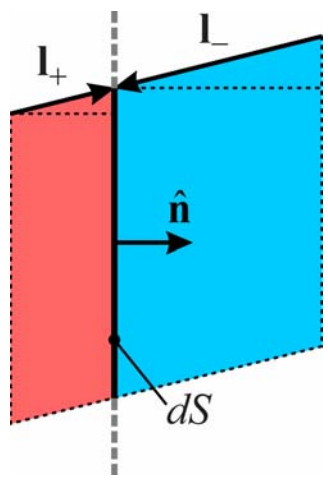
- Se il campo elettrico varia nel tempo si ha una variazione di $\mathbf{P}$ che equivale alla presenza di una **densità di corrente di polarizzazione elettrica**

$$\mathbf{J}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Carica di polarizzazione

- Si considera una superficie chiusa S interamente contenuta nella regione occupata dal dielettrico
- Nel dielettrico non polarizzato la carica contenuta in S è nulla
- La polarizzazione del dielettrico causa uno spostamento delle cariche, quindi, in generale, si ha una variazione della carica contenuta in S
- Si valuta la quantità di carica netta dQ che entra in S attraverso un elemento infinitesimo dS
- Danno contributo positivo a dQ
  - le cariche positive entranti, cioè le cariche contenute nel volume $\mathbf{l}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$
  - le cariche negative uscenti, cioè le cariche contenute nel volume $-\mathbf{l}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$

$\hat{\mathbf{n}}$ = versore normale a S orientato in senso entrante



Carica di polarizzazione

- La carica che entra attraverso dS è quindi
$$dQ = \rho_+ \mathbf{l}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS + \rho_- \mathbf{l}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \rho_+ \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$
- La carica di totale contenuta nella superficie S è quella che attraversa S in seguito alla polarizzazione
$$Q_p = \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$
- Facendo uso del teorema di Gauss, questa relazione si può scrivere nella forma
$$Q_p = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV$$
dove V indica il volume racchiuso da S e il segno $-$ è dovuto al fatto che il versore normale è stato orientato in senso entrante
- Introducendo la densità di carica di polarizzazione, ρ_p, si ha quindi
$$Q_p = \int_V \rho_p dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV \qquad \Rightarrow \qquad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Induzione elettrica

- Legge di Gauss nel vuoto
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c$$
- In un dielettrico polarizzato, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche della carica di polarizzazione
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c + \rho_p$$
- Si esprime la carica di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c - \nabla \cdot \mathbf{P}$$
- Si definisce **induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m^2] il vettore
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

➡ Si ottiene un'espressione della legge di Gauss, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di carica libera ρ_c
$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

Costante dielettrica

- In generale $\mathbf{P}$, e quindi $\mathbf{D}$, sono funzioni del campo elettrico $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

- In un materiale lineare isotropo $\mathbf{P}$ e $\mathbf{D}$ sono proporzionali a $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

χ_e = **suscettività elettrica** del mezzo

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ = **costante dielettrica relativa** del mezzo

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = **permittività** o **costante dielettrica** del mezzo [F/m]

Costanti dielettriche relative di alcuni materiali

	ε_r		ε_r
Titanato di bario	$10^3 \div 10^4$	Nylon	$3.7 \div 5.5$
Ossido di titanio	$86 \div 173$	Quarzo	$4.3 \div 5$
Acqua distillata	80	Gomma	3
Alcool etilico	28	Polistirene	$2.4 \div 3$
Germanio	16	Ebanite	$2 \div 3$
Silicio	12	Porcellana	$2.7 \div 2.9$
Vetro	$4 \div 10$	Carta	$2 \div 2.5$
Allumina	9.5	Teflon	2.1
Bachelite	$5.7 \div 7$	Polietilene	$1.6 \div 2.4$
Mica	$5.7 \div 6.5$	Aria (1 atm)	1.0006

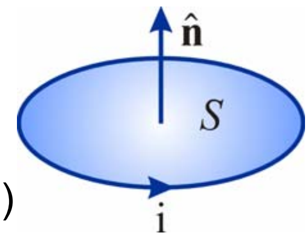
(Valori a 20 °C)

Dipolo magnetico

- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente i
- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [A·m²] la quantità

  $$\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{n}} = \mathrm{i}\,S\,\hat{\mathbf{n}}$$

  S = area della superficie piana delimitata dalla spira
  $\hat{\mathbf{n}}$ = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)



- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico dipende solo da $\mathbf{m}$
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $S \to 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $i \to \infty$ in modo tale che il prodotto Si tenda a un valore finito $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**

Magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume ΔV diviene sede di un momento di dipolo magnetico $\Delta\mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [A/m]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli magnetici equivale alla presenza nella materia di una **densità di corrente di polarizzazione magnetica**

$$\mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

Corrente di polarizzazione magnetica

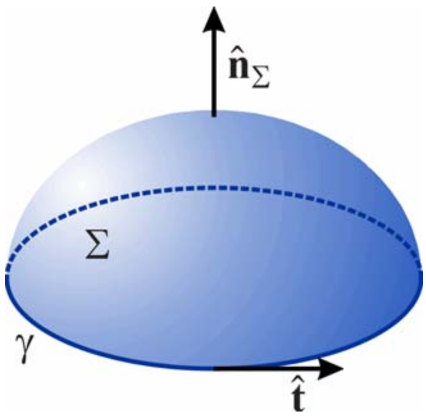
- La magnetizzazione può essere espressa come

  $\mathbf{M} = N\delta\mathbf{m}$

  N = numero di dipoli per unità di volume

  $\delta\mathbf{m}$ = momento di un dipolo

- Ciascun dipolo può essere rappresentato come una spira di area ΔS percorsa da una corrente i
- Si considera una superficie Σ delimitata da una linea γ e interamente contenuta nel mezzo magnetizzato

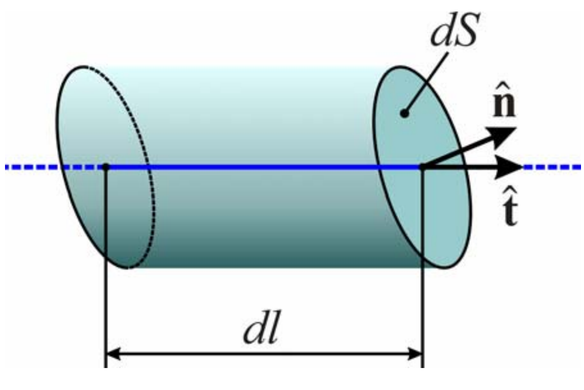


- La corrente totale che attraversa questa superficie è pari alle corrente totale delle spire che si concatenano con la linea γ

Corrente di polarizzazione magnetica

- Si considera un arco infinitesimo dl della linea γ
- Si può assumere che in prossimità dell'arco dl le spire abbiano tutte lo stesso orientamento definito dal versore $\hat{\mathbf{n}}$
- Si considera il volume cilindrico ottenuto facendo traslare lungo dl una spira avente centro sull'arco dl
- Il volume del cilindro è $dS\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl$ e quindi la corrente totale delle spire contenute nel cilindro vale

  $NidS\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl$



Corrente di polarizzazione magnetica

- Integrando lungo la linea γ si ottiene la corrente totale dei dipoli concatenata con la linea γ
- Se si introduce una densità di corrente di polarizzazione magnetica, $\mathbf{J}_{pm}$, per ogni superficie Σ avente contorno γ si ha

$$i_{tot} = \int_{\Sigma} \mathbf{J}_{pm} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\Sigma} d\Sigma = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- Da questa relazione, facendo uso del teorema di Stokes, si ottiene

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J}_{pm} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\Sigma} d\Sigma = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\Sigma} d\Sigma \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

Campo magnetico

- Legge di Ampere - Maxwell nel vuoto

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Nella materia, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche delle correnti di polarizzazione elettrica e magnetica

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}$$

- Si esprimono le correnti di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

Campo magnetico

- Nell'espressione precedente, a secondo membro, le somma delle derivate rispetto al tempo fornisce la derivata dell'induzione elettrica
- Si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

➡ Si ottiene un'espressione della legge di Ampere - Maxwell, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di corrente $\mathbf{J}$ associata alle cariche libere

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Equazione di continuità nei mezzi materiali

- Tenendo conto delle cariche e delle correnti di polarizzazione, l'equazione di continuità assume la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}) = -\frac{\partial(\rho_c + \rho_p)}{\partial t}$$

- Si esprimono le cariche e le correnti di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M})}_{=0} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t}$$

➡ Anche in presenza di cariche e correnti di polarizzazione si ottiene una relazione che coinvolge solo le cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

Permeabilità magnetica

- In generale $\mathbf{M}$, e quindi $\mathbf{B}$, sono funzioni del campo magnetico $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

- In un materiale lineare isotropo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ sono proporzionali a $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

χ_m = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0\mu_r$ = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
  - ➡ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)

➡ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato

- ➡ suscettività magnetica $\chi_m < 0$
  (valori tipici dell'ordine di -10^{-5})
- ➡ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1+\chi_m) < 1$
  (valori tipici leggermente inferiori a 1)

- χ_m e μ_R risultano indipendenti dalla temperatura

Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
  - atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
  - suscettività magnetica $\chi_m > 0$ (valori tipici dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$)
  - permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1+\chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
  - χ_m e μ_R diminuiscono all'aumentare della temperatura T

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$ (C = costante) **Legge di Curie**

Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

Materiali diamagnetici	χ_m	**Materiali paramagnetici**	χ_m
Bismuto	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	Uranio	$4 \cdot 10^{-4}$
Mercurio	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	Platino	$2.6 \cdot 10^{-4}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	Cesio	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	Alluminio	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Grafite	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	Litio	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di sodio	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	Sodio	$7.2 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	Ossigeno (1 atm)	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Azoto (1 atm)	$-5 \cdot 10^{-9}$	Aria (1 atm)	$4 \cdot 10^{-7}$

(Valori a 20 °C)

Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**
  - atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico T_C della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$

(C = costante) **Legge di Curie-Weiss**

Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di 10^{-6}-10^{-3} m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno $\mathbf{H}$ i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di $\mathbf{H}$ si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di $\mathbf{H}$ produce un incremento di $\mathbf{B}$ uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto: $\Delta\mathbf{B} = \mu_0 \Delta\mathbf{H}$

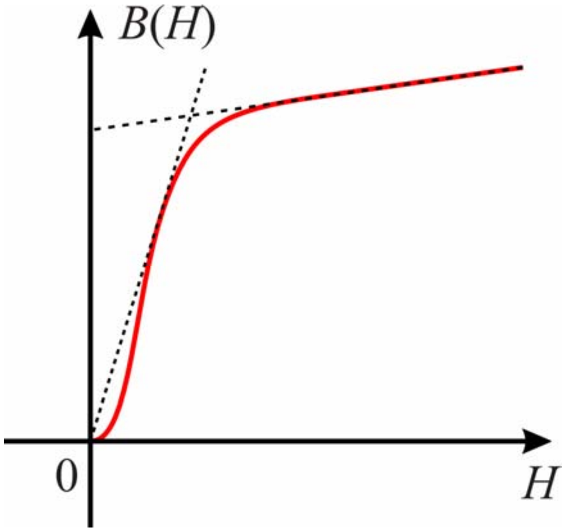
Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato $H = 0$, $B = 0$, inizialmente si osserva un tratto caratterizzato da valori elevati del rapporto

$$\frac{B}{H} = \mu(H) = \mu_0 \mu_r (H)$$

- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

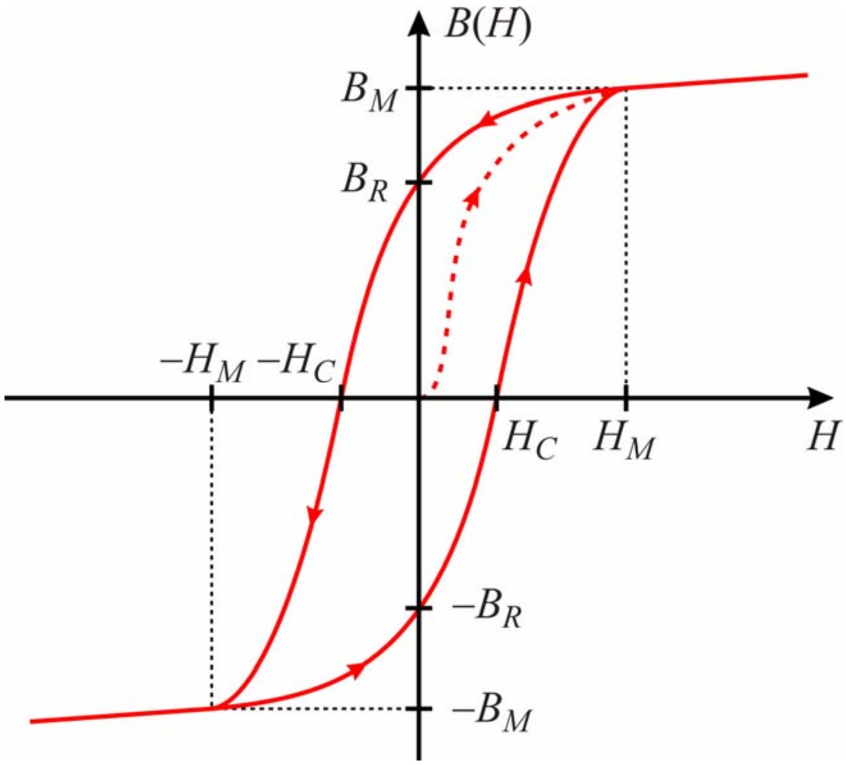
$$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



Isteresi magnetica

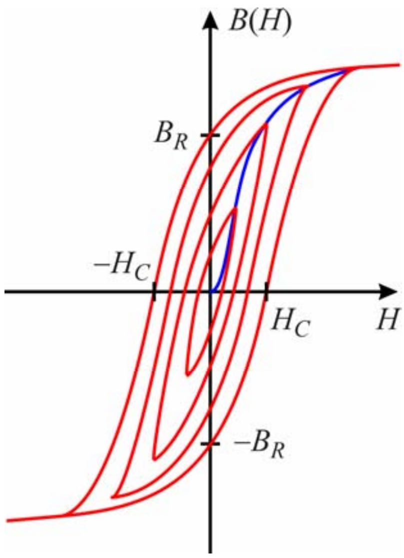
- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso
- ➡ Riportando H a zero B non si annulla ma si porta ad un valore B_R (**induzione residua**)
- Per annullare B occorre applicare un campo magnetico inverso $-H_C$ (**campo magnetico coercitivo**)
- Se H viene fatto variare ciclicamente tra due valori $\pm H_M$ l'andamento di B è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

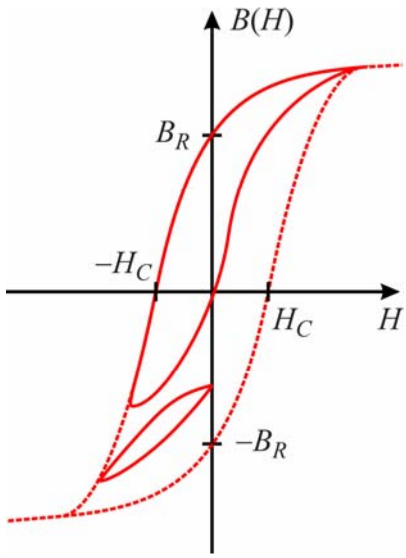
Ciclo di isteresi



Ciclo di isteresi

- Riducendo il valore di H_M si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici

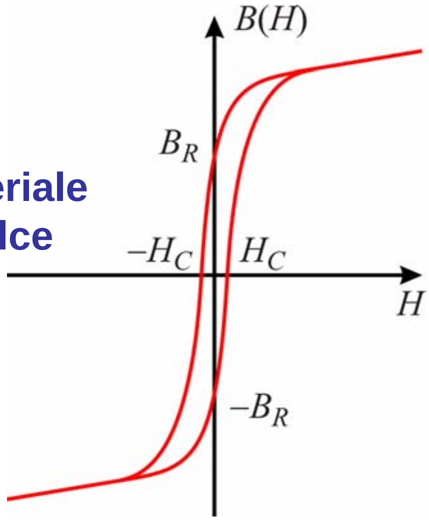


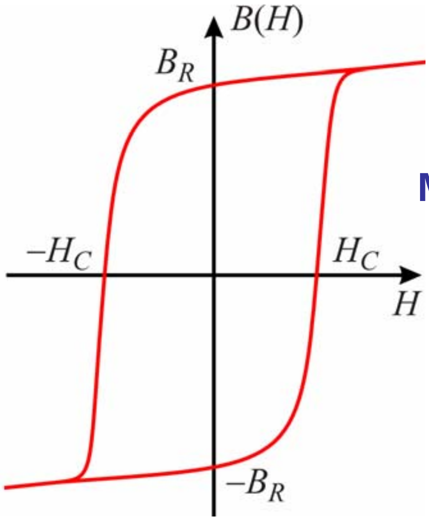


Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
  - **Materiali dolci** ➡ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
  - **Materiali duri** ➡ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo

Materiale dolce





Materiale duro

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali dolci	μ_r iniziale	μ_r massima	B_R [T]	H_C [A/m]
Cobalto	10	175	0.31	1000
Nichel	400	1100	0.33	130
Ferro puro	10^4	$2{\cdot}10^5$	1.2	4
Ferro commerciale	200	5000	1.2	80
Ghisa	70	600	1.4	500
Ferro-silicio 4%	500	7000	0.8	40
Permalloy (Ni, Fe 22%)	10^4	$5{\cdot}10^4$	0.6	4
Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%)	10^5	$3{\cdot}10^5$	0.6	0.4
Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)	$2.5{\cdot}10^4$	$1.5{\cdot}10^5$	0.6	1.2

(Valori a 20 °C)

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali duri	B_R [T]	H_C [kA/m]
Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)	1.05	5.6
Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)	1.28	51
Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)	1.05	120
Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)	0.54	44
Ferrite di bario ($BaFe_{12}O_{19}$)	0.43	170
Samario-cobalto ($SmCo_5$)	0.87	640
Neodimio-ferro-boro ($Nd_2Fe_{14}B$)	1.23	880

(Valori a 20 °C)

Legge di Ohm

- Per una vasta classe di materiali il legame tra la densità di corrente e il campo elettrico è lineare e isotropo ed è espresso dalla **legge di Ohm** (in forma locale)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

  - σ = **conducibilità** [siemens/metro, S/m]
  - $\rho = 1/\sigma$ = **resistività** [ohm·metro, Ω·m]

- Buoni conduttori ➡ ρ dell’ordine di $10^{-7} \div 10^{-8}$ Ω·m
- Conduttore ideale ➡ $\rho = 0,\ \ \sigma \rightarrow \infty$
- Isolanti ➡ ρ dell’ordine di $10^{7} \div 10^{18}$ Ω·m
- Isolante ideale ➡ $\rho \rightarrow \infty$, $\sigma = 0$

Dipendenza della resistività dalla temperatura

- La resistività e la conducibilità sono in generale funzioni della temperatura
- Per variazioni di temperatura di ampiezza limitata (in genere dell'ordine di alcune decine di gradi) la dipendenza può essere considerata praticamente lineare

$$\rho(\theta) = \rho_0(1+\alpha\theta)$$

ρ_0 = resistività valutata alla temperatura di riferimento T_0 [$\Omega\cdot$m]

$\theta = T - T_0$ = variazione di temperatura rispetto a T_0 [°C]

α = coefficiente di temperatura [°C^{-1}]

Resistività di alcuni materiali

Conduttori	ρ [$\Omega\cdot$m]	α [°C^{-1}]
Argento	$1.59\cdot10^{-8}$	$3.8\cdot10^{-3}$
Rame	$1.73\cdot10^{-8}$	$3.9\cdot10^{-3}$
Oro	$2.36\cdot10^{-8}$	$3.4\cdot10^{-3}$
Alluminio	$2.82\cdot10^{-8}$	$3.9\cdot10^{-3}$
Tungsteno	$5.6\cdot10^{-8}$	$4.5\cdot10^{-3}$
Ferro	$1.0\cdot10^{-7}$	$4.5\cdot10^{-3}$
Stagno	$1.2\cdot10^{-7}$	$4.3\cdot10^{-3}$
Piombo	$2.2\cdot10^{-7}$	$3.9\cdot10^{-3}$
Costantana (Cu-Ni)	$4.9\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-5}$
Manganina (Cu-Ni-Mn)	$4.8\cdot10^{-7}$	$1.5\cdot10^{-5}$
Mercurio	$9.6\cdot10^{-7}$	$8.9\cdot10^{-4}$
Grafite	$3\cdot10^{-5}\div6\cdot10^{-4}$	$-5\cdot10^{-4}$

(Valori a 20 °C)

Resistività di alcuni materiali

Semiconduttori	ρ [Ω·m]	α [°C^{-1}]
Germanio	0.47	$-4.8\cdot10^{-2}$
Silicio	$6.4\cdot10^{2}$	$-7.5\cdot10^{-2}$
Isolanti	**ρ [Ω·m]**	
Carta	$10^{7} \div 10^{10}$	
Bachelite	$10^{9} \div 10^{10}$	
Porcellana	$10^{9} \div 10^{13}$	
Polietilene	10^{13}	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
Mica	$10^{12} \div 10^{14}$	
Gomma	$10^{12} \div 10^{14}$	
Ebanite	10^{16}	
Quarzo fuso	10^{18}	

(Valori a 20 °C)

Campo elettrico impresso

- Oltre alle forze elettromagnetiche, sulle cariche possono agire anche forze di natura non elettrica (ad es. meccanica o chimica)
- In questo caso la forza per unità di carica viene detta **campo elettrico impresso**, $\mathbf{E}_i$
- $\mathbf{E}_i$ è dimensionalmente omogeneo a un campo elettrico, ma a rigore non è un campo elettrico (non agisce sulle cariche in quanto tali, ma sul loro supporto materiale)
- In presenza di campi impressi la legge di Ohm assume la forma

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

da cui si ottiene anche

$$\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J} + \mathbf{J}_i)$$

avendo posto: $\mathbf{J}_i = -\sigma\mathbf{E}_i$ (**densità di corrente impressa**)

Effetto Joule

- Si considera una densità di carica ρ_c in moto con velocità $\mathbf{v}$ in un mezzo di conducibilità σ
  - ➨ densità di corrente $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$
- In presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}$ e di un campo impresso $\mathbf{E}_i$, la forza per unità di volume che agisce sulla carica è

$$\mathbf{f} = \rho_c(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

- La legge di Ohm indica che se la forza dovuta a $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{E}_i$ è costante, la velocità delle cariche è costante
  - ➨ sulle cariche devono agire delle forze frenanti (analoghe a forze di attrito viscoso)
  - ➨ dissipazione di energia

Effetto Joule

- Il lavoro per unità di volume compiuto nell'intervallo dt dalle forze del campo elettrico e del campo impresso vale

$$\delta L = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \rho_c(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{v} dt = \underbrace{\rho_c \mathbf{v}}_{= \mathbf{J}} \cdot \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)}_{= \mathbf{J}/\sigma} dt = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

- Questo lavoro deve essere uguale all'energia dissipata per unità di volume
- In effetti l'esperienza mostra che in un conduttore di conducibilità σ, in presenza di una densità di corrente $\mathbf{J}$, nell'intervallo di tempo dt viene prodotta per unità di volume la quantità di calore

$$\delta Q = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

Legge di Joule