

Circuiti magnetici

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 23-11-2010)

Campo magnetico stazionario o quasi stazionario

- **Condizioni stazionarie:** grandezze elettromagnetiche costanti nel tempo
- **Condizioni quasi stazionarie:** variazioni nel tempo delle grandezze elettromagnetiche sufficientemente lente da consentire di trascurare le correnti di spostamento rispetto alle correnti di conduzione

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}|$$

- ➔ In queste condizioni il campo magnetico è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl &= \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= 0 \end{aligned}$$

con le equazioni di legame materiale

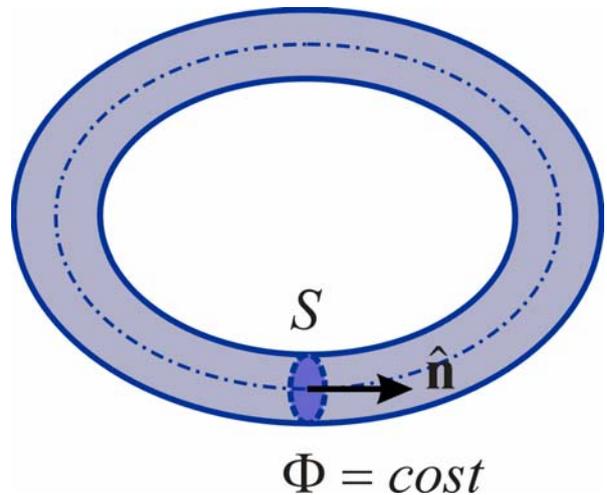
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{mezzo lineare isotropo})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (\text{mezzo non lineare})$$

Tubi di flusso di induzione magnetica

- Il vettore \mathbf{B} è solenoidale
- ➔ I tubi di flusso di \mathbf{B} non possono avere sezioni terminali, quindi devono chiusi (eventualmente all'infinito)
- ➔ Il flusso di \mathbf{B} attraverso ogni sezione trasversale di un tubo di flusso assume lo stesso valore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



3

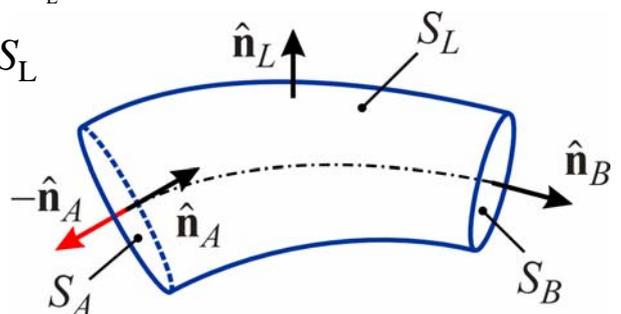
Costanza del flusso - dimostrazione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B
- \mathbf{B} è solenoidale ➔ è nullo il suo flusso attraverso la superficie chiusa S_T formata da S_A , S_B e dalla superficie laterale S_L

$$\oint_{S_T} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} \mathbf{B} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_A) dS + \int_{S_B} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS + \int_{S_L} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dS = 0$$

- Le linee di flusso di \mathbf{B} sono tangenti a S_L
 - ➔ Il flusso di \mathbf{B} attraverso S_L è nullo
- ➔ I flussi attraverso S_A e S_B sono uguali

$$\int_{S_A} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \int_{S_B} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS = \Phi$$



- ➔ Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A e S_B si può affermare che il flusso ha lo stesso valore su tutte le superfici trasversali

4

Potenziale scalare magnetico

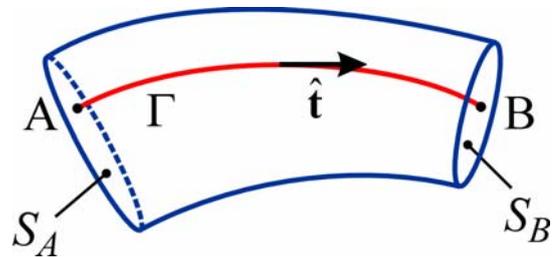
- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tubo di flusso il mezzo sia lineare isotropo
- Se all'interno del tronco di tubo di flusso la densità di corrente \mathbf{J} è nulla si ha

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

- Dato che la regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa, in tale regione è possibile definire un **potenziale scalare magnetico** ψ [unità di misura A]

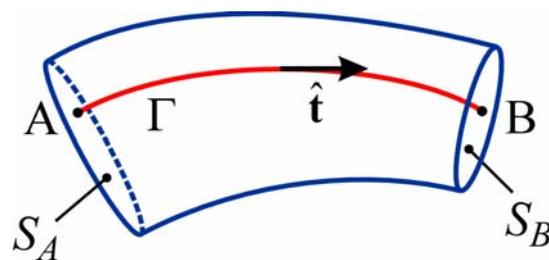
$$\mathbf{H} = -\nabla\psi$$

- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di \mathbf{H}
 - ➔ sono due superfici equipotenziali



5

Tensione magnetica



- La **tensione magnetica** [A] tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso è

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ , interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B

6

Riluttanza e permeanza

- Si definisce **riluttanza** [unità di misura $\text{henry}^{-1} = \text{H}^{-1}$] del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione magnetica ψ_{AB} e il flusso di induzione magnetica Φ

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto **permeanza** [unità di misura henry, H]

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{\mathcal{R}_{AB}} = \frac{\Phi}{\psi_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La riluttanza e la permeanza non dipendono da \mathbf{B} e da \mathbf{H} , ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del materiale*

7

Legge di Hopkinson

- La tensione magnetica tra le sezioni terminali di un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} e il flusso magnetico attraverso il tubo sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi \quad \text{Legge di Hopkinson}$$

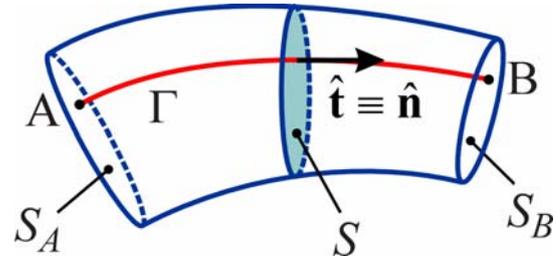
e quindi

$$\Phi = \mathcal{P}_{AB} \psi_{AB} \quad (\mathcal{P}_{AB} = 1/\mathcal{R}_{AB})$$

8

Determinazione della riluttanza

- Per calcolare \mathcal{R}_{AB} è conveniente fare coincidere
 - ♦ Γ con una linea di campo
 - ♦ S con una superficie equipotenziale (sezione normale)
- In questo modo
 - ♦ $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{\mathbf{n}}$
 - ♦ \mathbf{B} e \mathbf{H} sono paralleli a $\hat{\mathbf{t}}$
- Quindi, tenendo conto del fatto che il flusso di \mathbf{B} ha lo stesso valore su tutte le sezioni trasversali, si può esprimere \mathcal{R}_{AB} nella forma



$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_0^l H(x) dx}{\int_S B dS} = \int_0^l \frac{H(x)}{\int_{S(x)} B dS} dx$$

l = lunghezza di Γ
 x = ascissa curvilinea lungo Γ

9

Riluttanza di un tubo di flusso filiforme

- Se l'area della sezione trasversale è molto piccola (➔ tubo filiforme) si può assumere che l'induzione magnetica \mathbf{B} e la permeabilità μ siano uniformi sulla superficie S
 - ➔ sia \mathbf{B} che μ dipendono solo da x
 - ➔ L'espressione della riluttanza è

$$\mathcal{R}_{AB} = \int_0^l \frac{H(x) dx}{\int_{S(x)} B(x) dS} = \int_0^l \frac{H(x) dx}{\mu(x) H(x) \int_{S(x)} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x) A(x)}$$

($A(x)$ = area della sezione $S(x)$)

- Se la permeabilità e l'area della sezione hanno valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, si ottiene

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{l}{\mu A}$$

10

Tubo di flusso con simmetrie particolari

- L'espressione

$$\mathcal{R}_{AB} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x)A(x)}$$

non vale solo nel caso di tubi di flusso filiformi, ma può essere utilizzata in tutti i casi in cui la permeabilità e l'induzione magnetica sono uniformi sulla sezione normale del tubo di flusso

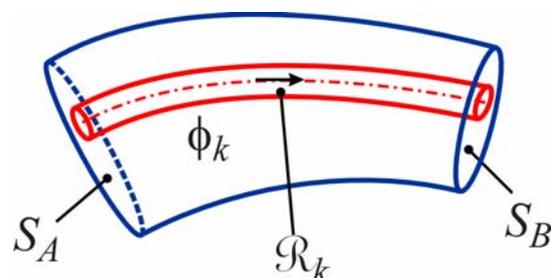
- In alcuni casi particolari si può riconoscere che \mathbf{B} deve essere uniforme a conseguenza di proprietà di simmetria del sistema

11

Riluttanza di un tubo di flusso generico

- Un tubo di flusso non filiforme può essere suddiviso in un insieme di tubi di flusso filiformi elementari, le cui sezioni terminali sono contenute nelle superfici S_A e S_B
- Al k -esimo tubo di flusso elementare è associato il flusso ϕ_k
- Per tutti i tubi di flusso la tensione magnetica è pari alla differenza di potenziale ψ_{AB} tra le superfici S_A e S_B
- Per ciascun tubo elementare, applicando il procedimento precedente, si può definire la riluttanza \mathcal{R}_k , data da

$$\mathcal{R}_k = \frac{\psi_{AB}}{\phi_k}$$



12

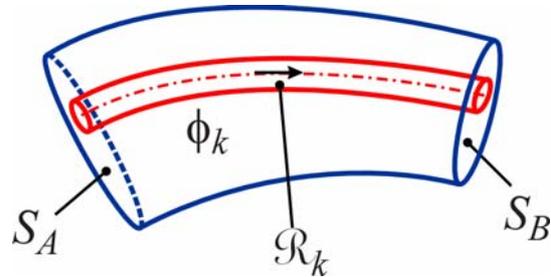
Riluttanza di un tubo di flusso generico

- Il flusso magnetico totale è dato dalla somma dei flussi dei tubi elementari

$$\Phi = \sum_k \phi_k = \sum_k \frac{\Psi_{AB}}{\mathcal{R}_k}$$

- Quindi la riluttanza totale è

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\Psi_{AB}}{\sum_k \frac{\Psi_{AB}}{\mathcal{R}_k}} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{\mathcal{R}_k}}$$



- Dato che le \mathcal{R}_k dipendono solo dalla configurazione geometrica e dalla permeabilità, lo stesso vale anche per \mathcal{R}_{AB}

13

Tubi di flusso chiusi

- Un tubo di flusso chiuso di \mathbf{B} costituisce un **circuito magnetico elementare**
 - ◆ Più in generale i circuiti magnetici possono avere strutture più complesse (ramificate)
- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata
- Infatti, in assenza di corrente concatenata, per ogni linea di campo Γ di \mathbf{H} contenuta nel tubo di flusso si avrebbe

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$$

- Dato che il verso di \mathbf{H} lungo una sua linea di campo è costante, questo richiederebbe $\mathbf{H} = 0$ e quindi anche $\mathbf{B} = 0$

14

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico

- In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS} = \frac{i_c}{\Phi}$$

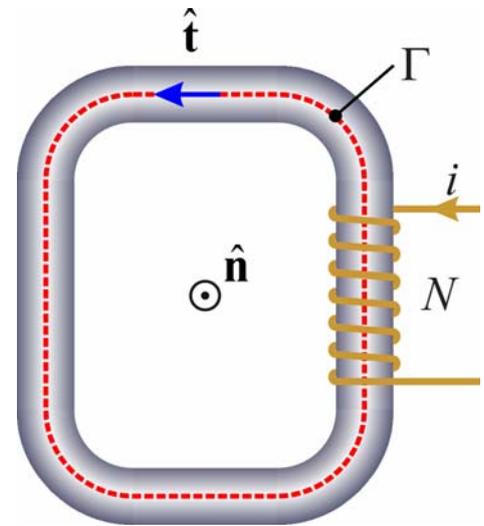
- Per un tubo di flusso chiuso la legge di Hopkinson assume la forma

$$\mathcal{R}\Phi = i_c$$

- In particolare, se il tubo di flusso è concatenato con un avvolgimento formato da N spire e percorso da una corrente i , si ha

$$\mathcal{R}\Phi = Ni$$

- La corrente concatenata i_c è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) (ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico)



15

Circuiti magnetici

- Per il campo magnetico stazionario è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff per i circuiti elettrici
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un circuito elettrico "equivalente"
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di \mathbf{B} è noto a priori
 - sistemi dotati di particolari simmetrie
 - circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti

16

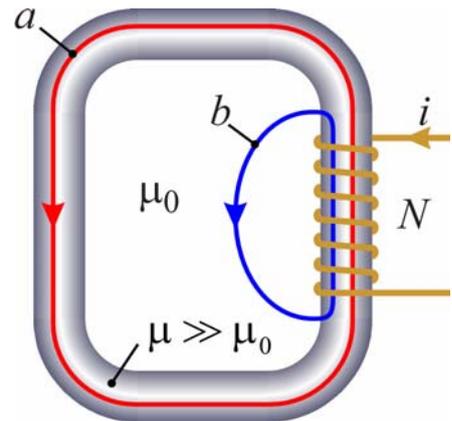
Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti (Tutti i mezzi, vuoto compreso, sono magneticamente permeabili)
- Mentre le conducibilità dei buoni conduttori e quelle degli isolanti possono differire di 18-24 ordini di grandezza, le permeabilità magnetiche possono differire, al più, di 5-6 ordini di grandezza

Esempio:

Circuito magnetico costituito da un materiale ad elevata permeabilità ($\mu \gg \mu_0$) circondato da un mezzo con permeabilità relativamente bassa ($\mu \cong \mu_0$)

- Sono possibili due tipi di linee di flusso
 - ♦ *a*) linee che si sviluppano interamente nel mezzo ad elevata permeabilità
 - ♦ *b*) linee che in parte si sviluppano nel mezzo a bassa permeabilità



17

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

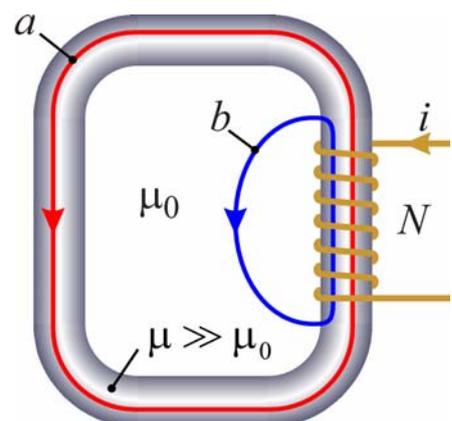
- Si considerano due tubi di flusso filiformi aventi assi coincidenti con le linee *a* e *b*
- Dalla legge di Hopkinson si ottiene

$$\Phi_a = \frac{Ni}{\mathcal{R}_a} \quad \Phi_b = \frac{Ni}{\mathcal{R}_b}$$

- Dato che il tubo di flusso *b* comprende un tratto a bassa permeabilità risulta

$$\mathcal{R}_b \gg \mathcal{R}_a \quad \Rightarrow \quad \Phi_b \ll \Phi_a$$

- ➔ E' possibile trascurare il flusso dovuto a linee del tipo *b* e considerare l'anello di materiale ad elevata permeabilità come un tubo di flusso di **B**

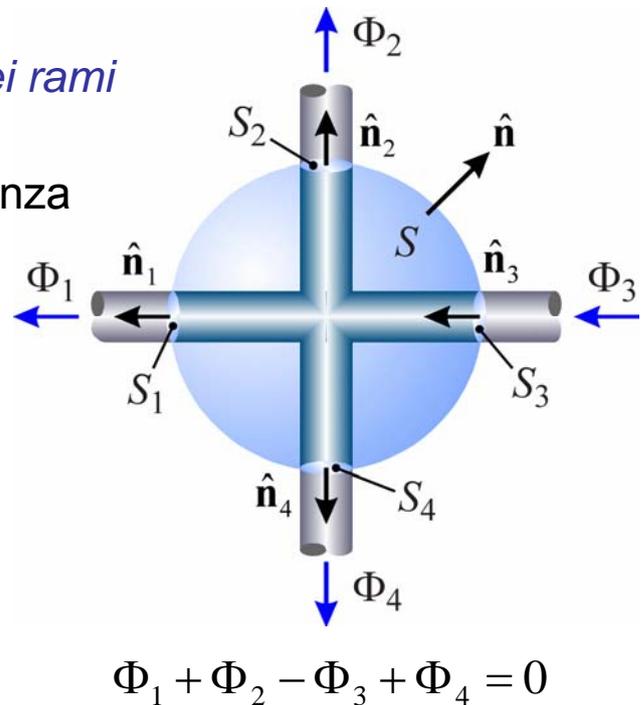


18

Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla
- ➔ In particolare si ha che:
La somma algebrica dei flussi dei rami afferenti ad un nodo è nulla
- Questa legge è diretta conseguenza del fatto che \mathbf{B} è solenoidale

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \sum_k \pm \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS = \\ &= \sum_k \pm \Phi_k = 0 \end{aligned}$$



19

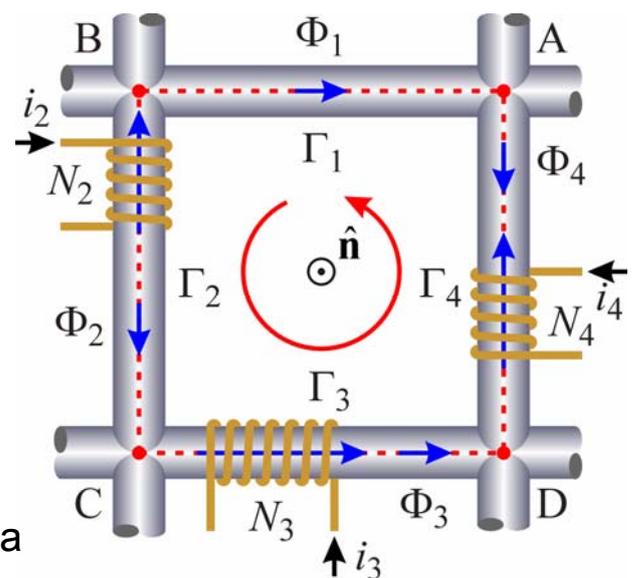
Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

- La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa
- Questa legge si ottiene direttamente dalla legge di Ampere

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl &= \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \\ &= \sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = i_C \end{aligned}$$

- Se la forza magnetomotrice è prodotta da un insieme di avvolgimenti concatenati con la maglia

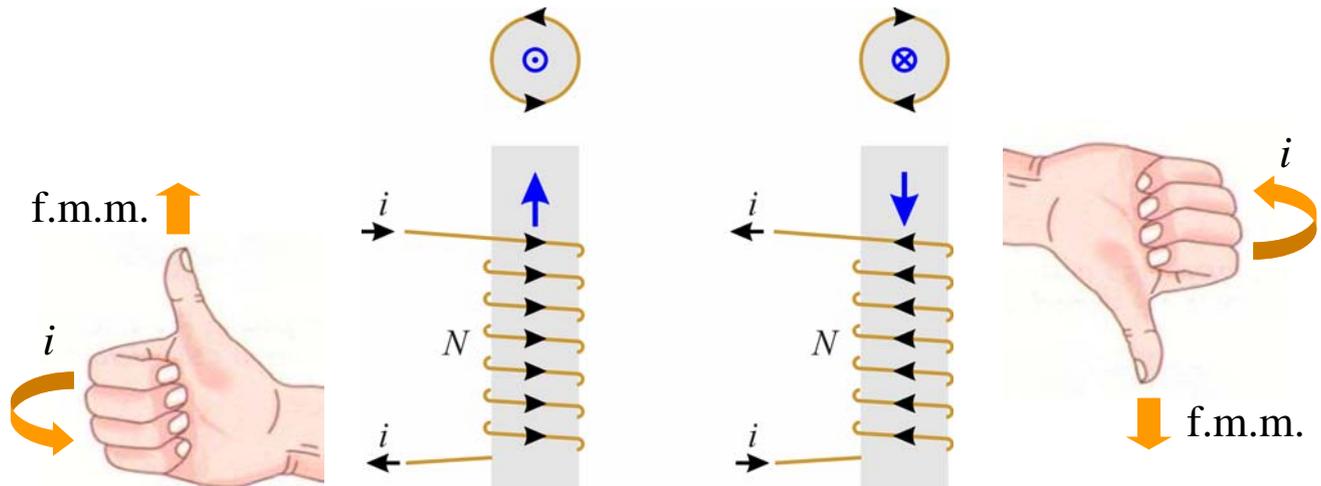
$$\sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$\begin{aligned} -\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4 &= \\ &= -N_2 i_2 + N_3 i_3 + N_4 i_4 \end{aligned}$$

20

Versi di riferimento delle f.m.m.



- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento orientati relativamente ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra
- A secondo membro dell'equazione di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, segno – se è discorde

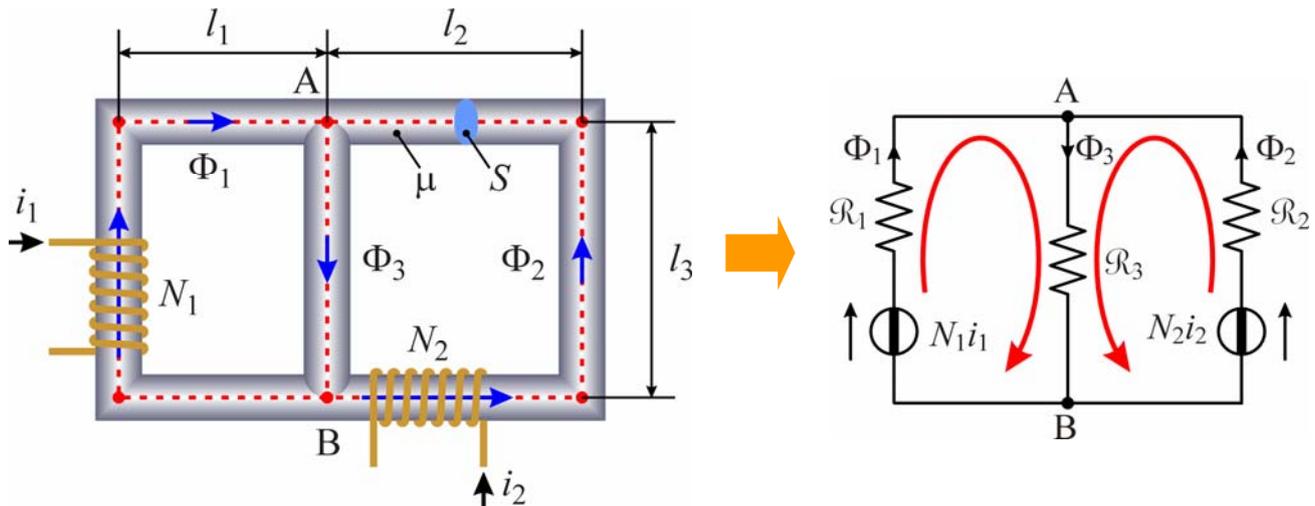
21

Analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
R	\mathcal{R}
i	Φ
v	Ψ
(f.e.m.) e	(f.m.m.) Ni
$v_k = R_k i_k$	$\Psi_k = \mathcal{R}_k \Phi_k$
$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_k \pm \Phi_k = 0$
$\sum_k \pm R i_k = \sum_k \pm e_k$	$\sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$

22

Esempio



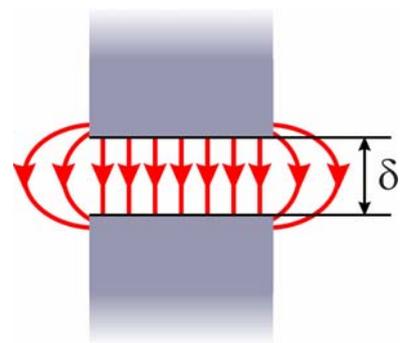
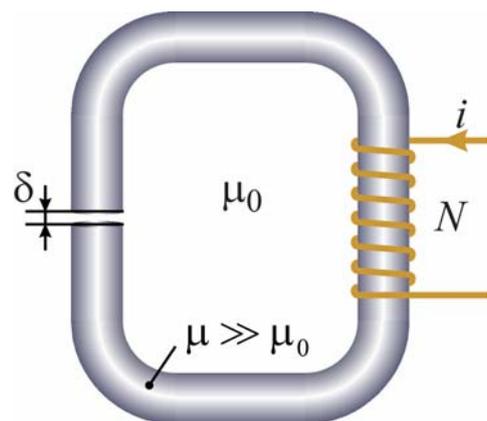
$$\mathcal{R}_1 = \frac{2l_1 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2l_2 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_1 i_1 \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$

23

Circuiti magnetici con traferri

- In alcuni casi, in un circuito magnetico si possono avere delle interruzioni del materiale ad elevata permeabilità (**traferri**)
- La presenza di traferri di piccolo spessore non altera in modo significativo l'andamento delle linee di flusso di \mathbf{B} (si hanno degli *effetti di bordo*, spesso trascurabili)



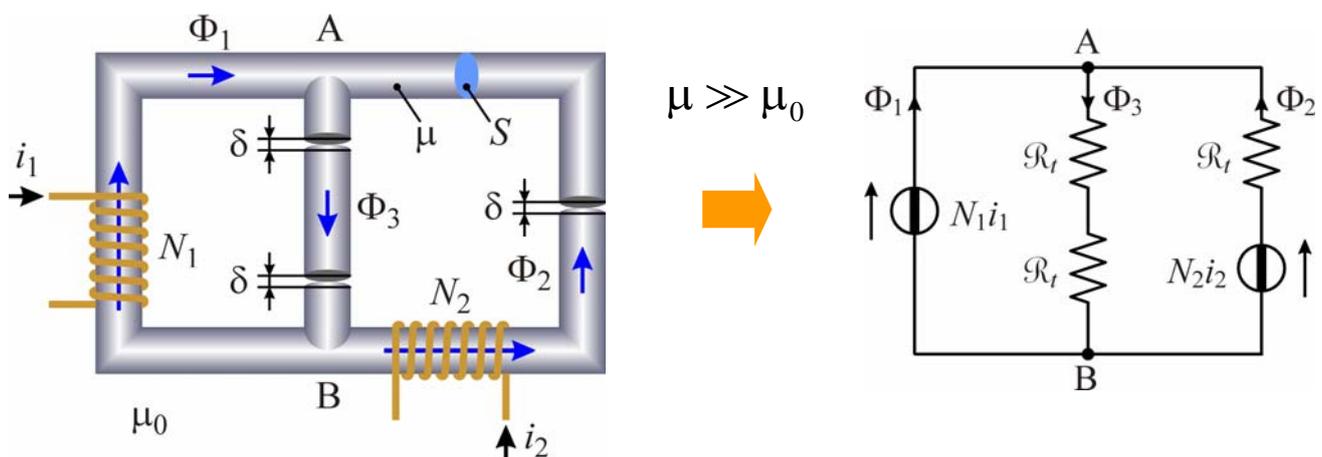
24

Circuiti magnetici con traferri

- Qualora sia necessario tenere conto degli effetti di bordo, si può valutare la riluttanza dei traferri assumendo un'area efficace $S' > S$ (S = sezione del nucleo in corrispondenza del traferro)
 - ♦ Un metodo empirico per definire l'area efficace consiste nell'aggiungere un bordo di larghezza pari allo spessore del traferro
- I traferri possono alterare notevolmente l'entità dei flussi magnetici, dato che le loro riluttanze possono essere molto elevate anche per valori modesti dello spessore δ
 - ➔ Spesso le riluttanze dei tratti di materiale ad elevata permeabilità risultano trascurabili rispetto alle riluttanze dei traferri
 - ➔ Nel circuito elettrico "equivalente" i tratti ad elevata permeabilità corrispondono a conduttori ideali e i traferri a corrispondono a resistori

25

Esempio



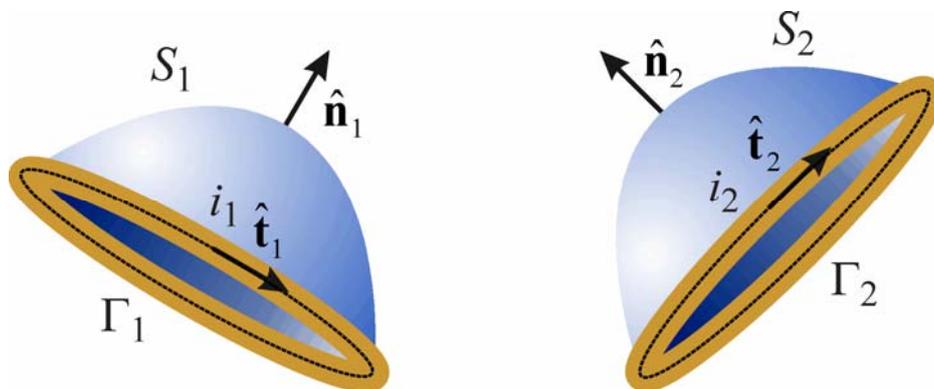
Traferri di uguale spessore δ

$$\text{Riluttanza di un traferro: } \mathcal{R}_t = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

26

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Si considerano due circuiti elettrici Γ_1 e Γ_2 percorsi dalle correnti i_1 e i_2 e immersi in un mezzo lineare isotropo



- ➔ In questa ipotesi le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle correnti sono lineari
- ➔ I flussi di induzione magnetica concatenati con i due avvolgimenti sono funzioni lineari delle correnti i_1 e i_2

27

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

- I coefficienti L_1 e L_2 sono detti **coefficienti di autoinduzione** o **(auto)induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti **coefficienti di mutua induzione** o **mutue induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- Si può dimostrare che risulta sempre verificata l'uguaglianza $M_{12} = M_{21} = M$ quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti

28

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente i_k , quando la corrente nell'altro circuito è nulla

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_1} \right|_{i_2=0} \qquad L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

- Il coefficiente di mutua induzione rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente nell'altro circuito valutato quando la corrente i_k è nulla

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

29

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le definizioni di coefficienti di auto e mutua induzione possono essere generalizzate al caso di N circuiti
- In questo caso risulta

$$\Phi_{c1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N$$

$$\Phi_{c2} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \dots + M_{2N} i_N$$

⋮

$$\Phi_{cN} = M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \dots + L_N i_N$$

dove

$$L_k = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_k} \right|_{i_h=0 \forall h \neq k}$$

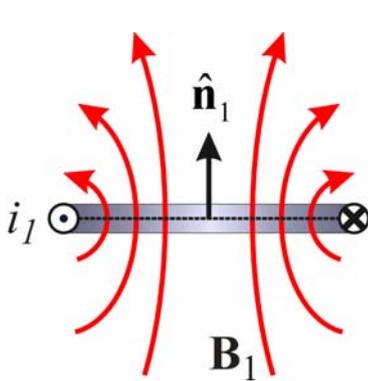
$$M_{kj} = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_j} \right|_{i_h=0 \forall h \neq j}$$

- Inoltre si ha

$$M_{hk} = M_{kh}$$

30

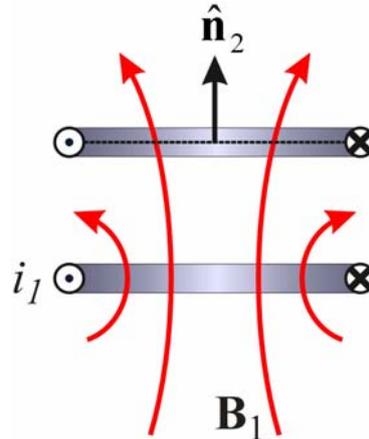
Segni dei coefficienti di auto e mutua induzione



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0$$

$$\Rightarrow L_1 > 0$$

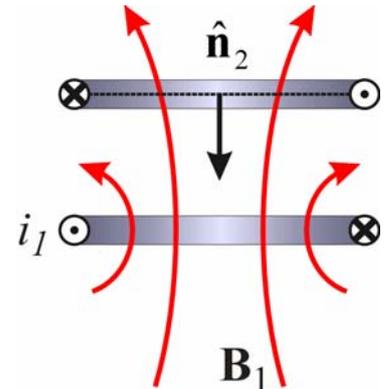
Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} > 0$$

$$\Rightarrow M > 0$$

Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} < 0$$

$$\Rightarrow M < 0$$

31

Esempio 1

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

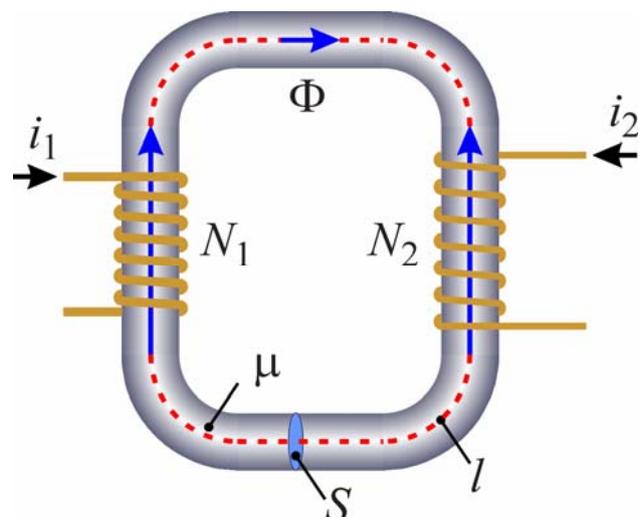
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- ➔ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



32

Esempio 2

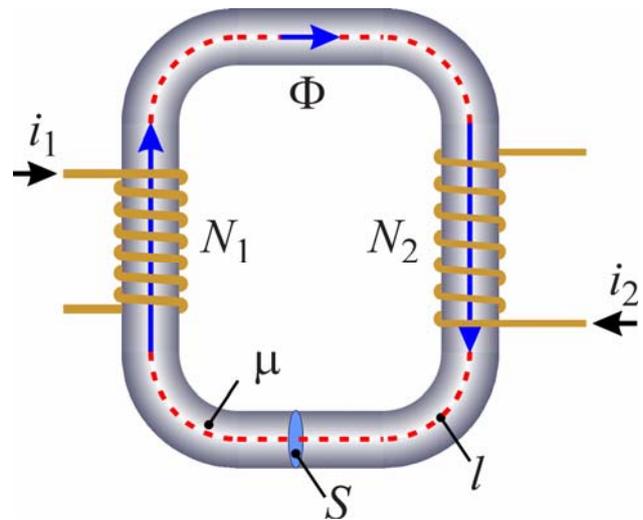
- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$



- ➔ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

33

Uguaglianza dei coefficienti di mutua induzione

- Espressione del flusso concatenato con un circuito in funzione del potenziale vettore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- I potenziali vettori corrispondenti alle due correnti i_1 e i_2 sono

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{\mathbf{t}}_1}{r} dl_1 \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\mu i_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{\mathbf{t}}_2}{r} dl_2$$

- ➔ Espressioni dei coefficienti di mutua induzione (formule di Neumann)

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{1}{i_2} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 dl_1 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2}{r} dl_2 dl_1$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{1}{i_1} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1}{r} dl_1 dl_2$$

➔ $M_{12} = M_{21} = M$

34

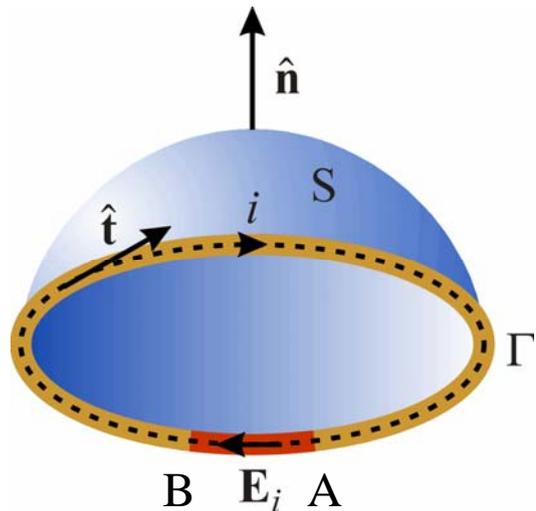
Energia magnetica di un circuito filiforme

- Si considera un circuito costituito da un conduttore filiforme Γ con sezione Δs e conducibilità σ , sede di un campo impresso \mathbf{E}_i che agisce tra le sezioni A e B
- Si assume che per $t = 0$ il campo \mathbf{E}_i e quindi la corrente e il campo magnetico siano nulli
- Mediante un processo quasi stazionario, nell'intervallo $[0, t_0]$ la corrente viene portata da zero fino al valore i_0
- Il lavoro compiuto nell'intervallo $[0, t_0]$ dalle forze del campo impresso è

$$\int_0^{t_0} \left(\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} \Delta s dl \right) dt = \int_0^{t_0} e i dt$$

dove

$$e = \int_{A\Gamma}^B \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad i = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta s$$



35

Energia magnetica di un circuito filiforme

- Facendo uso della relazione costitutiva

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \Rightarrow \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}$$

e della legge di Faraday

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

si ottiene

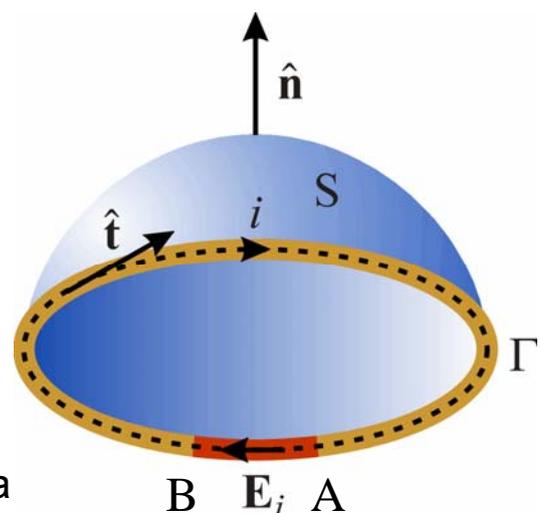
$$\int_{A\Gamma}^B \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{t}} \frac{\Delta s}{\Delta s} dl + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- Questa relazione si può porre nella forma

$$e = Ri + \frac{d\Phi}{dt}$$

dove

$$R = \oint_{\Gamma} \frac{dl}{\sigma \Delta s}$$



36

Energia magnetica di un circuito filiforme

- Il lavoro compiuto dal campo impresso nell'intervallo $[0, t_0]$ è quindi

$$\int_0^{t_0} e i dt = \int_0^{t_0} R i^2 dt + \int_0^{\Phi_0} i d\Phi$$

- Il primo integrale a secondo membro rappresenta l'energia dissipata per effetto Joule (e dipende dall'andamento della corrente tra 0 e t_0)
- Se la relazione tra i e Φ è biunivoca (\rightarrow mezzo privo di isteresi) l'ultimo integrale dipende solo dal valore del flusso all'istante t_0 e rappresenta **l'energia accumulata nel campo magnetico**
 - corrisponde al lavoro compiuto dal campo impresso per creare il campo magnetico prodotto dalla corrente i_0
 - viene restituita interamente se la corrente viene riportata a zero
- In un mezzo lineare isotropo ($\rightarrow \Phi = Li$) l'energia magnetica vale

$$W_M = \int_0^{\Phi_0} \frac{\Phi}{L} d\Phi = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2}{L} = \frac{1}{2} i_0 \Phi_0 = \frac{1}{2} L i_0^2$$

37

Energia magnetica di un insieme di circuiti filiformi

- Procedendo in modo simile, si può dimostrare che nel caso di un sistema costituito da N circuiti filiformi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i d\Phi$$

- Se il campo magnetico ha sede in un mezzo lineare isotropo si ha

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N M_{kj} i_k i_j$$

- Nel caso particolare di due soli circuiti l'espressione dell'energia è

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

38

Energia del campo magnetico

- L'energia magnetica di un circuito filiforme può essere espressa anche in funzione dei campi \mathbf{B} e \mathbf{H}

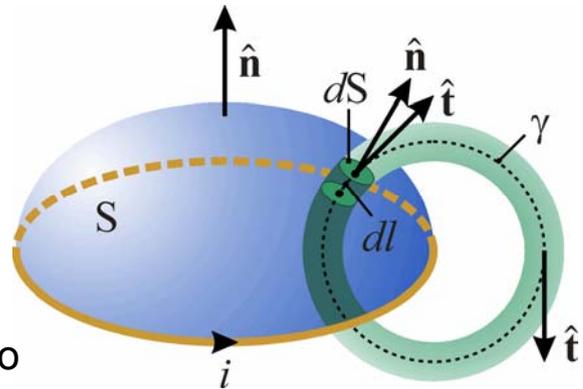
$$W_M = \int_0^{\Phi_0} i d\Phi$$

- Il flusso concatenato con il circuito è

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S B \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area dS individua un tubo di flusso di \mathbf{B} concatenato con il circuito
- Si può esprimere la corrente i in funzione di \mathbf{H} applicando la legge di Ampere ad una linea di campo γ di \mathbf{B} coincidente con l'asse del tubo di flusso (se il mezzo è isotropo γ è anche una linea di campo di \mathbf{H})

$$i = \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\gamma} H dl$$



39

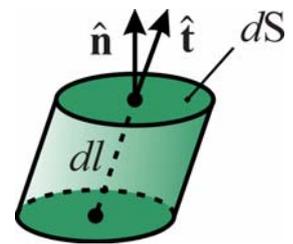
Energia del campo magnetico

- Utilizzando le espressioni di i e Φ e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è $d\tau = dl \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ si ha

$$i d\Phi = \oint_{\gamma} H dl \int_S dB \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \oint_{\gamma} H dB dl \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\tau_c} H dB d\tau$$

- Quindi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \int_0^{\Phi_0} i d\Phi = \int_{\tau_c} \int_0^{B_0} H dB d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{H} \text{ sono diversi da zero})$$



- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} sia biunivoca (mezzi privi di isteresi)

- Per un mezzo lineare isotropo ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) si ha

$$W_M = \int_{\tau_c} \frac{1}{2} \mu H_0^2 d\tau = \int_{\tau_c} \frac{1}{2} H_0 B_0 d\tau = \int_{\tau_c} \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} d\tau$$

- Si può dimostrare che queste espressioni, ottenute per un circuito filiforme, valgono anche per distribuzioni di corrente più generali

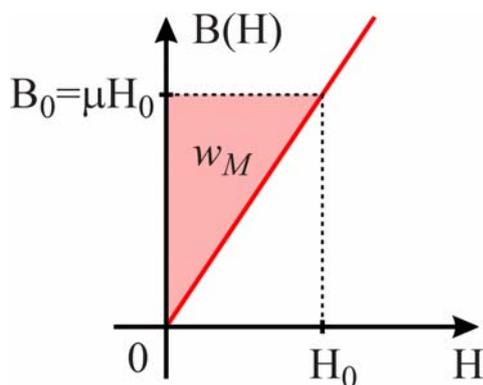
40

Energia del campo magnetico

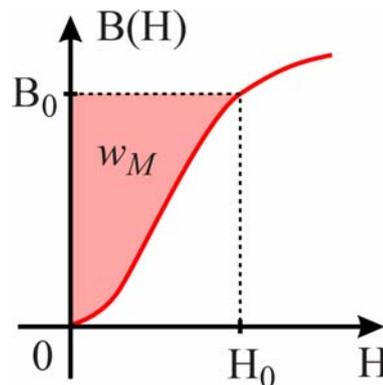
- Si può interpretare come densità di energia associata al campo magnetico la quantità

$$w_M = \frac{dW_M}{d\tau} = \int_0^{B_0} H dB$$

- w_M rappresenta l'area compresa tra la curva $B(H)$ e l'asse delle ordinate



Mezzo lineare



Mezzo non lineare

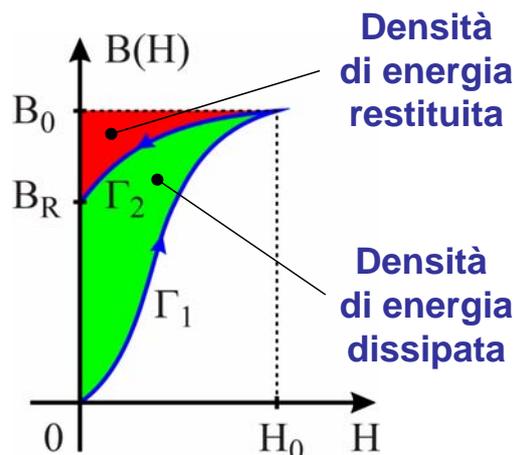
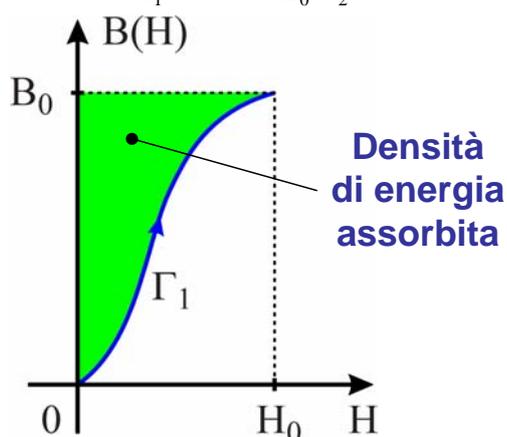
41

Perdite per isteresi

- Nel caso di un mezzo con isteresi, l'energia spesa per creare il campo è (partendo da i e \mathbf{H} nulli) è maggiore di quella che viene restituita se la corrente i , e quindi \mathbf{H} , sono riportati a zero

- ➔ In questo caso viene assorbita in modo irreversibile, e quindi dissipata, l'energia per unità di volume

$$w_D = \int_{0 \Gamma_1}^{B_0} H dB + \int_{B_0 \Gamma_2}^{B_R} H dB$$



42

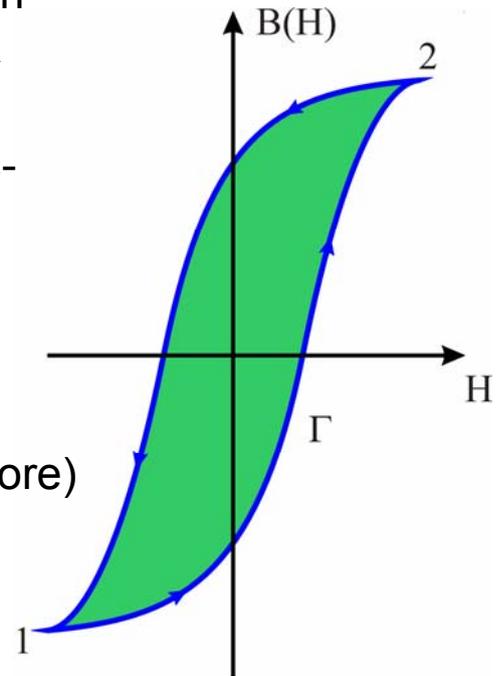
Perdite per isteresi

- Si fa variare periodicamente la corrente in modo che il materiale ferromagnetico sia soggetto a cicli di isteresi
- Complessivamente in ogni ciclo viene assorbita, per unità di volume, l'energia

$$w_D = \oint_{\Gamma} H dB$$

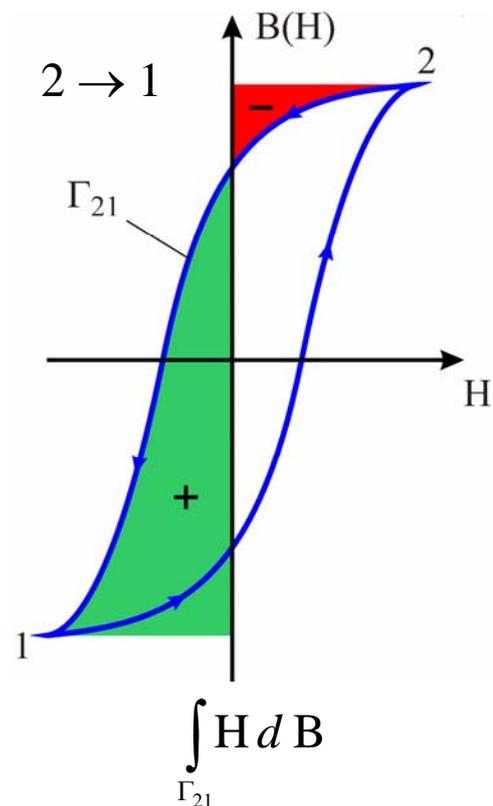
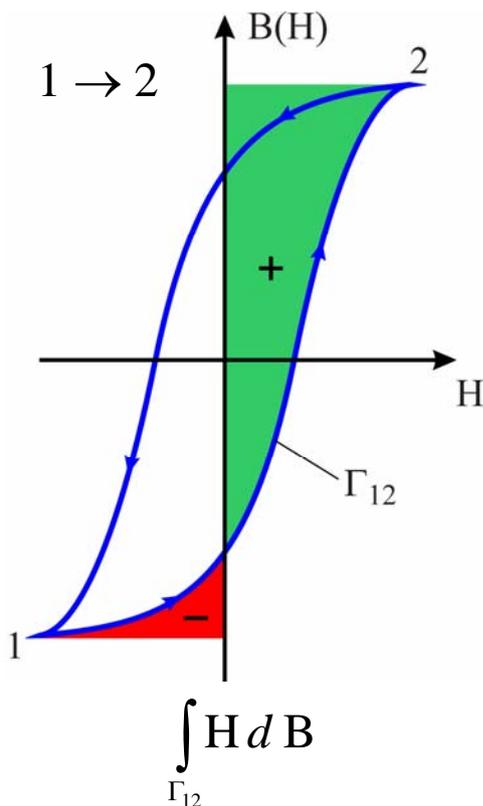
➔ Dissipazione di energia (convertita in calore)

- Il valore dell'energia dissipata in un ciclo corrisponde all'area delimitata dal ciclo di isteresi



43

Perdite per isteresi



44

Forza di un elettromagnete

- \mathbf{F} = risultante delle forze agenti sull'ancora dovute all'elettromagnete
- \mathbf{F}_e = forza esterna necessaria a mantenere l'ancora in equilibrio
- Si può valutare \mathbf{F}_e (e quindi \mathbf{F}) applicando uno spostamento virtuale dx (nella direzione di \mathbf{F}_e) all'ancora
- Bilancio energetico:

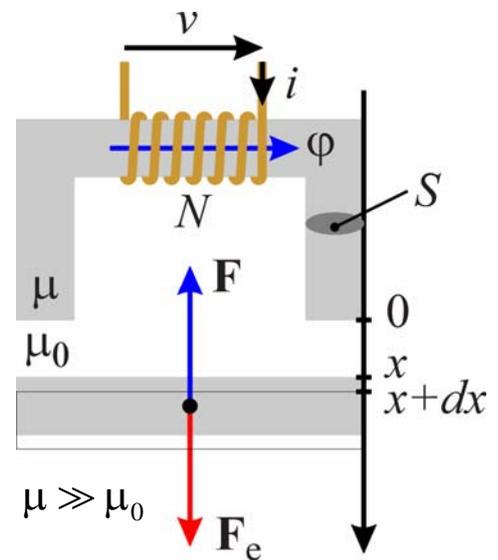
$$dL_m + dL_E = dW_M$$

dL_m = lavoro meccanico compiuto da F_e

$dL_E = vidt = id\Phi$ = lavoro elettrico
(fornito da generatori esterni)

$\Phi = N\phi$ = flusso concatenato

dW_M = variazione dell'energia magnetica



45

Forza di un elettromagnete

- Quindi si ha

$$F_e dx + id\Phi = dW_M$$

- Per calcolare \mathbf{F}_e (e quindi \mathbf{F}) si può considerare una trasformazione infinitesima nella quale il flusso viene mantenuto costante ($d\Phi = 0$)

$$F = F_e = \left. \frac{dW_M}{dx} \right|_{\Phi=\text{cost}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L^2} \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

- Il risultato non dipende dalla particolare trasformazione considerata, infatti nel caso generale si ottiene

$$F_e dx + id\Phi = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$$

$$F_e dx + i(Ldi + idL) = Lidi + \frac{1}{2} i^2 dL \quad \Rightarrow \quad F = F_e = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

46

Forza di un elettromagnete

- Facendo uso della legge di Hopkinson

$$\mathcal{R}\varphi = Ni$$

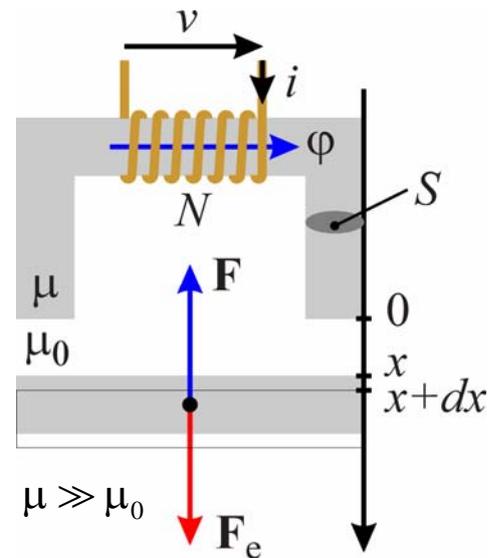
(\mathcal{R} = riluttanza del circuito magnetico)

e della definizione di induttanza

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\varphi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

si può esprimere la forza agente sull'ancora nella forma

$$F = -\frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}$$



47

Forza di un elettromagnete

- Se è possibile trascurare la riluttanza dei tratti formati dal materiale ad alta permeabilità, \mathcal{R} è data la somma delle riluttanze dei due traferri

$$\mathcal{R} = \frac{2x}{\mu_0 S} \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{\varphi^2}{\mu_0 S} = \frac{N^2 i^2 \mu_0 S}{4x^2}$$

- Se il campo magnetico è uniforme si ha

$$\frac{\varphi}{\mu_0 S} = \frac{B}{\mu_0} = H$$

- Quindi si può esprimere F come

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \cdot 2S$$

- La forza è data dal prodotto dell'area dei traferri ($2S$) per la quantità

$$P_M = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{pressione magnetica})$$

48