

Trasformatore

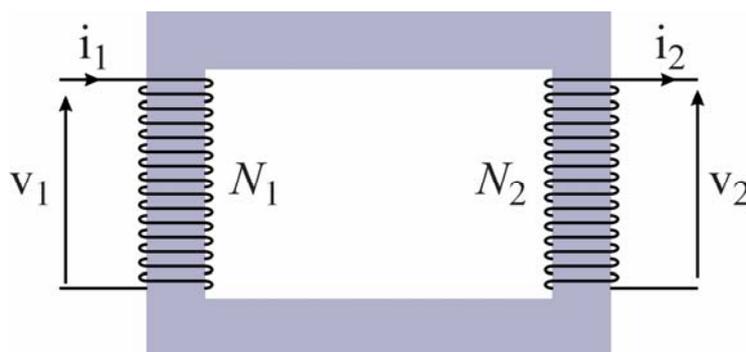
Parte 1

Trasformatore monofase

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm

(versione del 10-12-2013)

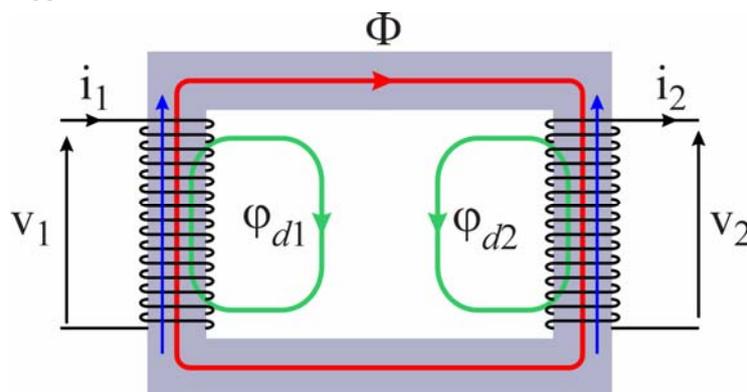
Schema di principio



- Il **trasformatore** è una macchina elettrica statica (priva di parti in movimento)
- E' costituito da due avvolgimenti (detti **primario** e **secondario**) aventi rispettivamente N_1 e N_2 spire avvolti su un nucleo di materiale ferromagnetico
- E' un componente a due porte che consente di trasferire potenza elettrica tra due circuiti elettrici non collegati tra loro, ma accoppiati per mezzo di un circuito magnetico

Ipotesi sul campo magnetico

- Se gli avvolgimenti sono percorsi da corrente viene generato un campo magnetico
- Si assume che le linee di flusso abbiano andamenti qualitativi corrispondenti ai tre tipi indicati in figura
 - ◆ linee che si sviluppano interamente nel nucleo e si concatenano con entrambi gli avvolgimenti
 - ◆ linee che si sviluppano in parte in aria e si concatenano con un solo avvolgimento



3

Flussi di induzione magnetica (1)

- Il flusso di induzione magnetica Φ dovuto a linee di campo che si concatenano con entrambi gli avvolgimenti è detto **flusso principale**
- I flussi concatenati con il solo avvolgimento primario o il solo avvolgimento secondario sono detti **flussi di dispersione**
 - ◆ La riluttanza dei tubi di flusso di dispersione è determinata prevalentemente dai tratti in aria
 - ➔ è sempre lecito trascurare gli effetti di non linearità del nucleo e assumere che i flussi di dispersione siano proporzionali alle correnti

$$\varphi_{d1} = L_{d1} i_1$$

$$\varphi_{d2} = L_{d2} i_2$$

$$L_{d1}, L_{d2} = \text{induttanze di dispersione}$$

- ◆ L_{d1} e L_{d2} sono correlate ai soli flussi dispersi, quindi non rappresentano le induttanze dei due avvolgimenti

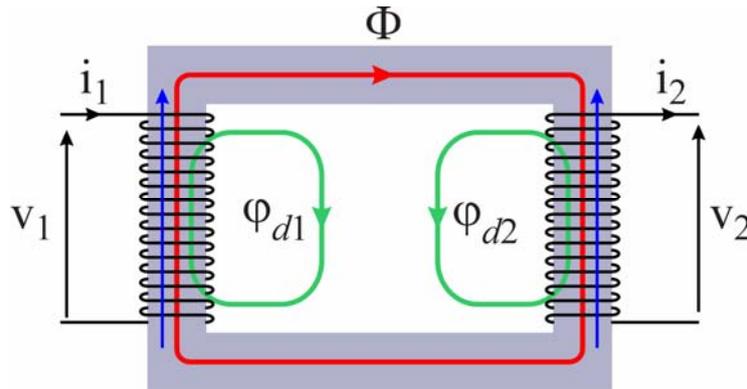
4

Flussi di induzione magnetica (2)

- Flussi totali concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1\Phi + \varphi_{d1} = N_1\Phi + L_{d1}i_1$$

$$\Phi_{c2} = -N_2\Phi + \varphi_{d2} = -N_2\Phi + L_{d2}i_2$$



5

Equazioni interne

- Circuito primario**

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{d\Phi_{c1}}{dt} = R_1 i_1(t) + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

R_1 = resistenza dell'avvolgimento primario

- Circuito secondario**

$$v_2(t) = -R_2 i_2(t) - \frac{d\Phi_{c2}}{dt} = -R_2 i_2(t) - L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

R_2 = resistenza dell'avvolgimento secondario

- Circuito magnetico**

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

\mathcal{R} = riluttanza del nucleo

6

Equazioni in condizioni di regime sinusoidale

- **Ipotesi**

- ◆ Il primario è alimentato da una tensione $v_1(t)$ sinusoidale
- ◆ Il secondario è collegato a un carico lineare
- ◆ E' possibile trascurare gli effetti non lineari nel nucleo
- ➔ In condizioni di regime tutte le grandezze dipendenti dal tempo variano con legge sinusoidale
- ➔ E' possibile applicare la trasformata di Steinmetz alle equazioni interne

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1\Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2\Phi$$

$$N_1\mathbf{I}_1 - N_2\mathbf{I}_2 = \mathcal{R}\Phi$$

7

Effetti dissipativi in un trasformatore

- Nel modello sviluppato fino a a questo punto si è tenuto conto solo degli effetti dissipativi dovuti alle resistenze degli avvolgimenti
 - ➔ **“perdite nel rame”**
- Altri fenomeni dissipativi avvengono all'interno del nucleo magnetico
 - ➔ **“perdite nel ferro”**
 - ◆ **Perdite per correnti parassite (correnti di Foucault)**
 - Se il flusso di induzione magnetica nel nucleo varia nel tempo all'interno del nucleo si hanno delle forze elettromotrici indotte
 - A causa della conducibilità del materiale ferromagnetico all'interno del nucleo si hanno delle correnti
 - ➔ Dissipazione di energia per effetto Joule
 - ◆ **Perdite per isteresi**

8

Correnti parassite (1)

- Induzione magnetica \mathbf{B} uniforme, ortogonale alle sezioni trasversali e variabile con legge sinusoidale
- Si può pensare che in ogni sezione trasversale del nucleo esistano dei circuiti elettrici elementari
- Se S indica l'area della sezione racchiusa da un circuito elementare, il flusso concatenato è

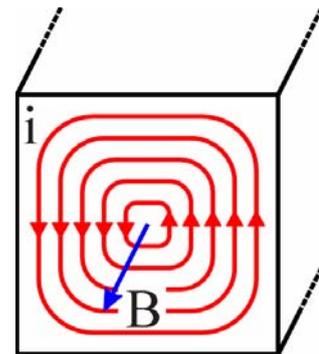
$$\Phi = SB_M \cos \omega t$$

- ➔ Forza elettromotrice indotta

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega SB_M \sin \omega t = E_M \sin \omega t$$

- ➔ Se R è la resistenza di un circuito elementare, la potenza media dissipata in un periodo è

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{E_M^2}{R} = \frac{\omega^2 S^2 B_M^2}{2R}$$



9

Correnti parassite (2)

- La trattazione precedente giustifica intuitivamente la formula semiempirica

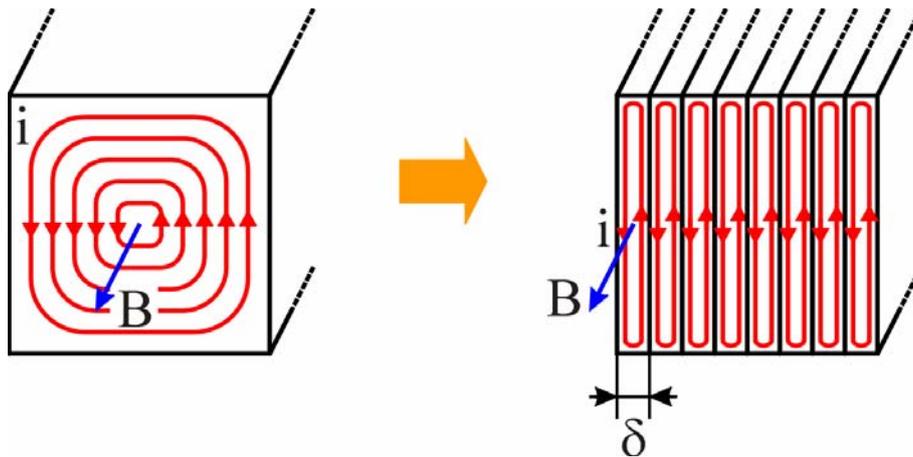
$$p_{CP} = K_{CP} f^2 B_M^2$$

- ◆ p_{CP} = potenza dissipata per unità di peso del materiale
 - ◆ f = frequenza
 - ◆ B_M = induzione massima
 - ◆ K_{CP} = costante dipendente dalla forma della sezione e dal materiale (inversamente proporzionale alla resistività)
- Per ridurre le perdite dovute alle correnti parassite
 - ◆ si utilizzano leghe ad elevata resistività (ferro-silicio)
 - ◆ si ricorre alla **laminazione del nucleo**

10

Laminazione del nucleo (1)

- Il nucleo è formato da sottili lamierini sovrapposti e isolati tra loro
- Le correnti parassite si possono richiudere solo all'interno dei lamierini
 - ◆ i percorsi interessati dalle correnti parassite hanno sezione minore
 - ➔ resistenza più elevata
 - ➔ a parità di f.e.m. indotta si hanno correnti minori
 - ◆ l'area delimitata dalle linee di corrente è minore
 - ➔ riduzione del flusso concatenato e quindi della f.e.m. indotta



11

Laminazione del nucleo (2)

- Nel caso di un nucleo laminato, la potenza dissipata per unità di peso può essere espressa mediante la relazione

$$p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$$

- ◆ p_{CP} = potenza dissipata per unità di peso del materiale
- ◆ f = frequenza
- ◆ B_M = induzione massima
- ◆ δ = spessore di un lamierino
- ◆ k_{CP} = costante dipendente dal materiale

12

Perdite per isteresi

- Ad ogni ciclo di isteresi corrisponde un'energia dissipata per unità di volume pari all'area racchiusa dal ciclo stesso
- ➔ Le perdite per isteresi nel nucleo di un trasformatore dipendono
 - ◆ dal numero di cicli di isteresi nell'unità di tempo, determinato dalla frequenza f
 - ◆ dall'area del ciclo di isteresi, determinata dal valore massimo dell'induzione magnetica B_M

- ➔ La potenza dissipata può essere espressa mediante la formula semiempirica

$$p_I = k_I f B_M^{1.6}$$

- ◆ p_I = potenza dissipata per unità di peso
- ◆ f = frequenza
- ◆ B_M = induzione massima
- ◆ k_I = costante dipendente dal materiale

13

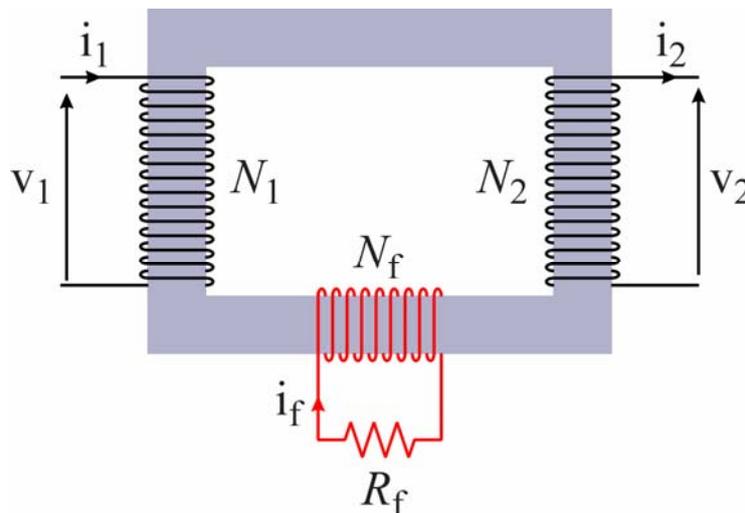
Dipendenza dalle tensioni e dalla frequenza

- Perdite per correnti parassite: $p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$
- Perdite per isteresi: $p_I = k_I f B_M^{1.6}$
- Se si trascura la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} si ha
$$\mathbf{V}_1 \cong j\omega N_1 \Phi = j2\pi f N_1 S \mathbf{B}$$
 - ◆ Se \mathbf{V}_1 è fissata, il valore massimo dell'induzione magnetica B_M è circa inversamente proporzionale alla frequenza
 - ➔ le perdite per correnti parassite sono praticamente costanti al variare di f
 - ➔ le perdite per isteresi diminuiscono al crescere di f
 - ◆ Se f è fissata, B_M è direttamente proporzionale all'ampiezza di $v_1(t)$
 - ➔ le perdite aumentano all'aumentare dell'ampiezza di $v_1(t)$

14

Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per tenere conto delle perdite nel ferro si può modificare il modello introducendo un terzo avvolgimento fittizio caricato da una resistenza R_f
- Il valore della resistenza e il numero di spire dell'avvolgimento vanno scelti in modo che la potenza dissipata su R_f coincida con la potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro



15

Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per l'avvolgimento fittizio vale la relazione

$$R_f \mathbf{I}_f + j\omega N_f \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_f = -j\omega \frac{N_f}{R_f} \Phi$$

- Con il terzo avvolgimento l'equazione del circuito magnetico diviene

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 + N_f \mathbf{I}_f = \mathcal{R} \Phi$$

cioè

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

$$K_f = \frac{N_f^2}{R_f}$$

- ➔ Le equazioni interne diventano

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1}) \mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2}) \mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

16

Trasformatore ideale (1)

- Il **trasformatore ideale** è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
 - ◆ avvolgimenti con resistenza nulla → $R_1 = R_2 = 0$
 - ◆ assenza di flussi dispersi → $L_{d1} = L_{d2} = 0$
 - ◆ nucleo con permeabilità infinita → $\mu = \infty$ → $\mathcal{R} = 0$
 - ◆ assenza di effetti dissipativi nel nucleo → $K_f = 0$
- In queste condizioni le equazioni interne divengono

$$\mathbf{V}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = 0$$



$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$$

17

Trasformatore ideale (2)

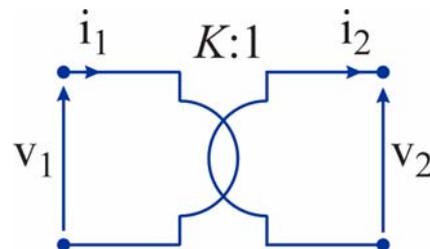
Equazioni caratteristiche

$$v_1(t) = K v_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{K} i_2(t)$$

$$K = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{rapporto di trasformazione (rapporto spire)}$$

Simbolo



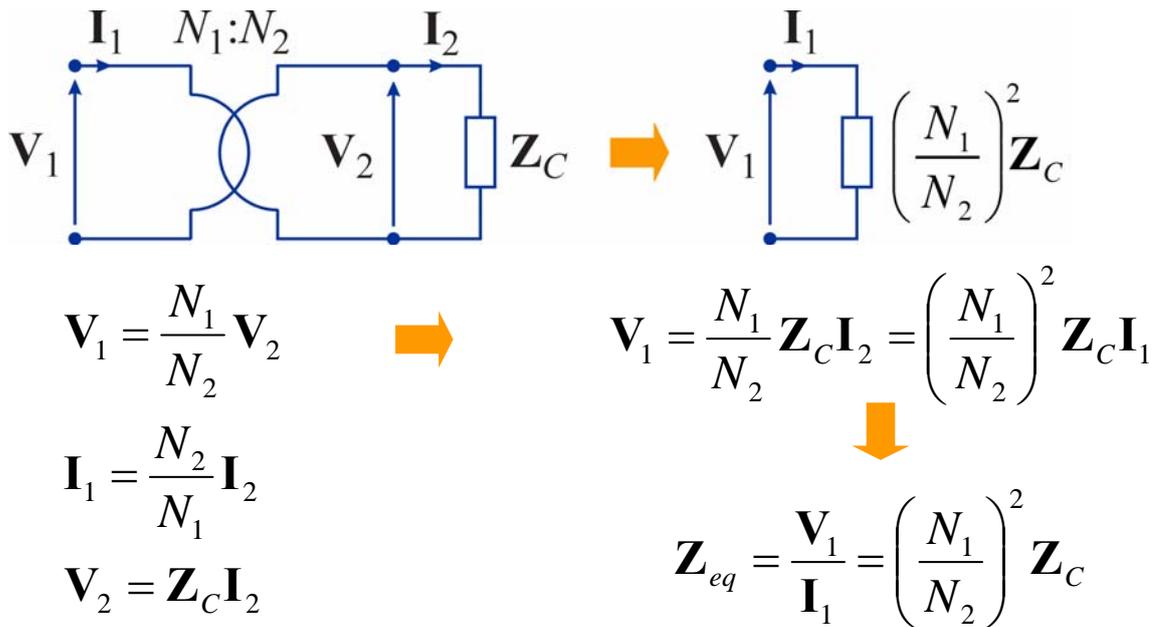
Potenza assorbita

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t) = K v_2(t) \left[\frac{1}{K} i_2(t) \right] - v_2(t) i_2(t) = 0$$

- ➔ La potenza assorbita a primario viene trasferita integralmente in uscita al secondario

18

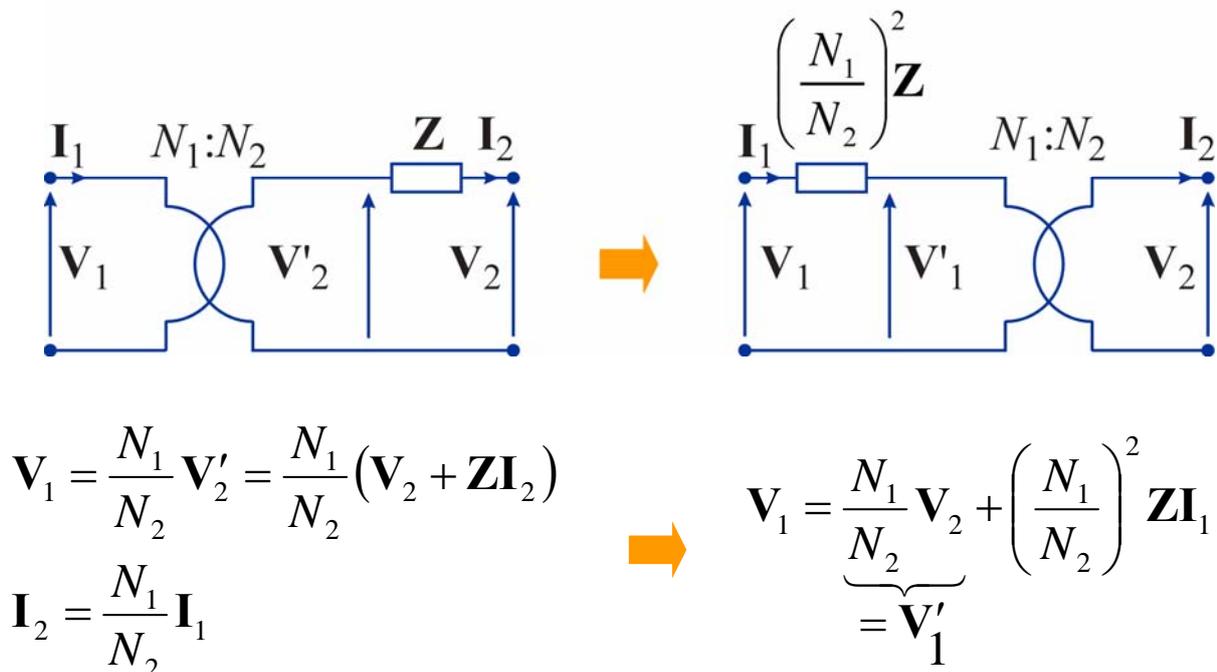
Trasformazione dell'impedenza di carico



L'impedenza equivalente ai terminali del primario di un trasformatore ideale con il secondario caricato da un impedenza \mathbf{Z}_C è pari all'impedenza di carico moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

19

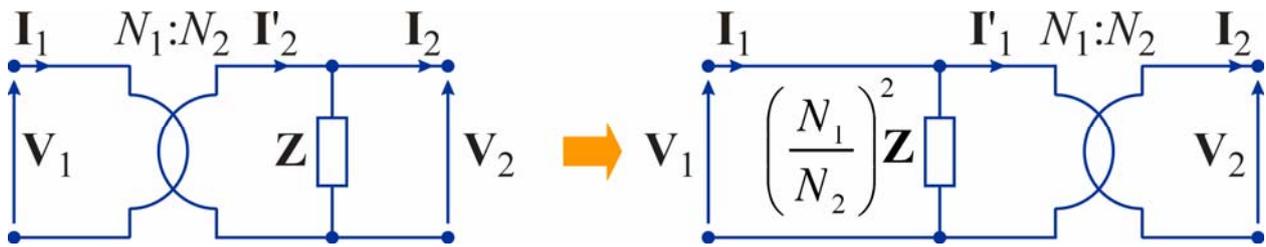
Trasferimento di impedenza (1)



Un impedenza in serie al secondario può essere portata in serie al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

20

Trasferimento di impedenza (2)



$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \left(\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}} \right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{I}_1 = \underbrace{\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2}_{= \mathbf{I}'_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}}$$

Un'impedenza in parallelo al secondario può essere portata in parallelo al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

21

Corrente magnetizzante e corrente attiva (1)

- L'equazione del circuito magnetico può essere posta nella forma

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a$$

- ♦ **Corrente magnetizzante**

$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R} \Phi}{N_1}$$

- La corrente magnetizzante coincide con la corrente che circolando nell'avvolgimento primario con $\mathbf{I}_2 = 0$ produrrebbe il flusso Φ

$$N_1 \mathbf{I}_\mu = \mathcal{R} \Phi$$

- ♦ **Corrente attiva**

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi$$

- La corrente attiva determina le perdite nel nucleo

22

Corrente magnetizzante e corrente attiva (2)

- Si indicano con \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 le f.e.m. dovute al flusso principale

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \quad \mathbf{E}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

- La corrente attiva \mathbf{I}_a è in quadratura con Φ → è in fase con \mathbf{E}_1

→ Si può porre

$$R_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_a} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi} = \frac{N_1^2}{K_f} \quad R_0 = \text{resistenza di perdita del nucleo}$$

- La corrente magnetizzante \mathbf{I}_μ è in fase con Φ → è in quadratura con \mathbf{E}_1

→ Si può porre

$$jX_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_\mu} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{\frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1}} = j\omega \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad X_0 = \text{reattanza magnetizzante}$$

23

Circuito equivalente (1)

- Si riscrivono le equazioni interne facendo uso delle definizioni precedenti

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f)\Phi$$



$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + \frac{N_2}{N_1} \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \left(\frac{1}{R_0} - j \frac{1}{X_0} \right) \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

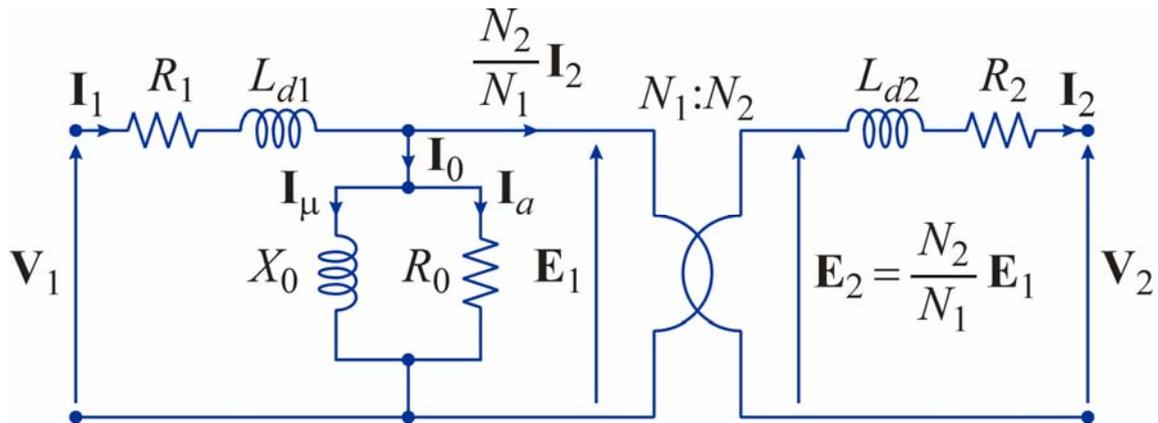
$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1} = -j \frac{\mathbf{E}_1}{X_0}$$

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi = \frac{\mathbf{E}_1}{R_0}$$

E' possibile rappresentare queste equazioni mediante un circuito equivalente

24

Circuito equivalente (2)



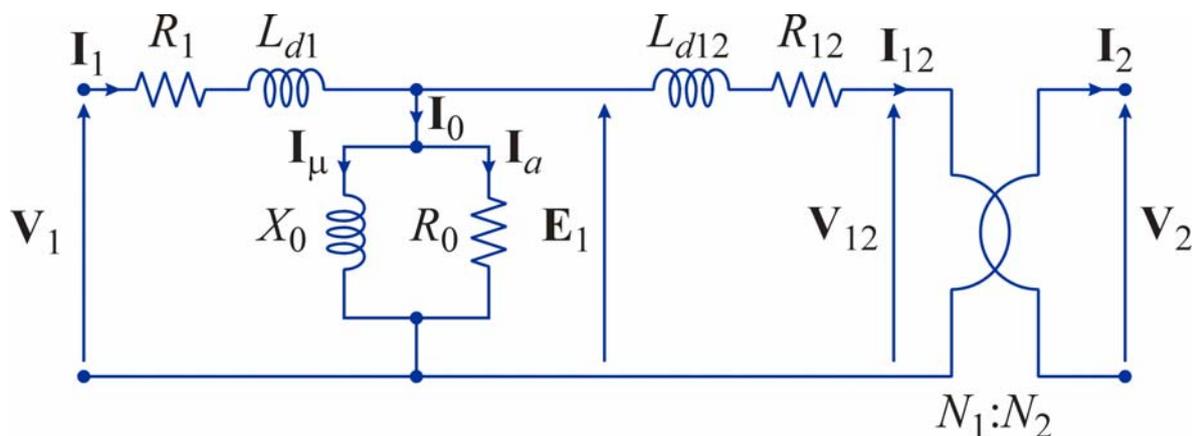
$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + \frac{N_2}{N_1}\mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \left(\frac{1}{R_0} - j\frac{1}{X_0} \right) \mathbf{E}_1$$

25

Circuito equivalente riferito a primario



$$R_{12} = R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_2 \frac{N_1}{N_2}$$

Si utilizza la proprietà di trasferimento dell'impedenza

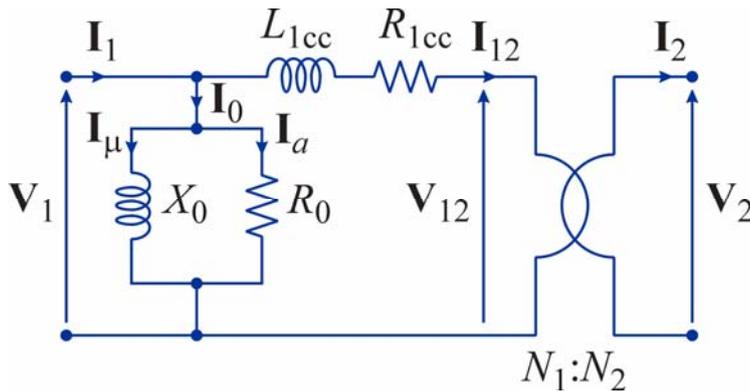
$$L_{d12} = L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}_2 \frac{N_2}{N_1}$$

26

Circuiti equivalenti semplificati (1)

- Di solito la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è molto piccola
- In queste condizioni si ha $\mathbf{E}_1 \cong \mathbf{V}_1$
- ➔ Si può semplificare il circuito equivalente, spostando il ramo $R_0 - X_0$
- ➔ In questo modo R_1 e L_{d1} risultano in serie con R_{12} e L_{12}



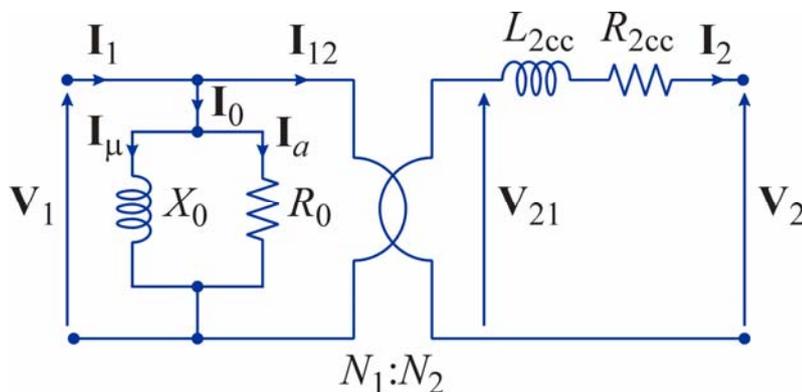
$$R_{1cc} = R_1 + R_{12} = R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$L_{1cc} = L_{d1} + L_{12} = L_{d1} + L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

27

Circuiti equivalenti semplificati (2)

- Facendo uso della proprietà di trasferimento dell'impedenza, il ramo $R_{1cc} L_{1cc}$ può essere sostituito con un ramo posto in serie al secondario



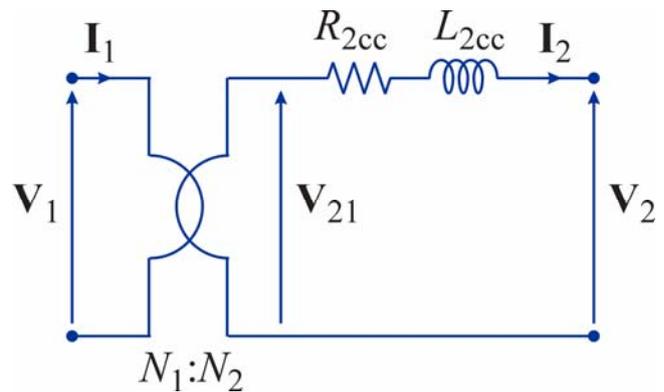
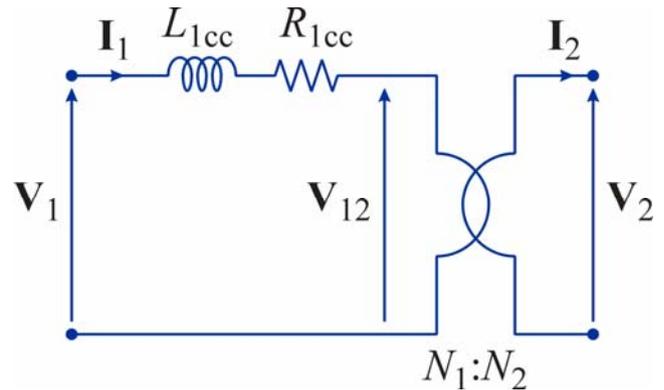
$$R_{2cc} = R_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = R_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + R_2$$

$$L_{2cc} = L_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = L_{d1} \frac{N_2^2}{N_1^2} + L_{d2}$$

28

Circuiti equivalenti semplificati (3)

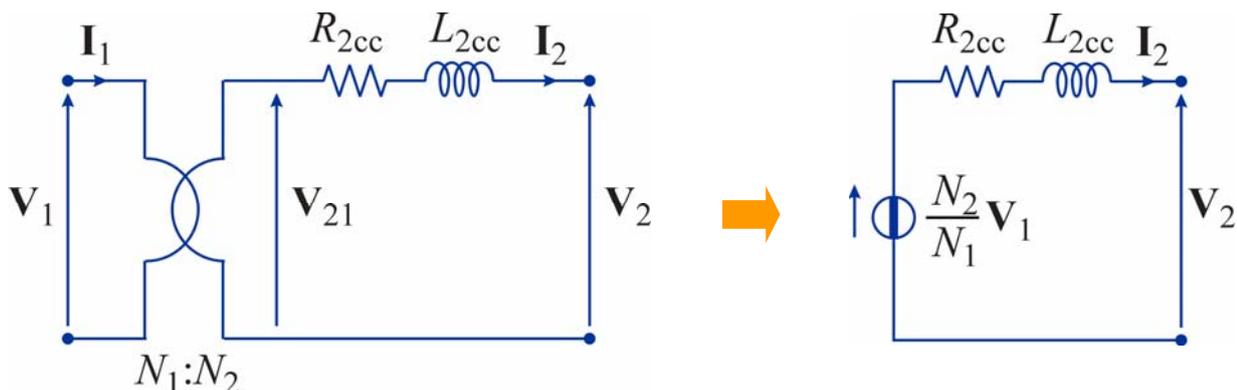
- Se I_0 è trascurabile rispetto a I_1 (come avviene in generale per un trasformatore in condizioni nominali) è possibile semplificare ulteriormente i circuiti equivalenti eliminando il ramo formato da R_0 e X_0
 - reti equivalenti di Kapp



29

Circuiti equivalenti semplificati (4)

- Se la tensione del primario è imposta, la tensione e la corrente del secondario non dipendono dal ramo formato da R_0 e X_0 e quindi possono essere determinate facendo uso del circuito equivalente semplificato



30

Indipendenza del flusso dalle condizioni di carico

- Se la caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è trascurabile si ha
$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \cong \mathbf{V}_1$$
- Se \mathbf{V}_1 è fissato (come avviene normalmente) è fissato anche il valore del flusso Φ , che quindi risulta praticamente indipendente dalle condizioni di carico del trasformatore

$$\Phi \cong \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega N_1}$$

- Dall'equazione del circuito magnetico si ricava che deve essere costante anche la quantità
$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$
- ➔ Se una variazione del carico produce una variazione della corrente del secondario, il trasformatore reagisce con una variazione della corrente del primario tale da mantenere costante la differenza tra i prodotti $M\mathbf{I}$ (**amperspire**) a primario e secondario

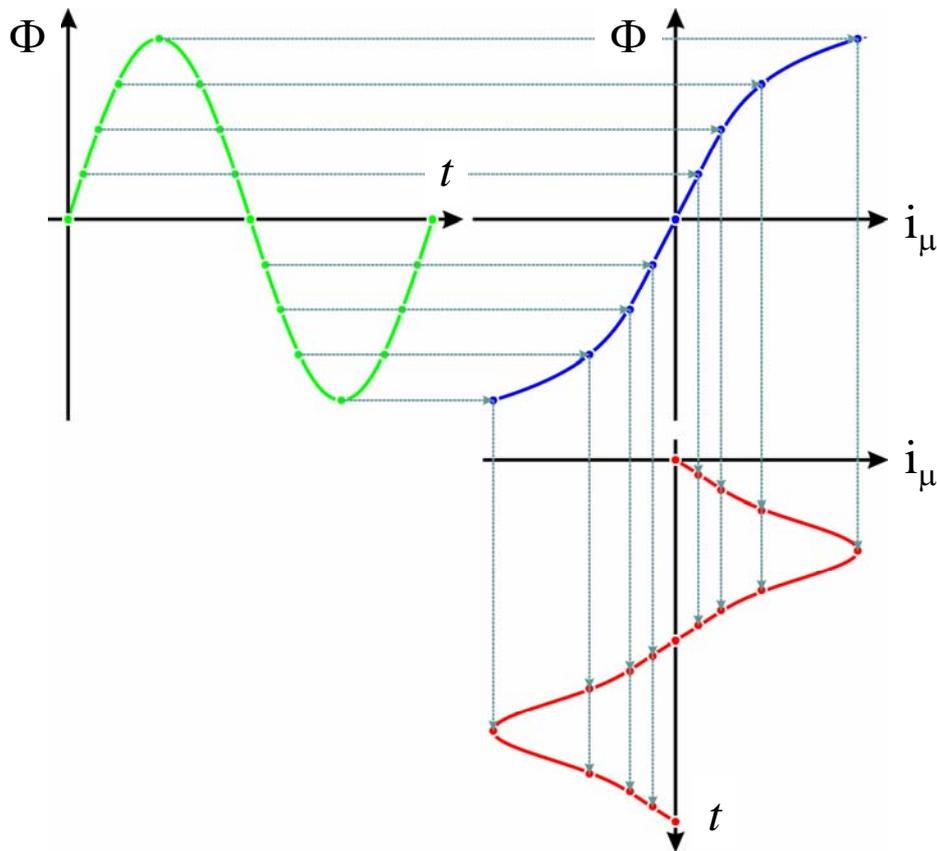
31

Distorsione della corrente magnetizzante (1)

- Se il trasformatore è alimentato con una tensione $v_1(t)$ sinusoidale, anche $e_1(t)$ e quindi $\Phi(t)$ sono sinusoidali
- Se il nucleo non è lineare la corrente magnetizzante $i_\mu(t)$ non può essere sinusoidale, ma risulta distorta
- In particolare si può dimostrare che, in assenza di isteresi,
 - ◆ $i_\mu(t)$ contiene armoniche dispari (pulsazione 3ω , 5ω ecc.)
 - ◆ il contributo principale è costituito dalla terza armonica (che risulta in opposizione con la fondamentale)
- Dato che in genere $i_\mu(t)$ è piccola rispetto alle altre correnti, in prima approssimazione è possibile trattarla come sinusoidale, attribuendole un valore efficace pari a quello della corrente distorta

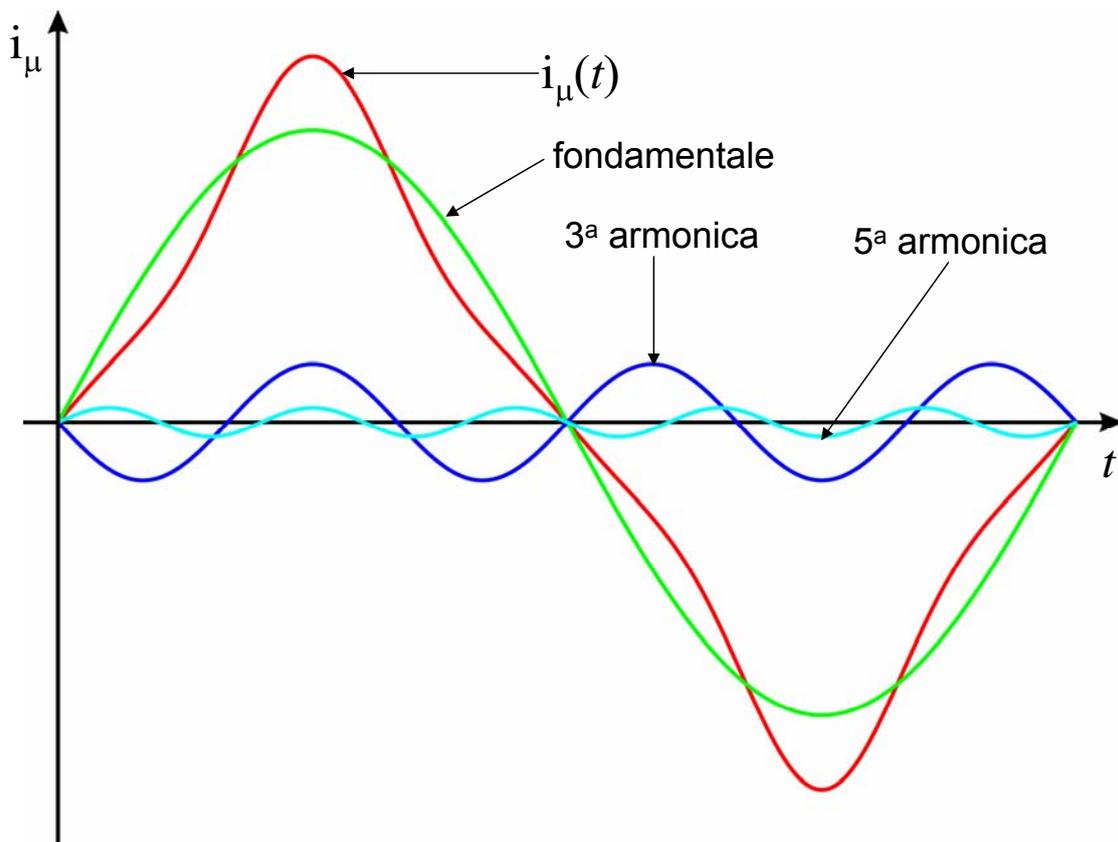
32

Distorsione della corrente magnetizzante (2)



33

Distorsione della corrente magnetizzante (3)



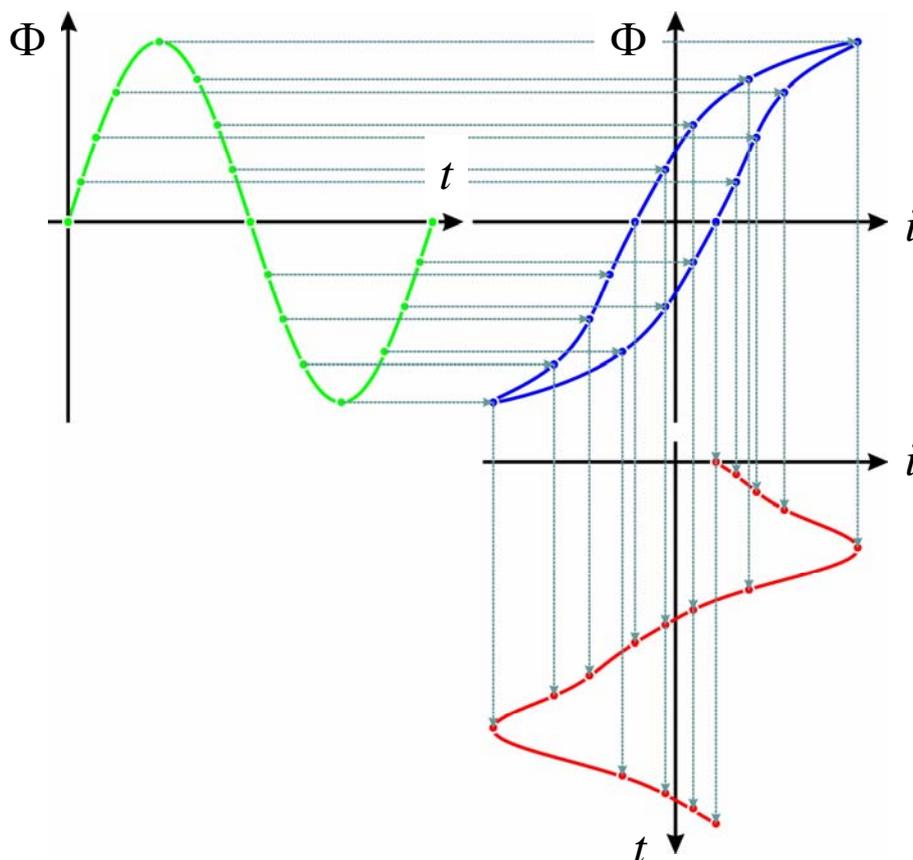
34

Distorsione della corrente magnetizzante (4)

- In presenza di isteresi, alla corrente $i_\mu(t)$ si aggiunge una componente $i_h(t)$ di pulsazione ω , sfasata in quadratura in anticipo rispetto a $i_\mu(t)$
- La corrente $i_h(t)$ risulta in quadratura in anticipo rispetto al flusso e quindi è in fase con la tensione $e_1(t)$
 - Si ha un assorbimento di potenza attiva, che corrisponde alle perdite nel ferro per isteresi
 - Il contributo di $i_h(t)$ può essere incluso in $i_a(t)$ dimensionando opportunamente R_0

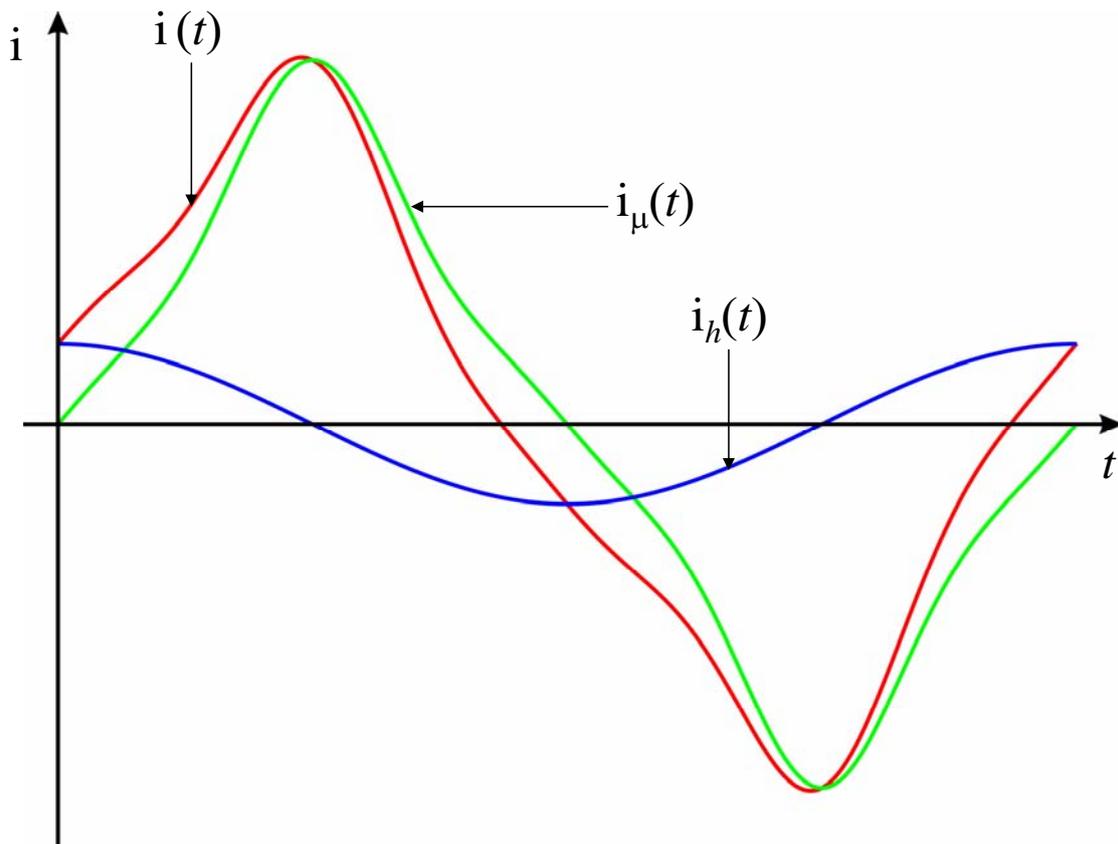
35

Distorsione della corrente magnetizzante (5)



36

Distorsione della corrente magnetizzante (6)



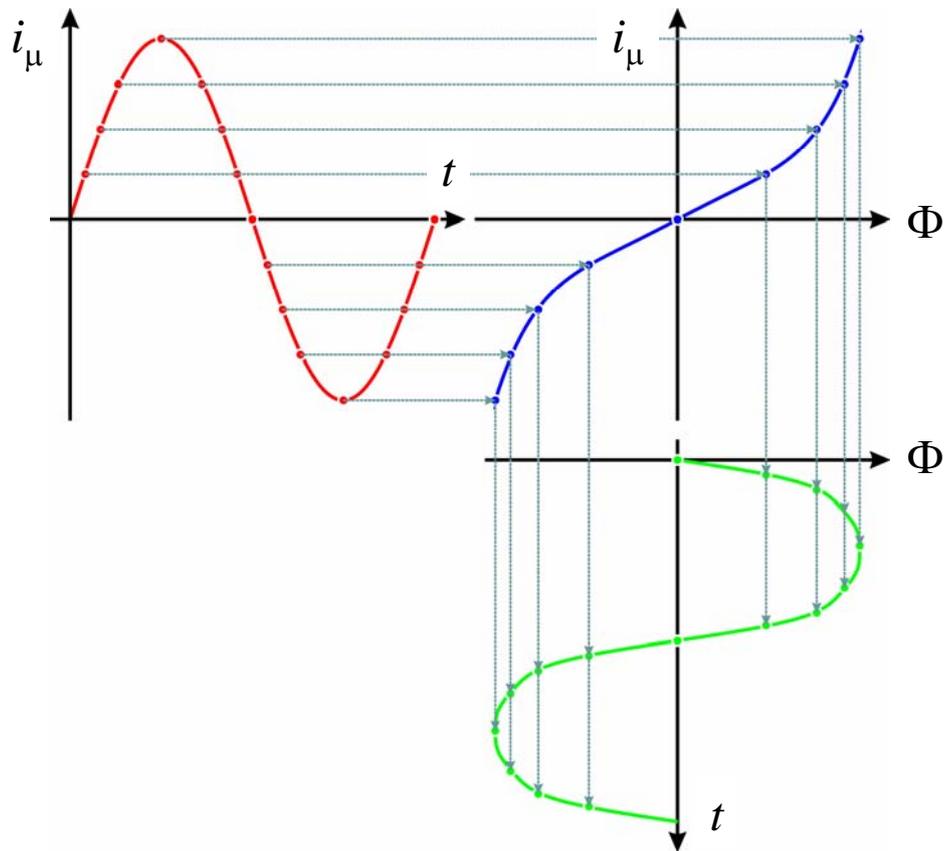
37

Distorsione del flusso (1)

- Se il trasformatore è fatto funzionare in modo da imporre un andamento sinusoidale alla corrente magnetizzante, per effetto della non linearità del nucleo risulta distorto il flusso
- In queste condizioni anche le tensioni sono distorte
- Come si vedrà in seguito, questa situazione si può verificare, ad esempio, nei sistemi trifase
- Si può dimostrare che, in questo caso, il flusso contiene armoniche dispari e che il contributo dominante è dovuto alla terza armonica, che risulta in fase con il flusso stesso

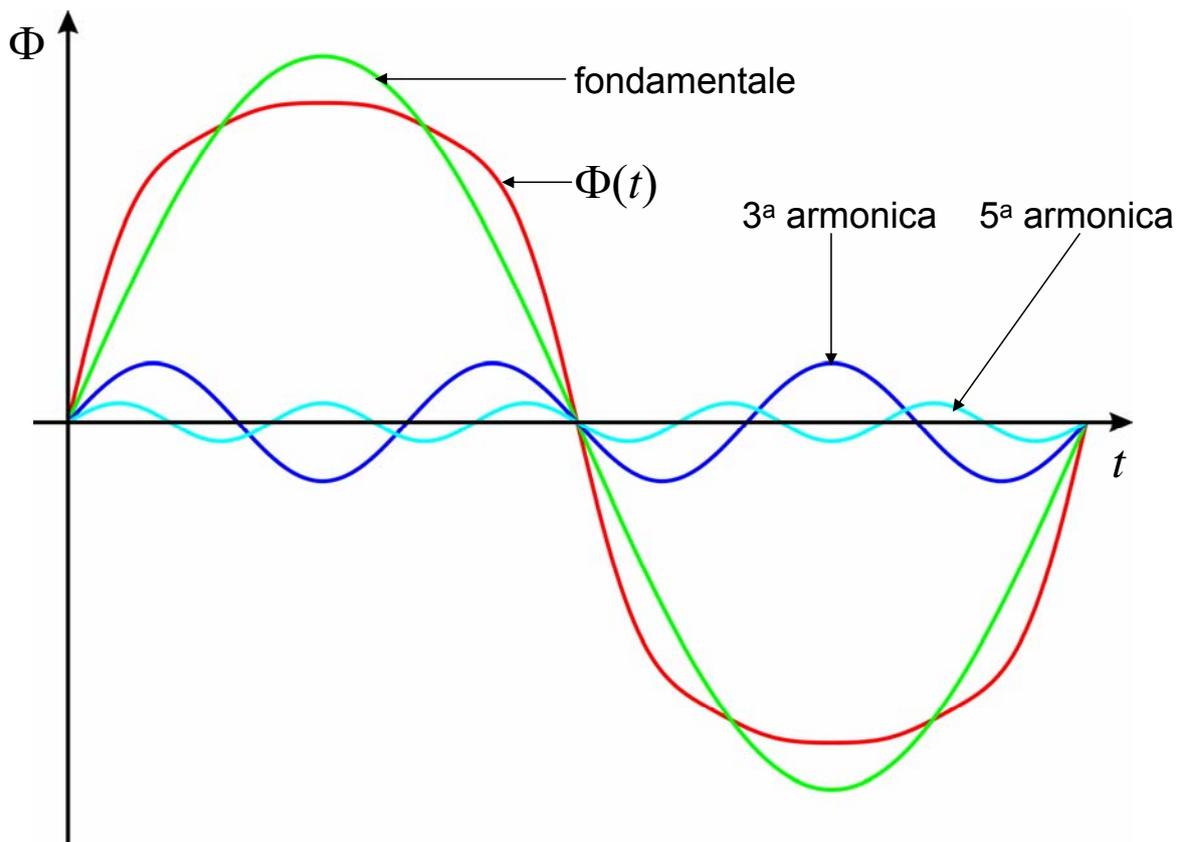
38

Distorsione del flusso (2)



39

Distorsione del flusso (3)



40

Dati di targa

- Un trasformatore è caratterizzato da un insieme di valori nominali che ne definiscono le prestazioni ai fini delle garanzie e del collaudo
- Questi valori, assieme ad altre informazioni, sono riportati su una targa apposta sul trasformatore (**dati di targa**)
- Alcuni dei principali dati di targa sono:
 - ◆ Frequenza nominale: f_n [Hz]
 - ◆ Tensione nominale primaria (valore efficace): V_{1n} [V]
 - ◆ Tensione nominale secondaria a vuoto (valore efficace): V_{20} [V]
 - ➔ Rapporto nominale di trasformazione: $K_0 = V_{1n} / V_{20}$
 - ◆ Potenza nominale (apparente): $S_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{20} \cdot I_{2n}$ [VA]
 - ➔ Corrente nominale primaria (valore efficace): I_{1n} [A]
 - ➔ Corrente nominale secondaria (valore efficace): I_{2n} [A]

41

Prova a vuoto (1)

- Al primario viene applicata una tensione di valore nominale
- Il secondario viene lasciato aperto $I_2 = 0$
- Corrente del primario
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_0$$
 - ➔ il valore è molto inferiore al valore nominale
 - ➔ le perdite nel rame sono trascurabili
- La caduta di tensione su R_2 e L_{d2} è nulla
- La caduta di tensione su R_1 e L_{d1} è molto piccola rispetto al valore in condizioni nominali
 - ➔ il rapporto V_1/V_2 si identifica con quello di un trasformatore ideale
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = K_0 \quad (\text{rapporto di trasformazione nominale})$$
- E_1 e quindi I_a hanno praticamente i valori nominali
 - ➔ le perdite nel ferro coincidono con quelle relative al funzionamento nominale

42

Prova a vuoto (2)

- Il comportamento a vuoto del trasformatore può essere descritto mediante i parametri:

- ◆ **Corrente a vuoto percentuale**

$$i_0 \% = \frac{I_{10}}{I_{1n}} \cdot 100 \quad I_{10} = \text{corrente a vuoto del primario}$$

- ◆ **Potenza a vuoto percentuale**

$$P_0 \% = \frac{P_0}{S_n} \cdot 100 \quad P_0 = \text{potenza attiva assorbita a vuoto}$$

- ◆ **Fattore di potenza a vuoto**

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{V_{1n} I_{10}}$$

- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta

$$P_0 \% = \frac{V_{1n} I_{10} \cos \varphi_0}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = i_0 \% \cdot \cos \varphi_0$$

43

Prova a vuoto (3)

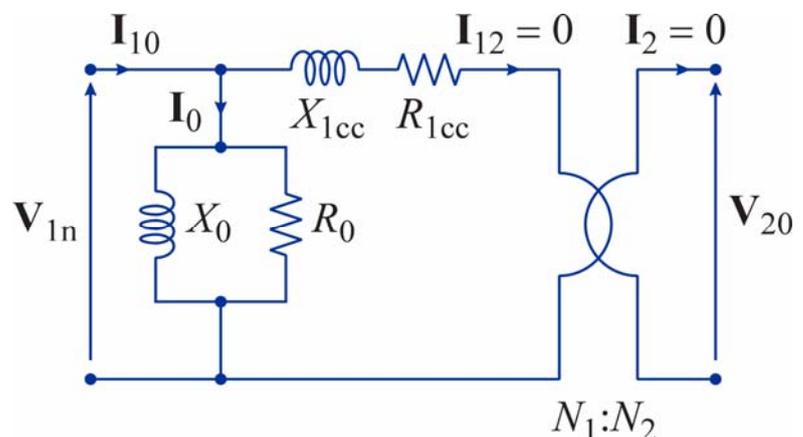
- Noti i parametri S_n , V_{1n} , $i_0\%$ e $\cos \varphi_0$, facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di R_0 e X_0

$$P_0 = \frac{i_0 \% \cdot \cos \varphi_0}{100} S_n$$

$$Q_0 = P_0 \tan(\arccos \varphi_0)$$

$$R_0 = \frac{V_{1n}^2}{P_0}$$

$$X_0 = \frac{V_{1n}^2}{Q_0}$$

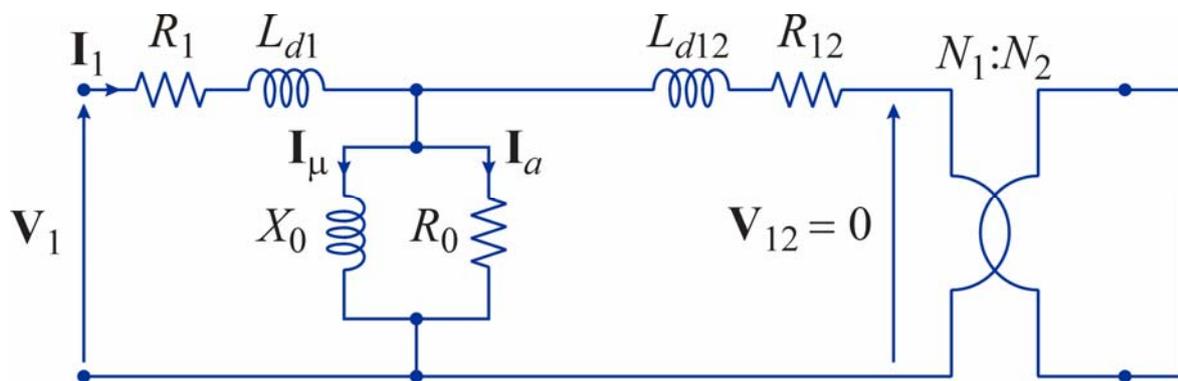


44

Prova in cortocircuito (1)

- Se il secondario è chiuso in cortocircuito $V_2 = 0 \rightarrow V_{12} = 0$
- L'impedenza R_0 X_0 è in parallelo con l'impedenza R_{12} L_{d12}
 - ➔ R_0 e X_0 possono essere trascurate perché normalmente R_{12} e L_{d12} sono molto piccole
 - ➔ Corrente del primario

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + j\omega L_{d1} + R_{12} + j\omega L_{d12}} = \frac{V_1}{R_{1cc} + j\omega L_{1cc}}$$



45

Prova in cortocircuito (2)

- Le impedenze dovute alle resistenze di degli avvolgimenti e alle induttanze di dispersione sono molto piccole
- Se la tensione a primario ha valore nominale le correnti possono risultare molto grandi rispetto ai valori nominali
 - ➔ eccessivo surriscaldamento dovuto all'effetto Joule
 - ➔ possibili danni dovuti alle forze tra gli avvolgimenti prodotte dalle correnti
- Nella prova in cortocircuito il trasformatore viene alimentato con una tensione V_{1cc} , di valore efficace inferiore a V_1 , tale da fare circolare nel secondario una corrente di valore nominale

46

Prova in cortocircuito (3)

- Le correnti I_1 e I_2 hanno valore nominale (a rigore questo vale solo per il I_2 , ma con ottima approssimazione si può ritenere verificato anche per I_1)
 - ➔ le perdite nel rame sono praticamente coincidenti con quelle relative al funzionamento nominale
- V_1 ha un valore molto inferiori a quello nominale
 - ➔ la corrente I_a e I_μ hanno valori molto piccoli rispetto ai valori in condizioni nominali
 - ➔ le perdite nel ferro sono trascurabili
 - ➔ il rapporto I_1/I_2 si identifica con quello di un trasformatore ideale

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

47

Prova in cortocircuito (4)

- Il comportamento del trasformatore in cortocircuito può essere descritto mediante i parametri:
 - ◆ **Tensione di cortocircuito percentuale**
$$v_{cc} \% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad (V_{1cc} = \text{Tensione di cortocircuito del primario})$$
 - ◆ **Potenza di cortocircuito percentuale**
$$P_{cc} \% = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100 \quad (P_{cc} = \text{potenza attiva assorbita in cortocircuito})$$
 - ◆ **Fattore di potenza in cortocircuito**
$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{V_{1cc} I_{1n}}$$

- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta

$$P_{cc} \% = \frac{V_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc}}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = v_{cc} \% \cdot \cos \varphi_{cc}$$

48

Prova in cortocircuito (5)

- Noti i parametri S_n , V_{1n} , V_{20} , $v_{cc}\%$ e $\cos\varphi_{cc}$, facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di R_{1cc} e X_{1cc} o di R_{2cc} e X_{2cc}

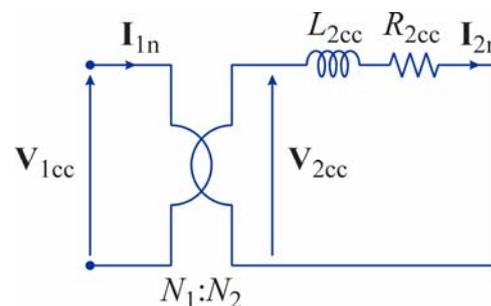
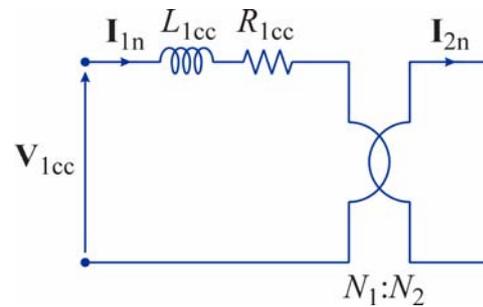
$$P_{cc} = \frac{v_{cc}\% \cdot \cos\varphi_{cc}}{100} S_n$$

$$Q_{cc} = P_{cc} \tan(\arccos\varphi_{cc})$$

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} \quad I_{2n} = \frac{S_n}{V_{20}}$$

$$R_{1cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2} \quad R_{2cc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2}$$

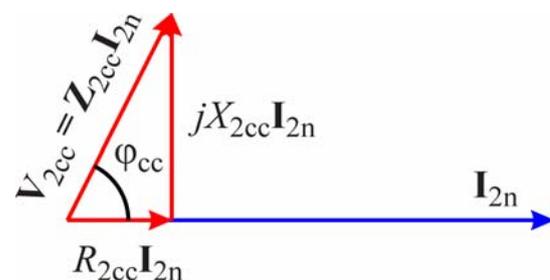
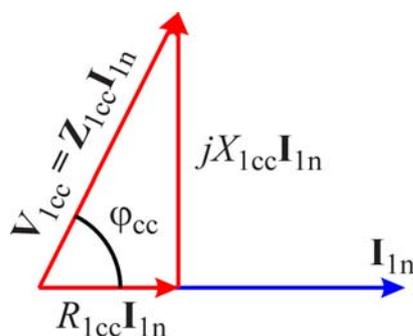
$$X_{1cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{1n}^2} \quad X_{2cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{2n}^2}$$



49

Triangolo di cortocircuito

- Il funzionamento dei due circuiti equivalenti può essere rappresentato mediante i seguenti diagrammi fasoriali



- Il triangolo formato da V_{2cc} e dalle sue componenti resistiva e reattiva è detto **triangolo di cortocircuito** del trasformatore
- Il triangolo di cortocircuito è definito dai valori di $v_{cc}\%$ e $\cos\varphi_{cc}$

$$v_{cc}\% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{V_{2cc}}{V_{20}} \cdot 100$$

50

Caduta di tensione (1)

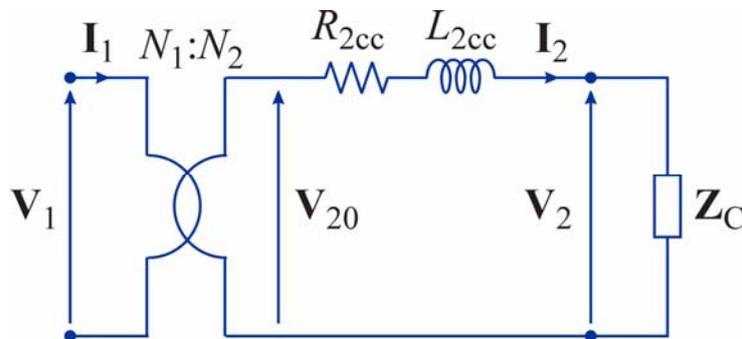
- La **caduta di tensione** è definita come differenza tra i valori efficaci della tensione del secondario a vuoto e a carico

$$\Delta V = V_{20} - V_2$$

- La caduta di tensione percentuale è definita dalla relazione

$$\Delta V\% = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \cdot 100$$

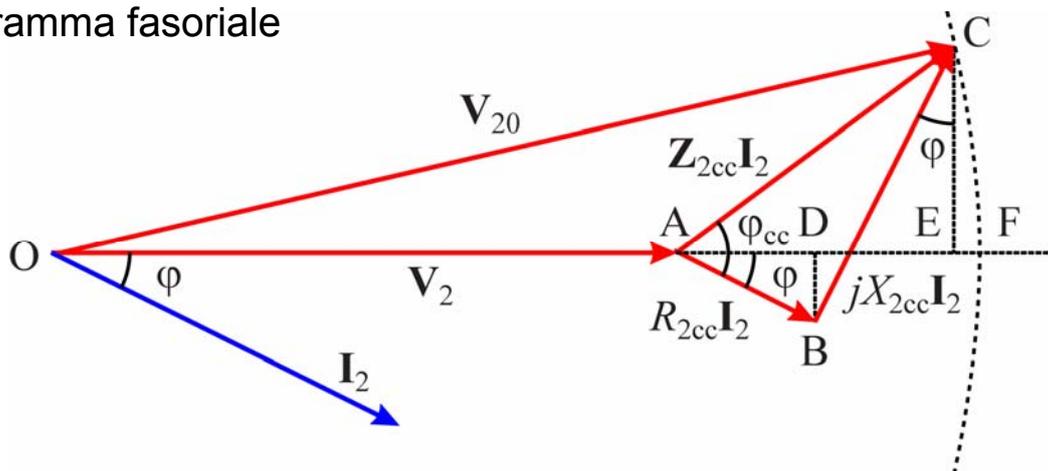
- Per ottenere una valutazione approssimata della caduta di tensione si può fare uso alla rete equivalente di Kapp riferita a secondario



51

Caduta di tensione (2)

- Il funzionamento può essere rappresentato mediante il seguente diagramma fasoriale



- Dato che le cadute di tensione su R_{2cc} e X_{2cc} di solito sono piccole, si può confondere la differenza tra i moduli di V_{20} e V_2 con la lunghezza del segmento AE

$$\overline{AE} = \overline{AC} \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = \overline{AB} \cos \varphi + \overline{BC} \sin \varphi$$

$$\Delta V = Z_{2cc} I_2 \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = R_{2cc} I_2 \cos \varphi + X_{2cc} I_2 \sin \varphi$$

52

Caduta di tensione (3)

- La caduta di tensione si annulla se l'angolo φ di sfasamento tra la tensione e la corrente del carico vale

$$\Delta V = 0 \Rightarrow R_{2cc} \cos \varphi + X_{2cc} \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right)$$

- La caduta di tensione è positiva con carichi ohmico-induttivi o con carichi ohmico-capacitivi che introducono sfasamenti non troppo elevati

$$-\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta V > 0 \quad \rightarrow \text{caduta di tensione}$$

- La caduta di tensione è negativa (e quindi la tensione a carico ha valore efficace maggiore di quello a vuoto) se vale la condizione

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) \Rightarrow \Delta V < 0 \quad \rightarrow \text{aumento di tensione}$$

53

Rendimento

- Trasformatore alimentato a primario da una tensione sinusoidale con il secondario collegato ad un impedenza di carico

- Rendimento**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

P_1 = potenza attiva assorbita dal primario

P_2 = potenza attiva ceduta al carico

- I trasformatori, essendo macchine statiche, hanno rendimenti molto elevati (oltre il 99.5% per i trasformatori di grande potenza)

→ La definizione non è adatta per la misura del rendimento

- ♦ P_1 e P_2 sono poco diverse tra loro → la valutazione del rapporto è molto sensibile agli errori di misura
- ♦ Le potenze in gioco possono essere molto elevate

54

Rendimento convenzionale (1)

- Il **rendimento convenzionale** è definito dalla relazione

$$\eta_c = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}}$$

- ◆ P_2 = potenza attiva ceduta al carico
- ◆ P_{Cu} = potenza dissipata a causa delle perdite nel rame
- ◆ P_{Fe} = potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro
- La misura del rendimento convenzionale del trasformatore richiede la valutazione delle perdite nel rame e nel ferro
 - ➔ può essere effettuata mediante una prova in cortocircuito e una prova a vuoto
- Il **rendimento nominale** corrisponde al rendimento convenzionale ottenuto con $P_2 = S_n$ (potenza nominale del trasformatore)

55

Rendimento convenzionale (2)

- Il rendimento dipende dalle condizioni di carico

- ◆ La potenza attiva ceduta al carico è

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

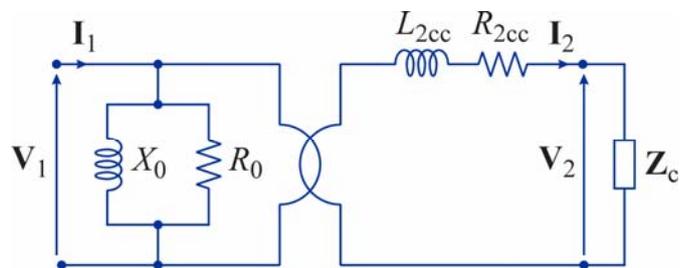
- ◆ La potenza dissipata per le perdite nel rame è

$$P_{Cu} = R_{2cc} I_2^2$$

- ◆ Se la tensione del primario è fissata, le perdite nel ferro sono praticamente indipendenti dalla corrente nel carico

- ➔ Il rendimento convenzionale si può esprimere come

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_{2cc} I_2^2 + P_{Fe}}$$



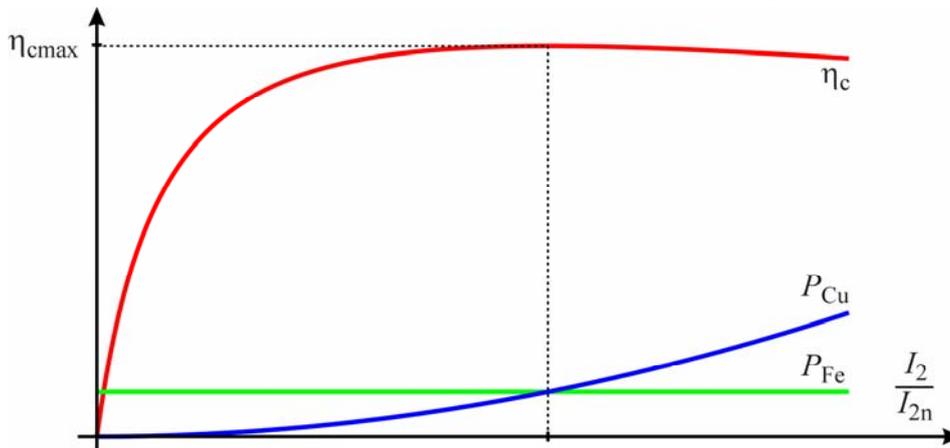
56

Rendimento convenzionale (3)

- Si assume che sia fissato il valore del fattore di potenza
- Si può verificare che al variare del valore efficace della corrente il rendimento è massimo quando

$$\frac{d\eta_c}{dI_2} = 0 \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{R_{2cc}}} \Rightarrow R_{2cc} I_2^2 = P_{Fe}$$

cioè quando le perdite nel rame e nel ferro sono uguali



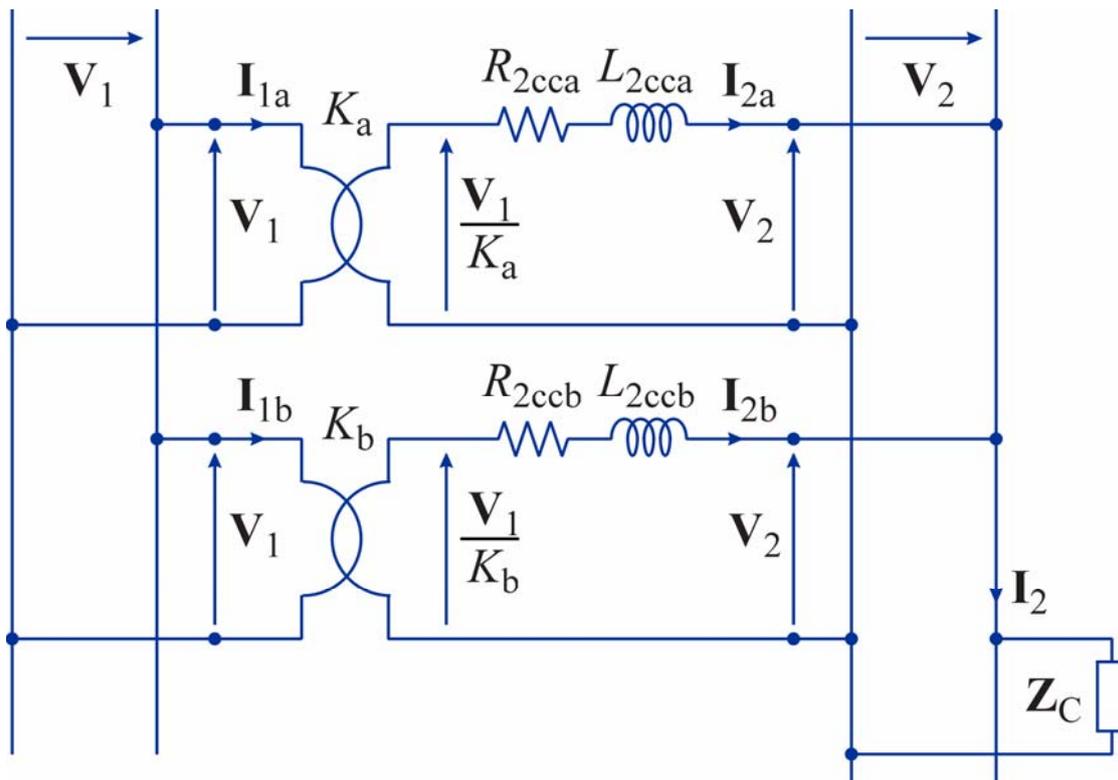
57

Parallelo di trasformatori (1)

- Spesso per trasferire energia tra due linee si utilizzano due o più trasformatori collegati in parallelo
 - ◆ Se il carico è variabile, utilizzando un solo trasformatore dimensionato in funzione della potenza massima, si potrebbero avere periodi in cui la potenza è molto inferiore alla potenza nominale (➔ basso rendimento)
 - ◆ In questo caso conviene utilizzare più trasformatori che possano essere inseriti progressivamente in parallelo tra loro all'aumentare della potenza richiesta
 - ◆ In questo modo i trasformatori lavorano in condizioni più vicine a quelle nominali (➔ migliore rendimento)
 - ◆ Inoltre la presenza di più trasformatori in parallelo consente di garantire la continuità del servizio se è necessario scollegare uno dei trasformatori per guasto o per manutenzione

58

Parallelo di trasformatori (2)



59

Parallelo di trasformatori (3)

- Affinché i trasformatori in parallelo funzionino in condizioni ottimali devono essere verificate le seguenti condizioni

- ◆ I trasformatori devono avere uguali valori delle tensioni nominali primarie e secondarie (e quindi del rapporto di trasformazione)

$$V_{1na} = V_{1nb} \quad V_{20a} = V_{20b} \quad \Rightarrow \quad K_a = K_b$$

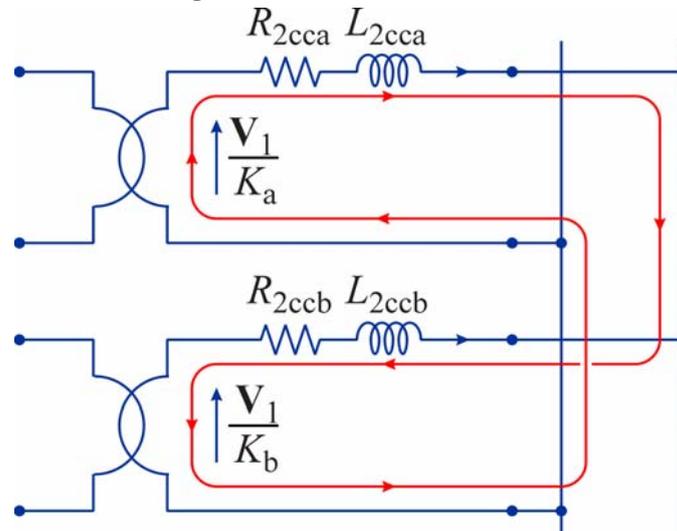
- ◆ Devono essere collegati in modo che le loro tensioni secondarie risultino in fase tra loro
- ◆ Devono avere uguali triangoli di cortocircuito

$$v_{cca} \% = v_{ccb} \% \quad \cos \varphi_{cca} = \cos \varphi_{ccb}$$

60

Parallelo di trasformatori (4)

- Le prime due condizioni impongono che si annulli la f.e.m. totale agente nella maglia formata dai secondari dei trasformatori
- Questo consente di evitare che nel funzionamento a vuoto nella maglia circoli una corrente che darebbe luogo a dissipazione anche con potenza erogata nulla



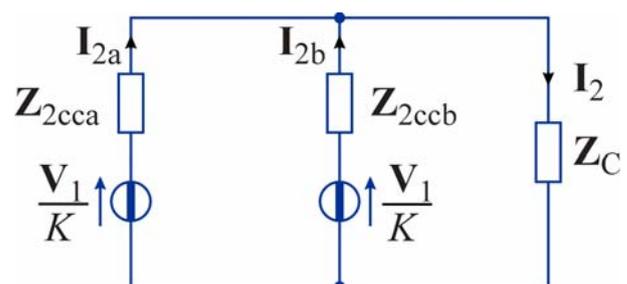
61

Parallelo di trasformatori (5)

- Nel funzionamento a carico si ha

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

$$Z_{cc2a} I_{2a} = Z_{cc2b} I_{2b} \Rightarrow \frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{Z_{cc2b}}{Z_{cc2a}}$$



- A parità di valori efficaci delle correnti I_{2a} e I_{2b} , il valore efficace della corrente nel carico è massimo quando le correnti sono in fase tra loro
- In questo caso risulta

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

- Se inoltre si impone che entrambi i trasformatori funzionino a pieno carico, e quindi che le correnti abbiano i valori nominali, deve valere la condizione

$$\frac{Z_{cc2b}}{Z_{cc2a}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}}$$

62

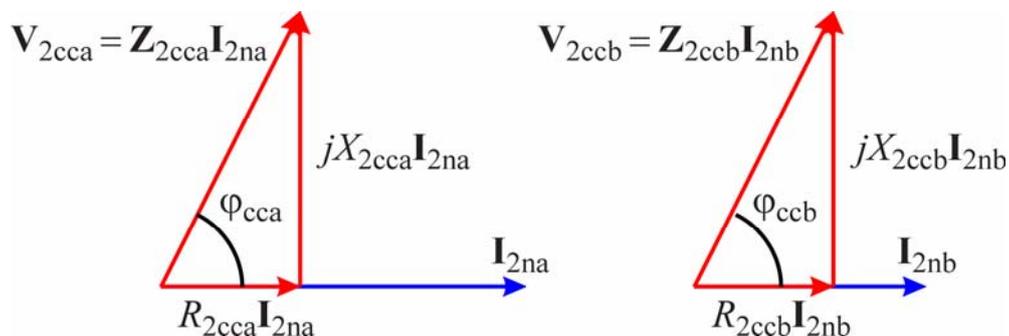
Parallelo di trasformatori (6)

- Il rapporto tra le impedenze Z_{2cca} e Z_{2ccb} deve essere reale, quindi per le loro parti reali e le loro parti immaginarie devono valere le condizioni

$$R_{2cca} I_{2na} = R_{2ccb} I_{2nb}$$

$$X_{1cca} I_{2na} = X_{1ccb} I_{2nb}$$

- ➔ I trasformatori devono avere triangoli di cortocircuito uguali e quindi
 - ♦ tensioni di cortocircuito uguali
 - ♦ fattori di potenza di cortocircuito uguali



63

Parallelo di trasformatori (7)

- Quando sono verificate le condizioni precedenti, nel funzionamento nominale si ha

$$S_n = V_{20} I_{2n} = V_{20} I_{2na} + V_{20} I_{2nb} = S_{na} + S_{nb}$$

- ➔ I trasformatori in parallelo si comportano come un trasformatore avente potenza nominale pari alla somma delle loro potenze nominali

- Inoltre in ogni condizione di funzionamento risulta

$$\frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}} = \frac{S_{na}}{S_{nb}}$$

- Le correnti, e di conseguenza anche le potenze erogate, si ripartiscono in quote proporzionali alle potenze nominali dei trasformatori

64