

# Trasformatore

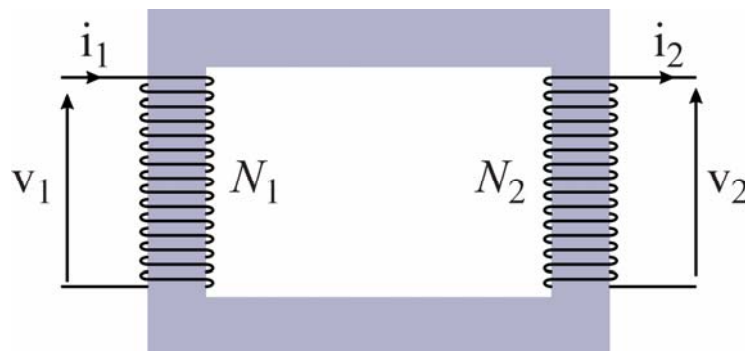
## Parte 1

### Trasformatore monofase

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)

(versione del 10-12-2013)

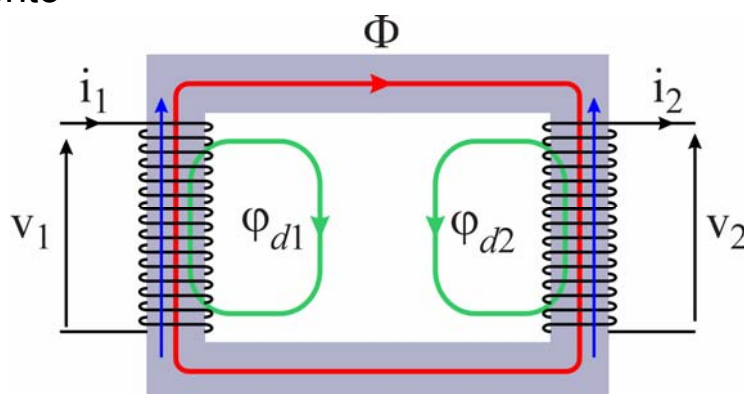
#### Schema di principio



- Il **trasformatore** è una macchina elettrica statica (priva di parti in movimento)
- E' costituito da due avvolgimenti (detti **primario** e **secondario**) aventi rispettivamente  $N_1$  e  $N_2$  spire avvolti su un nucleo di materiale ferromagnetico
- E' un componente a due porte che consente di trasferire potenza elettrica tra due circuiti elettrici non collegati tra loro, ma accoppiati per mezzo di un circuito magnetico

## Ipotesi sul campo magnetico

- Se gli avvolgimenti sono percorsi da corrente viene generato un campo magnetico
- Si assume che le linee di flusso abbiano andamenti qualitativi corrispondenti ai tre tipi indicati in figura
  - ◆ linee che si sviluppano interamente nel nucleo e si concatenano con entrambi gli avvolgimenti
  - ◆ linee che si sviluppano in parte in aria e si concatenano con un solo avvolgimento



3

## Flussi di induzione magnetica (1)

- Il flusso di induzione magnetica  $\Phi$  dovuto a linee di campo che si concatenano con entrambi gli avvolgimenti è detto **flusso principale**
- I flussi concatenati con il solo avvolgimento primario o il solo avvolgimento secondario sono detti **flussi di dispersione**
  - ◆ La riluttanza dei tubi di flusso di dispersione è determinata prevalentemente dai tratti in aria
  - ➔ è sempre lecito trascurare gli effetti di non linearità del nucleo e assumere che i flussi di dispersione siano proporzionali alle correnti

$$\Phi_{d1} = L_{d1} i_1$$

$$\Phi_{d2} = L_{d2} i_2$$

$$L_{d1}, L_{d2} = \text{induttanze di dispersione}$$

- ◆  $L_{d1}$  e  $L_{d2}$  sono correlate ai soli flussi dispersi, quindi non rappresentano le induttanze dei due avvolgimenti

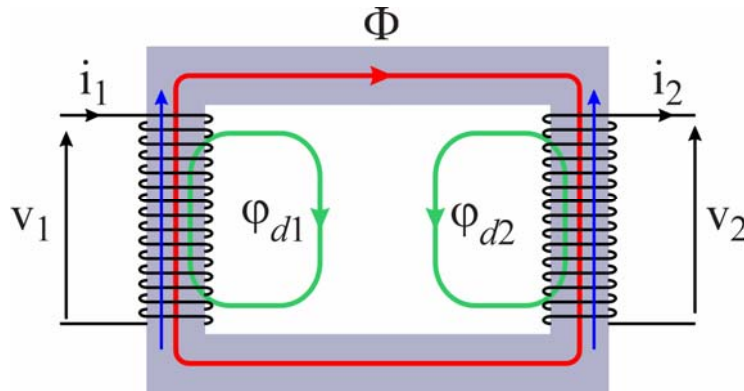
4

## Flussi di induzione magnetica (2)

- Flussi totali concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1\Phi + \varphi_{d1} = N_1\Phi + L_{d1}i_1$$

$$\Phi_{c2} = -N_2\Phi + \varphi_{d2} = -N_2\Phi + L_{d2}i_2$$



5

## Equazioni interne

- Circuito primario**

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{d\Phi_{c1}}{dt} = R_1 i_1(t) + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$R_1$  = resistenza dell'avvolgimento primario

- Circuito secondario**

$$v_2(t) = -R_2 i_2(t) - \frac{d\Phi_{c2}}{dt} = -R_2 i_2(t) - L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$R_2$  = resistenza dell'avvolgimento secondario

- Circuito magnetico**

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

$\mathcal{R}$  = riluttanza del nucleo

6

## Equazioni in condizioni di regime sinusoidale

- **Ipotesi**

- ◆ Il primario è alimentato da una tensione  $v_1(t)$  sinusoidale
- ◆ Il secondario è collegato a un carico lineare
- ◆ E' possibile trascurare gli effetti non lineari nel nucleo
- ➔ In condizioni di regime tutte le grandezze dipendenti dal tempo variano con legge sinusoidale
- ➔ E' possibile applicare la trasformata di Steinmetz alle equazioni interne

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1\Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2\Phi$$

$$N_1\mathbf{I}_1 - N_2\mathbf{I}_2 = \mathcal{R}\Phi$$

7

## Effetti dissipativi in un trasformatore

- Nel modello sviluppato fino a a questo punto si è tenuto conto solo degli effetti dissipativi dovuti alle resistenze degli avvolgimenti
  - ➔ **“perdite nel rame”**
- Altri fenomeni dissipativi avvengono all'interno del nucleo magnetico
  - ➔ **“perdite nel ferro”**
    - ◆ **Perdite per correnti parassite (correnti di Foucault)**
      - Se il flusso di induzione magnetica nel nucleo varia nel tempo all'interno del nucleo si hanno delle forze elettromotrici indotte
      - A causa della conducibilità del materiale ferromagnetico all'interno del nucleo si hanno delle correnti
        - ➔ Dissipazione di energia per effetto Joule
    - ◆ **Perdite per isteresi**

8

## Correnti parassite (1)

- Induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme, ortogonale alle sezioni trasversali e variabile con legge sinusoidale
- Si può pensare che in ogni sezione trasversale del nucleo esistano dei circuiti elettrici elementari
- Se  $S$  indica l'area della sezione racchiusa da un circuito elementare, il flusso concatenato è

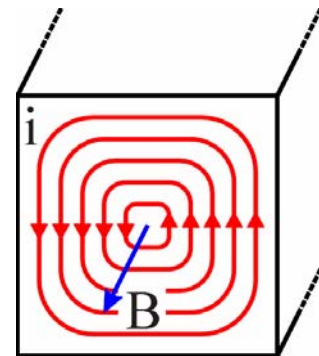
$$\Phi = SB_M \cos \omega t$$

- ➔ Forza elettromotrice indotta

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega SB_M \sin \omega t = E_M \sin \omega t$$

- ➔ Se  $R$  è la resistenza di un circuito elementare, la potenza media dissipata in un periodo è

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{E_M^2}{R} = \frac{\omega^2 S^2 B_M^2}{2R}$$



9

## Correnti parassite (2)

- La trattazione precedente giustifica intuitivamente la formula semiempirica

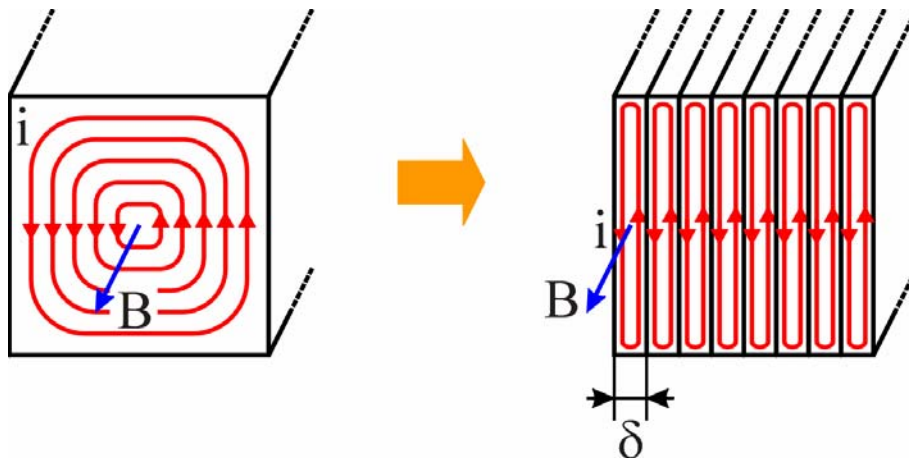
$$p_{CP} = K_{CP} f^2 B_M^2$$

- ◆  $p_{CP}$  = potenza dissipata per unità di peso del materiale
  - ◆  $f$  = frequenza
  - ◆  $B_M$  = induzione massima
  - ◆  $K_{CP}$  = costante dipendente dalla forma della sezione e dal materiale (inversamente proporzionale alla resistività)
- Per ridurre le perdite dovute alle correnti parassite
    - ◆ si utilizzano leghe ad elevata resistività (ferro-silicio)
    - ◆ si ricorre alla **laminazione del nucleo**

10

## Laminazione del nucleo (1)

- Il nucleo è formato da sottili lamierini sovrapposti e isolati tra loro
- Le correnti parassite si possono richiudere solo all'interno dei lamierini
  - ◆ i percorsi interessati dalle correnti parassite hanno sezione minore
    - ➔ resistenza più elevata
    - ➔ a parità di f.e.m. indotta si hanno correnti minori
  - ◆ l'area delimitata dalle linee di corrente è minore
    - ➔ riduzione del flusso concatenato e quindi della f.e.m. indotta



11

## Laminazione del nucleo (2)

- Nel caso di un nucleo laminato, la potenza dissipata per unità di peso può essere espressa mediante la relazione

$$p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$$

- ◆  $p_{CP}$  = potenza dissipata per unità di peso del materiale
- ◆  $f$  = frequenza
- ◆  $B_M$  = induzione massima
- ◆  $\delta$  = spessore di un lamierino
- ◆  $k_{CP}$  = costante dipendente dal materiale

12

## Perdite per isteresi

- Ad ogni ciclo di isteresi corrisponde un'energia dissipata per unità di volume pari all'area racchiusa dal ciclo stesso
- ➔ Le perdite per isteresi nel nucleo di un trasformatore dipendono
  - ◆ dal numero di cicli di isteresi nell'unità di tempo, determinato dalla frequenza  $f$
  - ◆ dall'area del ciclo di isteresi, determinata dal valore massimo dell'induzione magnetica  $B_M$

- ➔ La potenza dissipata può essere espressa mediante la formula semiempirica

$$p_I = k_I f B_M^{1.6}$$

- ◆  $p_I$  = potenza dissipata per unità di peso
- ◆  $f$  = frequenza
- ◆  $B_M$  = induzione massima
- ◆  $k_I$  = costante dipendente dal materiale

13

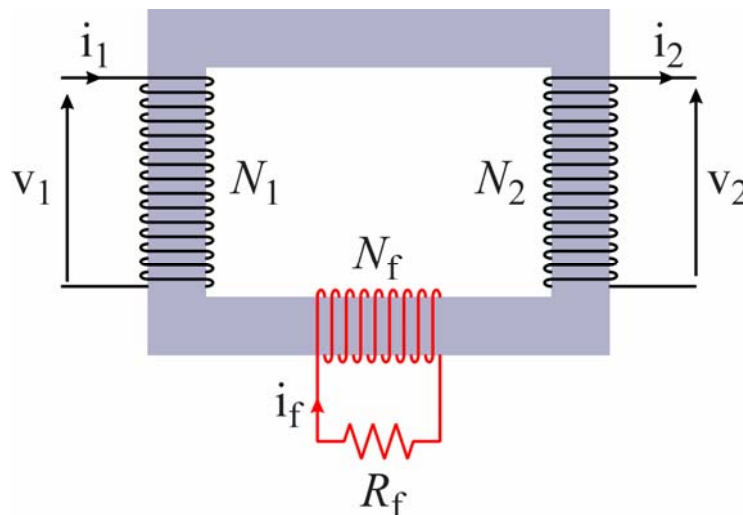
## Dipendenza dalle tensioni e dalla frequenza

- Perdite per correnti parassite:  $p_{CP} = k_{CP} \delta^2 f^2 B_M^2$
- Perdite per isteresi:  $p_I = k_I f B_M^{1.6}$
- Se si trascura la caduta di tensione su  $R_1$  e  $L_{d1}$  si ha
$$\mathbf{V}_1 \cong j\omega N_1 \Phi = j2\pi f N_1 S \mathbf{B}$$
  - ◆ Se  $\mathbf{V}_1$  è fissata, il valore massimo dell'induzione magnetica  $B_M$  è circa inversamente proporzionale alla frequenza
    - ➔ le perdite per correnti parassite sono praticamente costanti al variare di  $f$
    - ➔ le perdite per isteresi diminuiscono al crescere di  $f$
  - ◆ Se  $f$  è fissata,  $B_M$  è direttamente proporzionale all'ampiezza di  $v_1(t)$ 
    - ➔ le perdite aumentano all'aumentare dell'ampiezza di  $v_1(t)$

14

## Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per tenere conto delle perdite nel ferro si può modificare il modello introducendo un terzo avvolgimento fittizio caricato da una resistenza  $R_f$
- Il valore della resistenza e il numero di spire dell'avvolgimento vanno scelti in modo che la potenza dissipata su  $R_f$  coincida con la potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro



15

## Rappresentazione delle perdite nel ferro

- Per l'avvolgimento fittizio vale la relazione

$$R_f \mathbf{I}_f + j\omega N_f \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_f = -j\omega \frac{N_f}{R_f} \Phi$$

- Con il terzo avvolgimento l'equazione del circuito magnetico diviene

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 + N_f \mathbf{I}_f = \mathcal{R} \Phi$$

cioè

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

$$K_f = \frac{N_f^2}{R_f}$$

- ➔ Le equazioni interne diventano

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1}) \mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2}) \mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

16



## Trasformatore ideale (1)

- Il **trasformatore ideale** è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
  - ◆ avvolgimenti con resistenza nulla →  $R_1 = R_2 = 0$
  - ◆ assenza di flussi dispersi →  $L_{d1} = L_{d2} = 0$
  - ◆ nucleo con permeabilità infinita →  $\mu = \infty$  →  $\mathcal{R} = 0$
  - ◆ assenza di effetti dissipativi nel nucleo →  $K_f = 0$

- In queste condizioni le equazioni interne divengono

$$\mathbf{V}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = 0$$



$$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$$

17

## Trasformatore ideale (2)

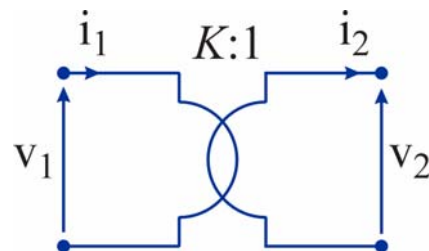
### Equazioni caratteristiche

$$v_1(t) = K v_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{K} i_2(t)$$

$$K = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{rapporto di trasformazione (rapporto spire)}$$

### Simbolo



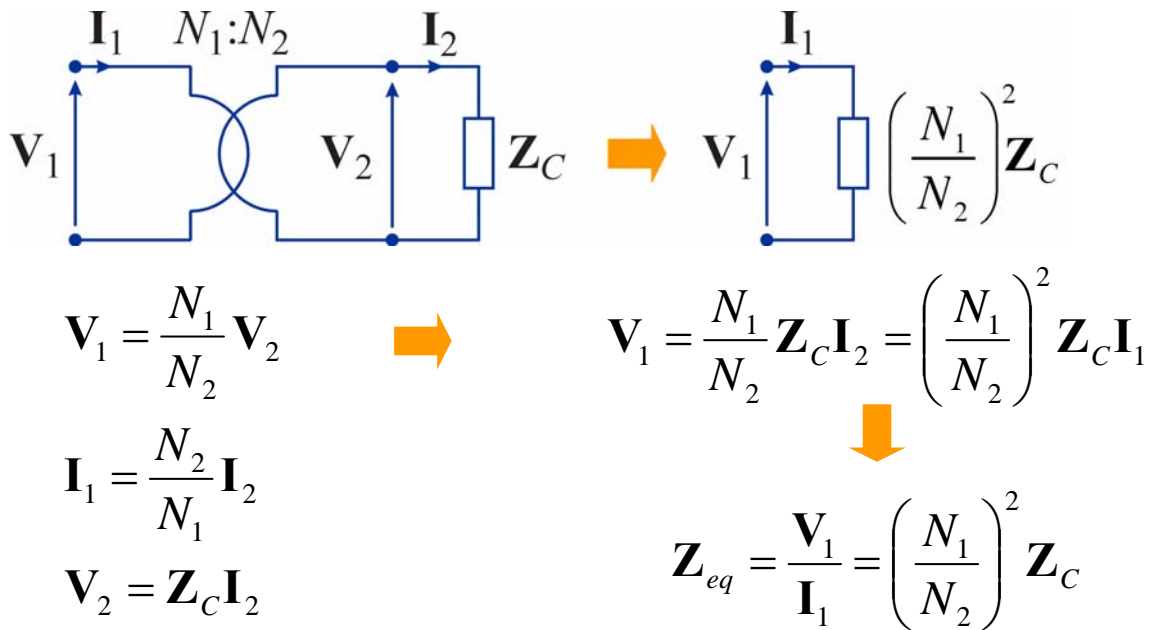
### Potenza assorbita

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t) = K v_2(t) \left[ \frac{1}{K} i_2(t) \right] - v_2(t) i_2(t) = 0$$

- ➔ La potenza assorbita a primario viene trasferita integralmente in uscita al secondario

18

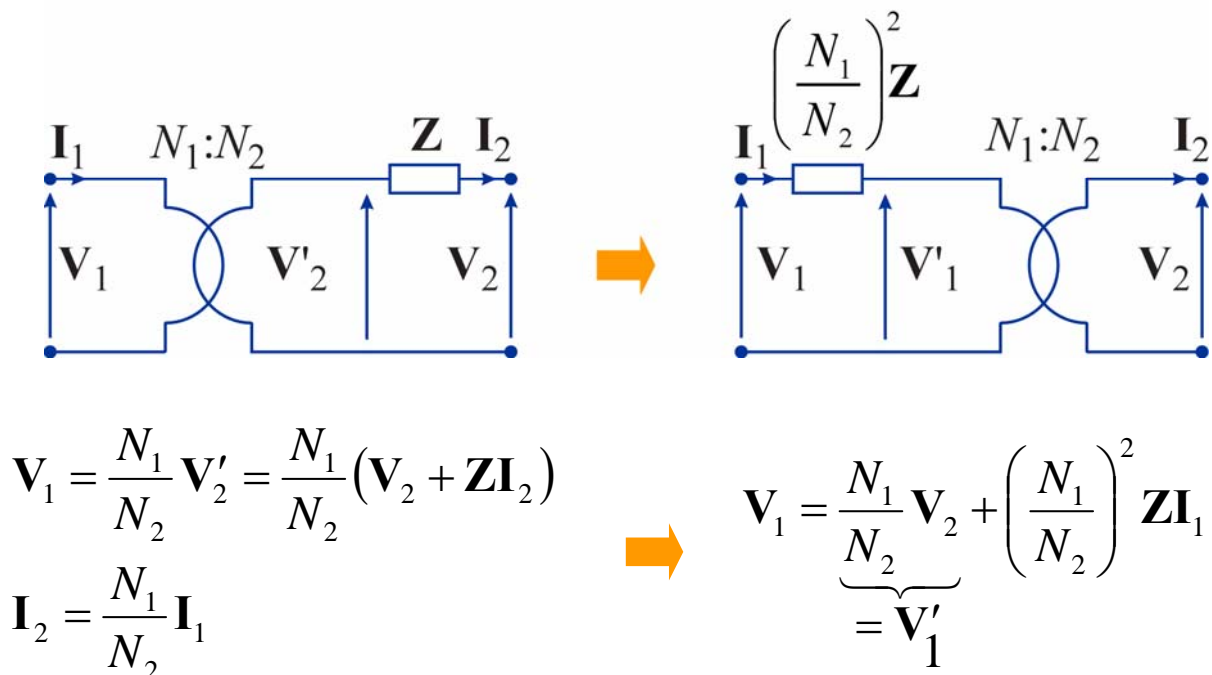
## Trasformazione dell'impedenza di carico



L'impedenza equivalente ai terminali del primario di un trasformatore ideale con il secondario caricato da un'impedenza  $\mathbf{Z}_C$  è pari all'impedenza di carico moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

19

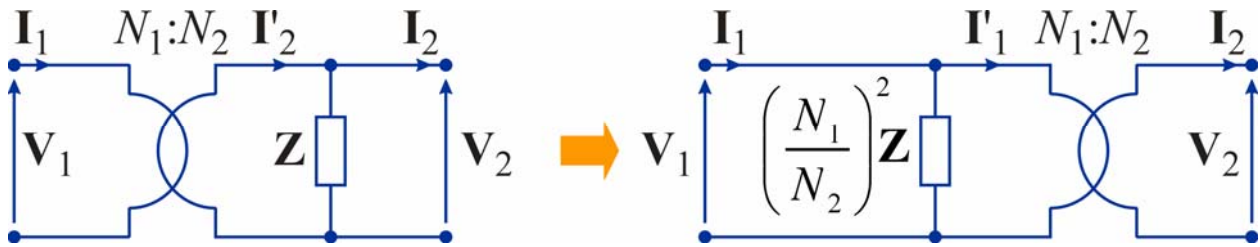
## Trasferimento di impedenza (1)



Un'impedenza in serie al secondario può essere portata in serie al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

20

## Trasferimento di impedenza (2)



$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \left( \mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}} \right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{V}_1$$

$$\mathbf{I}_1 = \underbrace{\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2}_{= \mathbf{I}'_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{\left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \mathbf{Z}}$$

Un'impedenza in parallelo al secondario può essere portata in parallelo al primario moltiplicata per il quadrato del rapporto spire

21

## Corrente magnetizzante e corrente attiva (1)

- L'equazione del circuito magnetico può essere posta nella forma

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a$$

- ♦ **Corrente magnetizzante**

$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R} \Phi}{N_1}$$

- La corrente magnetizzante coincide con la corrente che circolando nell'avvolgimento primario con  $\mathbf{I}_2 = 0$  produrrebbe il flusso  $\Phi$

$$N_1 \mathbf{I}_\mu = \mathcal{R} \Phi$$

- ♦ **Corrente attiva**

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi$$

- La corrente attiva determina le perdite nel nucleo

22

## Corrente magnetizzante e corrente attiva (2)

- Si indicano con  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  le f.e.m. dovute al flusso principale

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \quad \mathbf{E}_2 = j\omega N_2 \Phi$$

- La corrente attiva  $\mathbf{I}_a$  è in quadratura con  $\Phi$  → è in fase con  $\mathbf{E}_1$

→ Si può porre

$$R_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_a} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi} = \frac{N_1^2}{K_f} \quad R_0 = \text{resistenza di perdita del nucleo}$$

- La corrente magnetizzante  $\mathbf{I}_\mu$  è in fase con  $\Phi$  → è in quadratura con  $\mathbf{E}_1$

→ Si può porre

$$jX_0 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_\mu} = \frac{j\omega N_1 \Phi}{\frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1}} = j\omega \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad X_0 = \text{reattanza magnetizzante}$$

23

## Circuito equivalente (1)

- Si riscrivono le equazioni interne facendo uso delle definizioni precedenti

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + j\omega N_1 \Phi$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + j\omega N_2 \Phi$$

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f)\Phi$$



$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + \frac{N_2}{N_1} \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \left( \frac{1}{R_0} - j \frac{1}{X_0} \right) \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi$$

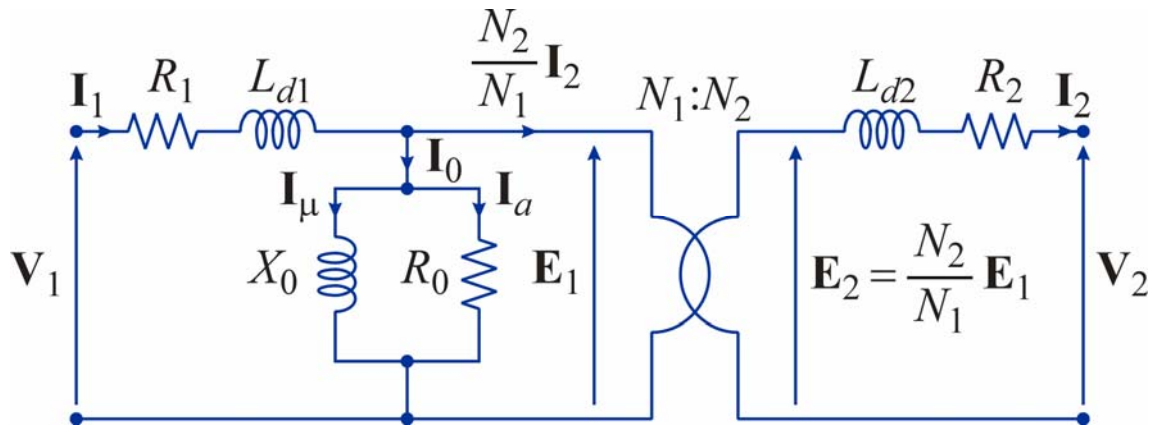
$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathcal{R}\Phi}{N_1} = -j \frac{\mathbf{E}_1}{X_0}$$

$$\mathbf{I}_a = j\omega \frac{K_f}{N_1} \Phi = \frac{\mathbf{E}_1}{R_0}$$

*E' possibile rappresentare queste equazioni mediante un circuito equivalente*

24

## Circuito equivalente (2)



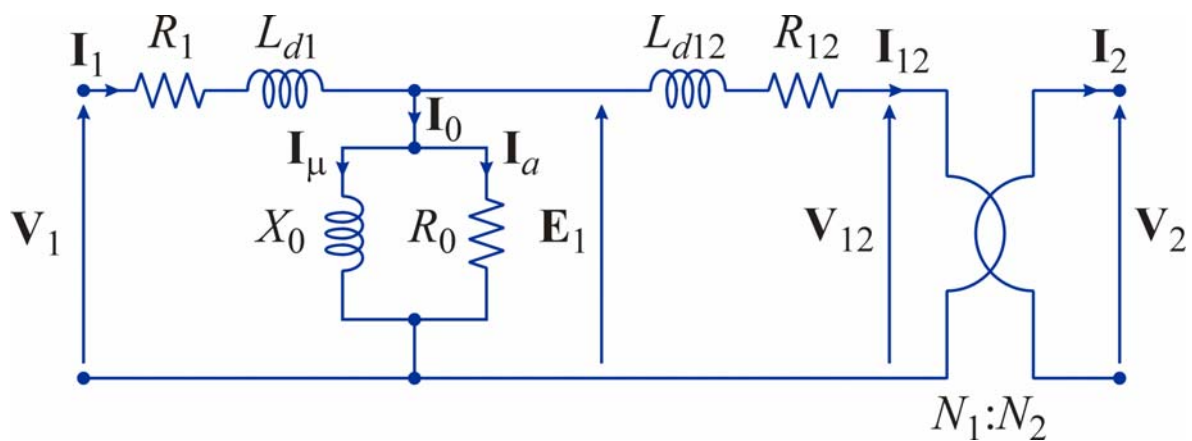
$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_{d1})\mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2})\mathbf{I}_2 + \frac{N_2}{N_1}\mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{I}_1 - \frac{N_2}{N_1}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \left( \frac{1}{R_0} - j \frac{1}{X_0} \right) \mathbf{E}_1$$

25

## Circuito equivalente riferito a primario



$$R_{12} = R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_2 \frac{N_1}{N_2}$$

Si utilizza la proprietà di trasferimento dell'impedenza

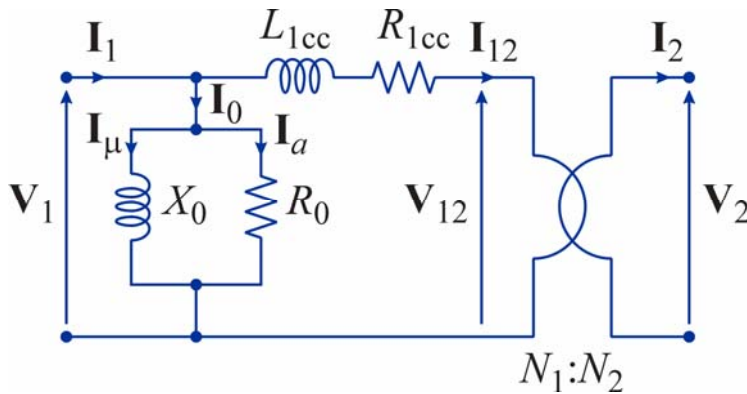
$$L_{d12} = L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}_2 \frac{N_2}{N_1}$$

26

## Circuiti equivalenti semplificati (1)

- Di solito la caduta di tensione su  $R_1$  e  $L_{d1}$  è molto piccola
- In queste condizioni si ha  $\mathbf{E}_1 \cong \mathbf{V}_1$
- ➔ Si può semplificare il circuito equivalente, spostando il ramo  $R_0 - X_0$
- ➔ In questo modo  $R_1$  e  $L_{d1}$  risultano in serie con  $R_{12}$  e  $L_{12}$



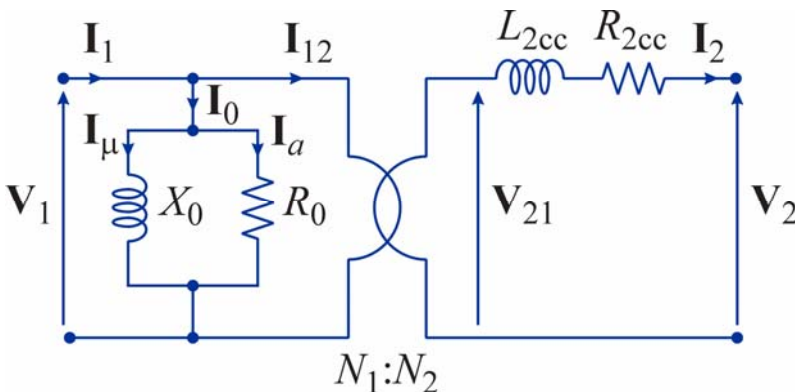
$$R_{1cc} = R_1 + R_{12} = R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$L_{1cc} = L_{d1} + L_{12} = L_{d1} + L_{d2} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

27

## Circuiti equivalenti semplificati (2)

- Facendo uso della proprietà di trasferimento dell'impedenza, il ramo  $R_{1cc} L_{1cc}$  può essere sostituito con un ramo posto in serie al secondario



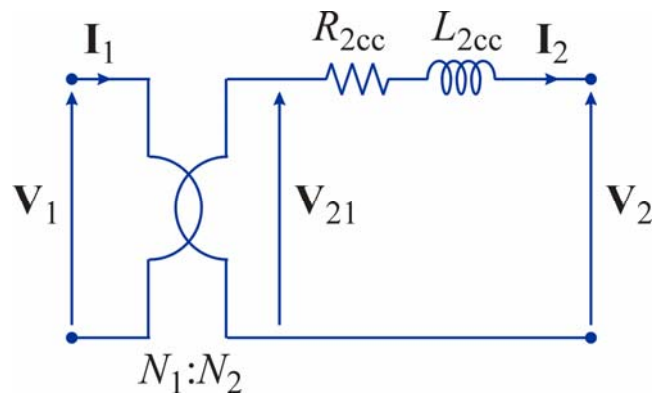
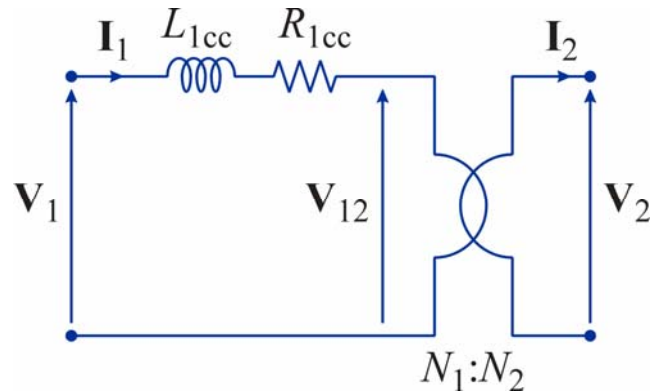
$$R_{2cc} = R_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = R_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + R_2$$

$$L_{2cc} = L_{1cc} \frac{N_2^2}{N_1^2} = L_{d1} \frac{N_2^2}{N_1^2} + L_{d2}$$

28

## Circuiti equivalenti semplificati (3)

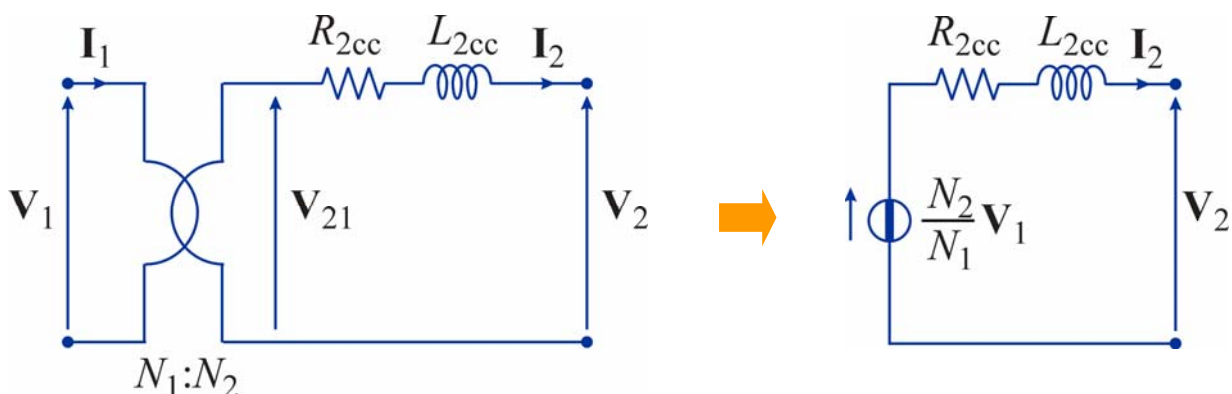
- Se  $I_0$  è trascurabile rispetto a  $I_1$  (come avviene in generale per un trasformatore in condizioni nominali) è possibile semplificare ulteriormente i circuiti equivalenti eliminando il ramo formato da  $R_0$  e  $X_0$ 
  - reti equivalenti di Kapp



29

## Circuiti equivalenti semplificati (4)

- Se la tensione del primario è imposta, la tensione e la corrente del secondario non dipendono dal ramo formato da  $R_0$  e  $X_0$  e quindi possono essere determinate facendo uso del circuito equivalente semplificato



30

## Indipendenza del flusso dalle condizioni di carico

- Se la caduta di tensione su  $R_1$  e  $L_{d1}$  è trascurabile si ha

$$\mathbf{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \cong \mathbf{V}_1$$

- Se  $\mathbf{V}_1$  è fissato (come avviene normalmente) è fissato anche il valore del flusso  $\Phi$ , che quindi risulta praticamente indipendente dalle condizioni di carico del trasformatore

$$\Phi \cong \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega N_1}$$

- Dall'equazione del circuito magnetico si ricava che deve essere costante anche la quantità

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 = (\mathcal{R} + j\omega K_f) \Phi$$

- ➔ Se una variazione del carico produce una variazione della corrente del secondario, il trasformatore reagisce con una variazione della corrente del primario tale da mantenere costante la differenza tra i prodotti  $N\mathbf{I}$  (**amperspire**) a primario e secondario

31

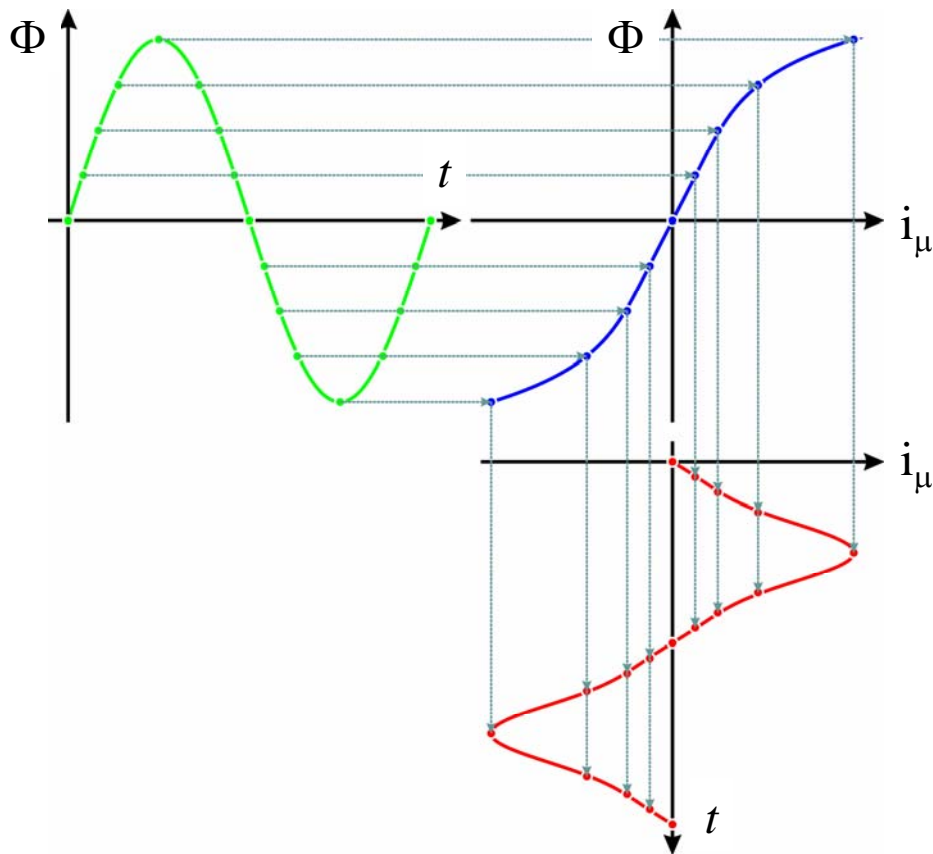
## Distorsione della corrente magnetizzante (1)

- Se il trasformatore è alimentato con una tensione  $v_1(t)$  sinusoidale, anche  $e_1(t)$  e quindi  $\Phi(t)$  sono sinusoidali
- Se il nucleo non è lineare la corrente magnetizzante  $i_\mu(t)$  non può essere sinusoidale, ma risulta distorta
- In particolare si può dimostrare che, in assenza di isteresi,
  - ◆  $i_\mu(t)$  contiene armoniche dispari (pulsazione  $3\omega$ ,  $5\omega$  ecc.)
  - ◆ il contributo principale è costituito dalla terza armonica (che risulta in opposizione con la fondamentale)
- Dato che in genere  $i_\mu(t)$  è piccola rispetto alle altre correnti, in prima approssimazione è possibile trattarla come sinusoidale, attribuendole un valore efficace pari a quello della corrente distorta

32

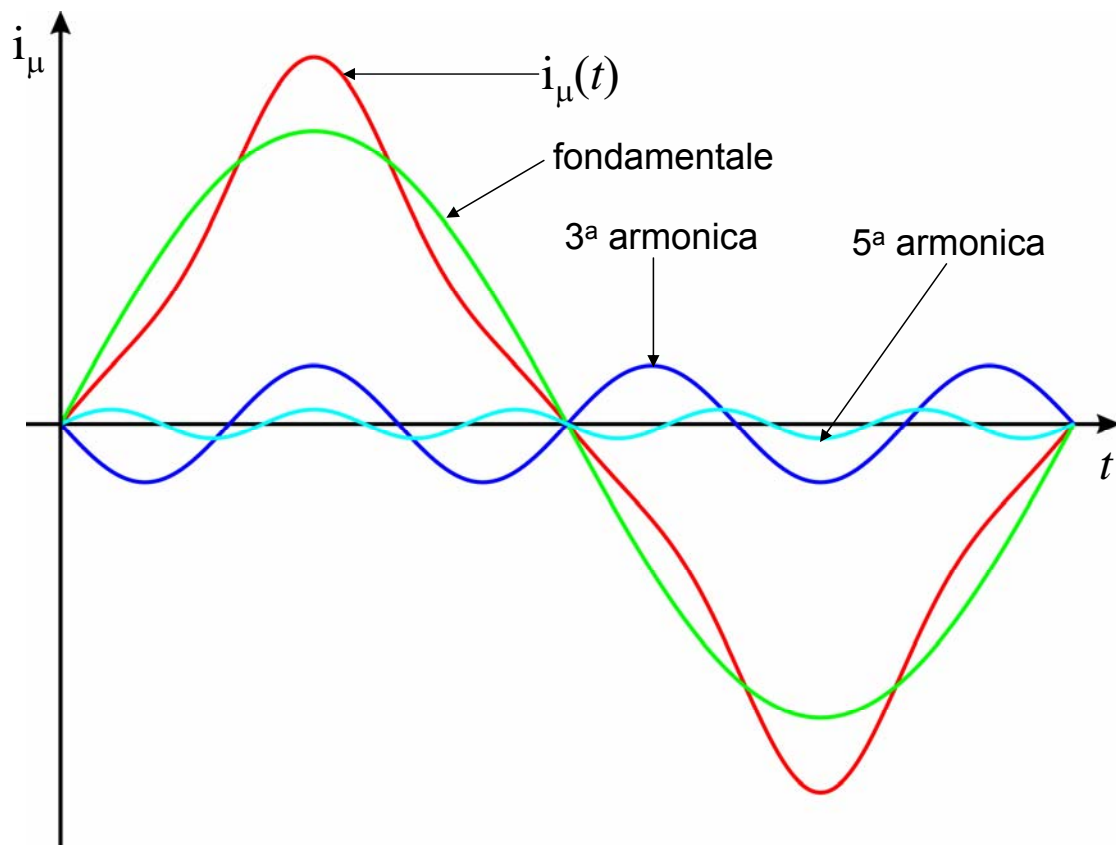


## Distorsione della corrente magnetizzante (2)



33

## Distorsione della corrente magnetizzante (3)



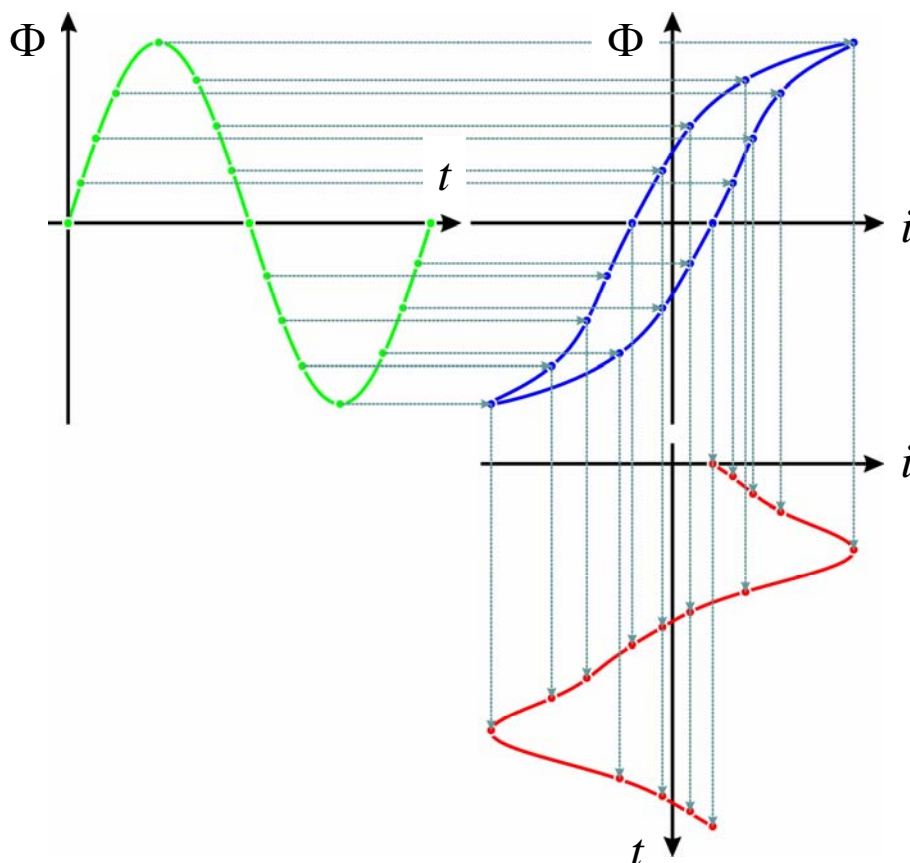
34

## Distorsione della corrente magnetizzante (4)

- In presenza di isteresi, alla corrente  $i_\mu(t)$  si aggiunge una componente  $i_h(t)$  di pulsazione  $\omega$ , sfasata in quadratura in anticipo rispetto a  $i_\mu(t)$
- La corrente  $i_h(t)$  risulta in quadratura in anticipo rispetto al flusso e quindi è in fase con la tensione  $e_1(t)$ 
  - ➔ Si ha un assorbimento di potenza attiva, che corrisponde alle perdite nel ferro per isteresi
  - ➔ Il contributo di  $i_h(t)$  può essere incluso in  $i_a(t)$  dimensionando opportunamente  $R_0$

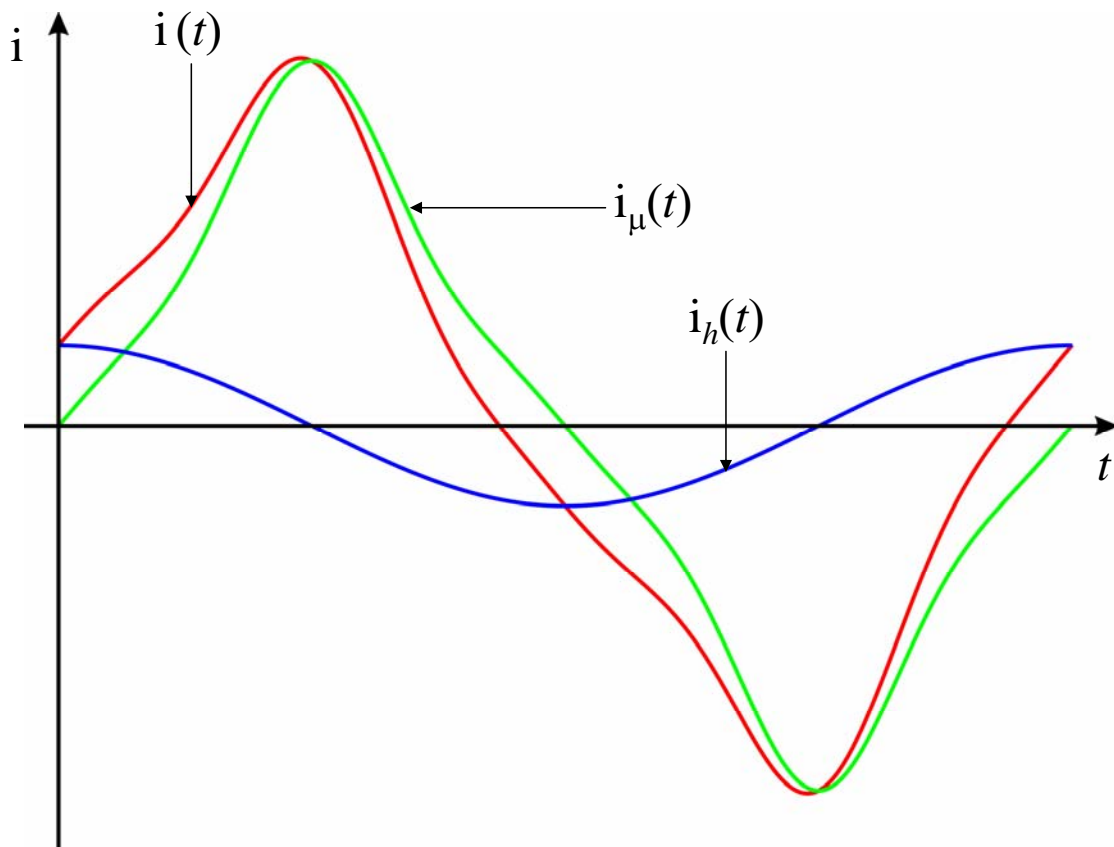
35

## Distorsione della corrente magnetizzante (5)



36

## Distorsione della corrente magnetizzante (6)



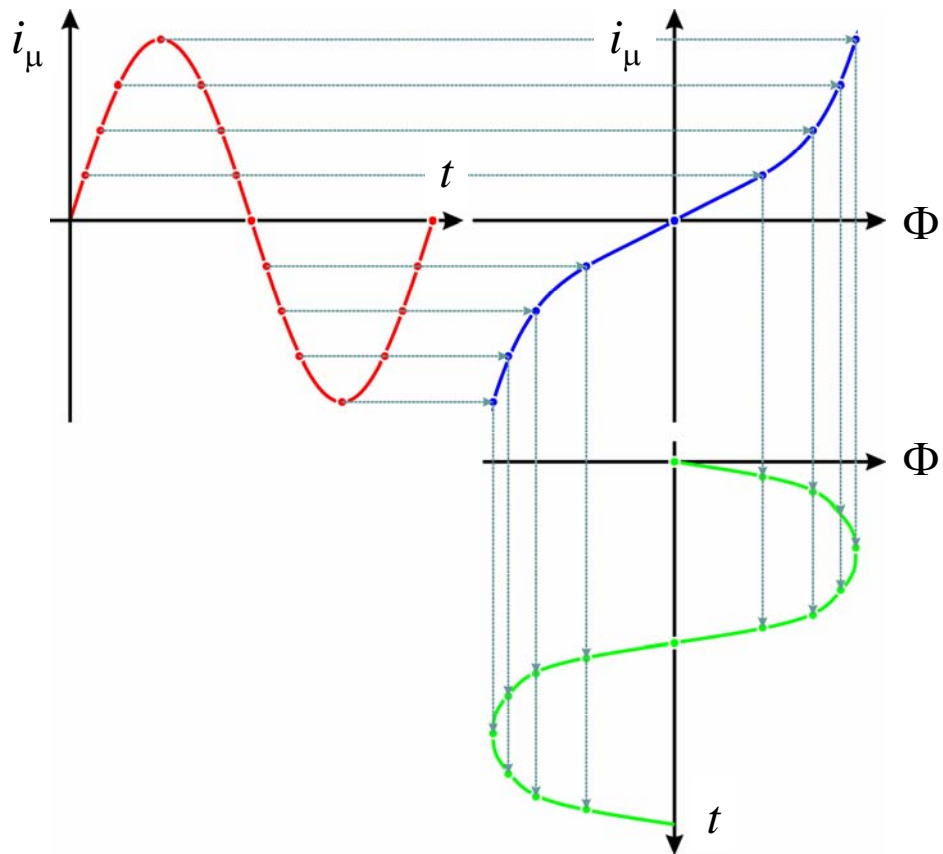
37

## Distorsione del flusso (1)

- Se il trasformatore è fatto funzionare in modo da imporre un andamento sinusoidale alla corrente magnetizzante, per effetto della non linearità del nucleo risulta distorto il flusso
- In queste condizioni anche le tensioni sono distorte
- Come si vedrà in seguito, questa situazione si può verificare, ad esempio, nei sistemi trifase
- Si può dimostrare che, in questo caso, il flusso contiene armoniche dispari e che il contributo dominante è dovuto alla terza armonica, che risulta in fase con il flusso stesso

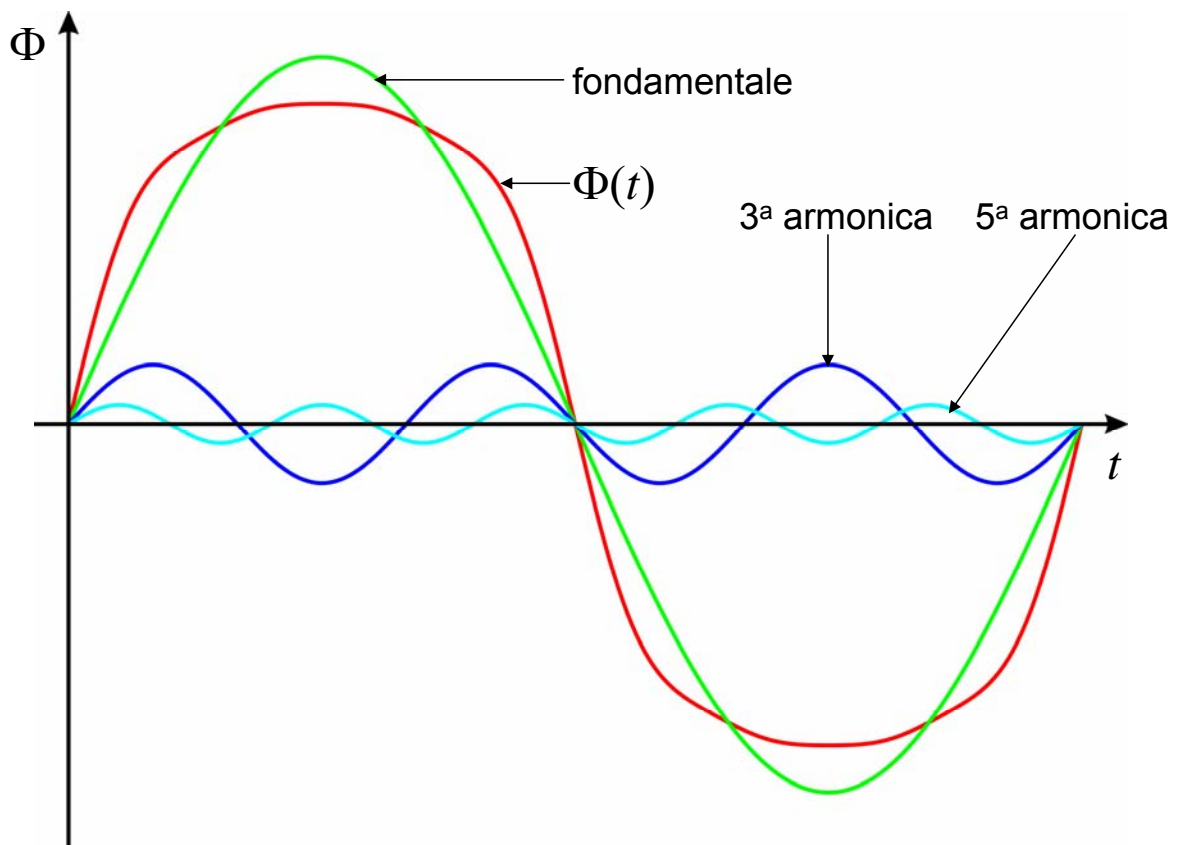
38

## Distorsione del flusso (2)



39

## Distorsione del flusso (3)



40

## Dati di targa

- Un trasformatore è caratterizzato da un insieme di valori nominali che ne definiscono le prestazioni ai fini delle garanzie e del collaudo
- Questi valori, assieme ad altre informazioni, sono riportati su una targa apposta sul trasformatore (**dati di targa**)
- Alcuni dei principali dati di targa sono:
  - ◆ Frequenza nominale:  $f_n$  [Hz]
  - ◆ Tensione nominale primaria (valore efficace):  $V_{1n}$  [V]
  - ◆ Tensione nominale secondaria a vuoto (valore efficace):  $V_{20}$  [V]
    - ➔ Rapporto nominale di trasformazione:  $K_0 = V_{1n} / V_{20}$
  - ◆ Potenza nominale (apparente):  $S_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{20} \cdot I_{2n}$  [VA]
    - ➔ Corrente nominale primaria (valore efficace):  $I_{1n}$  [A]
    - ➔ Corrente nominale secondaria (valore efficace):  $I_{2n}$  [A]

41

## Prova a vuoto (1)

- Al primario viene applicata una tensione di valore nominale
- Il secondario viene lasciato aperto  $I_2 = 0$
- Corrente del primario
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_0$$
  - ➔ il valore è molto inferiore al valore nominale
  - ➔ le perdite nel rame sono trascurabili
- La caduta di tensione su  $R_2$  e  $L_{d2}$  è nulla
- La caduta di tensione su  $R_1$  e  $L_{d1}$  è molto piccola rispetto al valore in condizioni nominali
  - ➔ il rapporto  $V_1/V_2$  si identifica con quello di un trasformatore ideale
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = K_0 \quad (\text{rapporto di trasformazione nominale})$$
- $E_1$  e quindi  $I_a$  hanno praticamente i valori nominali
  - ➔ le perdite nel ferro coincidono con quelle relative al funzionamento nominale

42

## Prova a vuoto (2)

- Il comportamento a vuoto del trasformatore può essere descritto mediante i parametri:

- ◆ **Corrente a vuoto percentuale**

$$i_0 \% = \frac{I_{10}}{I_{1n}} \cdot 100 \quad I_{10} = \text{corrente a vuoto del primario}$$

- ◆ **Potenza a vuoto percentuale**

$$P_0 \% = \frac{P_0}{S_n} \cdot 100 \quad P_0 = \text{potenza attiva assorbita a vuoto}$$

- ◆ **Fattore di potenza a vuoto**

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{V_{1n} I_{10}}$$

- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta

$$P_0 \% = \frac{V_{1n} I_{10} \cos \varphi_0}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = i_0 \% \cdot \cos \varphi_0$$

43

## Prova a vuoto (3)

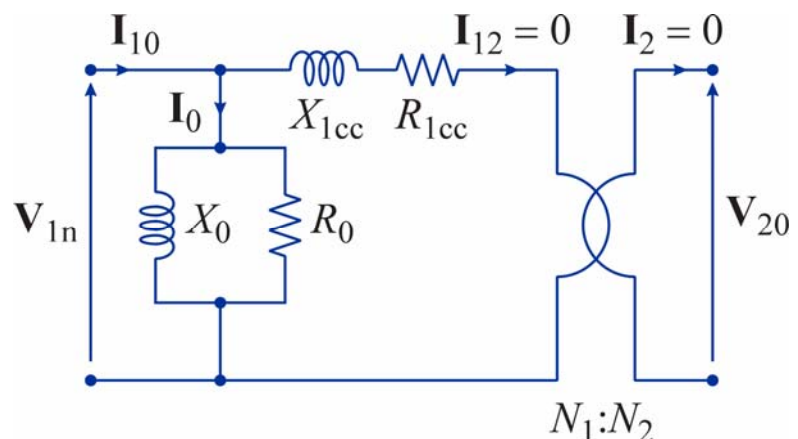
- Noti i parametri  $S_n$ ,  $V_{1n}$ ,  $i_0\%$  e  $\cos \varphi_0$ , facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di  $R_0$  e  $X_0$

$$P_0 = \frac{i_0 \% \cdot \cos \varphi_0}{100} S_n$$

$$Q_0 = P_0 \tan(\arccos \varphi_0)$$

$$R_0 = \frac{V_{1n}^2}{P_0}$$

$$X_0 = \frac{V_{1n}^2}{Q_0}$$

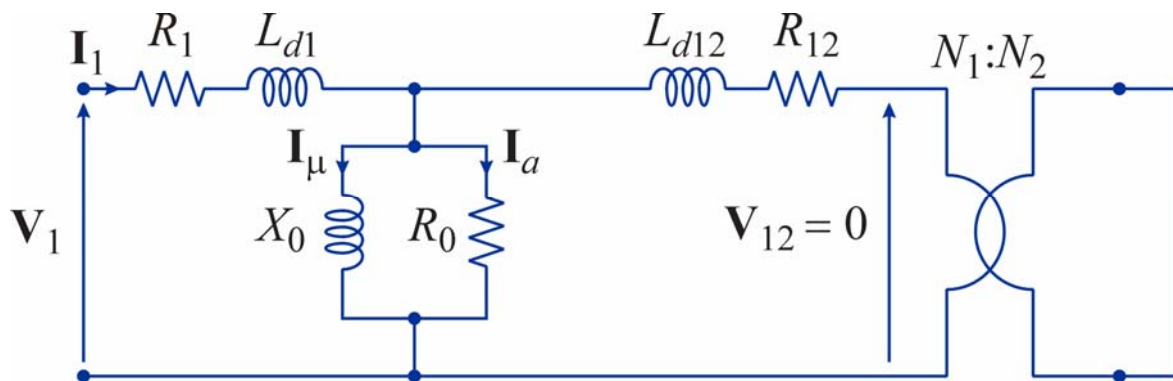


44

## Prova in cortocircuito (1)

- Se il secondario è chiuso in cortocircuito  $V_2 = 0 \rightarrow V_{12} = 0$
- L'impedenza  $R_0$   $X_0$  è in parallelo con l'impedenza  $R_{12}$   $L_{d12}$ 
  - ➔  $R_0$  e  $X_0$  possono essere trascurate perché normalmente  $R_{12}$  e  $L_{d12}$  sono molto piccole
  - ➔ Corrente del primario

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + j\omega L_{d1} + R_{12} + j\omega L_{d12}} = \frac{V_1}{R_{1cc} + j\omega L_{1cc}}$$



45

## Prova in cortocircuito (2)

- Le impedenze dovute alle resistenze di degli avvolgimenti e alle induttanze di dispersione sono molto piccole
- Se la tensione a primario ha valore nominale le correnti possono risultare molto grandi rispetto ai valori nominali
  - ➔ eccessivo surriscaldamento dovuto all'effetto Joule
  - ➔ possibili danni dovuti alle forze tra gli avvolgimenti prodotte dalle correnti
- Nella prova in cortocircuito il trasformatore viene alimentato con una tensione  $V_{1cc}$ , di valore efficace inferiore a  $V_1$ , tale da fare circolare nel secondario una corrente di valore nominale

46

## Prova in cortocircuito (3)

- Le correnti  $I_1$  e  $I_2$  hanno valore nominale (a rigore questo vale solo per il  $I_2$ , ma con ottima approssimazione si può ritenere verificato anche per  $I_1$ )
  - ➔ le perdite nel rame sono praticamente coincidenti con quelle relative al funzionamento nominale
- $V_1$  ha un valore molto inferiori a quello nominale
  - ➔ la corrente  $I_a$  e  $I_\mu$  hanno valori molto piccoli rispetto ai valori in condizioni nominali
  - ➔ le perdite nel ferro sono trascurabili
  - ➔ il rapporto  $I_1/I_2$  si identifica con quello di un trasformatore ideale

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

47

## Prova in cortocircuito (4)

- Il comportamento del trasformatore in cortocircuito può essere descritto mediante i parametri:
  - ◆ **Tensione di cortocircuito percentuale**  
$$v_{cc} \% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad (V_{1cc} = \text{Tensione di cortocircuito del primario})$$
  - ◆ **Potenza di cortocircuito percentuale**  
$$P_{cc} \% = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100 \quad (P_{cc} = \text{potenza attiva assorbita in cortocircuito})$$
  - ◆ **Fattore di potenza in cortocircuito**  
$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{V_{1cc} I_{1n}}$$

- I tre parametri non sono indipendenti tra loro dato che risulta

$$P_{cc} \% = \frac{V_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc}}{V_{1n} I_{1n}} \cdot 100 = v_{cc} \% \cdot \cos \varphi_{cc}$$

48



## Prova in cortocircuito (5)

- Noti i parametri  $S_n$ ,  $V_{1n}$ ,  $V_{20}$ ,  $v_{cc}\%$  e  $\cos\varphi_{cc}$ , facendo riferimento ai circuiti equivalenti semplificati, è possibile calcolare i valori di  $R_{1cc}$  e  $X_{1cc}$  o di  $R_{2cc}$  e  $X_{2cc}$

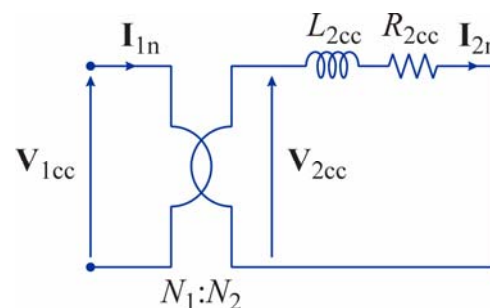
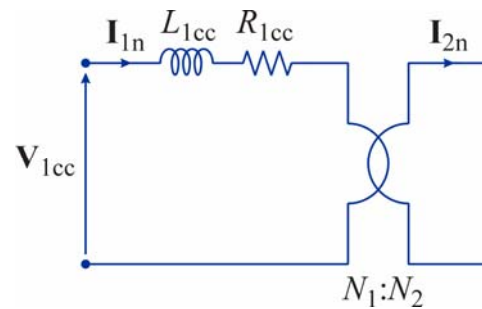
$$P_{cc} = \frac{v_{cc}\% \cdot \cos\varphi_{cc}}{100} S_n$$

$$Q_{cc} = P_{cc} \tan(\arccos\varphi_{cc})$$

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} \quad I_{2n} = \frac{S_n}{V_{20}}$$

$$R_{1cc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2} \quad R_{2cc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2}$$

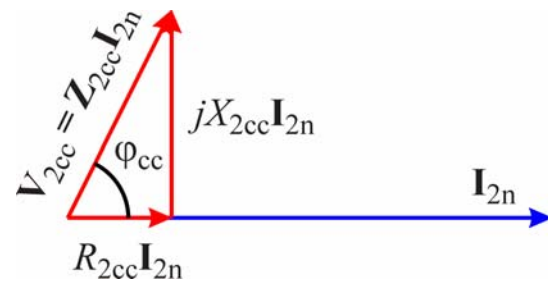
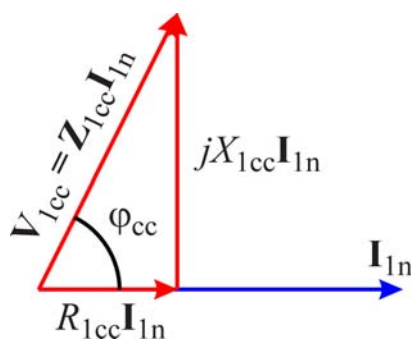
$$X_{1cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{1n}^2} \quad X_{2cc} = \frac{Q_{cc}}{I_{2n}^2}$$



49

## Triangolo di cortocircuito

- Il funzionamento dei due circuiti equivalenti può essere rappresentato mediante i seguenti diagrammi fasoriali



- Il triangolo formato da  $V_{2cc}$  e dalle sue componenti resistiva e reattiva è detto **triangolo di cortocircuito** del trasformatore
- Il triangolo di cortocircuito è definito dai valori di  $v_{cc}\%$  e  $\cos\varphi_{cc}$

$$v_{cc}\% = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{V_{2cc}}{V_{20}} \cdot 100$$

50

## Caduta di tensione (1)

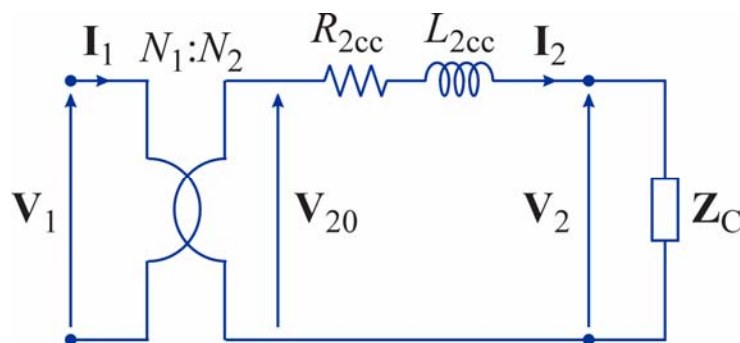
- La **caduta di tensione** è definita come differenza tra i valori efficaci della tensione del secondario a vuoto e a carico

$$\Delta V = V_{20} - V_2$$

- La caduta di tensione percentuale è definita dalla relazione

$$\Delta V \% = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \cdot 100$$

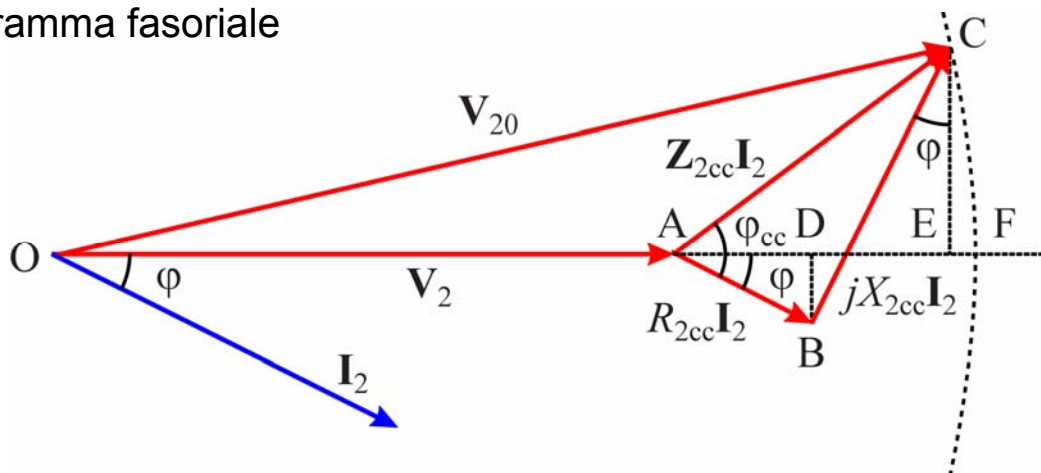
- Per ottenere una valutazione approssimata della caduta di tensione si può fare uso alla rete equivalente di Kapp riferita a secondario



51

## Caduta di tensione (2)

- Il funzionamento può essere rappresentato mediante il seguente diagramma fasoriale



- Dato che le cadute di tensione su  $R_{2cc}$  e  $X_{2cc}$  di solito sono piccole, si può confondere la differenza tra i moduli di  $V_{20}$  e  $V_2$  con la lunghezza del segmento AE

$$\overline{AE} = \overline{AC} \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = \overline{AB} \cos \varphi + \overline{BC} \sin \varphi$$

$$\Delta V = Z_{2cc} I_2 \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = R_{2cc} I_2 \cos \varphi + X_{2cc} I_2 \sin \varphi$$

52

## Caduta di tensione (3)

- La caduta di tensione si annulla se l'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra la tensione e la corrente del carico vale

$$\Delta V = 0 \Rightarrow R_{2cc} \cos \varphi + X_{2cc} \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right)$$

- La caduta di tensione è positiva con carichi ohmico-induttivi o con carichi ohmico-capacitivi che introducono sfasamenti non troppo elevati

$$-\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta V > 0 \quad \rightarrow \text{caduta di tensione}$$

- La caduta di tensione è negativa (e quindi la tensione a carico ha valore efficace maggiore di quello a vuoto) se vale la condizione

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\arctg\left(\frac{R_{2cc}}{X_{2cc}}\right) \Rightarrow \Delta V < 0 \quad \rightarrow \text{aumento di tensione}$$

53

## Rendimento

- Trasformatore alimentato a primario da una tensione sinusoidale con il secondario collegato ad un impedenza di carico

- Rendimento**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

$P_1$  = potenza attiva assorbita dal primario

$P_2$  = potenza attiva ceduta al carico

- I trasformatori, essendo macchine statiche, hanno rendimenti molto elevati (oltre il 99.5% per i trasformatori di grande potenza)

→ La definizione non è adatta per la misura del rendimento

- ♦  $P_1$  e  $P_2$  sono poco diverse tra loro → la valutazione del rapporto è molto sensibile agli errori di misura
- ♦ Le potenze in gioco possono essere molto elevate

54

## Rendimento convenzionale (1)

- Il **rendimento convenzionale** è definito dalla relazione

$$\eta_c = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}}$$

- ◆  $P_2$  = potenza attiva ceduta al carico
- ◆  $P_{Cu}$  = potenza dissipata a causa delle perdite nel rame
- ◆  $P_{Fe}$  = potenza dissipata a causa delle perdite nel ferro
- La misura del rendimento convenzionale del trasformatore richiede la valutazione delle perdite nel rame e nel ferro
  - ➔ può essere effettuata mediante una prova in cortocircuito e una prova a vuoto
- Il **rendimento nominale** corrisponde al rendimento convenzionale ottenuto con  $P_2 = S_n$  (potenza nominale del trasformatore)

55

## Rendimento convenzionale (2)

- Il rendimento dipende dalle condizioni di carico

- ◆ La potenza attiva ceduta al carico è

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

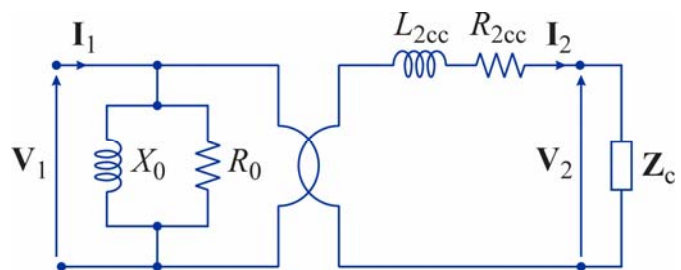
- ◆ La potenza dissipata per le perdite nel rame è

$$P_{Cu} = R_{2cc} I_2^2$$

- ◆ Se la tensione del primario è fissata, le perdite nel ferro sono praticamente indipendenti dalla corrente nel carico

- ➔ Il rendimento convenzionale si può esprimere come

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_{2cc} I_2^2 + P_{Fe}}$$



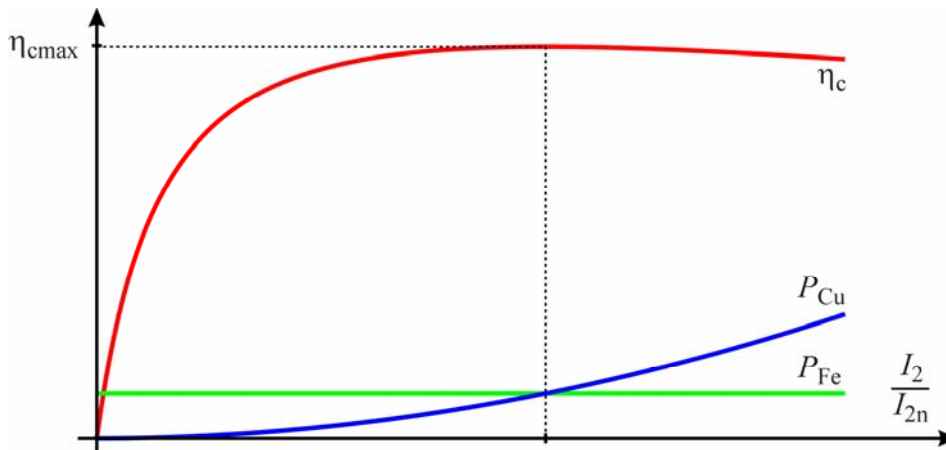
56

## Rendimento convenzionale (3)

- Si assume che sia fissato il valore del fattore di potenza
- Si può verificare che al variare del valore efficace della corrente il rendimento è massimo quando

$$\frac{d\eta_c}{dI_2} = 0 \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{R_{2cc}}} \Rightarrow R_{2cc} I_2^2 = P_{Fe}$$

cioè quando le perdite nel rame e nel ferro sono uguali



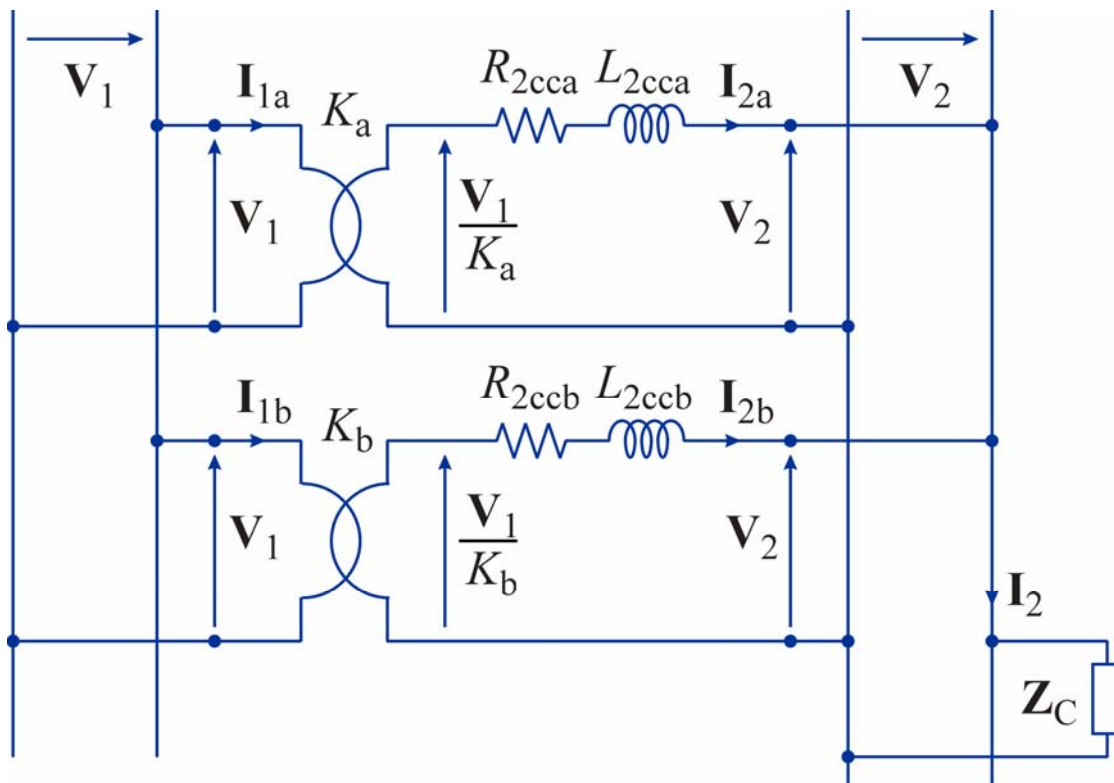
57

## Parallelo di trasformatori (1)

- Spesso per trasferire energia tra due linee si utilizzano due o più trasformatori collegati in parallelo
  - ◆ Se il carico è variabile, utilizzando un solo trasformatore dimensionato in funzione della potenza massima, si potrebbero avere periodi in cui la potenza è molto inferiore alla potenza nominale (➔ basso rendimento)
  - ◆ In questo caso conviene utilizzare più trasformatori che possano essere inseriti progressivamente in parallelo tra loro all'aumentare della potenza richiesta
  - ◆ In questo modo i trasformatori lavorano in condizioni più vicine a quelle nominali (➔ migliore rendimento)
  - ◆ Inoltre la presenza di più trasformatori in parallelo consente di garantire la continuità del servizio se è necessario scollegare uno dei trasformatori per guasto o per manutenzione

58

## Parallelo di trasformatori (2)



59

## Parallelo di trasformatori (3)

- Affinché i trasformatori in parallelo funzionino in condizioni ottimali devono essere verificate le seguenti condizioni

- ◆ I trasformatori devono avere uguali valori delle tensioni nominali primarie e secondarie (e quindi del rapporto di trasformazione)

$$V_{1na} = V_{1nb} \quad V_{20a} = V_{20b} \quad \Rightarrow \quad K_a = K_b$$

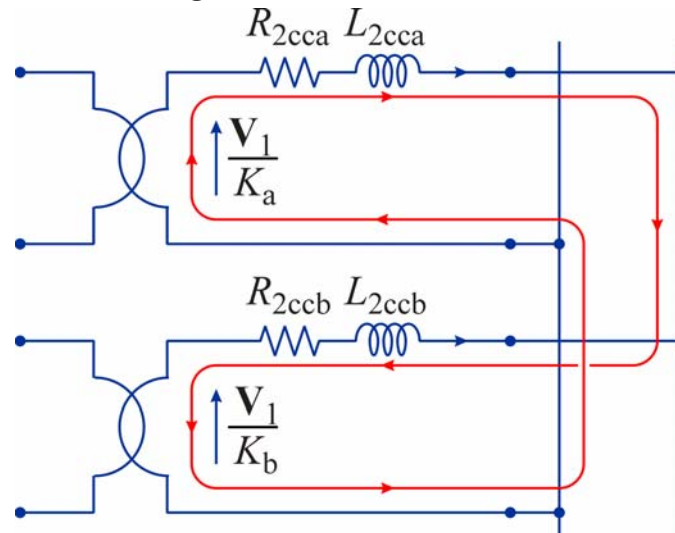
- ◆ Devono essere collegati in modo che le loro tensioni secondarie risultino in fase tra loro
- ◆ Devono avere uguali triangoli di cortocircuito

$$v_{cca} \% = v_{ccb} \% \quad \cos \varphi_{cca} = \cos \varphi_{ccb}$$

60

## Parallelo di trasformatori (4)

- Le prime due condizioni impongono che si annulli la f.e.m. totale agente nella maglia formata dai secondari dei trasformatori
- Questo consente di evitare che nel funzionamento a vuoto nella maglia circoli una corrente che darebbe luogo a dissipazione anche con potenza erogata nulla



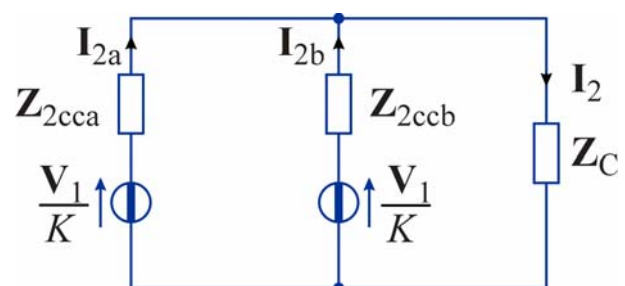
61

## Parallelo di trasformatori (5)

- Nel funzionamento a carico si ha

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

$$Z_{cc2a} I_{2a} = Z_{cc2b} I_{2b} \Rightarrow \frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{Z_{cc2b}}{Z_{cc2a}}$$



- A parità di valori efficaci delle correnti  $I_{2a}$  e  $I_{2b}$ , il valore efficace della corrente nel carico è massimo quando le correnti sono in fase tra loro
- In questo caso risulta

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

- Se inoltre si impone che entrambi i trasformatori funzionino a pieno carico, e quindi che le correnti abbiano i valori nominali, deve valere la condizione

$$\frac{Z_{cc2b}}{Z_{cc2a}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}}$$

62

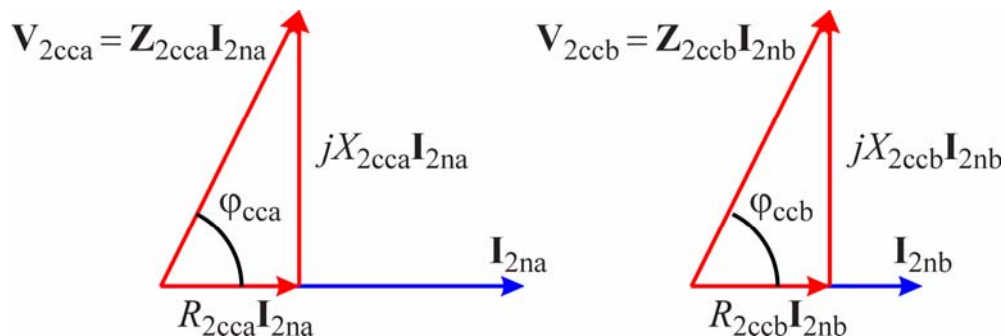
## Parallelo di trasformatori (6)

- Il rapporto tra le impedenze  $Z_{2cca}$  e  $Z_{2ccb}$  deve essere reale, quindi per le loro parti reali e le loro parti immaginarie devono valere le condizioni

$$R_{2cca} I_{2na} = R_{2ccb} I_{2nb}$$

$$X_{1cca} I_{2na} = X_{1ccb} I_{2nb}$$

- ➔ I trasformatori devono avere triangoli di cortocircuito uguali e quindi
  - ◆ tensioni di cortocircuito uguali
  - ◆ fattori di potenza di cortocircuito uguali



63

## Parallelo di trasformatori (7)

- Quando sono verificate le condizioni precedenti, nel funzionamento nominale si ha

$$S_n = V_{20} I_{2n} = V_{20} I_{2na} + V_{20} I_{2nb} = S_{na} + S_{nb}$$

- ➔ I trasformatori in parallelo si comportano come un trasformatore avente potenza nominale pari alla somma delle loro potenze nominali

- Inoltre in ogni condizione di funzionamento risulta

$$\frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{I_{2na}}{I_{2nb}} = \frac{S_{na}}{S_{nb}}$$

- Le correnti, e di conseguenza anche le potenze erogate, si ripartiscono in quote proporzionali alle potenze nominali dei trasformatori

64