Grafi ed equazioni topologiche

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 28-9-2013)

Premessa

- Se si indica con l il numero di correnti e il numero di tensioni dei componenti di un circuito, la risoluzione del circuito richiede la determinazione di $2l$ incognite
- Le relazioni costitutive dei componenti forniscono l equazioni che legano le l tensioni e le l correnti
  - Si devono formulare altre l equazioni utilizzando le leggi di Kirchhoff
- Il numero di equazioni che si possono scrivere applicando la LKI e la LKV dipende dalla struttura del circuito e in genere supera l
  - Queste equazioni non sono indipendenti tra loro
  - Occorre individuare un criterio per selezionare un insieme di equazioni indipendenti basate sulla LKI e un insieme di equazioni indipendenti basate sulla LKV

Grafo di un circuito

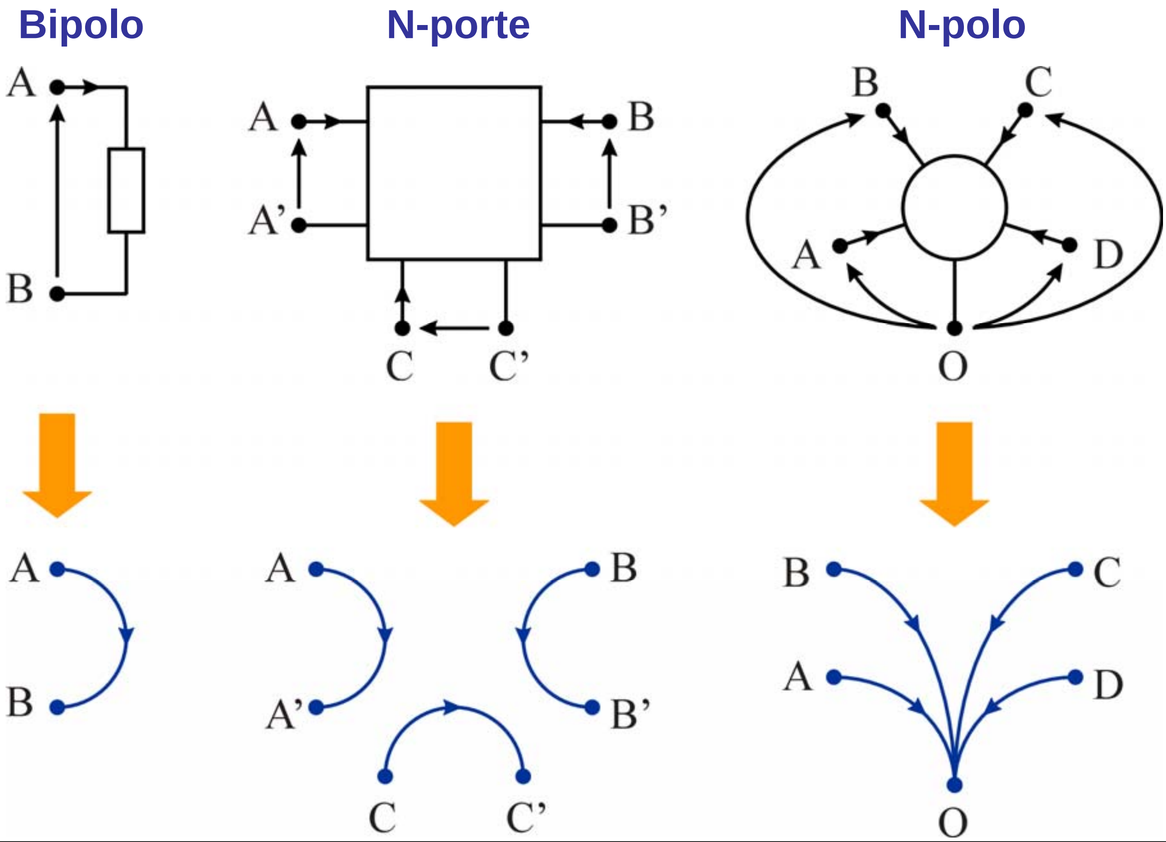
- **Grafo** = rappresentazione della struttura dei collegamenti di un circuito
- Un grafo è costituito da:
  - un insieme di punti ➡ **nodi**
    - corrispondenti ai nodi del circuito
  - un insieme di archi che collegano i nodi ➡ **lati** o **rami**
    - un lato del grafo corrisponde ad una porta di un componente
- E' possibile che il grafo contenga nodi a cui non è collegato nessun lato (nodi isolati)
- La forma degli archi e le posizioni dei nodi non sono significative (ciò che interessa è a quali nodi è collegato ciascun lato)

Grafo orientato

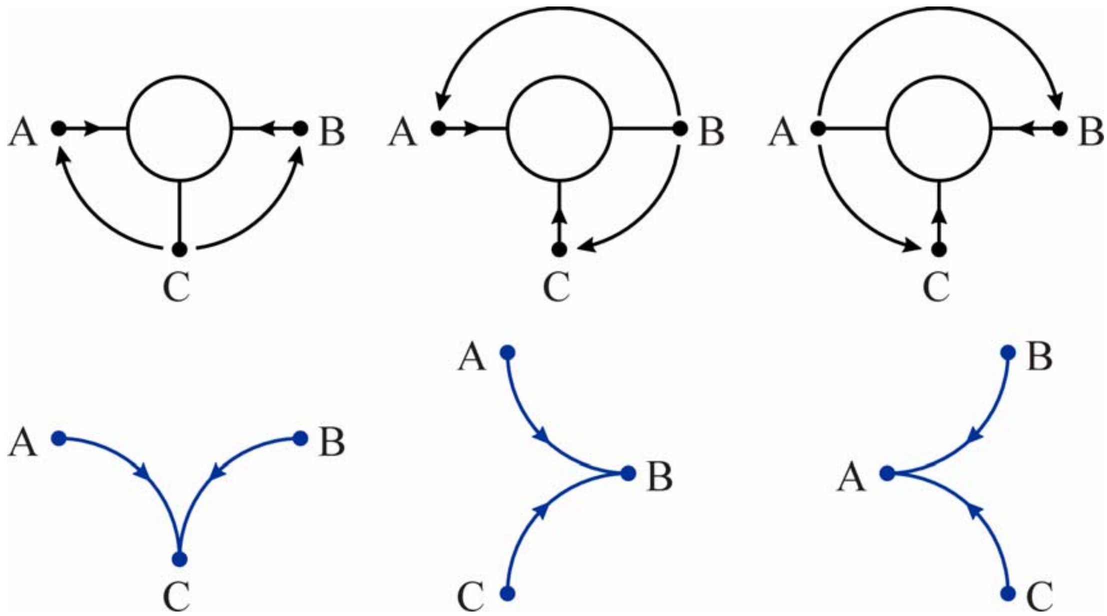
- Ciascuno dei lati del grafo può essere messo in corrispondenza con una tensione e una corrente
- Si adotta la convenzione dell'utilizzatore per tutti i componenti

➡ Si possono rappresentare i versi di riferimento delle correnti e delle tensioni orientando i lati del grafo
  - verso della corrente ➡ verso del lato
  - verso della tensione ➡ il terminale positivo coincide con il nodo da cui esce il lato
    ➡ il terminale negativo coincide con il nodo in cui il lato entra

Grafi dei componenti



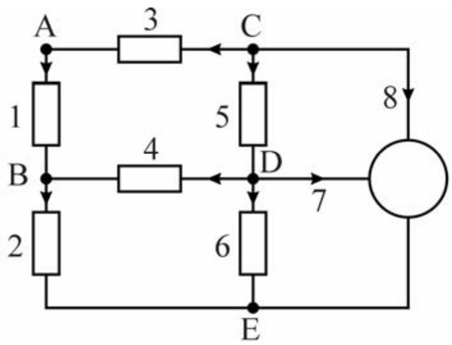
Esempio – grafi di un tripolo



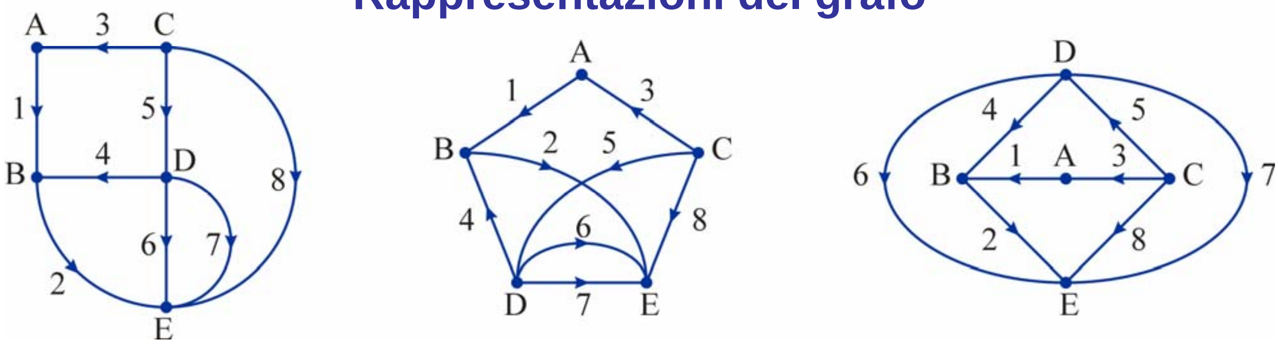
- In presenza di componenti con più di due terminali la struttura del grafo dipende dalla scelta dei terminali di riferimento

Esempio – rappresentazioni del grafo di un circuito

Circuito



Rappresentazioni del grafo

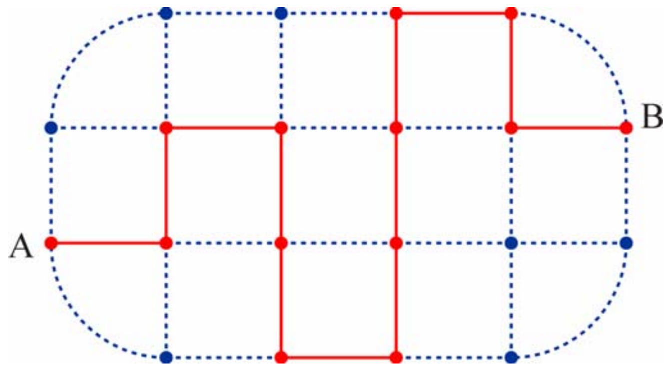


Sottografo

- **Sottografo** di un grafo $\mathcal{G}$ = grafo $\mathcal{G}'$ formato da
  - un sottoinsieme dei lati di $\mathcal{G}$
  - un sottoinsieme dei nodi di $\mathcal{G}$
- $\mathcal{G}'$ deve contenere tutti i nodi terminali dei lati di $\mathcal{G}$ inclusi (non possono esserci lati non collegati a nodi)
- Come caso particolare un sottografo può essere formato da un solo nodo di $\mathcal{G}$ (*sottografo degenere*)
- Quando si parla di sottografo *definito* da un sottoinsieme dei lati di $\mathcal{G}$ si sottintende che il sottografo include anche tutti (e solo) i nodi terminali dei lati inclusi

Cammino

- **Cammino** dal nodo A al nodo B = sottografo di $\mathcal{G}$ definito da una successione di lati di $\mathcal{G}$ tali che
  - due lati consecutivi hanno sempre un nodo in comune
  - sul nodo A incide solo il primo lato
  - sul nodo B incide solo l'ultimo lato
  - su tutti gli altri nodi incidono esattamente due lati

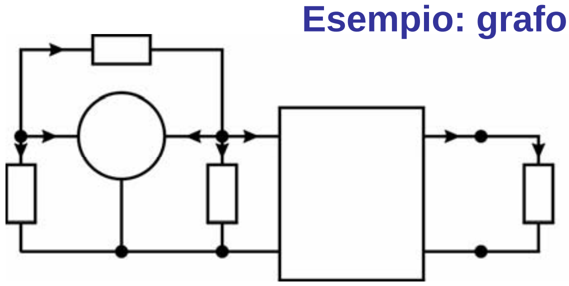


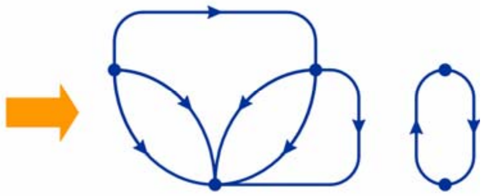
➡ *Un cammino è un percorso formato da lati di $\mathcal{G}$ che collega due nodi A e B senza passare più di una volta per lo stesso nodo*

Grafo connesso

- Un grafo $\mathcal{G}$ si dice **connesso** se per ogni coppia di nodi di $\mathcal{G}$ esiste almeno un cammino contenuto in $\mathcal{G}$ che collega i nodi
- I nodi di un grafo $\mathcal{G}$ non connesso possono essere divisi in gruppi (detti **parti separate**) tali che
  - tra due nodi dello stesso gruppo esiste sempre un cammino contenuto in $\mathcal{G}$
  - tra due nodi di due gruppi diversi non esiste nessun cammino contenuto in $\mathcal{G}$
- In seguito (salvo avviso contrario) si considereranno esclusivamente grafi connessi

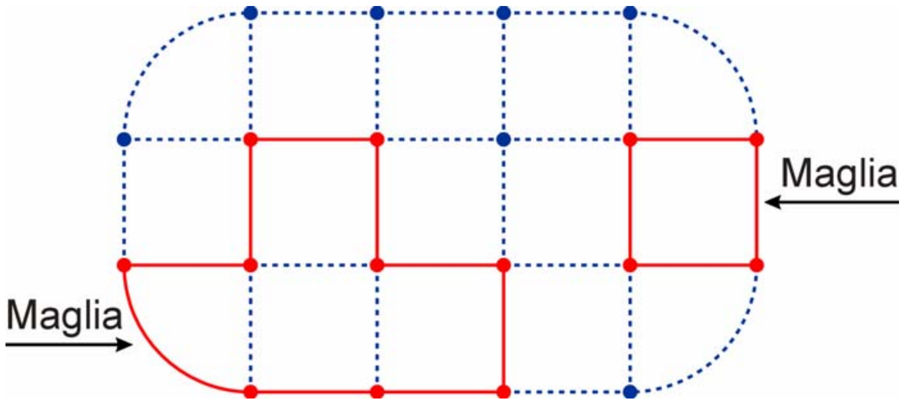
Esempio: grafo non connesso





Maglia

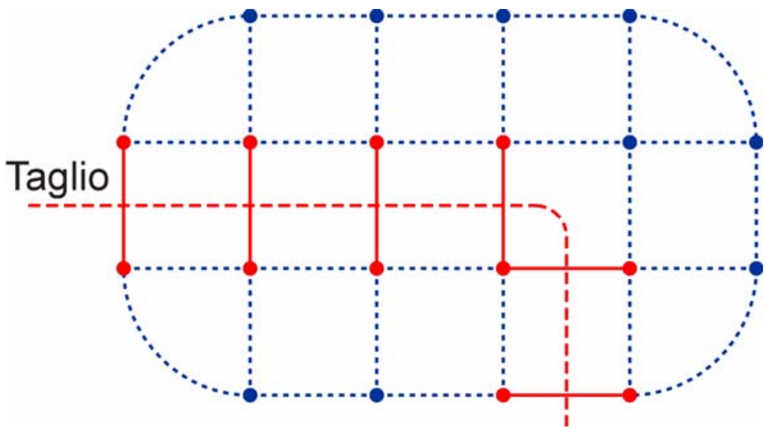
- **Maglia** = Sottografo $\mathcal{M}$ di un grafo $\mathcal{G}$ tale che
  - $\mathcal{M}$ è connesso
  - su ogni nodo di $\mathcal{M}$ incidono esattamente due lati



➡ *Una maglia è un percorso chiuso formato da lati del grafo che non passa più di una volta attraverso lo stesso nodo*

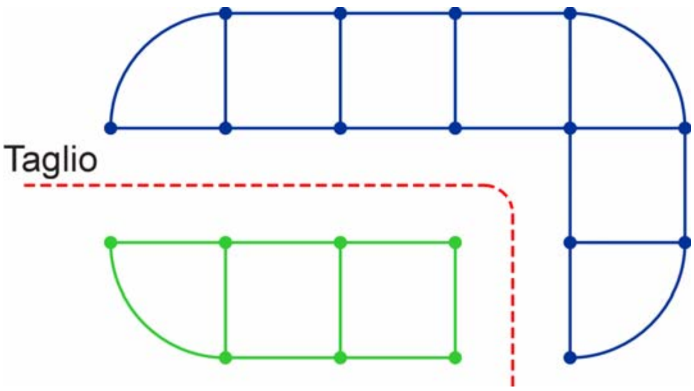
Taglio

- **Taglio** = sottografo $\mathcal{T}$ di un grafo $\mathcal{G}$ definito da un insieme di lati di $\mathcal{G}$ tali che
  - eliminando tutti i lati di $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$ viene diviso in due parti separate
  - eliminando tutti i lati di $\mathcal{T}$ meno uno, $\mathcal{G}$ rimane connesso



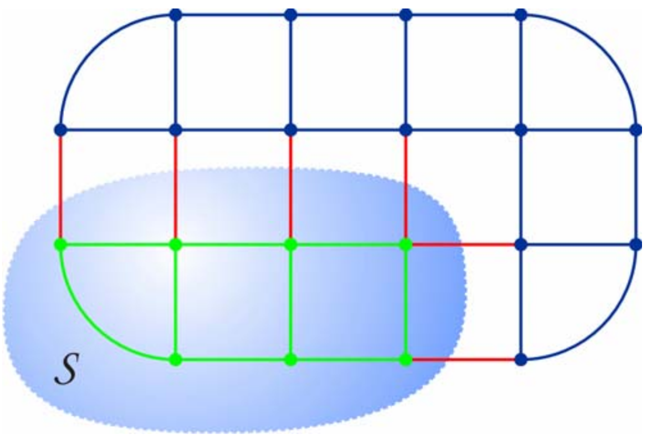
Taglio

- Eliminando tutti i lati del taglio, i nodi sono divisi in due gruppi (corrispondenti alle due componenti connesse del grafo risultante)
  - tra nodi appartenenti a gruppi diversi non sono più presenti collegamenti
  - tra nodi dello stesso gruppo esiste sempre almeno un cammino lungo i rimanenti lati del grafo
- E' sufficiente reintrodurre uno solo dei lati del taglio per ristabilire il collegamento tra i due gruppi di nodi



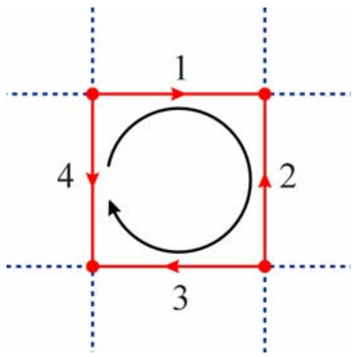
Taglio

- Un taglio può sempre essere associato ad una superficie chiusa (contenente una delle due componenti connesse del grafo rimanenti dopo l'eliminazione dei lati del taglio stesso)
- ➡ I lati che formano il taglio sono i lati del grafo che attraversano questa superficie chiusa



Leggi di Kirchhoff

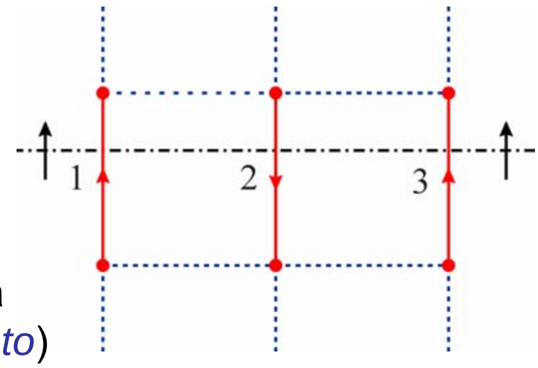
- **LKV** ➡ *è nulla la somma algebrica delle tensioni dei lati di ogni maglia*



$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

(Per scrivere l'equazione della maglia si fissa arbitrariamente un *verso di percorrenza*)

- **LKI** ➡ *è nulla la somma algebrica delle correnti dei lati di ogni taglio*

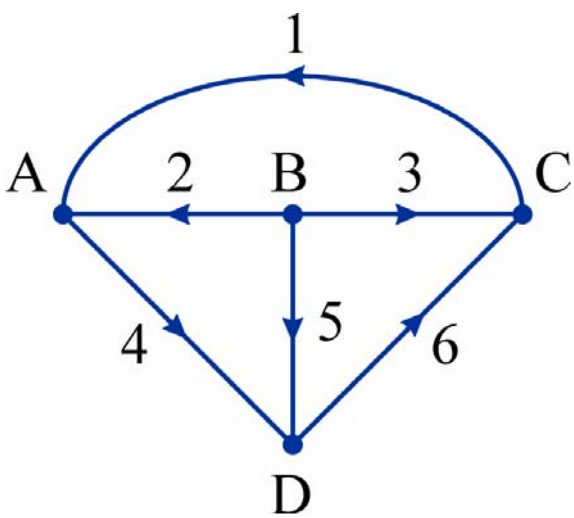


$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

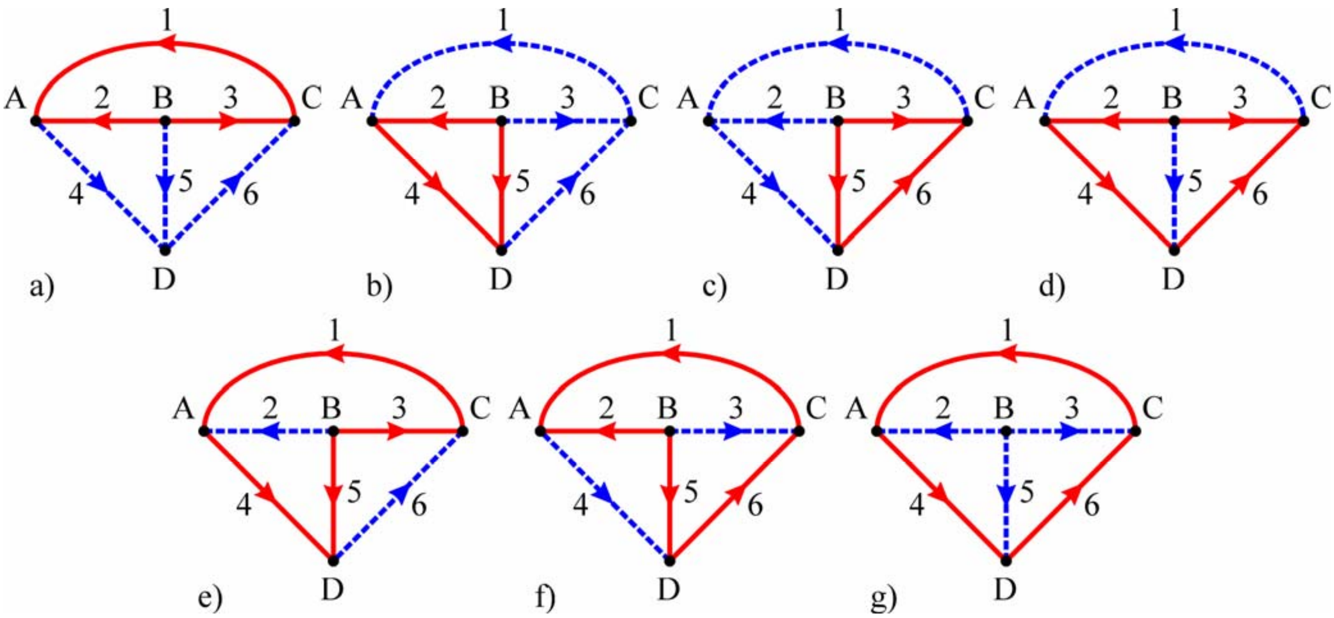
(Per scrivere l'equazione del taglio si fissa arbitrariamente un *verso di attraversamento*)

Esempio

- Si vogliono scrivere le equazioni che si ottengono applicando la LKV a tutte le maglie e la LKI a tutti i tagli di questo grafo



Esempio - Maglie



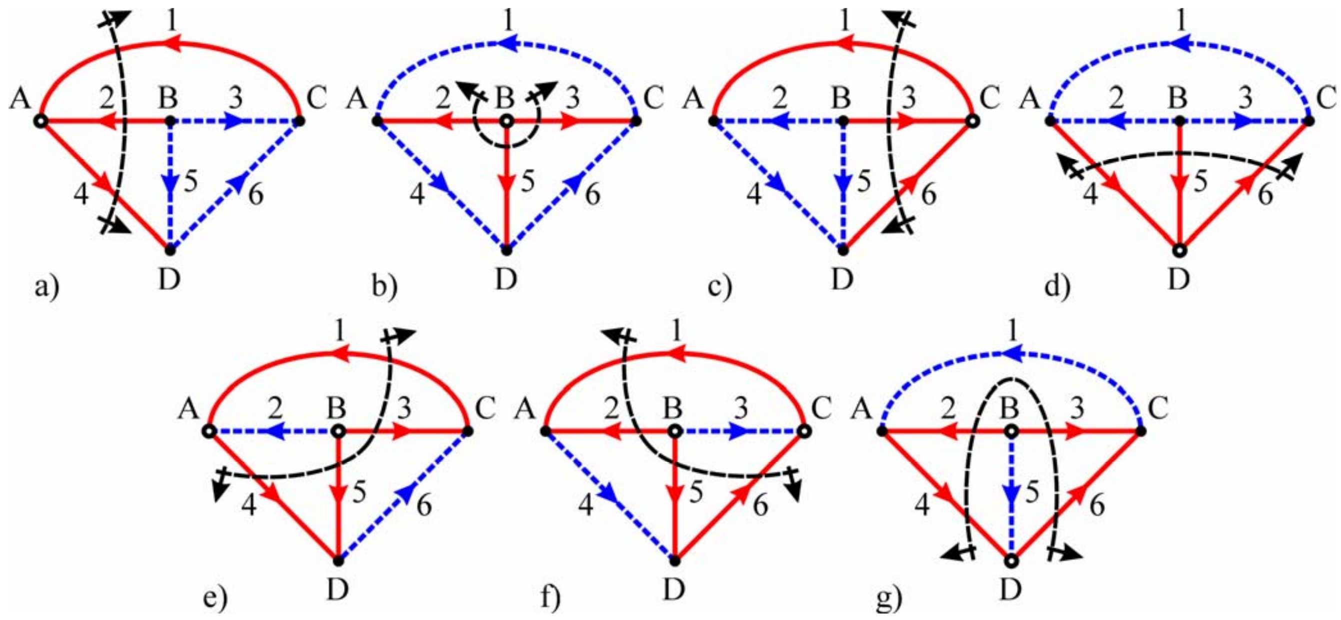
a) $v_1 - v_2 + v_3 = 0$	b) $v_2 + v_4 - v_5 = 0$
c) $-v_3 + v_5 + v_6 = 0$	d) $v_2 + v_4 + v_6 - v_3 = 0$
e) $v_1 + v_4 - v_5 + v_3 = 0$	f) $v_1 - v_2 + v_5 + v_6 = 0$
g) $v_1 + v_4 + v_6 = 0$	

Esempio – Equazioni delle maglie

- Si può verificare che solo 3 delle 7 equazioni delle maglie di questo grafo sono indipendenti
- Scelto un insieme di equazioni indipendenti, è possibile ricavare le rimanenti mediante combinazioni lineari
- Per esempio sono indipendenti tra loro le equazioni delle maglie a) b) c)
- Le altre equazioni possono essere ricavate dalle prime tre mediante le seguenti combinazioni

$$\text{a)}\quad v_1 - v_2 + v_3 = 0$$
$$\text{b)}\quad v_2 + v_4 - v_5 = 0$$
$$\text{c)}\quad -v_3 + v_5 + v_6 = 0$$
$$\text{d)} = \text{b)} + \text{c)} \Rightarrow v_2 + v_4 + v_6 - v_3 = 0$$
$$\text{e)} = \text{a)} + \text{b)} \Rightarrow v_1 + v_4 - v_5 + v_3 = 0$$
$$\text{f)} = \text{a)} + \text{c)} \Rightarrow v_1 - v_2 + v_5 + v_6 = 0$$
$$\text{g)} = \text{a)} + \text{b)} + \text{c)} \Rightarrow v_1 + v_4 + v_6 = 0$$

Esempio - Tagli



a)	$-i_1 - i_2 + i_4 = 0$	b)	$i_2 + i_3 + i_5 = 0$
c)	$i_1 - i_3 - i_6 = 0$	d)	$-i_4 - i_5 + i_6 = 0$
e)	$-i_1 + i_3 + i_5 + i_4 = 0$	f)	$i_1 + i_2 + i_5 - i_6 = 0$
g)	$i_2 - i_4 + i_6 + i_3 = 0$		

Esempio – Equazioni dei tagli

- Si può verificare che solo 3 delle 7 equazioni dei tagli di questo grafo sono indipendenti
- Per esempio sono indipendenti tra loro le equazioni dei tagli a) b) c)
- Le altre equazioni possono essere ricavate dalle prime tre mediante le seguenti combinazioni

$$\text{a)}\quad -i_1 - i_2 + i_4 = 0$$
$$\text{b)}\quad i_2 + i_3 + i_5 = 0$$
$$\text{c)}\quad i_1 - i_3 - i_6 = 0$$
$$\text{d)} = -\text{a)} - \text{b)} - \text{c)} \Rightarrow -i_4 - i_5 + i_6 = 0$$
$$\text{e)} = \text{a)} + \text{b)} \Rightarrow -i_1 + i_3 + i_5 + i_4 = 0$$
$$\text{f)} = \text{b)} + \text{c)} \Rightarrow i_1 + i_2 + i_5 - i_6 = 0$$
$$\text{g)} = -\text{a)} - \text{c)} \Rightarrow i_2 - i_4 + i_6 + i_3 = 0$$

Equazioni indipendenti

- In seguito verranno presentati dei metodi per scegliere le equazioni delle maglie e dei tagli in modo da soddisfare una delle seguenti **condizioni sufficienti** a garantire che le equazioni siano indipendenti

1. Ogni equazione contiene una variabile che non è contenuta in nessuna delle altre (*variabile peculiare*)

   a) $v_1 - v_2 + v_3 = 0$

   b) $v_2 + v_4 - v_5 = 0$ **Esempio**

   c) $-v_3 + v_5 + v_6 = 0$

2. Le equazioni vengono scelte in modo che ciascuna contenga almeno una variabile non contenuta nelle precedenti (in questo caso ci possono essere equazioni che non contengono variabili peculiari)

   g) $v_1 + v_4 + v_6 = 0$

   e) $v_1 + v_4 - v_5 + v_3 = 0$ **Esempio**

   f) $v_1 - v_2 + v_5 + v_6 = 0$

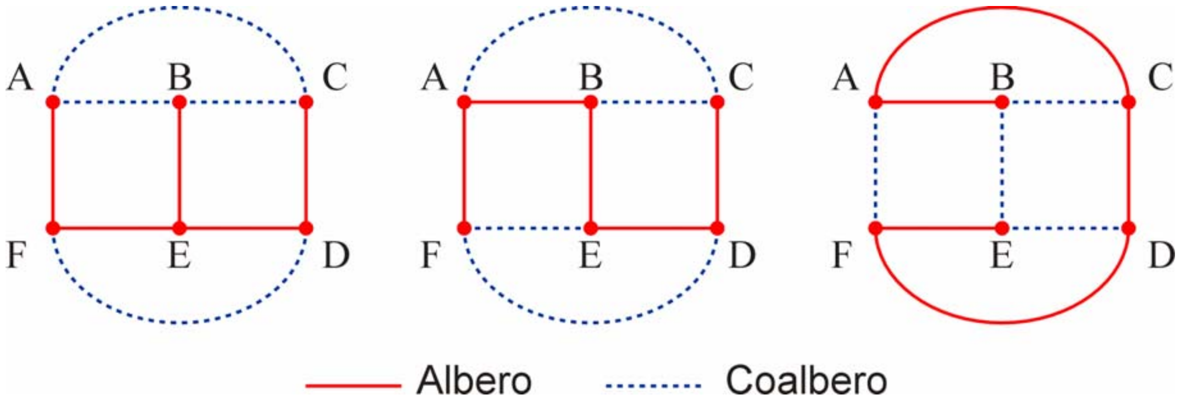
Insiemi completi di maglie e tagli

- **Insieme completo di maglie** = insieme di maglie di un grafo $\mathcal{G}$ tali che le loro equazioni
  - sono indipendenti
  - esprimono tutti i vincoli derivanti dalla LKV per il grafo $\mathcal{G}$

- **Insieme completo di tagli** = insieme di tagli di un grafo $\mathcal{G}$ tali che le loro equazioni
  - sono indipendenti
  - esprimono tutti i vincoli derivanti dalla LKI per il grafo $\mathcal{G}$

Albero e coalbero

- $\mathcal{G}$ = grafo
- **Albero** di $\mathcal{G}$ = sottografo $\mathcal{A}$ di $\mathcal{G}$ tale che
  - $\mathcal{A}$ è connesso
  - $\mathcal{A}$ comprende tutti i nodi di $\mathcal{G}$
  - $\mathcal{A}$ non contiene maglie
- **Coalbero** = sottografo $\mathcal{C}$ di $\mathcal{G}$ definito dai lati non appartenenti ad $\mathcal{A}$
- In genere l'albero di un grafo può essere definito in più modi



Esempi

Proprietà dell'albero e del coalbero

- **Ipotesi:**
  - $\mathcal{G}$ = grafo con n nodi e l lati
  - $\mathcal{A}$ = generico albero di $\mathcal{G}$
  - $\mathcal{C}$ = coalbero di $\mathcal{G}$ corrispondente ad $\mathcal{A}$
- **Proprietà dell'albero**
  - $\mathcal{A}$ ha $n - 1$ lati
    - ne occorre uno per collegare i primi due nodi più uno per ogni altro nodo
  - Tra ogni coppia di nodi di $\mathcal{G}$ esiste uno e un solo cammino appartenente ad $\mathcal{A}$
    - ne esiste almeno uno perchè $\mathcal{A}$ è connesso
    - non ne possono esistere altri perché $\mathcal{A}$ non contiene maglie
  - Ogni taglio di $\mathcal{G}$ contiene almeno un lato appartenente ad $\mathcal{A}$
    - per la proprietà precedente non è possibile dividere il grafo in due parti separate senza tagliare rami dell'albero

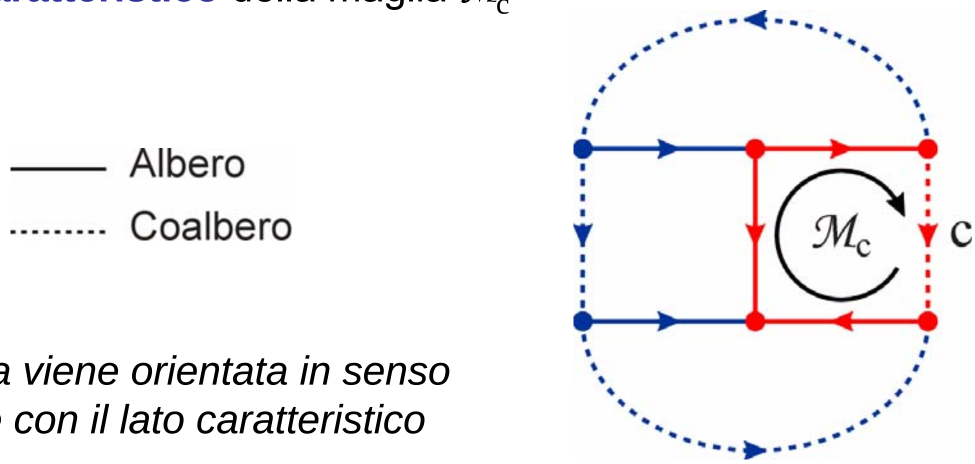
Proprietà dell'albero e del coalbero

- **Ipotesi:**
  - $\mathcal{G}$ = grafo con n nodi e l lati
  - $\mathcal{A}$ = generico albero di $\mathcal{G}$
  - $\mathcal{C}$ = coalbero di $\mathcal{G}$ corrispondente ad $\mathcal{A}$

- **Proprietà del coalbero**
  - $\mathcal{C}$ ha $l - n + 1$ lati
    - conseguenza del fatto che $\mathcal{A}$ ha $n - 1$ lati
  - Non esistono tagli di $\mathcal{G}$ formati solo da lati di $\mathcal{C}$
    - conseguenza del fatto che ogni taglio contiene almeno un lato appartenente ad $\mathcal{A}$
  - Ogni maglia di $\mathcal{G}$ contiene almeno un lato appartenente a $\mathcal{C}$
    - conseguenza del fatto che non esistono maglie contenute interamente nell'albero

Maglie fondamentali

- Per ogni lato c del coalbero esiste una e una sola maglia $\mathcal{M}_\mathrm{c}$ formata dal lato c e da lati dell'albero
  - tale maglia esiste ed è unica perché esiste uno e un solo cammino formato da lati dell'albero che unisce i nodi terminali del lato c
- $\mathcal{M}_\mathrm{c}$ = **maglia fondamentale** associata al lato c
- c = **lato caratteristico** della maglia $\mathcal{M}_\mathrm{c}$



La maglia viene orientata in senso concorde con il lato caratteristico

Maglie fondamentali

- Le equazioni delle maglie fondamentali
  - sono indipendenti:
    - ogni maglia fondamentale contiene un lato caratteristico che non è contenuto in nessuna altra maglia fondamentale

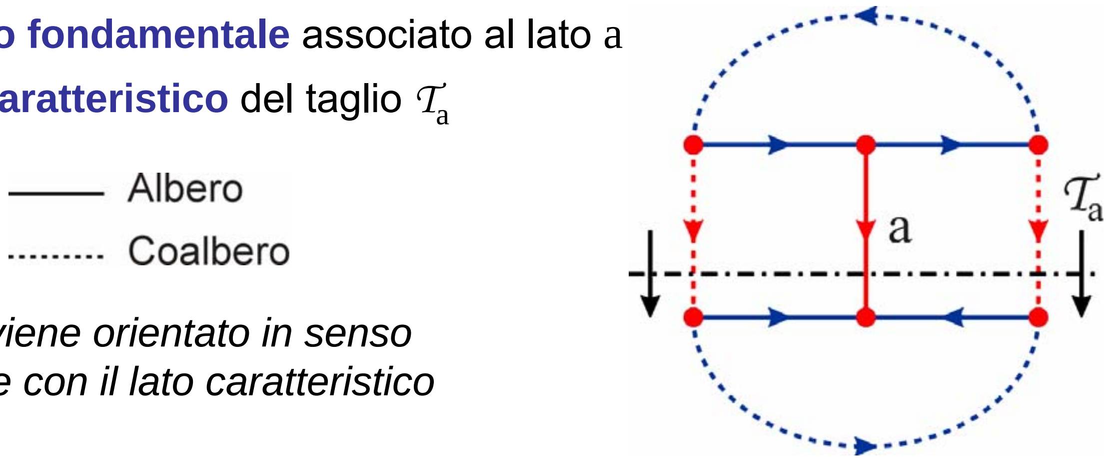
    ➡ la tensione del lato caratteristico non compare nelle equazioni delle altre maglie fondamentali
  - esprimono tutti i vincoli derivanti dalla LKV:
    - l'equazione di una maglia con più lati di coalbero si può ottenere come combinazione delle equazioni delle maglie fondamentali associate a tali lati

➡ Le maglie fondamentali costituiscono un insieme completo

➡ il numero N_V delle equazioni indipendenti derivanti dalla LKV è pari al numero di lati del coalbero ➡ $N_V = l - n + 1$

Tagli fondamentali

- Per ogni lato a dell'albero esiste uno e un solo taglio $\mathcal{T}_\mathrm{a}$ formato dal lato a e da lati di coalbero
  - eliminando un lato a dell'albero si suddividono i nodi in due gruppi
  - tra i nodi del primo gruppo e quelli del secondo gruppo non ci sono cammini formati da lati dell'albero
  - i lati del coalbero che hanno come terminali nodi appartenenti a due gruppi diversi, assieme ad a, definiscono il taglio $\mathcal{T}_\mathrm{a}$
- $\mathcal{T}_\mathrm{a}$ = **taglio fondamentale** associato al lato a
- a = **lato caratteristico** del taglio $\mathcal{T}_\mathrm{a}$



Il taglio viene orientato in senso concorde con il lato caratteristico

Tagli fondamentali

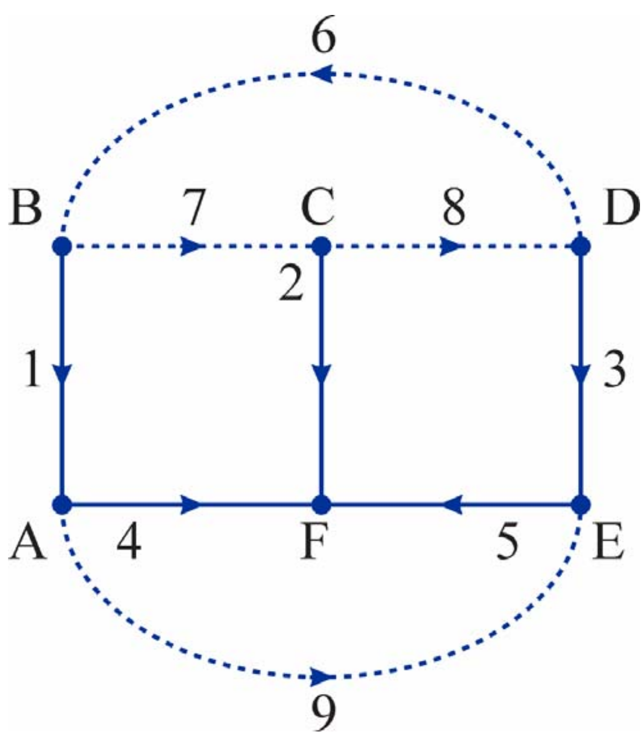
- Le equazioni dei tagli fondamentali
  - sono indipendenti:
    - ogni taglio fondamentale contiene un lato caratteristico che non è contenuto in nessun altro taglio fondamentale
    - ➡ la corrente del lato caratteristico non compare nelle equazioni degli altri tagli fondamentali
  - esprimono tutti i vincoli derivanti dalla LKI:
    - l'equazione di un taglio con più lati dell'albero si può ottenere come combinazione delle equazioni dei tagli fondamentali associati a tali lati

➡ I tagli fondamentali costituiscono un insieme completo

➡ il numero N_I delle equazioni indipendenti derivanti dalla LKI è pari al numeri di lati dell'albero ➡ $N_I = n - 1$

Esempio

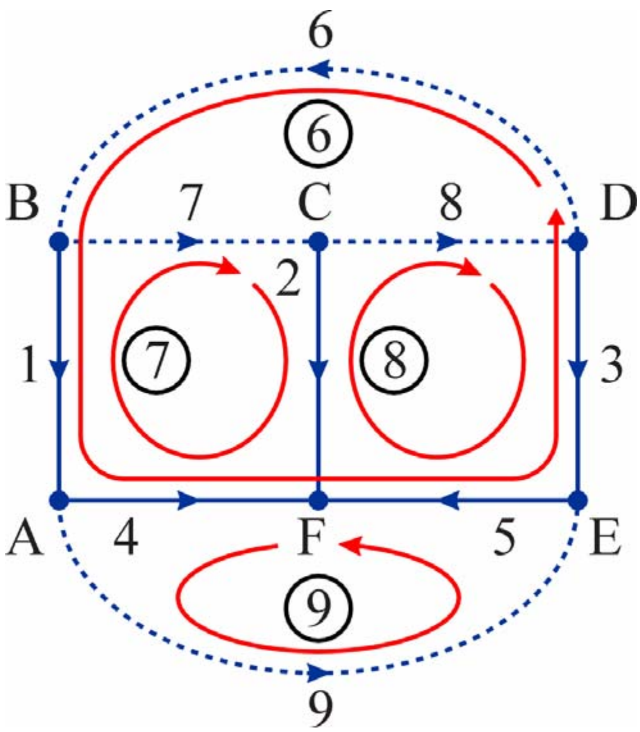
- Grafo con $n = 6$ nodi e $l = 9$ lati
- Numero di lati dell'albero =
  = numero di tagli fondamentali =
  = 6 – 1 = 5
- Numero di lati del coalbero =
  = numero di maglie fondamentali =
  = 9 – 6 + 1 = 4
- Si sceglie (ad esempio) l'albero formato dai lati 1, 2, 3, 4, 5



Esempio

Equazioni delle maglie fondamentali

$$
\begin{aligned}
6:&\quad \boxed{v_6} + v_1 + v_4 - v_5 - v_3 = 0 \\
7:&\quad \boxed{v_7} + v_2 - v_4 - v_1 = 0 \\
8:&\quad \boxed{v_8} + v_3 + v_5 - v_2 = 0 \\
9:&\quad \boxed{v_9} + v_5 - v_4 = 0
\end{aligned}
$$

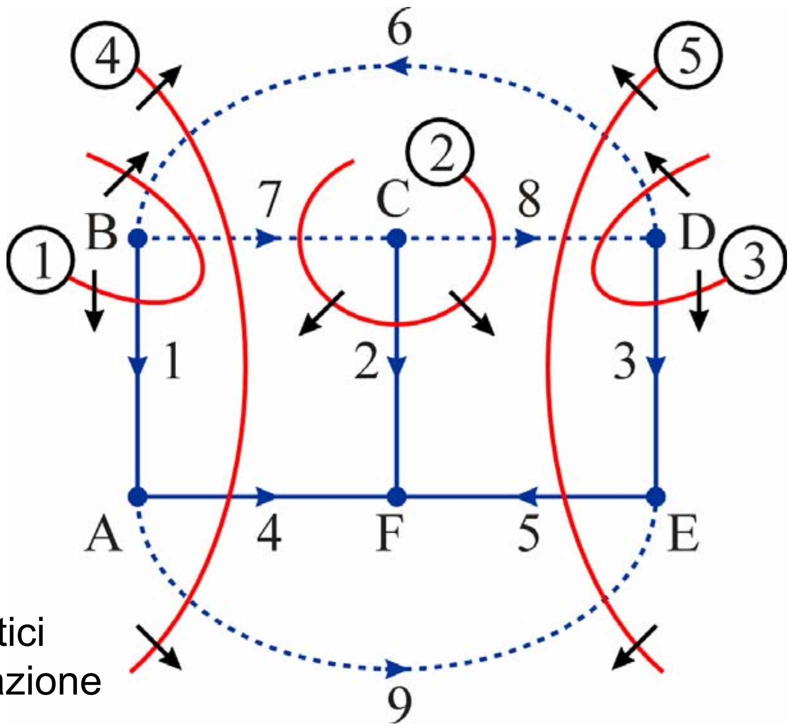


Le tensioni dei lati caratteristici compaiono in una sola equazione

Esempio

Equazioni dei tagli fondamentali

$$
\begin{aligned}
1:&\quad \boxed{i_1} - i_6 + i_7 = 0 \\
2:&\quad \boxed{i_2} - i_7 + i_8 = 0 \\
3:&\quad \boxed{i_3} + i_6 - i_8 = 0 \\
4:&\quad \boxed{i_4} - i_6 + i_7 + i_9 = 0 \\
5:&\quad \boxed{i_5} + i_6 - i_8 - i_9 = 0
\end{aligned}
$$



Le correnti dei lati caratteristici compaiono in una sola equazione

Maglie e tagli indipendenti

- Le maglie e i tagli fondamentali corrispondenti agli alberi del grafo in genere non costituiscono gli unici insiemi completi di maglie e di tagli indipendenti
- ➡ Generalmente è possibile individuare anche insiemi completi di maglie e tagli indipendenti a cui non corrisponde un albero
- Indipendentemente da come vengono identificati gli insiemi completi di maglie e tagli indipendenti, si ha comunque
  - numero di maglie indipendenti $= N_V = l - n + 1$
  - numero di tagli indipendenti $= N_I = n - 1$

  (ciò e conseguenza del fatto che, a partire dalle equazioni di un particolare insieme di maglie o di tagli indipendenti, è possibile ricavare le equazioni di tutti gli altri)

Tensioni e correnti indipendenti

- Le l tensioni dei lati di un circuito sono soggette a $l - n + 1$ vincoli derivanti dalla LKV
  - ➡ le tensioni hanno $l - (l - n + 1) = n - 1$ gradi di libertà:
    - si possono individuare $n - 1$ tensioni indipendenti, cioè non vincolate dalla LKV (come le tensioni dei lati di un albero)
    - le rimanenti tensioni possono essere ricavate a partire dalle tensioni indipendenti utilizzando la LKV
- Le l correnti dei lati di un circuito sono soggette a $n - 1$ vincoli derivanti dalla LKI
  - ➡ le correnti hanno $l - (n - 1) = l - n + 1$ gradi di libertà:
    - si possono individuare $l - n + 1$ correnti indipendenti, cioè non vincolate dalla LKI (come le correnti dei lati di un coalbero)
    - le rimanenti correnti possono essere ricavate a partire dalle correnti indipendenti utilizzando la LKI

Relazione tra maglie e tagli fondamentali

- **Ipotesi**:
  - a = lato dell'albero
  - c = lato di coalbero
  - $\mathcal{T}_a$ = taglio fondamentale associato al lato a
  - $\mathcal{M}_c$ = maglia fondamentale associata al lato c
- **Proprietà**:
  - Deve essere verificata una delle seguenti condizioni:
    - $\mathcal{T}_a$ e $\mathcal{M}_c$ non hanno lati in comune
    - $\mathcal{T}_a$ e $\mathcal{M}_c$ hanno due lati in comune: il lato a e il lato c
  - ⇒ Questo ha come conseguenza che $\boxed{c \in \mathcal{T}_a \Leftrightarrow a \in \mathcal{M}_c}$
    - i lati di coalbero appartenenti a $\mathcal{T}_a$ sono i lati caratteristici delle maglie di cui fa parte il lato a
    - i lati dell'albero appartenenti a $\mathcal{M}_c$ sono i lati caratteristici dei tagli di cui fa parte il lato c

Relazione tra maglie e tagli fondamentali

- **Dimostrazione**:
  - I lati di una maglia formano un percorso chiuso
    - ⇒ il numero di lati in comune tra una maglia e un taglio è necessariamente pari (o zero)
      (muovendosi lungo i lati della maglia, per ogni attraversamento del taglio in un senso se ne deve avere uno in senso opposto)
  - $\mathcal{T}_a$ contiene un solo lato dell'albero: a
    - ⇒ l'unico lato dell'albero che $\mathcal{T}_a$ e $\mathcal{M}_c$ possono avere in comune è a
  - $\mathcal{M}_c$ contiene un solo lato di coalbero: c
    - ⇒ l'unico lato di coalbero che $\mathcal{T}_a$ e $\mathcal{M}_c$ possono avere in comune è c
  - ⇒ Si hanno due sole possibilità
    - a e c sono entrambi in comune
    - $\mathcal{T}_a$ e $\mathcal{M}_c$ non hanno lati in comune

Correnti di maglia

- Ciascuna delle equazioni dei tagli fondamentali contiene la corrente di un solo lato dell'albero
- ➡ La corrente di un lato a dell'albero può essere espressa come combinazione delle correnti dei lati di coalbero contenuti nel taglio associato al lato a
- Questi lati di coalbero sono i lati caratteristici delle maglie fondamentali di cui fa parte il lato a
- ➡ *La corrente di un lato* a *dell'albero può essere espressa come combinazione delle correnti dei lati caratteristici di tutte le maglie fondamentali di cui il lato* a *fa parte*
- ➡ *La corrente di un lato* c *del coalbero compare nelle espressioni di tutte le correnti dei lati dell'albero che fanno parte della maglia associata a* c

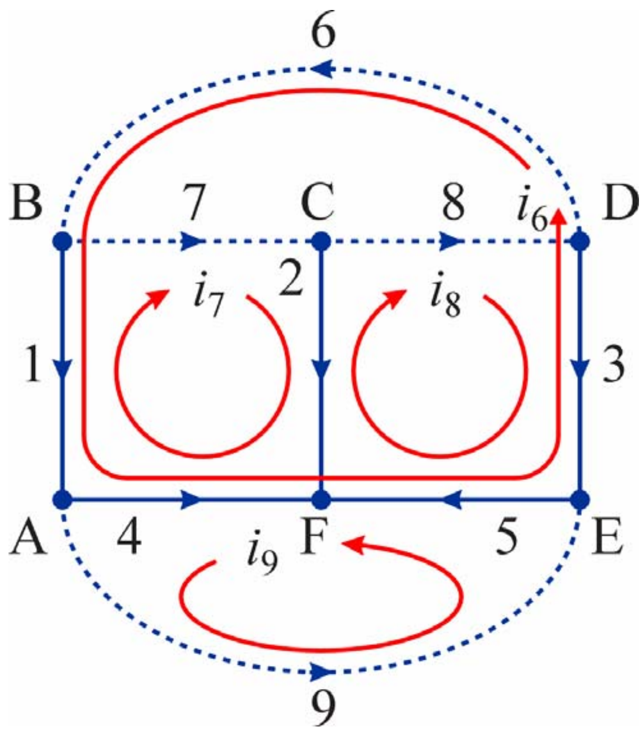
Correnti di maglia

- E' possibile visualizzare le relazioni tra le correnti dei lati immaginando che la corrente di ciascun lato di coalbero attraversi tutti i lati della corrispondente maglia fondamentale (➡ **corrente di maglia**)
- ➡ Ogni lato dell'albero è percorso dalle correnti di maglia associate a tutte le maglie fondamentali di cui fa parte
- ➡ La corrente di un lato dell'albero è data dalla somma algebrica delle correnti di maglia che lo percorrono
  - con segno + se il verso della corrente di maglia coincide con quello del lato
  - con segno – se i versi sono opposti

Esempio

- **Correnti di maglia:**
  i_6, i_7, i_8, i_9
- **Equazioni dei tagli fondamentali:**
  (= *espressioni delle correnti dei lati dell'albero in funzione delle correnti di maglia*)

$$i_1 = i_6 - i_7$$
$$i_2 = i_7 - i_8$$
$$i_3 = -i_6 + i_8$$
$$i_4 = i_6 - i_7 - i_9$$
$$i_5 = -i_6 + i_8 + i_9$$



Nota

- Rappresentare le correnti dei lati come sovrapposizione di correnti di maglia equivale ad imporre che le correnti dei lati rispettino la LKI
  - Se una corrente che scorre lungo un percorso chiuso attraversa un taglio in senso entrante deve attraversarlo anche in senso uscente (e viceversa)
  - ⇒ Ciascuna corrente di maglia complessivamente fornisce un contributo nullo all'equazione di ogni taglio
  - ⇒ Se le correnti dei lati vengono sostituite dalle corrispondenti combinazioni di correnti di maglia, l'equazione di ciascun taglio si riduce all'identità $0 = 0$

Tensioni di taglio

- La tensione di un lato di coalbero può essere espressa come combinazione delle tensioni dei lati dell'albero contenuti nella maglia associata
- ➡ La tensione di un lato di coalbero può essere espressa anche come combinazione delle tensioni dei lati caratteristici dei tagli a cui il lato appartiene
- E' possibile visualizzare questa relazione immaginando che la tensione di ciascun lato dell'albero sia localizzata sul taglio corrispondente (➡ **tensione di taglio**)
- ➡ La tensione di un lato di coalbero è data dalla somma algebrica delle tensioni dei tagli che il lato attraversa
  - con segno + se il verso taglio coincide con quello del lato
  - con segno – se i versi sono opposti

Esempio

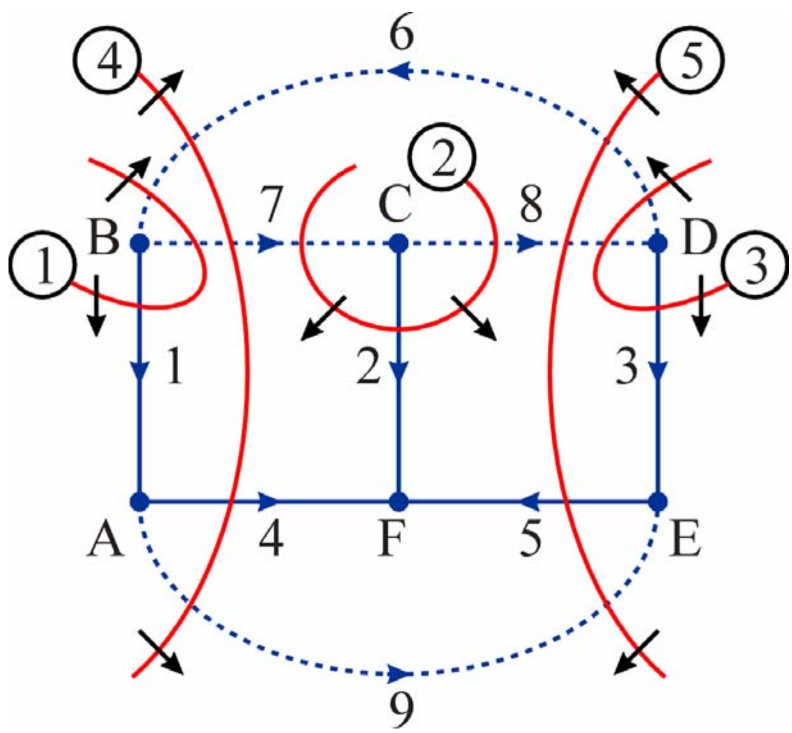
- **Tensioni di taglio:**
  v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
- **Equazioni delle maglie fondamentali:**
  (= *espressioni delle tensioni dei lati di coalbero in funzione delle tensioni di taglio*)

$$v_6 = -v_1 - v_4 + v_5 + v_3$$

$$v_7 = -v_2 + v_4 + v_1$$

$$v_8 = -v_3 - v_5 + v_2$$

$$v_9 = -v_5 + v_4$$



Equazioni dei nodi

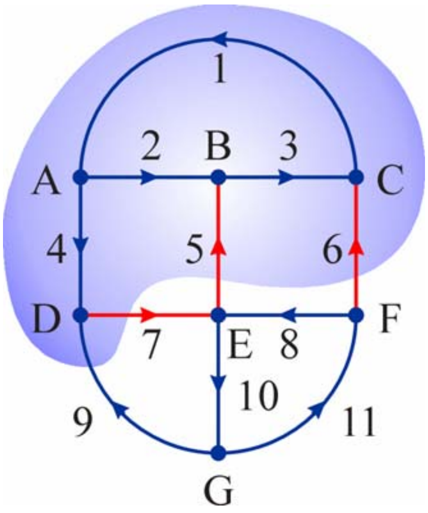
- L'insieme dei lati afferenti ad un nodo costituisce un taglio
  - eliminando i lati il grafo viene suddiviso in due parti separate, una delle quali contiene il solo nodo
- In seguito le equazioni dei nodi verranno scritte attribuendo
  - segno $-$ alle correnti entranti
  - segno $+$ alle correnti uscenti
- Proprietà:
  - Per un grafo (connesso) con n nodi
    - le equazioni ottenute applicando la LKI a $n-1$ nodi scelti arbitrariamente sono indipendenti
    - l'equazione dell'n-esimo nodo si può ottenere come combinazione delle equazioni degli altri nodi
  - ➡ Gli $n-1$ nodi definiscono un insieme completo di tagli

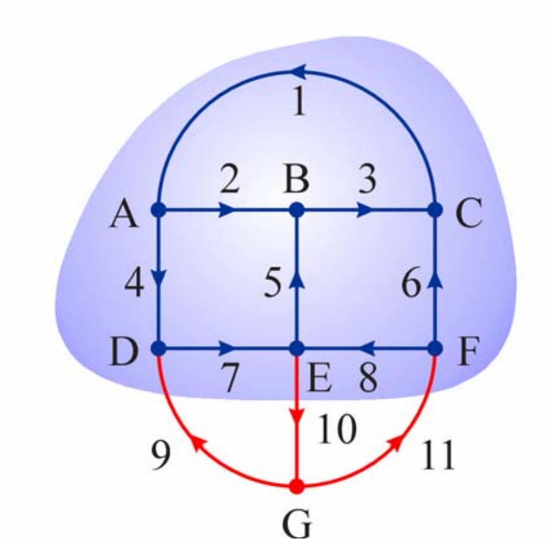
Equazioni dei nodi

- Dimostrazione:
  - Si considera un insieme di $k \le n-1$ nodi
  - Se il grafo è connesso, devono esistere dei lati con un terminale coincidente con uno dei nodi considerati e un terminale coincidente con uno degli $n-k$ nodi esclusi
  - Le correnti di questi lati compaiono in una sola delle k equazioni dei nodi considerati
  - ➡ In ogni insieme di $k \le n-1$ equazioni c'è sempre almeno un'equazione che contiene una variabile non presente nelle altre
  - ➡ Le equazioni sono indipendenti (per la condizione sufficiente 2)
  - Se invece si considerano le equazioni di tutti gli n nodi, ogni corrente di lato compare in due equazioni (una volta con segno $+$ e una volta con segno $-$)
  - ➡ Sommando membro a membro le equazioni di n nodi si ottiene l'identità $0 = 0$
  - ➡ L'ultima equazione non è indipendente dalle prime $n-1$

Esempio

- Sommando membro a membro le equazioni dei nodi A B C D si ottiene l'equazione che esprime la LKI per una superficie chiusa che contiene i nodi stessi
- Sommando membro a membro le equazioni dei nodi A B C D E F si ottiene l'equazione del nodo G (con i termini cambiati di segno)



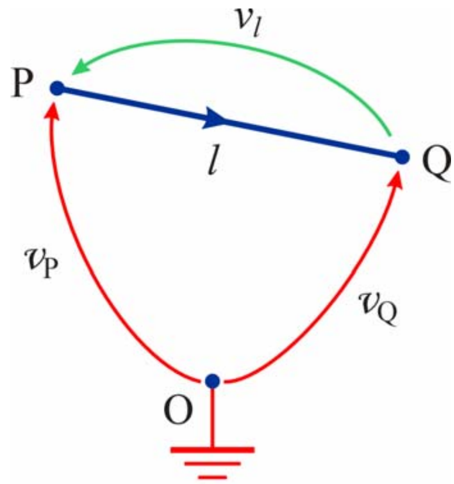


Tensioni di nodo

- In un grafo con n nodi, fissato un nodo di riferimento O, è possibile associare a ciascuno dei altri nodi una **tensione di nodo**:
  - v_P = differenza di potenziale tra il nodo P e il nodo O
    (per il nodo O si ha $v_O = 0$ V)
- Per la LKV, la tensione di un lato l diretto dal nodo P al nodo Q è

$$v_l = v_P - v_Q$$

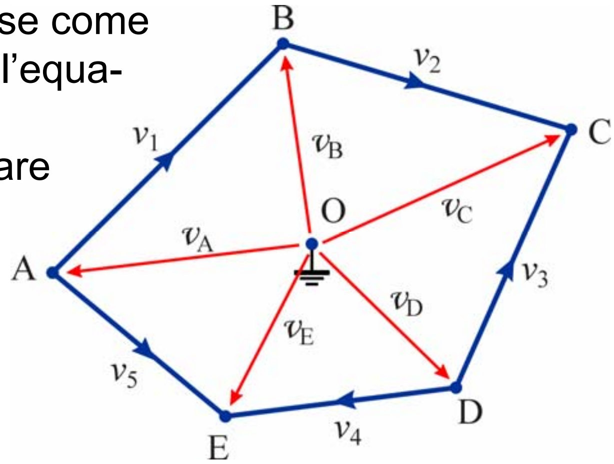
(Per i lati collegati al nodo di riferimento la tensione del lato coincide con la tensione dell'altro nodo o con il suo opposto)



- Le $n - 1$ tensioni di nodo sono indipendenti
  - sono disposte in modo da non formare percorsi chiusi, quindi non sono soggette a vincoli derivanti dalla LKV

Tensioni di nodo

- Imporre che le tensioni dei lati siano espresse da differenze tra tensioni di nodo equivale a imporre che soddisfino la LKV
  - Se le tensioni dei lati sono espresse come differenze tra tensioni di nodo, nell'equazione di ogni maglia la tensione di ciascuno dei nodi contenuti compare due volte con segni opposti
  - L'equazione si riduce all'identità $0 = 0$



- **Esempio**

$$v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

$$\underbrace{v_A - v_B}_{v_1} + \underbrace{v_B - v_C}_{v_2} - (\underbrace{v_D - v_C}_{v_3}) + \underbrace{v_D - v_E}_{v_4} - (\underbrace{v_A - v_E}_{v_5}) = 0$$

$$v_A - v_B + v_B - v_C + v_C - v_D + v_D - v_E + v_E - v_A = 0$$

$$0 = 0$$

Esempio

- Si sceglie come riferimento (ad esempio) il nodo F
- **LKI (equazioni dei nodi)**

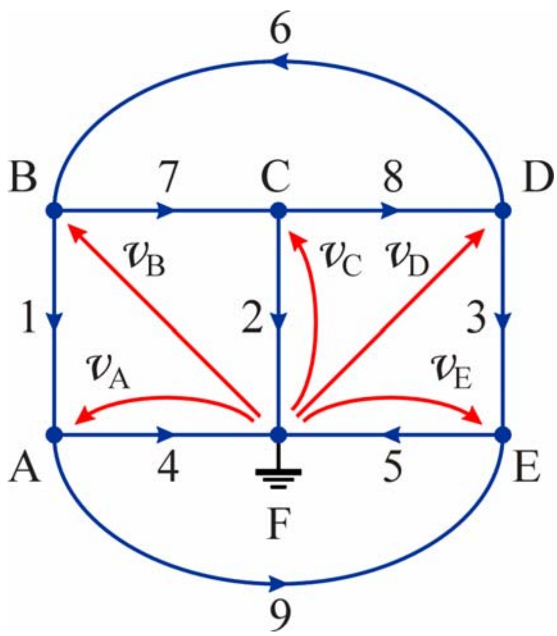
$$\mathrm{A}: \quad -i_1 + i_4 + i_9 = 0$$

$$\mathrm{B}: \quad i_1 - i_6 + i_7 = 0$$

$$\mathrm{C}: \quad i_2 - i_7 + i_8 = 0$$

$$\mathrm{D}: \quad i_3 + i_6 - i_8 = 0$$

$$\mathrm{E}: \quad -i_3 + i_5 - i_9 = 0$$



- **LKV (espressioni delle tensioni dei lati in funzione delle tensioni di nodo)**

$$v_1 = v_B - v_A \qquad v_4 = v_A \qquad v_7 = v_B - v_C$$

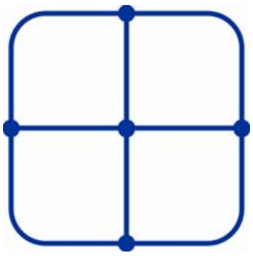
$$v_2 = v_C \qquad v_5 = v_E \qquad v_8 = v_C - v_D$$

$$v_3 = v_D - v_E \qquad v_6 = v_D - v_B \qquad v_9 = v_A - v_E$$

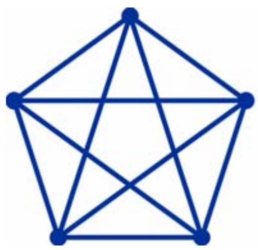
Grafi planari

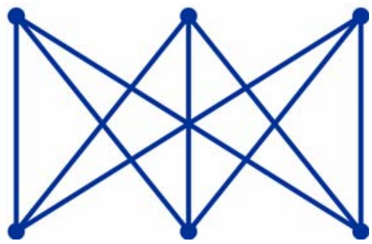
- **Grafo planare** = grafo che può essere disegnato su un piano senza che i suoi lati si intersechino

Grafo planare



Grafi non planari

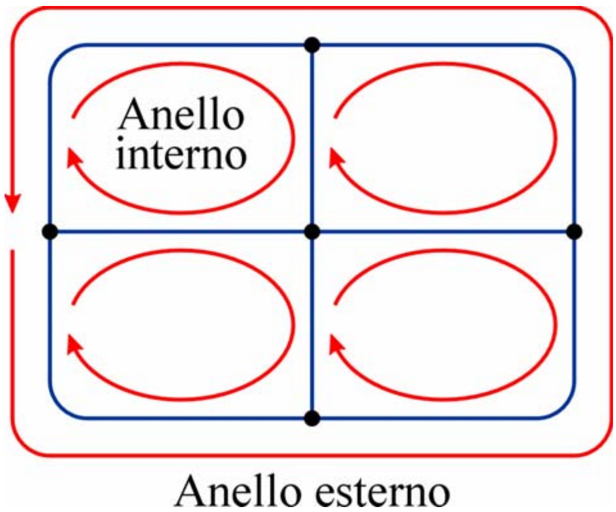




Anelli (maglie elementari)

- Si consideri un grafo planare disegnato in modo che i lati non si intersechino
- **Anello** (o **maglia elementare**) = maglia i cui lati delimitano una regione del piano nella quale non si trovano altri lati

  (Questa definizione include anche l'anello esterno, che diverrebbe indistinguibile dagli altri se il grafo fosse disegnato su una superficie sferica invece che su un piano)

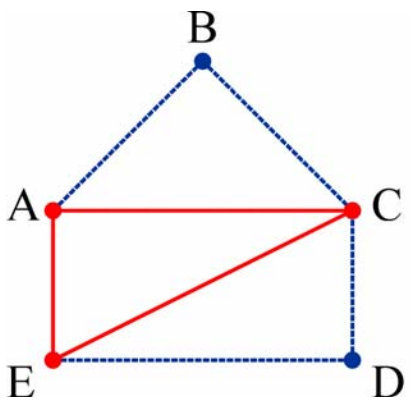


- Si può dimostrare che gli anelli interni di un grafo planare con l lati e n nodi sono $l - n + 1$

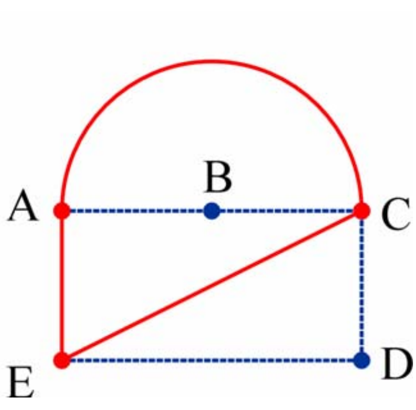
Anelli (maglie elementari)

- Il fatto che una particolare maglia di un grafo sia anche un anello dipende dal modo in cui è disegnato il grafo

Esempio: due rappresentazioni dello stesso grafo



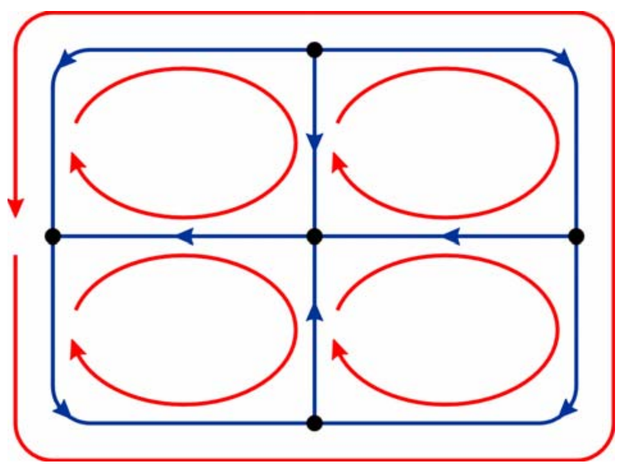
La maglia A-C-E-A
è un anello



La maglia A-C-E-A
non è un anello

Equazioni degli anelli

- Normalmente gli anelli interni vengono orientati tutti nello stesso senso (per esempio orario), mentre l'anello esterno viene orientato in senso opposto
- Le $l - n + 1$ equazioni ottenute applicando la LKV agli anelli interni sono indipendenti
- L'equazione dell'anello esterno può essere espressa come combinazione delle rimanenti



Equazioni degli anelli

- Dimostrazione:
  - Includendo l'anello esterno, ogni lato appartiene a due anelli ed è concorde con uno dei due anelli e discorde con l'altro
  - Si considera un insieme di $k \le l - n + 1$ anelli
  - Alcuni dei lati appartenenti questi anelli fanno parte anche degli anelli esclusi
  - Le loro tensioni compaiono in una sola equazione
  - ➡ In ogni insieme di $k \le l - n + 1$ equazioni c'è sempre almeno un'equazione che contiene una variabile non presente nelle altre
  - ➡ Le equazioni sono indipendenti (per la condizione sufficiente 2)
  - Se invece si considerano le equazioni di tutti gli anelli, incluso l'anello esterno, ogni tensione di lato compare in due equazioni (una volta con segno $+$ e una volta con segno $-$)
  - ➡ Sommando membro a membro le equazioni di tutti gli anelli si ottiene l'identità $0 = 0$
  - ➡ L'equazione dell'anello esterno non è indipendente dalle altre

Correnti d'anello

- Come avviene nel caso delle maglie fondamentali, a ciascun anello interno si può associare una corrente (➡ **corrente d'anello**) che percorre tutti i suoi lati
- Per le correnti d'anello si assumono versi di riferimento coincidenti con quelli degli anelli (quindi tutti nello stesso senso)
- I lati in comune tra due anelli interni sono percorsi da due correnti d'anello dirette in senso opposto
  - ➡ corrente del lato = corrente d'anello concorde con il lato – corrente d'anello discorde
- I lati in comune tra l'anello esterno e un anello interno sono percorsi da una sola corrente d'anello
  - ➡ la corrente del lato coincide con la corrente dell'anello interno o con il suo opposto a seconda che il lato sia concorde o discorde con l'anello

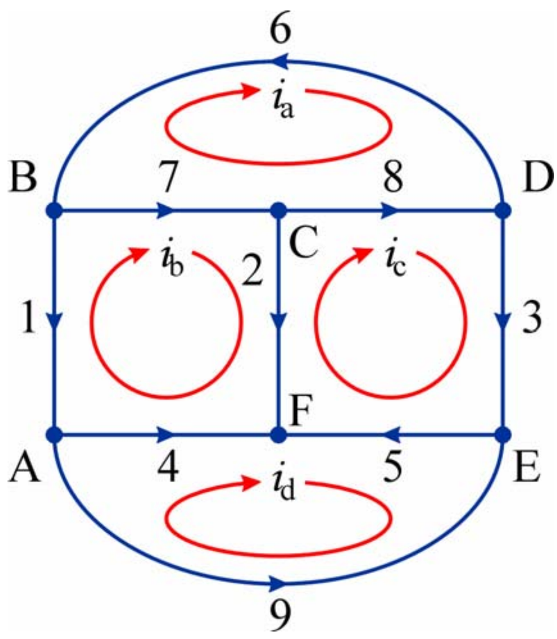
Esempio

- **LKV (equazioni degli anelli)**

$$\begin{aligned} \mathrm{a}: &\quad -v_6 - v_8 - v_7 = 0 \\ \mathrm{b}: &\quad v_7 + v_2 - v_4 - v_1 = 0 \\ \mathrm{c}: &\quad v_8 + v_3 + v_5 - v_2 = 0 \\ \mathrm{d}: &\quad v_4 - v_5 - v_9 = 0 \end{aligned}$$

- **LKI (espressioni delle correnti dei lati in funzione delle correnti d'anello)**

$$\begin{array}{lll} i_1 = -i_\mathrm{b} & i_4 = i_\mathrm{d} - i_\mathrm{b} & i_7 = i_\mathrm{b} - i_\mathrm{a} \\ i_2 = i_\mathrm{b} - i_\mathrm{c} & i_5 = i_\mathrm{c} - i_\mathrm{d} & i_8 = i_\mathrm{c} - i_\mathrm{a} \\ i_3 = i_\mathrm{c} & i_6 = -i_\mathrm{a} & i_9 = -i_\mathrm{d} \end{array}$$



Anelli e maglie fondamentali

- *Gli anelli non sono casi particolari di maglie fondamentali*

Esempio

- Solo le correnti dei lati appartenenti all'anello esterno coincidono (eventualmente a meno del segno) con correnti d'anello
- La corrente dell'anello centrale non coincide con la corrente di nessun lato del grafo
- ➡ Per nessuna scelta dell'albero questa corrente può identificarsi con una delle correnti di maglia