

Circuiti dinamici

Introduzione

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 17-3-2013)

Circuiti resistivi e circuiti dinamici

- **Circuiti resistivi:** circuiti formati solo da componenti resistivi
 - ➔ le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni algebriche
 - ➔ i valori delle tensioni e delle correnti (**risposte** o **uscite**) in un certo istante dipendono solo dai valori delle grandezze impresse dai generatori indipendenti (**ingressi**) allo stesso istante
- **Circuiti dinamici:** circuiti che contengono almeno un componente dinamico
 - ➔ le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali
 - ➔ i valori delle risposte a un certo istante dipendono anche dagli andamenti degli ingressi negli istanti precedenti

Equazioni di un circuito dinamico lineare

- **Ipotesi:**

- ◆ Circuito lineare
- ◆ Numero di lati: l
- ◆ Numero di lati corrispondenti a componenti dinamici: N_d

- ➔ **Equazioni:**

- ◆ LKV, LKI ➔ l equazioni lineari algebriche omogenee
- ◆ Componenti resistivi ➔ $l - N_d$ equazioni lineari algebriche
- ◆ Componenti dinamici ➔ N_d equazioni differenziali lineari

Condensatori

$$i_k(t) = C_k \frac{d v_k}{dt}$$

Induttori

$$v_k(t) = L_k \frac{d i_k}{dt}$$

3

Stato di un circuito dinamico

- La determinazione dell'andamento della risposta di un circuito dinamico a partire da un istante iniziale t_0 richiede la conoscenza
 - ◆ dell'andamento per $t \geq t_0$ delle grandezze impresse dei generatori (**ingressi**)
 - ◆ di N_d **condizioni iniziali** corrispondenti ai valori all'istante t_0 delle grandezze che compaiono sotto il segno di derivata nelle equazioni del circuito (**tensioni dei condensatori e correnti degli induttori**)
- **Stato del circuito** all'istante $t = t_0$: insieme di informazioni che assieme all'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$ consentono di determinare la risposta del circuito per $t \geq t_0$
 - ➔ Le condizioni iniziali rappresentano lo stato iniziale del circuito

4

Variabili di stato

- **Variabili di stato:** insieme di variabili mediante le quali è rappresentato lo stato del circuito
 - ◆ lo stato può essere rappresentato mediante le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori
 - ◆ la stessa informazione può essere rappresentata mediante le cariche dei condensatori e i flussi degli induttori
- Le variabili di stato determinano l'energia accumulata nei componenti dinamici

$$\text{Energia di un condensatore} \quad W_C = \frac{1}{2} C v_C^2$$

$$\text{Energia di un induttore} \quad W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$$

- ➔ L'energia accumulata nel circuito è una *funzione di stato*
- **Stato zero:** stato caratterizzato da valori nulli di tutte le tensioni dei condensatori e di tutte le correnti degli induttori
 - ➔ Nello stato zero l'energia accumulata nel circuito è nulla

5

Risposta con ingresso zero e nello stato zero

- **Risposta con ingresso zero** (o **risposta libera**): risposta corrispondente a valori identicamente nulli degli ingressi per $t \geq t_0$
 - ◆ dipende solo dallo stato iniziale
 - ◆ è dovuta all'energia accumulata nel circuito all'istante iniziale t_0
- **Risposta nello stato zero:** risposta del circuito quando lo stato iniziale coincide con lo stato zero
 - ◆ dipende solo dall'andamento degli ingressi per $t \geq t_0$

6

Ordine di un circuito

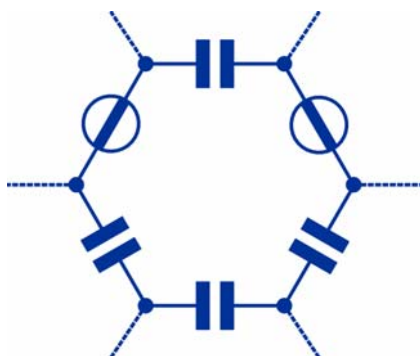
- **Ordine di un circuito:** N = numero di variabili indipendenti necessarie per descrivere lo stato del circuito
 - ◆ normalmente coincide con il numero di componenti dinamici (induttori e condensatori) contenuti nel circuito ➔ $N = N_d$
- In casi particolari è possibile che, a causa della struttura del circuito, le variabili di stato non siano indipendenti tra loro
 - ➔ $N < N_d$
 - ◆ i circuiti per cui si verifica questa condizione sono detti **degeneri**

7

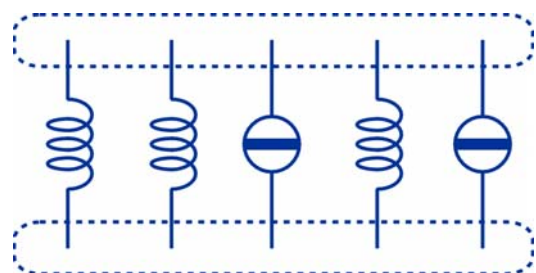
Circuiti degeneri (1)

- Un circuito formato da bipoli R L C passivi e generatori indipendenti è degenero se e solo se contiene
 - ◆ almeno una maglia formata da condensatori o da generatori di tensione e condensatori (**maglia di condensatori**)
 - ◆ almeno un taglio formato da induttori o da generatori di corrente e induttori (**taglio di induttori**)

Maglia di condensatori



Taglio di induttori



8

Circuiti degeneri (2)

- Un circuito contenente componenti multipolari (e in particolare generatori dipendenti) o bipoli attivi (oltre ai generatori indipendenti) può essere degenere anche non contiene maglie di condensatori o tagli di induttori
 - ➔ non si può formulare un criterio generale per stabilire se il circuito è degenere (occorre verificare caso per caso)
- I circuiti degeneri corrispondono a situazioni ideali, fisicamente non realizzabili
- L'analisi dei circuiti degeneri è più complessa dell'analisi dei circuiti non degeneri
 - ➔ In seguito, salvo indicazione esplicita, si farà riferimento ai soli circuiti non degeneri

9

Equazione risolvente

- Risolvendo le equazioni di un circuito dinamico lineare rispetto alla tensione o alla corrente di un lato, indicata con $y(t)$, si ottiene un'equazione differenziale del tipo

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

- ◆ L'ordine dell'equazione differenziale generalmente coincide con l'ordine del circuito
- ◆ Il secondo membro è una combinazione lineare degli ingressi e di loro derivate rispetto al tempo (in generale dipende sia dalle grandezze impresse dai generatori indipendenti, sia dai parametri degli altri componenti)
- ◆ I coefficienti a_k sono funzione dei parametri dei componenti diversi dai generatori indipendenti

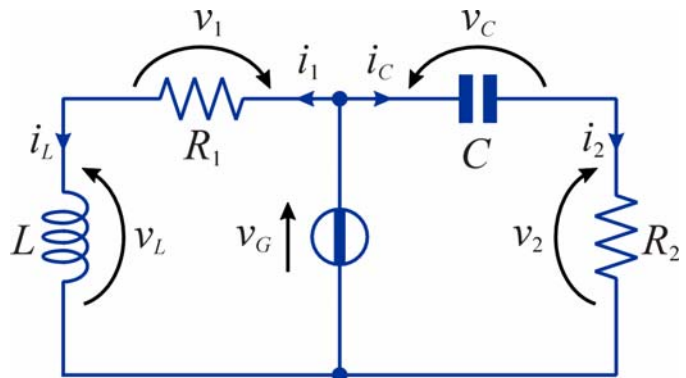
10

Ordine dell'equazione risolvente

- In casi particolari l'equazione risolvente può essere di ordine inferiore all'ordine del circuito
- Ciò avviene quando la struttura del circuito è tale da rendere nulla l'interazione tra alcune risposte e alcune variabili di stato

Esempio

- ◆ La tensione e la corrente di L e R_1 non dipendono da v_C
- ◆ la tensione e la corrente di C e R_2 non dipendono da v_L
- ➔ L'analisi del circuito richiede la risoluzione di due equazioni del primo ordine disaccoppiate



11

Condizioni iniziali

- Per determinare la risposta per $t > t_0$ si devono associare all'equazione N condizioni iniziali del tipo

$$y(t_0) = Y_0$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = Y_0^{(1)}$$

⋮

$$Y_0, Y_0^{(1)}, \dots, Y_0^{(N-1)} = \text{costanti}$$

$$\left. \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} \right|_{t_0} = Y_0^{(N-1)}$$

- I valori iniziali di $y(t)$ e delle sue derivate possono essere determinati se sono noti i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato

12

Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'**integrale generale** dell'equazione differenziale può essere espresso nella forma: $y_G(t) = y_H(t) + y_P(t)$
 - ◆ $y_H(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata (**soluzione omogenea**)
 - Si determina a partire dalle radici dell'*equazione caratteristica*
 - La soluzione omogenea rappresenta l'insieme delle possibili risposte con ingresso zero del circuito
 - ◆ $y_P(t)$ = integrale particolare dell'equazione differenziale (**soluzione particolare**)
 - In genere è una funzione *dello stesso tipo* del termine noto
- $y_H(t)$, e quindi $y_G(t)$, contengono N costanti che si possono determinare imponendo le N condizioni iniziali

13

Equazione caratteristica

Equazione omogenea associata

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

$\frac{d^i y(t)}{dt^i}$	\rightarrow	λ^i
$y(t)$	\rightarrow	λ^0



$$a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Equazione caratteristica

14

Determinazione della soluzione omogenea (1)

- **Caso 1:** l'equazione caratteristica ammette N soluzioni distinte: $\lambda_1, \dots, \lambda_N$
 - ◆ la soluzione omogenea è $y_H(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + k_N e^{\lambda_N t}$
 - ◆ le costanti k_1, \dots, k_N si determinano imponendo le condizioni iniziali a $y_G(t)$
- **Caso 2:** l'equazione caratteristica ammette anche soluzioni multiple
 - ◆ se la soluzione ha λ_h molteplicità m nell'espressione di $y_H(t)$ compaiono m termini associati a λ_h :
$$k_{h,0} e^{\lambda_h t} + k_{h,1} t e^{\lambda_h t} + \dots + k_{h,m-1} t^{m-1} e^{\lambda_h t}$$
 - ◆ anche in questo caso $y_H(t)$ contiene N costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali

15

Determinazione della soluzione omogenea (2)

- I coefficienti dell'equazione caratteristica sono reali
- ➔ Se l'equazione ammette una soluzione complessa $\lambda_h = \sigma_h + j\omega_h$, ammette anche la soluzione coniugata $\lambda_{h+1} = \lambda_h^* = \sigma_h - j\omega_h$
- $y_H(t)$ deve essere reale ➔ anche le costanti moltiplicative dei termini associati a λ_h e λ_{h+1} devono essere complesse coniugate:

$$k_h e^{\lambda_h t} + k_{h+1} e^{\lambda_{h+1} t} = k_h e^{\lambda_h t} + k_h^* e^{\lambda_h^* t}$$

- ➔ Posto $k_h = \frac{A_h}{2} e^{j\varphi_h}$ si ottiene

$$\begin{aligned} k_h e^{\lambda_h t} + k_h^* e^{\lambda_h^* t} &= \frac{A_h}{2} e^{j\varphi_h} e^{(\sigma_h + j\omega_h)t} + \frac{A_h}{2} e^{-j\varphi_h} e^{(\sigma_h - j\omega_h)t} = \\ &= \frac{A_h e^{\sigma_h t} \left[e^{j(\omega_h t + \varphi_h)} + e^{-j(\omega_h t + \varphi_h)} \right]}{2} = A_h e^{\sigma_h t} \cos(\omega_h t + \varphi_h) \end{aligned}$$

16

Determinazione della soluzione omogenea (3)

- Combinando i due termini associati alle soluzioni complesse coniugate, le costanti complesse coniugate k_h e k_{h+1} vengono sostituite dalle costanti reali A_h e φ_h
 - ➔ Anche in questo caso, imponendo le condizioni iniziali, si devono determinare N costanti reali
- Con un procedimento simile si può verificare che, se l'equazione caratteristica ammette una soluzione complessa λ_h di molteplicità m , $y_H(t)$ contiene i termini

$$A_{h,0}e^{\sigma_h t} \cos(\omega_h t + \varphi_{h,0}) + A_{h,1}te^{\sigma_h t} \cos(\omega_h t + \varphi_{h,1}) + \dots \\ \dots + A_{h,m-1}t^{m-1}e^{\sigma_h t} \cos(\omega_h t + \varphi_{h,m-1})$$

17

Determinazione della soluzione particolare

- In genere si può scegliere come soluzione particolare una funzione *dello stesso tipo* del termine noto
- Questo avviene se $f(t)$ appartiene ad una classe di funzioni \mathcal{F} tale che ogni combinazione lineare di funzioni appartenenti a \mathcal{F} e di loro derivate rispetto a t è ancora una funzione della classe \mathcal{F}
 - ◆ Infatti, in questo caso, sostituendo a primo membro dell'equazione differenziale una funzione dello stesso tipo del termine noto si ottiene come risultato ancora una funzione dello stesso tipo
- **Esempi:**
 - ◆ **costante:** $f(t) = F$
 - ◆ **polinomio:** $f(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$
 - ◆ **funzione sinusoidale di pulsazione ω :** $f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$

18

Stabilità

- **Circuito asintoticamente stabile:** le risposte con ingresso zero tendono a zero per $t \rightarrow \infty$
 - ◆ Tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica hanno parte reale negativa
 - ◆ Per $t \rightarrow \infty$ la risposta tende ad identificarsi con la soluzione particolare
- **Circuito semplicemente stabile:** le risposte con ingresso zero sono limitate per $t \rightarrow \infty$
 - ◆ L'equazione caratteristica, oltre a eventuali soluzioni con parte reale negativa, ammette soluzioni semplici con parte reale nulla
- **Circuito instabile:** le risposte con ingresso zero divergono per $t \rightarrow \infty$
 - ◆ L'equazione caratteristica, ha almeno una soluzione con parte reale positiva o una soluzione multipla con parte reale nulla

19

Componente transitoria e di regime della risposta

- Se il circuito è asintoticamente stabile
 - ◆ la componente della risposta che tende a zero per $t \rightarrow \infty$ è detta **componente transitoria**
 - deriva dalla soluzione omogenea
 - dipende sia dallo stato iniziale del circuito sia dagli ingressi (i valori delle costanti che compaiono in $y_H(t)$ si ottengono imponendo le condizioni iniziali a $y_G(t)$, che contiene anche il contributo degli ingressi)
 - ◆ la componente permanente della risposta è detta **componente di regime**
 - si identifica con la soluzione particolare
 - dipende solo dagli ingressi

20

Stabilità dei circuiti passivi

- Un circuito formato da componenti passivi e generatori indipendenti è stabile
 - ➔ Tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica hanno parte reale non positiva
 - ➔ Eventuali soluzioni con parte reale nulla sono semplici
- **Dimostrazione**
 - ◆ Se il circuito fosse instabile, le risposte con ingresso zero (generatori azzerati) dovrebbero divergere per $t \rightarrow \infty$
 - ◆ In queste condizioni anche le energie assorbite o erogate dai componenti tenderebbero ad infinito
 - ◆ Se tutti i componenti sono passivi questo è impossibile, dato che l'energia accumulata nel circuito all'istante iniziale è finita e nessun componente è in grado di generare energia

21

Stabilità dei circuiti passivi - Note

- In un circuito passivo asintoticamente stabile, l'energia accumulata nei componenti dinamici viene progressivamente dissipata nei componenti resistivi e quindi tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- I circuiti passivi semplicemente stabili corrispondono a casi ideali (es. circuiti formati solo da induttori e condensatori), nei quali l'energia accumulata non viene dissipata
- Se il circuito contiene componenti attivi (oltre ai generatori indipendenti) non si possono fare affermazioni a priori sulla stabilità (occorre verificare caso per caso)

22

Regime stazionario (1)

- Si considera un circuito dinamico lineare in cui tutti i generatori indipendenti sono costanti
- La generica risposta è soluzione di un'equazione del tipo

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) = F$$

con F costante

- ➔ Se $a_0 \neq 0$, l'equazione ammette la soluzione particolare

$$y_p = \frac{F}{a_0}$$

- ➔ Se il circuito ammette una soluzione costante ed è asintoticamente stabile, per $t \rightarrow \infty$ tende ad una condizione di regime in cui tutte le tensioni e le correnti sono costanti (➔ **regime stazionario**)

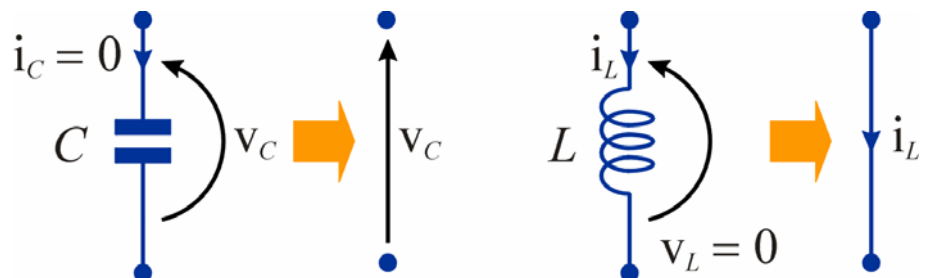
23

Regime stazionario (2)

- Un circuito è in condizioni di **regime stazionario** se le tensioni e le correnti di tutti i componenti sono costanti nel tempo
- In queste condizioni, dalle relazioni costitutive del condensatore e dell'induttore, si ottiene

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$$



- ➔ i condensatori si comportano come circuiti aperti
- ➔ gli induttori si comportano come cortocircuiti

24

Analisi in continua

- La soluzione particolare di un circuito dinamico corrispondente alla condizione di regime stazionario può essere determinata direttamente, senza utilizzare le equazioni differenziali
- In condizioni di regime stazionario, per il teorema di sostituzione, si può sostituire
 - ◆ ogni condensatore con un circuito aperto ($i_C = 0$)
 - ◆ ogni induttore con un cortocircuito ($v_L = 0$)
- ➔ La determinazione della risposta a regime è ricondotta allo studio di un circuito resistivo (**analisi in continua**)

25

Analisi in continua - Esempio

- $V_G = \text{costante}$
- Determinare i valori a regime delle tensioni e delle correnti

- **Risoluzione:**

$$I_{R3} = I_{C2} = 0 \text{ A} \Rightarrow V_{R3} = 0 \text{ V}$$

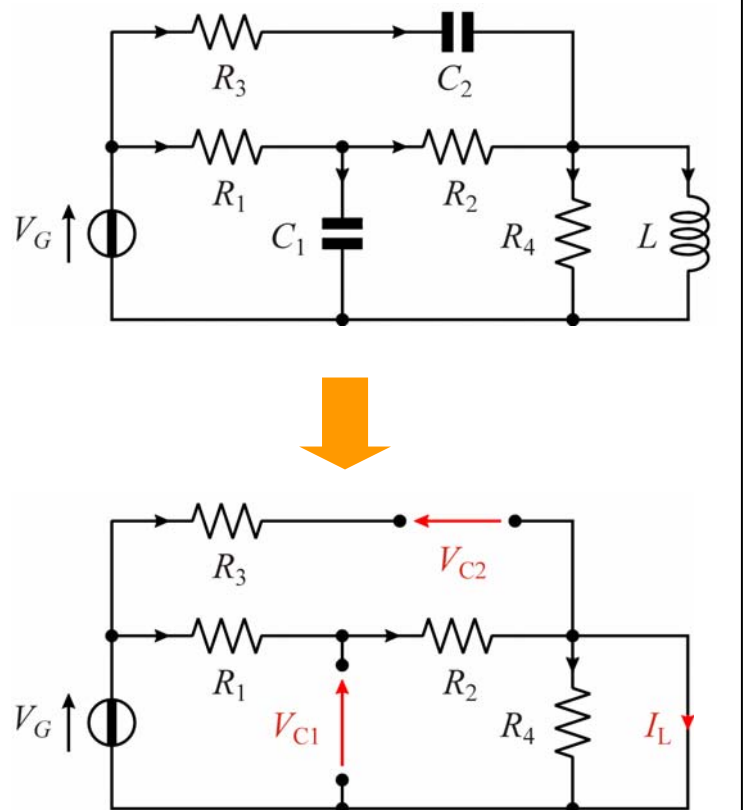
$$V_{R4} = V_L = 0 \text{ V} \Rightarrow I_{R4} = 0 \text{ A}$$

$$I_{R1} = I_{R2} = I_L = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R1} = R_1 I_{R1} = \frac{V_G R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C1} = V_{R2} = R_2 I_{R2} = \frac{V_G R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C2} = V_G$$



26

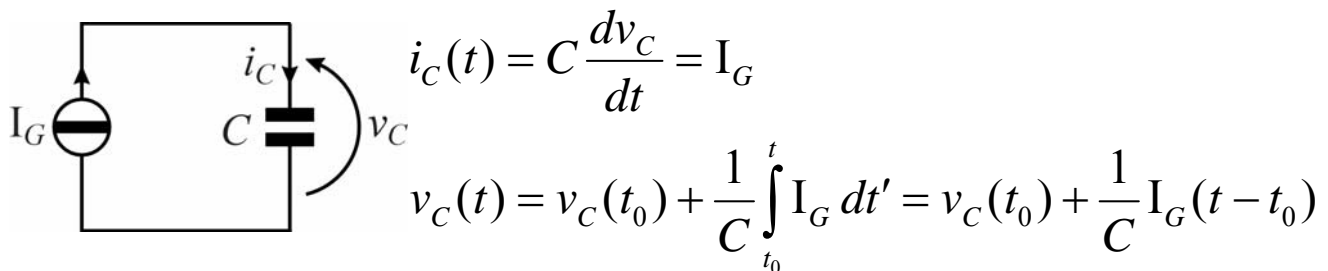
Casi particolari

- In casi particolari il circuito ottenuto sostituendo i condensatori con circuiti aperti e gli induttori con cortocircuiti può risultare impossibile o indeterminato
- Nel primo caso il circuito non ammette una soluzione costante
 - ➔ il circuito non può trovarsi in condizioni di regime stazionario
- Nel secondo caso esistono infinite soluzioni costanti
 - ➔ non è possibile determinare la risposta e regime del circuito mediante l'analisi in continua, ma è necessario studiare le equazioni differenziali
- Per circuiti formati da bipoli R L C passivi e generatori indipendenti questi casi particolari si verificano in presenza di
 - ◆ maglie formate da induttori o da generatori di tensione e induttori (**maglie di induttori**)
 - ◆ tagli formati da condensatori o da generatori di corrente e condensatori (**tagli di condensatori**)

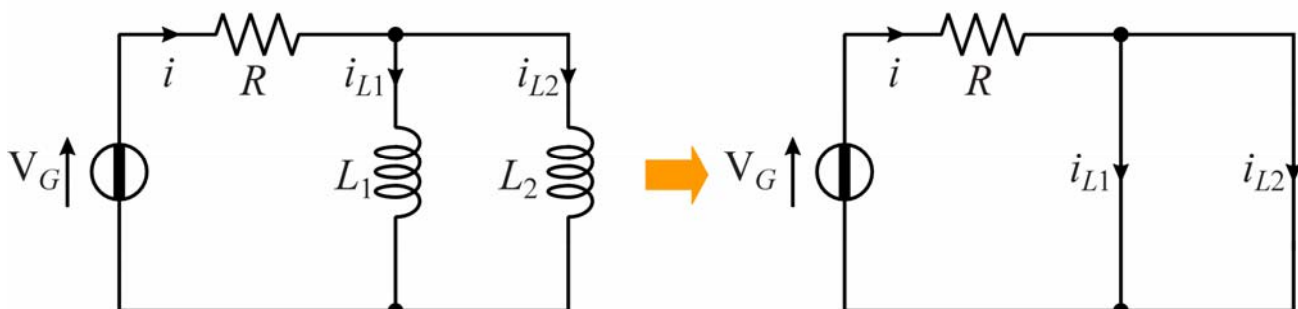
27

Casi particolari - Esempi

- Circuito che non ammette una soluzione particolare costante



- Circuito che ammette infinite soluzioni particolari costanti



28