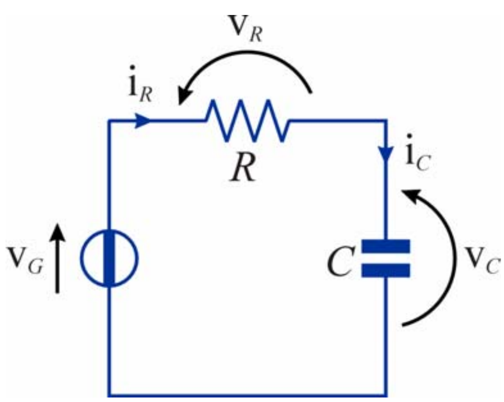
Circuiti dinamici del primo e del secondo ordine

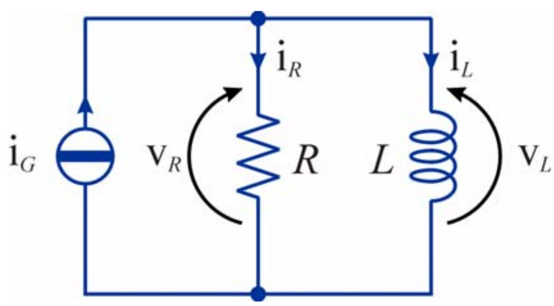
www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 2-4-2014)

Circuiti elementari del primo ordine

- **Circuito del primo ordine**: circuito il cui stato è definito mediante una sola variabile
- ➡ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un'equazione differenziale del primo ordine
- Escludendo i casi degeneri, rientrano in questa categoria i circuiti che contengono un solo bipolo dinamico (condensatore o induttore)
- ➡ I casi più semplici sono i seguenti



Circuito RC



Circuito RL

Circuiti elementari del primo ordine

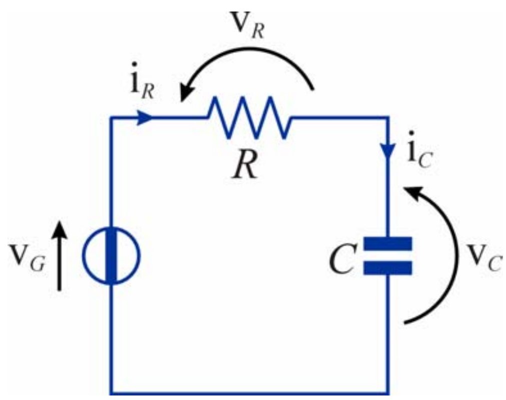
- Si assume che siano noti
  - gli andamenti degli ingressi (= grandezze impresse dai generatori indipendenti: $v_G(t)$ e $i_G(t)$) per $t \geq t_0$
  - i valori delle variabili di stato per $t = t_0$
    - $v_C(t_0) = V_{C0}$
    - $i_L(t_0) = I_{L0}$
- Si vogliono determinare le risposte dei circuiti per $t > t_0$
- Senza perdita di generalità ci si può limitare a considerare il caso particolare in cui $t_0 = 0$
- Le espressioni delle tensioni e delle correnti nel caso $t_0 \neq 0$ si possono ottenere da quelle ricavate per $t_0 = 0$ sostituendo t con $t - t_0$

Circuito RC elementare

- **LKI**: $i_R(t) = i_C(t) = i(t)$
- **LKV**: $v_R(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti**:

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = RC\frac{dv_c}{dt}$$



$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = \frac{1}{\tau}v_G(t) \qquad (\tau = RC)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale

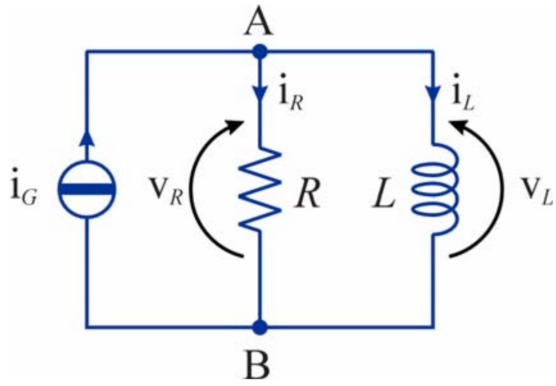
$v_C(0) = V_{C0}$

Circuito RL elementare

- **LKI**: $i_R(t) + i_L(t) = i_G(t)$
- **LKV**: $v_R(t) = v_L(t) = v(t)$
- **Componenti**:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$



$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{R}{L}i_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau}i_L(t) = \frac{1}{\tau}i_G(t) \qquad \left(\tau = \frac{L}{R}\right)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale

$$i_L(0) = I_{L0}$$

Equazione differenziale

- In entrambi i casi si è ottenuta un'equazione differenziale del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{\tau}x(t) = \dfrac{1}{\tau}\mathrm{f}(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

- $\mathrm{f}(t)$ = grandezza impressa del generatore indipendente
- τ = **costante di tempo**
  - circuito RC ➡ $\tau = RC$

    $$[R][C] = \frac{[V]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[Q]}{[I]} = [T]$$

  - circuito RL ➡ $\tau = L/R = LG$

    $$\frac{[L]}{[R]} = \frac{[\Phi]}{[I]} \times \frac{[I]}{[V]} = \frac{[\Phi]}{[V]} = [T]$$

Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'integrale generale dell'equazione di stato può essere espresso come

  $$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

  - $x_H(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata
  - $x_P(t)$ = soluzione particolare dell'equazione differenziale

- Per determinare $x_H(t)$ si risolve l'equazione caratteristica

  $$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

- Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

  $$x_H(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'integrale generale dell'equazione differenziale

  $$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)$$

- La costante k si determina imponendo che $x(t)$ soddisfi la condizione iniziale

  $$x(0) = k + x_P(0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad k = X_0 - x_P(0)$$

➨ L'espressione della soluzione (per $t > 0$) è

$$\boxed{x(t) = \left[X_0 - x_P(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)}$$

Soluzione particolare – ingresso costante

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una costante (indicata con F), l'equazione diviene

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} F$$

- In questo caso è immediato riconoscere che l'equazione ammette la soluzione particolare costante

$$x_P(t) = F$$

Soluzione particolare - ingresso sinusoidale

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una funzione sinusoidale di pulsazione ω

$$\mathrm{f}(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$$

  l'equazione ammette una soluzione particolare del tipo

$$x_p(t) = X_M \cos(\omega t + \xi)$$

- Per ricavare X_M e ξ si sostituisce $x_P(t)$ nell'equazione differenziale

$$\frac{dx_P}{dt} + \frac{1}{\tau} x_P(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{f}(t)$$

- Si applica la trasformata di Steinmetz al primo e al secondo membro dell'equazione differenziale

$$j\omega \mathbf{X}_P + \frac{1}{\tau} \mathbf{X}_P = \frac{1}{\tau} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \mathfrak{S}\{\mathrm{f}(t)\} = F_M \, \mathrm{e}^{j\varphi}$$

$$\mathbf{X}_P = \mathfrak{S}\{x_P(t)\} = X_M \, \mathrm{e}^{j\xi}$$

Soluzione particolare - Ingresso sinusoidale

- Si determina il fasore di $x_P(t)$

$$\mathbf{X}_p = \frac{\mathbf{F}}{1 + j\omega\tau}$$

- Si antitrasforma:

$$X_M = |\mathbf{X}_P| = \frac{F_M}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\xi = \arg(\mathbf{X}_P) = \arg(\mathbf{F}) - \arg(1 + j\omega\tau) = \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)$$

- Quindi la soluzione particolare è

$$x_p(t) = \frac{X_M}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos\left[\omega t + \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)\right]$$

Componente transitoria e componente di regime

$$x(t) = \underbrace{\left[X_0 - x_P(0)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\Downarrow\ \text{Componente transitoria}} + \underbrace{x_P(t)}_{\Downarrow\ \text{Componente di regime}}$$ (Se $\tau > 0$)

- Se $\tau > 0$ il primo termine tende a zero per $t \to \infty$
  - **componente transitoria**
  - la componente transitoria dipende sia dall'ingresso che dallo stato iniziale
- Per $t \to \infty$ la risposta tende ad identificarsi con il secondo termine
  - **componente di regime**
  - la componente di regime dipende solo dall'ingresso

Risposta libera e risposta forzata

$$x(t) = \underbrace{X_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Risposta con ingresso zero}} + \underbrace{x_P(t) - x_P(0) e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Risposta nello stato zero}}$$

- La risposta con ingresso zero (**risposta libera**)
  - è dovuta all'energia immagazzinata nel circuito all'istante iniziale
  - dipende solo dallo stato iniziale
  - tende a zero per $t \to \infty$ (se $\tau > 0$)
- La risposta nello stato zero (**risposta forzata**)
  - dipende solo dall'ingresso
  - tende alla componente di regime per $t \to \infty$ (se $\tau > 0$)

Espressione della soluzione

- Se l'ingresso è costante la soluzione completa (per $t > 0$) è

$$x(t) = \left(X_0 - F\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

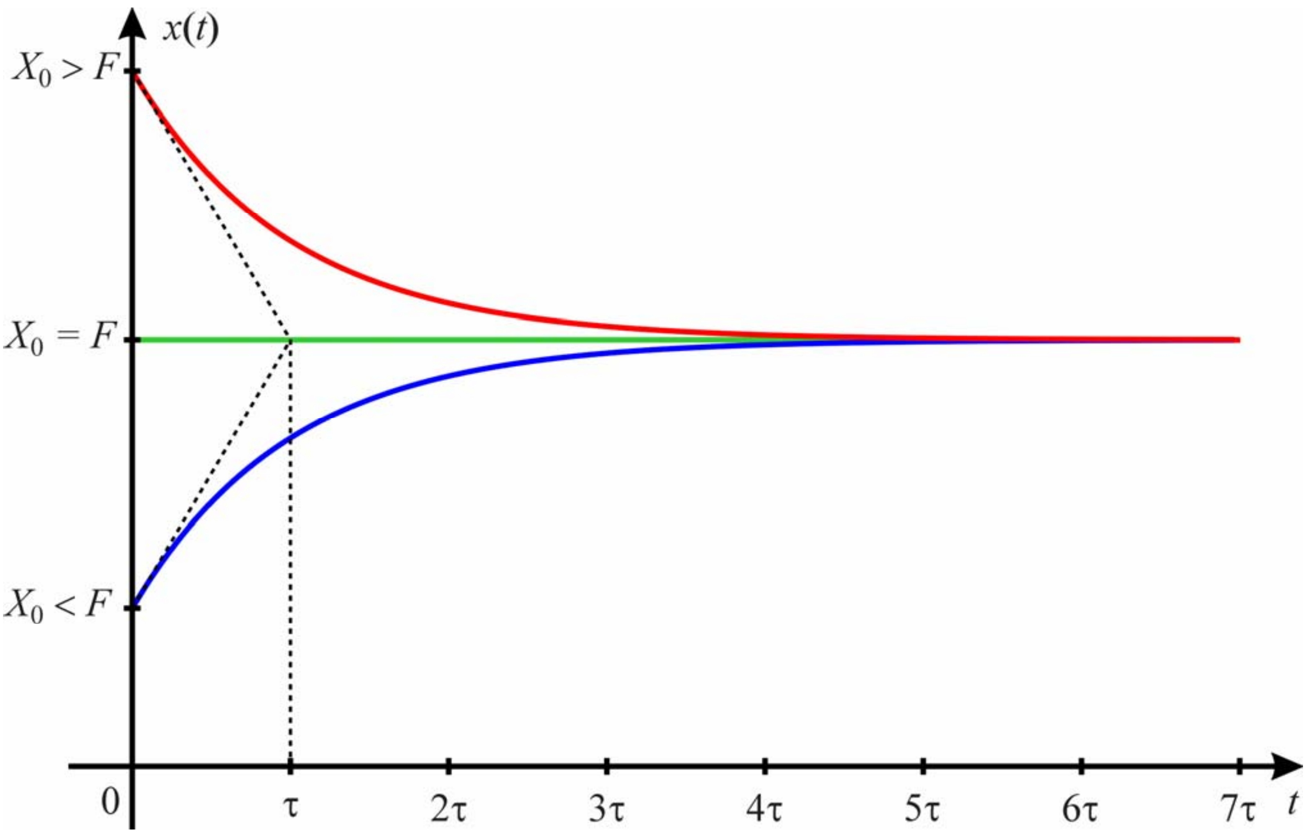
- Se l'ingresso è sinusoidale si ottiene

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{F_M \cos \xi}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_M}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t + \xi)$$

dove

$$\xi = \varphi - \mathrm{arctg}(\omega\tau)$$

Risposta con ingresso costante



Costante di tempo

- La costante di tempo è un indice della velocità con cui la componente transitoria della risposta tende a zero

- In un tempo pari alla costante di tempo la componente transitoria si riduce al 37% circa del suo valore iniziale
- In un tempo pari a 5τ si riduce a meno dell'1% del valore iniziale
- In un tempo pari a 7τ si riduce a meno dello 0.1% del valore iniziale

➡ In pratica si può assumere che componente transitoria si annulli in un tempo dell'ordine di 5-7 volte la costante di tempo

t	$e^{-t/\tau}$
0	1.0000
τ	0.3679
2τ	0.1353
3τ	0.0498
4τ	0.0183
5τ	0.0067
6τ	0.0025
7τ	0.0009

Costante di tempo

- La retta tangente nel punto iniziale alla curva che rappresenta la risposta raggiunge il valore asintotico F per $t = \tau$
- Dato che

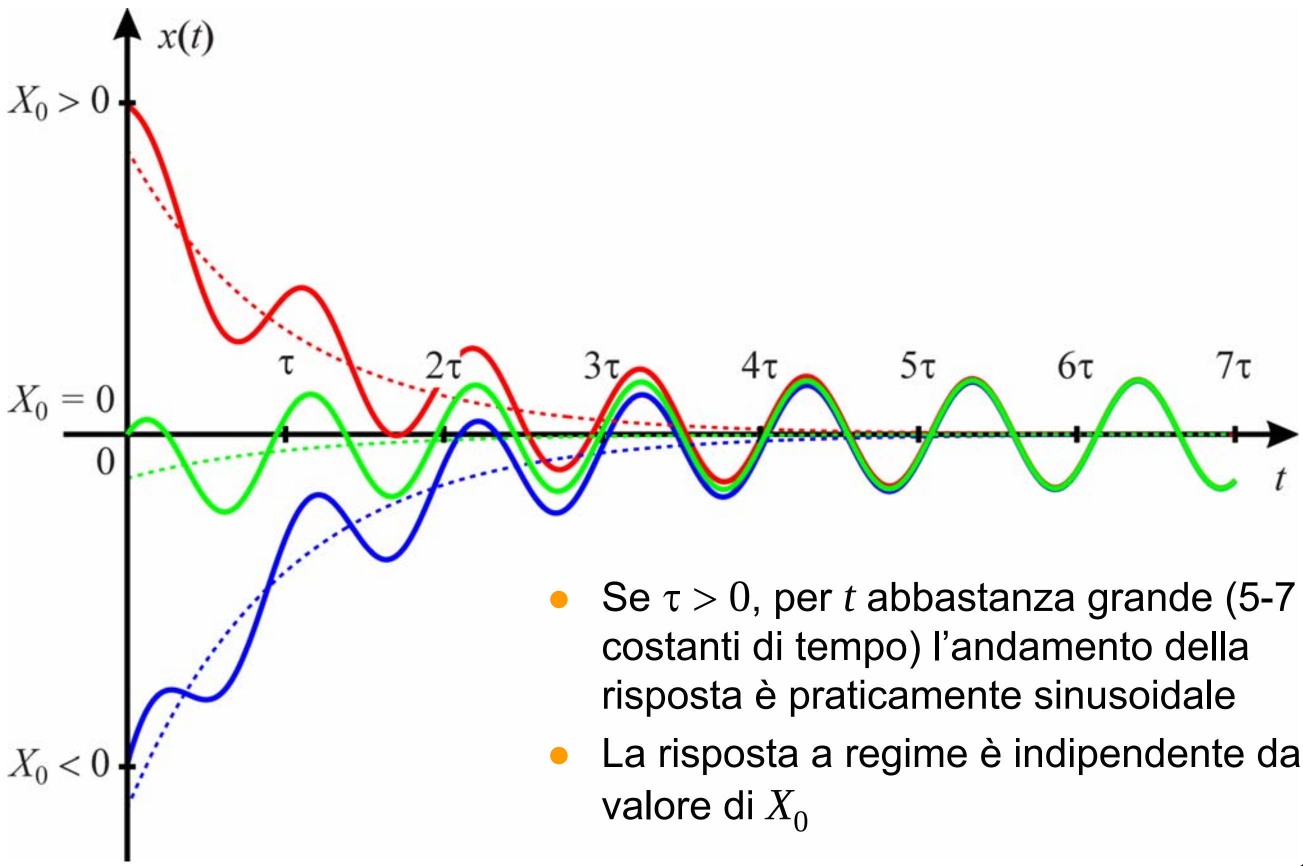
$$x(t) = (X_0 - F)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

- L'equazione della retta tangente nel punto $(0, X_0)$ è

$$x_R(t) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \cdot t + X_0 = -\frac{(X_0 - F)}{t} + X_0$$

➡ Quindi si ha $x_R(t) = F$ per $t = \tau$

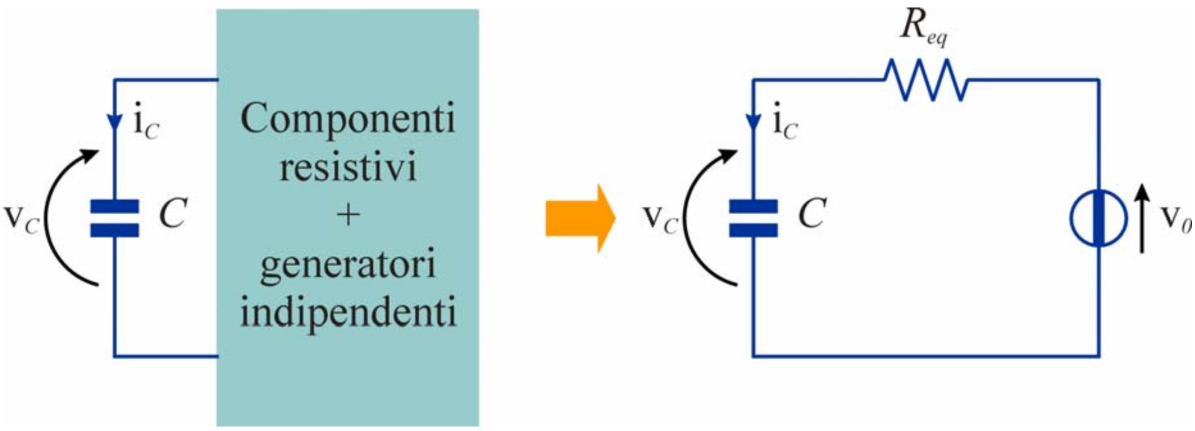
Risposta con ingresso sinusoidale



- Se $\tau > 0$, per t abbastanza grande (5-7 costanti di tempo) l'andamento della risposta è praticamente sinusoidale
- La risposta a regime è indipendente dal valore di X_0

Circuiti con un solo condensatore

- Normalmente un circuito formato da un condensatore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RC elementare mediante il teorema di Thévenin



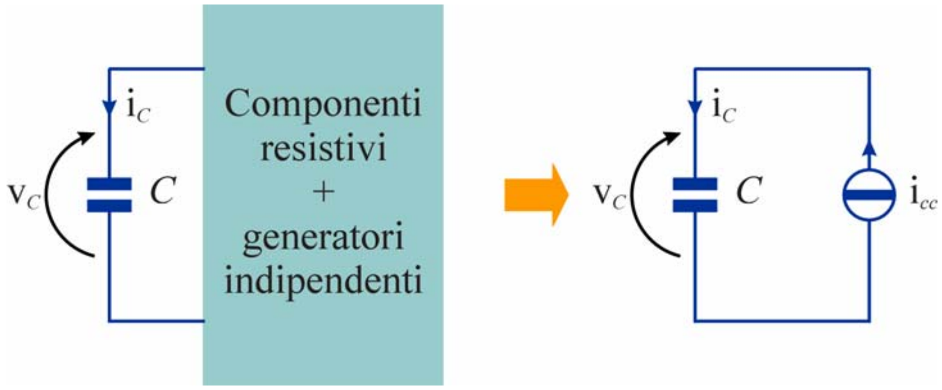
- Quindi l'espressione della tensione del condensatore per $t > 0$ è

$$v_C(t) = [V_{C0} - v_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_P(t) \qquad \tau = R_{eq}C$$

Circuiti con un solo condensatore

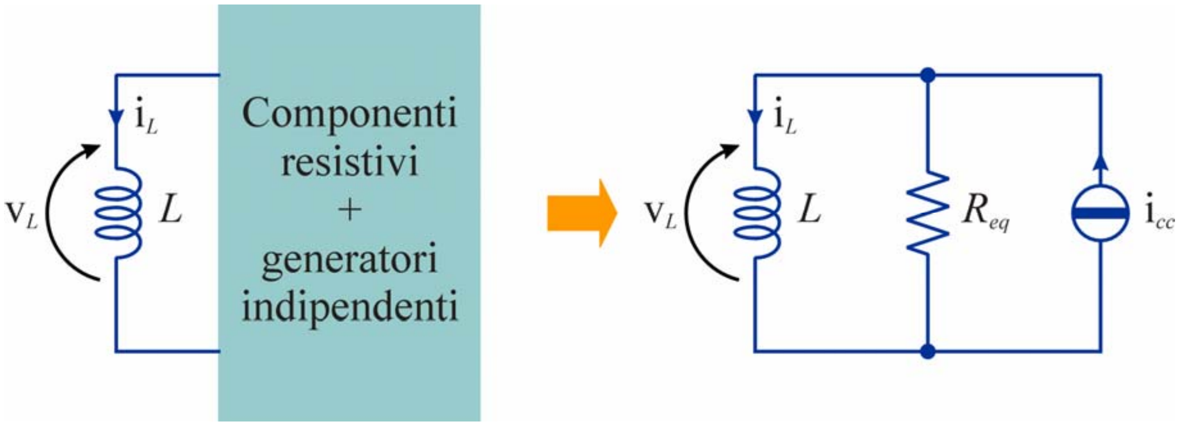
- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di corrente, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Thévenin (ma solo quella di Norton con $G_{eq} = 0$)
- In questo caso la tensione del condensatore si può ottenere direttamente integrando la corrente del generatore

$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} = i_{cc}(t) \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i_{cc}(x)dx$$



Circuiti con un solo induttore

- Normalmente un circuito formato da un induttore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RL elementare mediante il teorema di Norton



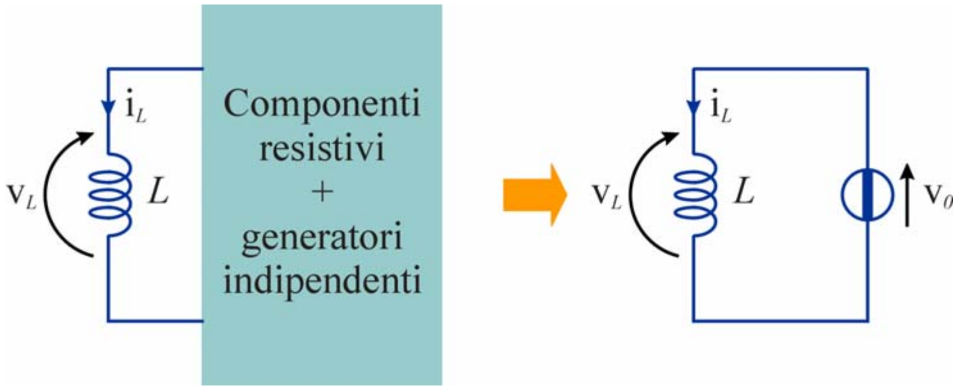
- Quindi l'espressione della corrente dell'induttore per $t > 0$ è

$$i_L(t) = [I_{L0} - i_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_P(t) \qquad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

Circuiti con un solo induttore

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di tensione, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Norton (ma solo quella di Thévenin con $R_{eq} = 0$)
- In questo caso la corrente dell'induttore condensatore si può ottenere direttamente integrando la tensione del generatore

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_0(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases} \Rightarrow \quad i_L(t) = I_{L0} + \frac{1}{L}\int_0^t v_0(x)dx$$



Espressioni delle altre risposte

- **Circuito RC**: essendo nota $v_C(t)$ si può sostituire il condensatore con un generatore di tensione
- **Circuito RL**: essendo nota $i_L(t)$ si può sostituire l'induttore con un generatore di corrente
- ➡ Le altre tensioni e correnti possono essere determinate risolvendo un circuito resistivo
- Dato che il circuito è lineare, ogni risposta può essere scomposta in un termine proporzionale a $v_C(t)$ o $i_L(t)$ e in un termine proporzionale alle grandezze impresse dei generatori indipendenti
- Ogni risposta del circuito ha un'espressione (per $t > 0$) del tipo

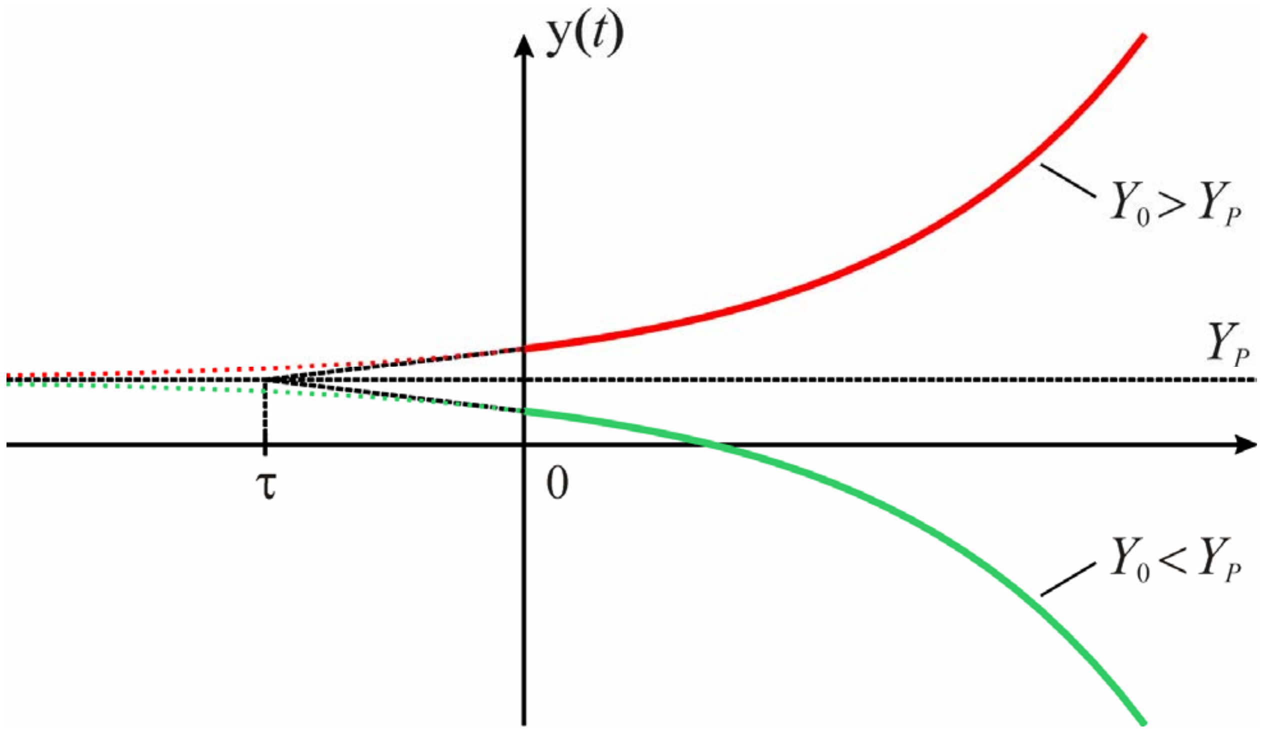
$$\boxed{y(t) = \left[Y_0 - y_P(0)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)}$$

con la stessa costante di tempo τ

Stabilità

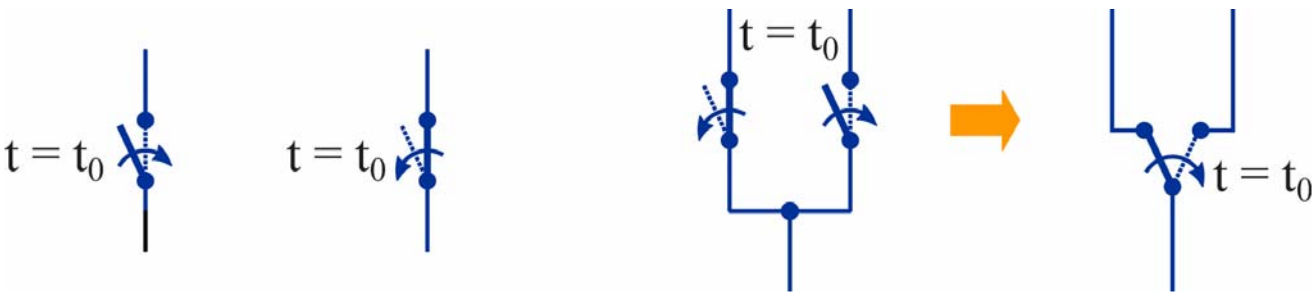
- Se $\tau > 0$ il termine esponenziale tende a zero per $t \to \infty$
  - Il circuito è **asintoticamente stabile**
  - Per $t \to \infty$ tende ad una condizione di regime dipendente solo dagli ingressi
  - Questa situazione si verifica se i parametri R, L e C sono positivi (➡ componenti passivi)
- Se $\tau < 0$ il termine esponenziale diverge per $t \to \infty$
  - Il circuito è **instabile**
  - Questa condizione si verifica, ad esempio, se $R < 0$, come può accadere se R rappresenta la resistenza equivalente di un bipolo che contiene generatori dipendenti

Esempio - risposta con ingressi costanti per $\tau < 0$



Condizioni iniziali

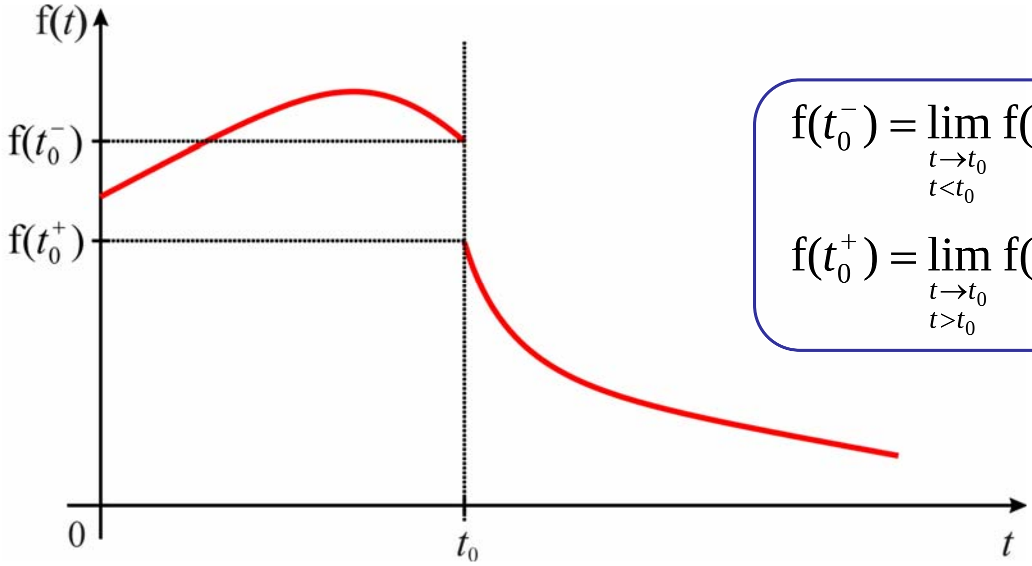
- In genere le condizioni iniziali non sono direttamente disponibili, ma devono essere determinate a partire da informazioni di tipo diverso
- Spesso è noto il comportamento del circuito prima di un istante iniziale t_0 in corrispondenza del quale si ha una perturbazione dovuta alla commutazione di uno o più interruttori o a discontinuità delle grandezze impresse dei generatori



Interruttori

Discontinuità

- All'istante t_0 alcune tensioni o correnti nel circuito possono presentare una **discontinuità di prima specie** (cioè un "salto")
  - ➡ il loro valore per $t = t_0$ non è definito
- In questo caso si definiscono i valori relativi agli istanti t_0^- e t_0^+



$$f(t_0^-) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$$

$$f(t_0^+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t)$$

Dati iniziali e condizioni iniziali

- Spesso, nello studio dei circuiti dinamici in condizioni transitorie è noto il comportamento del circuito per $t < t_0$
  - ➡ sono noti i valori delle tensioni e delle correnti all'istante t_0^- (**dati iniziali**)
- Per determinare la risposta per $t > t_0$ occorrono i valori delle funzioni incognite e (delle loro derivate, per i circuiti di ordine superiore al primo) all'istante t_0^+ (**condizioni iniziali**)
- All'istante t_0 le tensioni e le correnti (e le loro derivate) possono essere discontinue
  - ➡ i valori a t_0^+ in genere non coincidono con quelli a t_0^-

➡ Occorre determinare la relazione tra i dati iniziali e le condizioni iniziali

Continuità delle variabili di stato

- **Proprietà di continuità**
  - Se la corrente di un condensatore è limitata, la tensione è una funzione continua del tempo
  - Se la tensione di un induttore è limitata, la corrente è una funzione continua del tempo
- Per un circuito non degenere si può dimostrare che, se le grandezze impresse dei generatori sono limitate, anche le tensioni e le correnti di tutti i lati sono limitate (tensioni o correnti non limitate sono incompatibili con le equazioni del circuito)

➡ *Se gli ingressi sono limitati, le variabili di stato di un circuito non degenere sono continue*
  - ➡ i loro valori all'istante t_0^+ coincidono con quelli a t_0^-
  - ➡ sono definiti i valori delle variabili di stato per $t = t_0$

Determinazione delle condizioni iniziali

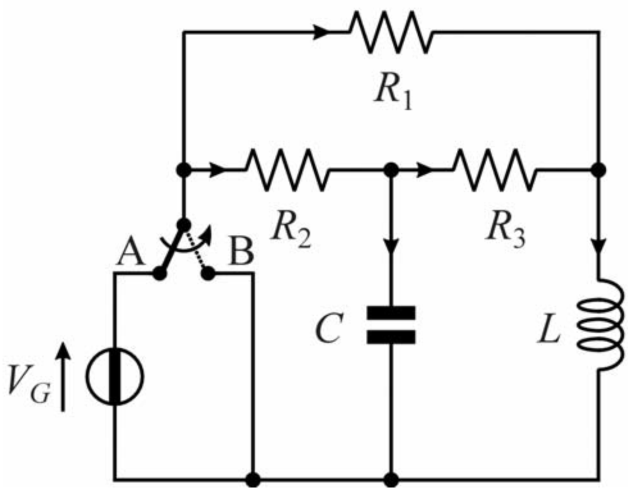
Calcolo dei valori a t_0^+ delle tensioni e correnti

- Studiando il circuito per $t = t_0^-$ si determinano i valori per $t = t_0$ delle variabili di stato
- All'istante t_0^+, essendo note le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori, si possono sostituire
  - i condensatori con generatori di tensione
  - gli induttori con generatori di corrente
- In questo modo si ottiene un circuito resistivo, studiando il quale si possono determinare i valori all'istante t_0^+ delle altre tensioni e correnti

Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- Per $t < 0$ il circuito rappresentato in figura è in condizioni di regime
- All'istante $t = 0$ l'interruttore passa dalla posizione A alla posizione B
- Si vogliono determinare i valori negli istanti 0^- e 0^+ di:
$i_{R1}(t), i_{R2}(t), i_{R3}(t), i_L(t), v_L(t), i_C(t), v_C(t)$

$$R_1 = 4\,\Omega$$
$$R_2 = 2\,\Omega$$
$$R_3 = 2\,\Omega$$
$$C = 0.5\,\text{F}$$
$$L = 0.5\,\text{H}$$
$$V_G = 12\,\text{V}$$



Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^-$**
  - Il circuito è in condizioni di regime stazionario
  - ➡ Si esegue un'analisi in continua

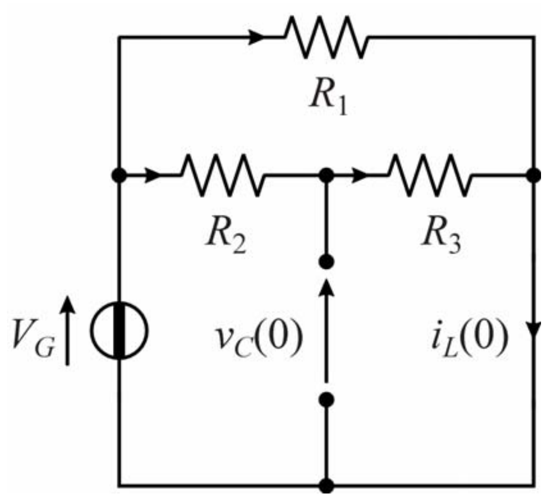
$$\boxed{i_C(0^-) = 0\,\text{A} \quad v_L(0^-) = 0\,\text{V}}$$

$$i_{R1}(0^-) = \frac{V_G}{R_1} = 3\,\text{A}$$

$$i_{R2}(0^-) = i_{R3}(0^-) = \frac{V_G}{R_2 + R_3} = 3\,\text{A}$$

$$i_L(0) = i_{R1}(0^-) + i_{R3}(0^-) = 6\,\text{A}$$

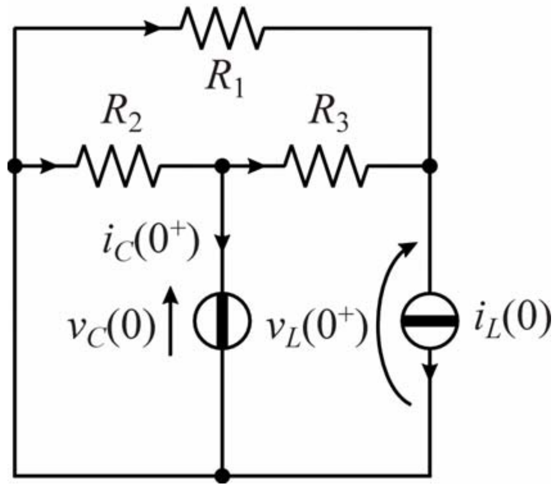
$$v_C(0) = \frac{V_G\,R_3}{R_2 + R_3} = 6\,\text{V}$$



Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- **Determinazione dei valori all'istante $t = 0^+$**

$$\boxed{v_C(0) = 6\ \text{V} \quad i_L(0) = 6\ \text{A}}$$



$$i_{R1}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_1+R_3} + \frac{i_L(0)R_3}{R_1+R_3} = 1\ \text{A}$$

$$i_{R2}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_2} = -3\ \text{A}$$

$$i_{R3}(0^+) = \frac{v_C(0)}{R_1+R_3} + \frac{i_L(0)R_1}{R_1+R_3} = 5\ \text{A}$$

$$i_C(0^+) = -\frac{v_C(0)(R_1+R_2+R_3)}{R_2(R_1+R_3)} - \frac{i_L(0)R_1}{R_1+R_3} = -8\ \text{A}$$

$$v_L(0^+) = -R_1 i_{R1}(0^+) = -4\ \text{V}$$

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (1)

- La risposta di un circuito del primo ordine a partire da un istante iniziale $t_0 = 0$

  $$y(t) = \left[Y_0 - y_P(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)$$

  è determinata da tre informazioni
  - il valore all'istante $t = 0^+$: Y_0
  - la costante di tempo: τ
  - la soluzione particolare: $y_P(t)$

- In molti casi di interesse pratico (es. circuiti con ingressi costanti o ingressi sinusoidali) queste informazioni possono essere ricavate direttamente, quindi la risposta può essere ottenuta senza fare uso delle equazioni differenziali

Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (2)

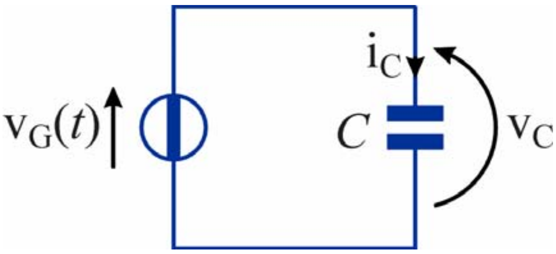
- **Determinazione di Y_0**
  - Mediante un'analisi per $t < 0$ si determina il valore iniziale della variabile di stato ($v_C(0)$ o $i_L(0)$)
  - Se la risposta $y(t)$ che si vuole determinare non coincide con la variabile di stato, si calcola $Y_0 = y(0^+)$ analizzando il circuito resistivo ottenuto sostituendo
    - il condensatore con un generatore di tensione $v_C(0)$
    - l'induttore con un generatore di corrente $i_L(0)$
- **Determinazione di τ**
  - Si calcola la resistenza equivalente della parte resistiva del circuito con i generatori indipendenti azzerati, quindi si pone
    - $\tau = R_{eq}C$ per i circuiti RC
    - $\tau = L/R_{eq}$ per i circuiti RL

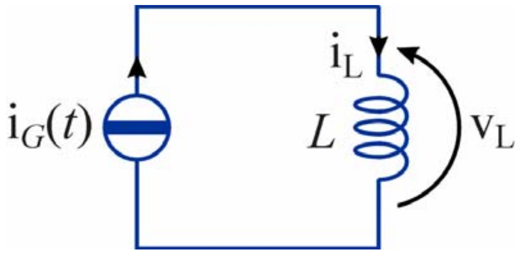
Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (3)

- **Determinazione della soluzione particolare**
  - **Ingressi costanti**
    - Si esegue un'analisi in continua del circuito (nella configurazione per $t > 0$, cioè con gli eventuali interruttori nella posizione successiva alla commutazione che avviene all'istante iniziale)
    - Nell'analisi in continua
      - il condensatore è sostituito da un circuito aperto
      - l'induttore è sostituito da un cortocircuito
  - **Ingressi sinusoidali**
    - Si analizza il circuito (nella configurazione per $t > 0$) con il metodo simbolico

Circuiti degeneri

- Si considerano i casi limite in cui
  - $R = 0$ nel circuito RC elementare
  - $G = 1/R = 0$ nel circuito RL elementare





- In queste condizioni i circuiti sono degeneri e la variabile di stato (v_C o i_L) coincide con l'ingresso (v_G o i_G), quindi il circuito non ha variabili di stato indipendenti (ordine 0)

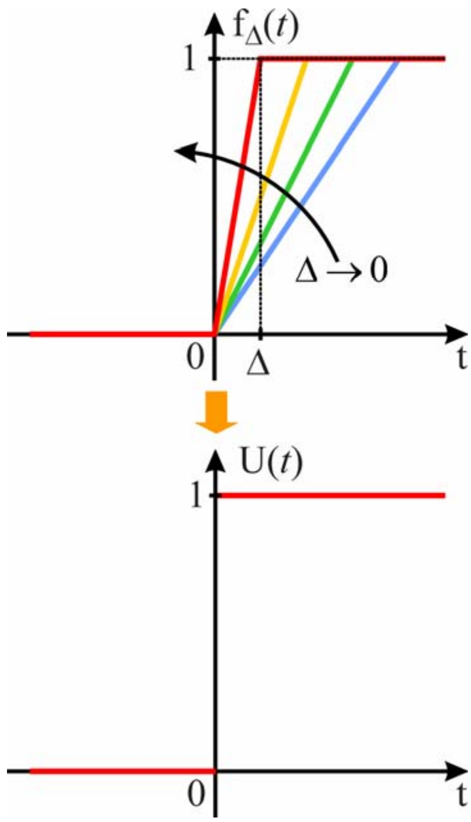
Gradino unitario

- Si considera il caso in cui l'ingresso è una funzione del tipo

$$f_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{t}{\Delta} & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 1 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$

- Per $\Delta \to 0$, la funzione $f_\Delta(t)$ tende alla funzione **gradino unitario** $U(t)$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



Impulso di Dirac

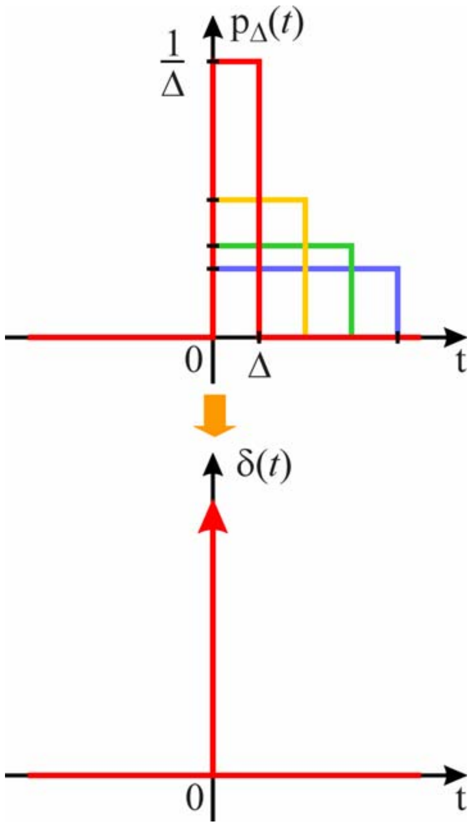
- La corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore sono

$$i_C(t) = C\frac{d\,f_\Delta(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{d\,f_\Delta(t)}{dt}$$

- La derivata dell'ingresso è rappresentata da un impulso rettangolare di durata Δ e ampiezza $1/\Delta$ (e quindi area unitaria)

$$\frac{d\,f_\Delta}{dt} = p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta} & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$



Impulso di Dirac

- Intuitivamente, il limite per $\Delta \to 0$ di $p_\Delta(t)$ è un impulso di area unitaria avente durata nulla e ampiezza infinita

➡ Il limite è rappresentato dall'**impulso di Dirac**, $\delta(t)$, caratterizzato dalle seguenti proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } \; t \neq 0 \\ \text{singolare} & \text{per } \; t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$ (➡ "area" unitaria)

- Queste proprietà non possono essere soddisfatte da una funzione ordinaria (per una funzione ordinaria la prima proprietà implica che l'integrale su un qualunque intervallo sia nullo)

- $\delta(t)$ non è una funzione ordinaria ma è una **distribuzione** (o **funzione generalizzata**)

Impulso di Dirac

- L'integrale dell'impulso di Dirac è il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)d\xi = U(t)$$

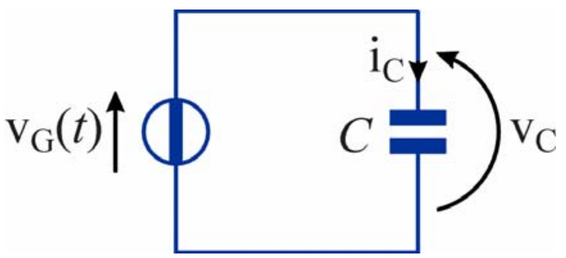
- Quindi, formalmente, si può porre

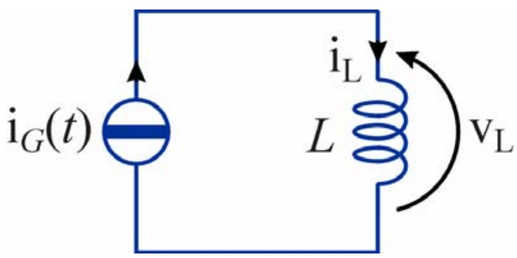
$$\frac{dU}{dt} = \delta(t)$$

➡ L'impulso di Dirac è la **derivata generalizzata** del gradino unitario
(non si può parlare semplicemente di derivata, perché U(t) non è derivabile in senso ordinario, essendo discontinua)

Impulsi di corrente e di tensione

- In un condensatore a una discontinuità della tensione corrisponde un impulso di corrente (➡ corrente non limitata)
- In un induttore a una discontinuità della corrente corrisponde un impulso di tensione (➡ tensione non limitata)



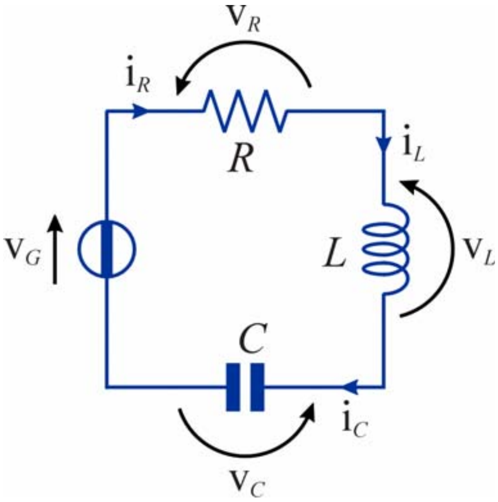


$$v_G(t) = U(t)$$
$$v_C(t) = v_G(t) = U(t)$$
$$i_C(t) = C\frac{d\,v_C}{dt} = C\delta(t)$$

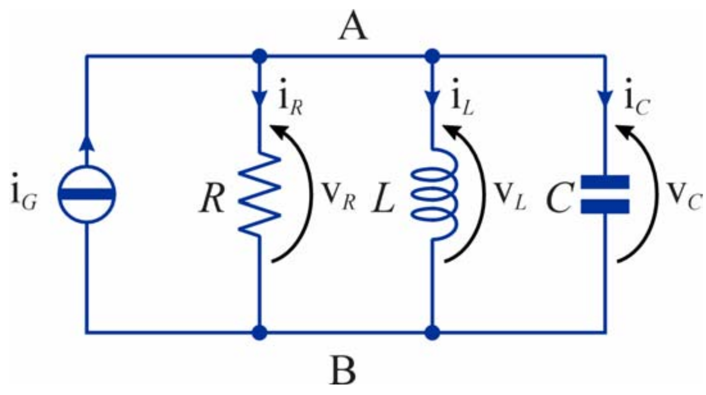
$$i_G(t) = U(t)$$
$$i_L(t) = i_G(t) = U(t)$$
$$v_L(t) = L\frac{d\,i_L}{dt} = L\delta(t)$$

Circuiti elementari del secondo ordine

Circuito RLC serie



Circuito RLC parallelo



- **Circuiti del secondo ordine**: circuiti contenenti due bipoli dinamici
  - ➡ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine

Circuito RLC serie

- **LKI**: $\mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_L(t) = \mathrm{i}_R(t)$
- **LKV**: $\mathrm{v}_R(t) + \mathrm{v}_L(t) + \mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_G(t)$
- **Componenti**:

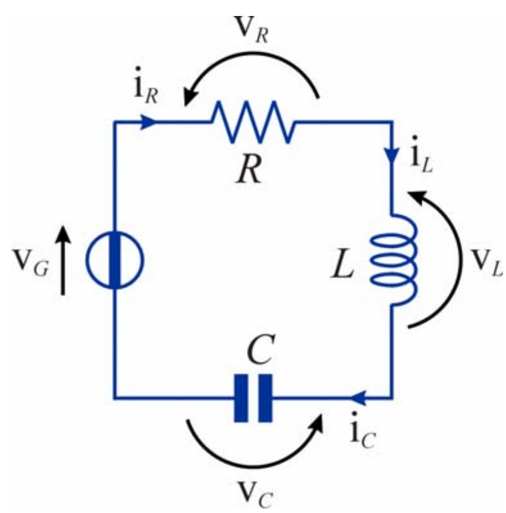
$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{v}_R(t) = R\,\mathrm{i}_R(t) = RC\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{v}_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt} = LC\frac{d^2\,\mathrm{v}_C}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2\,\mathrm{v}_C}{dt^2} + RC\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt} + \mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_G(t)$$



Circuito RLC serie

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante $t = 0$ della tensione v_C e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

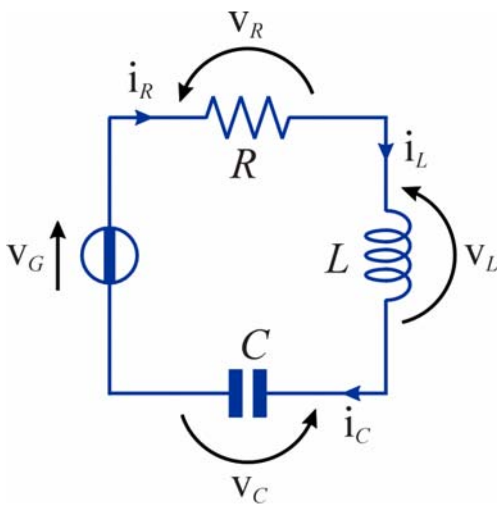
$$\mathrm{v}_C(0) = V_{C0}$$

$$\mathrm{i}_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}$$

$$\mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_L(t)$$



$$\Rightarrow \left.\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{C}\mathrm{i}_C(0) = \frac{1}{C}\mathrm{i}_L(0) = \frac{I_{L0}}{C}$$

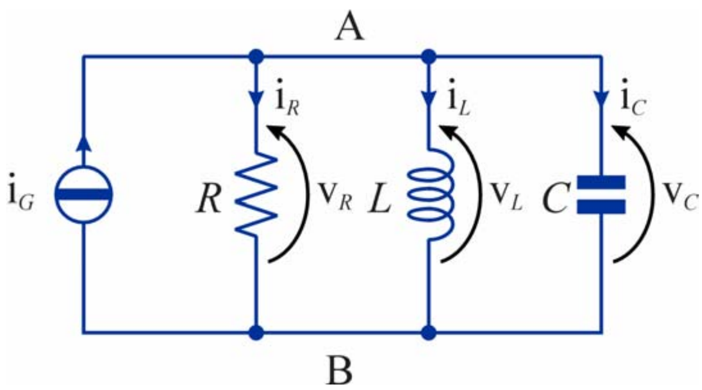
Circuito RLC parallelo

- **LKI**: $\mathrm{i}_R(t) + \mathrm{i}_L(t) + \mathrm{i}_C(t) = \mathrm{i}_G(t)$
- **LKV**: $\mathrm{v}_C(t) = \mathrm{v}_L(t) = \mathrm{v}_R(t)$
- **Componenti**:

$$\mathrm{v}_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{\mathrm{v}_R(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}$$

$$\mathrm{i}_C(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}_C}{dt} = LC\frac{d^2\,\mathrm{i}_L}{dt^2}$$



$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2\,\mathrm{i}_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt} + \mathrm{i}_L(t) = \mathrm{i}_G(t)$$

Circuito RLC parallelo

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante $t = 0$ della corrente i_L e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

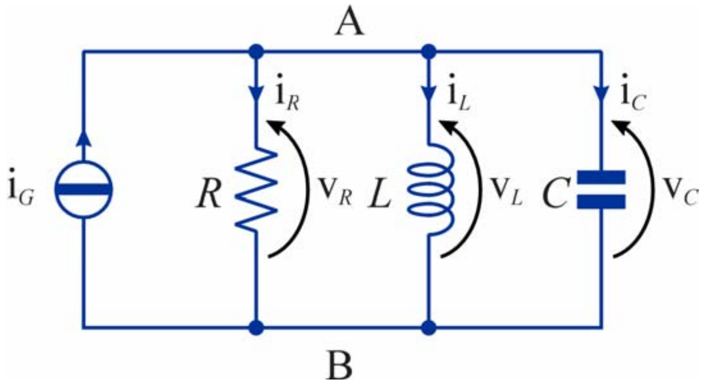
$$\mathrm{v}_C(0) = V_{C0}$$

$$\mathrm{i}_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$\mathrm{v}_L(t) = L\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}$$

$$\mathrm{v}_L(t) = \mathrm{v}_C(t)$$



$$\Rightarrow \left.\frac{d\,\mathrm{i}_L}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}\mathrm{v}_L(0) = \frac{1}{L}\mathrm{v}_C(0) = \frac{V_{C0}}{L}$$

Circuiti del secondo ordine

- I circuiti del 2° ordine sono descritti da equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\,\mathrm{y}}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{d\,\mathrm{y}}{dt} + \omega_0^2\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{f}(t) \\ \mathrm{y}(0^+) = Y_0 \\ \left.\dfrac{d\,\mathrm{y}}{dt}\right|_{t=0} = Y_0' \end{cases}$$

- α = **coefficiente di smorzamento**
  - circuito RLC serie ⇒ $\alpha = \dfrac{R}{2L}$
  - circuito RLC parallelo ⇒ $\alpha = \dfrac{1}{2RC}$
- ω_0 = **pulsazione naturale**
  - circuito RLC serie e parallelo ⇒ $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$\boxed{R > 0,\, L > 0,\, C > 0 \;\Downarrow\; \alpha > 0,\, \omega_0^2 > 0}$$

Risposta di un circuito del secondo ordine

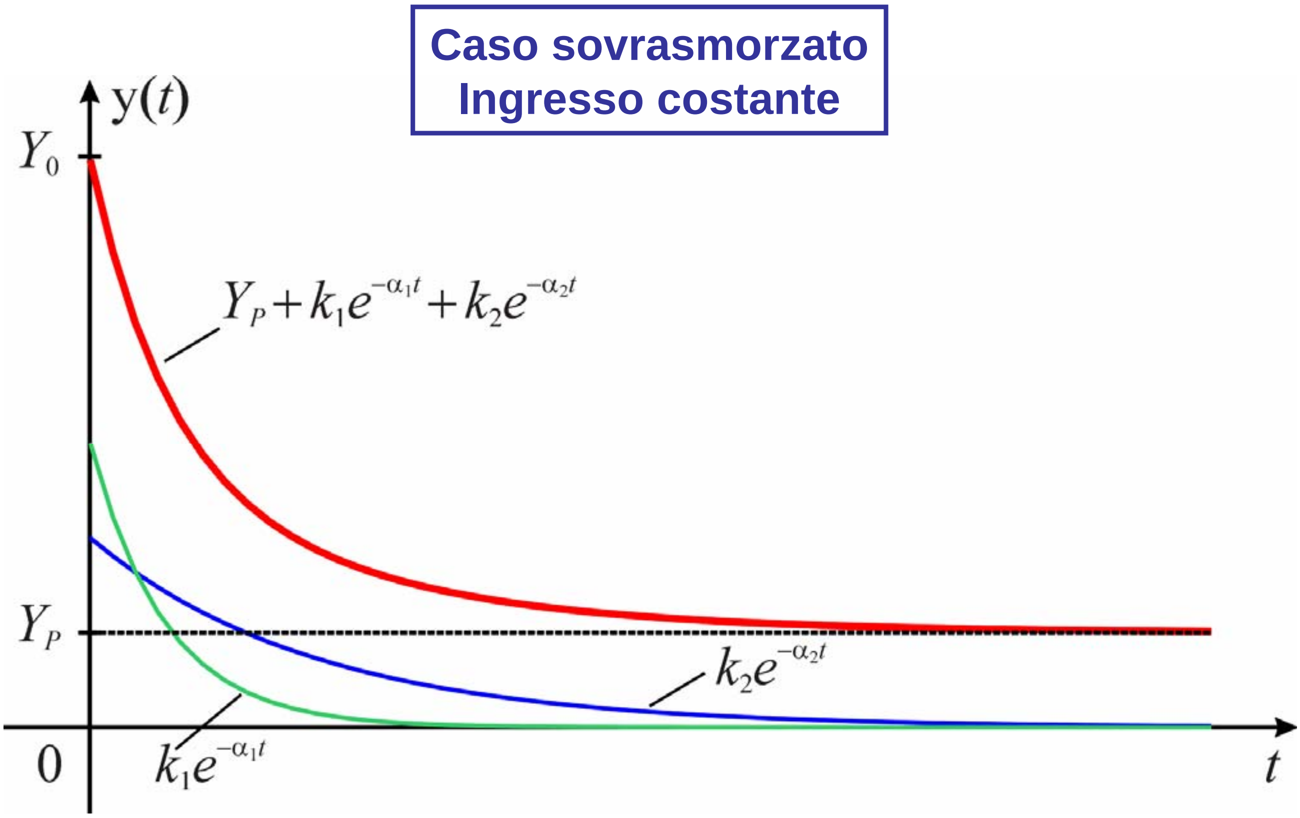
- Integrale generale dell'equazione differenziale
  $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$
  - $y_H(t)$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata
  - $y_P(t)$ = soluzione particolare dell'equazione differenziale
- Per determinare $y_H(t)$ si risolve l'equazione caratteristica
  $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$
- Si distinguono tre casi caratterizzati da valore positivo, nullo o negativo del discriminante $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$
  - **caso sovrasmorzato**: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$
  - **caso con smorzamento critico**: $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$
  - **caso sottosmorzato**: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$

Caso sovrasmorzato

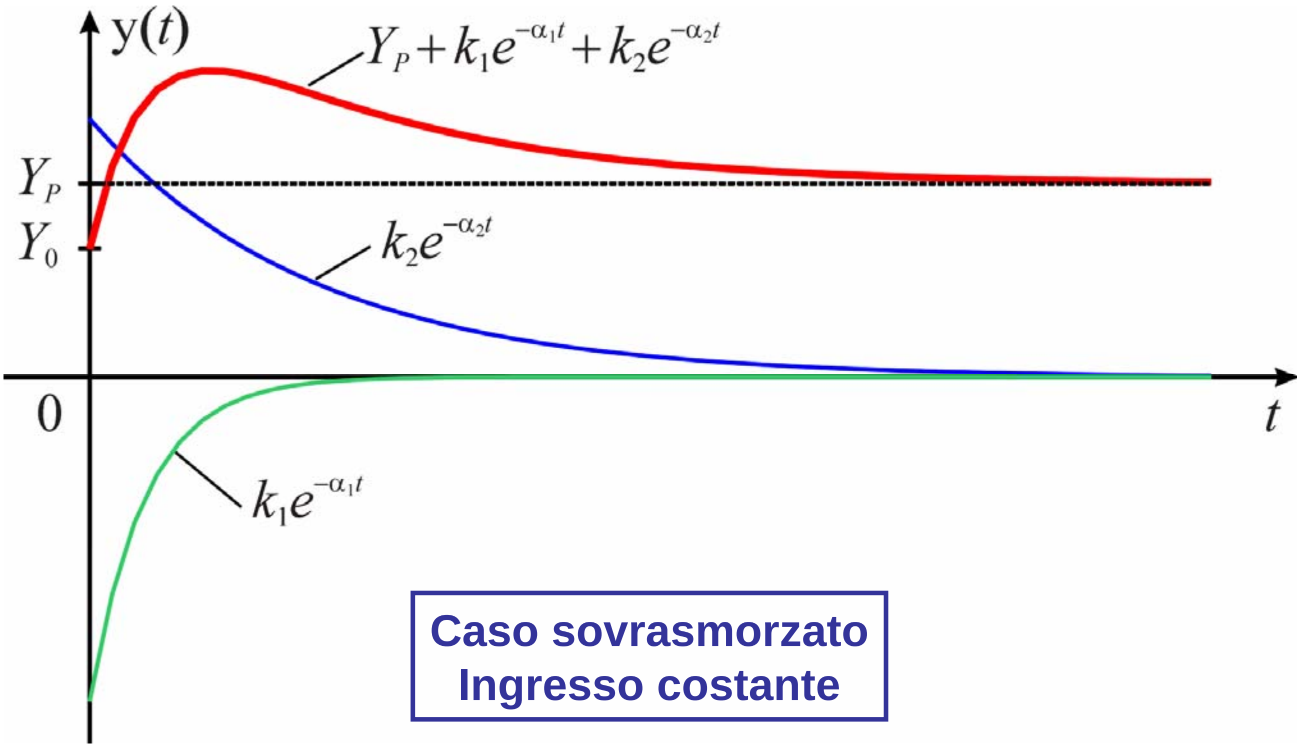
$$\boxed{\alpha^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta > 0}$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte
  $$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_d = \left\langle \begin{array}{l} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{array} \right.$$
  - Se $\alpha > 0$, $\omega_0^2 > 0$, dato che $\alpha_d < \alpha$, risulta $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
  - ⇨ Il circuito è asintoticamente stabile
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:
  $y_H(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$
- Espressione della risposta:
  $y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t} + y_p(t)$
  - k_1 e k_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali

Risposta di un circuito del secondo ordine



Risposta di un circuito del secondo ordine



Smorzamento critico

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

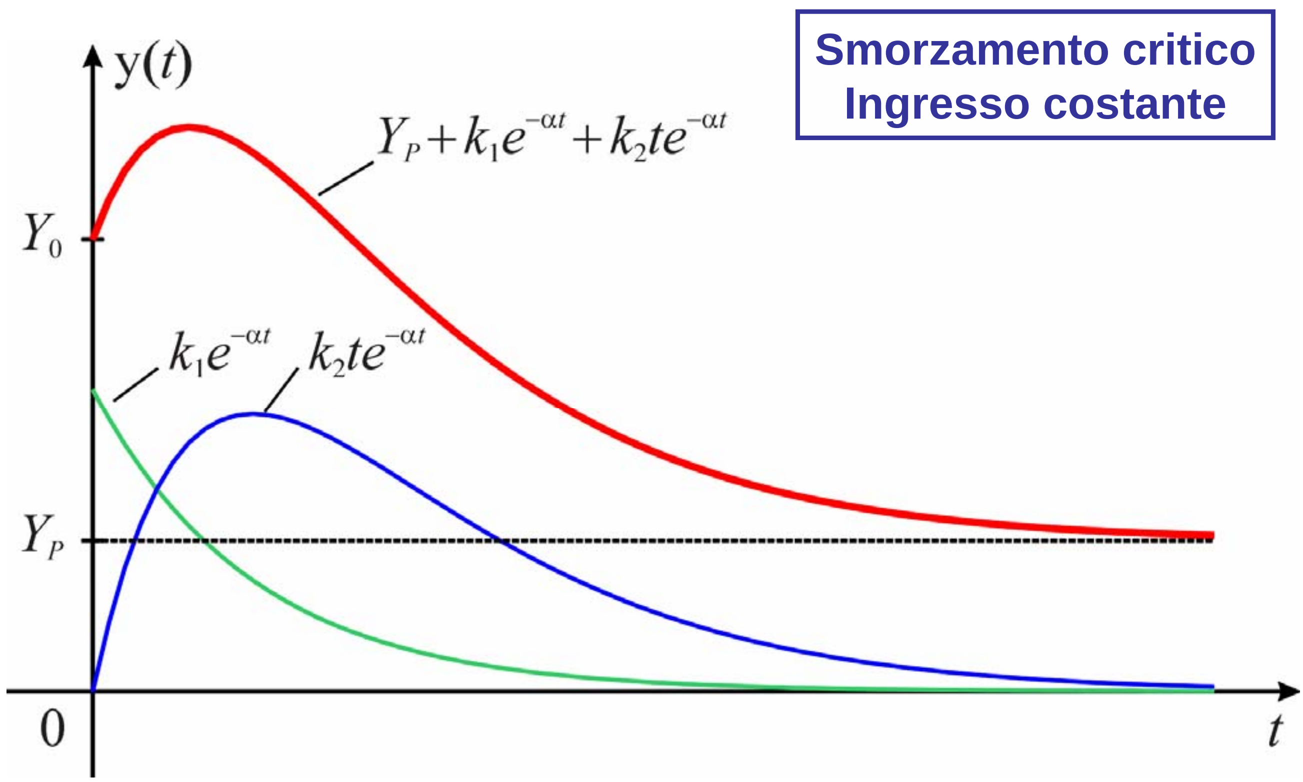
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali coincidenti

  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$
  - Anche in questo caso se $\alpha > 0$, le soluzioni sono negative
- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

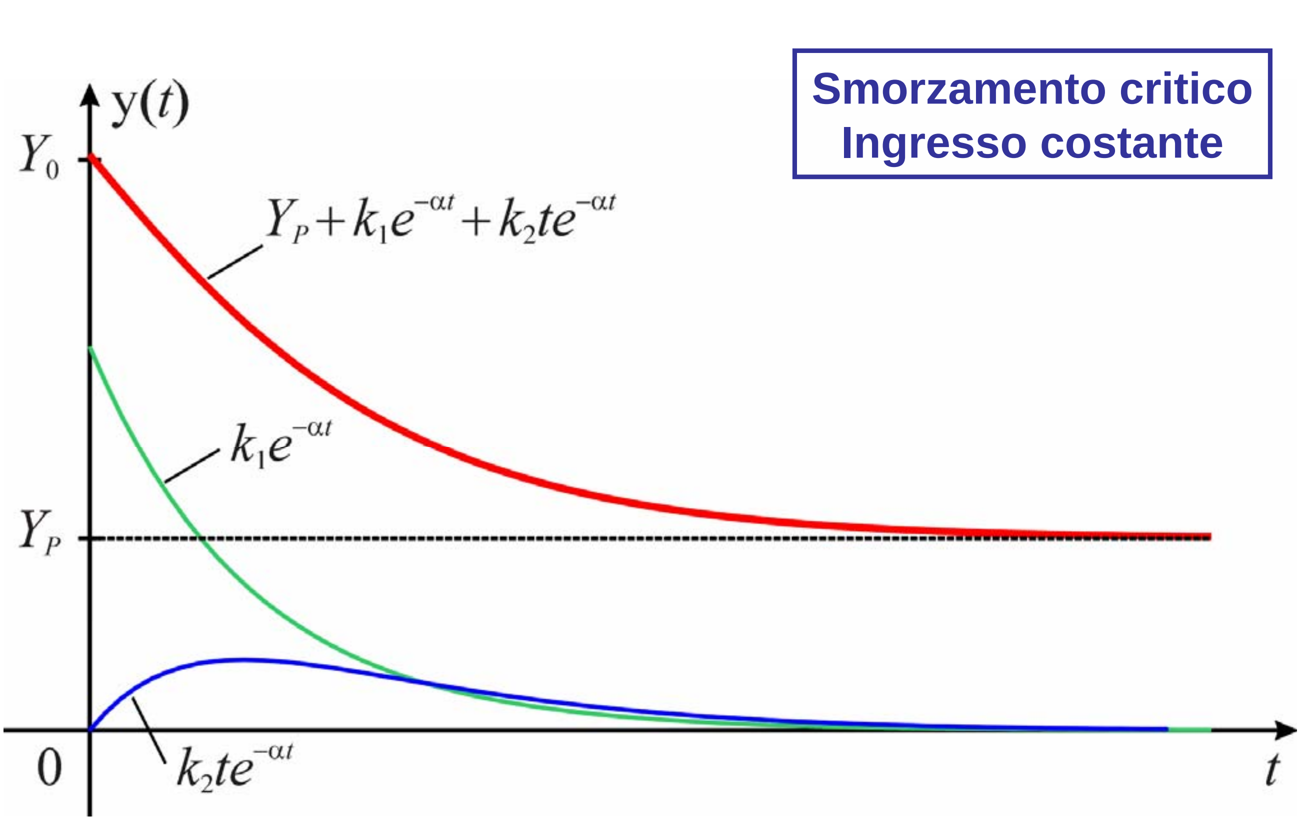
  $y_H(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$
- Espressione della risposta:

  $y(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t} + y_p(t)$
  - k_1 e k_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali

Risposta di un circuito del secondo ordine



Risposta di un circuito del secondo ordine



Caso sottosmorzato

$$\boxed{\alpha^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta < 0}$$

- L'equazione ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

- Affinché $y_H(t)$ sia reale occorre che sia

$$k_2 = k_1^*$$

- Si pone

$$k_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \quad (A, \varphi \in R, \quad A \geq 0) \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

Caso sottosmorzato

- Utilizzando la formula di Eulero si ottiene

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} =$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t} =$$

$$= Ae^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j(\omega_d t + \varphi)} + e^{-j(\omega_d t + \varphi)}}{2} \right] =$$

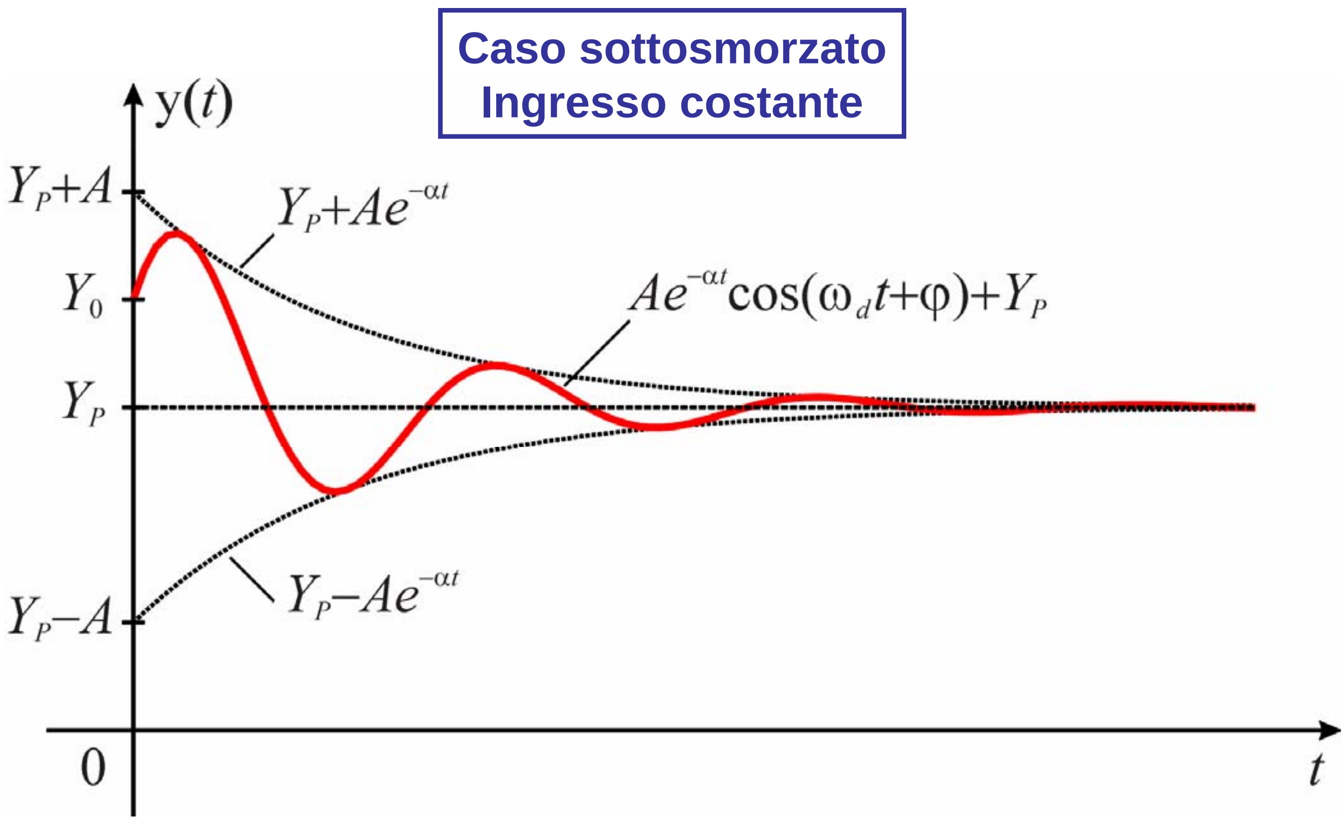
$$= Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

- Espressione della risposta:

$$\mathrm{y}(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) + \mathrm{y}_p(t)$$

  - Anche in questo caso si devono determinare due costanti reali (A e φ) imponendo le condizioni iniziali

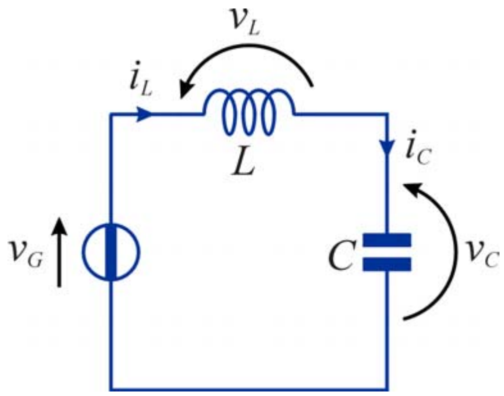
Risposta di un circuito del secondo ordine

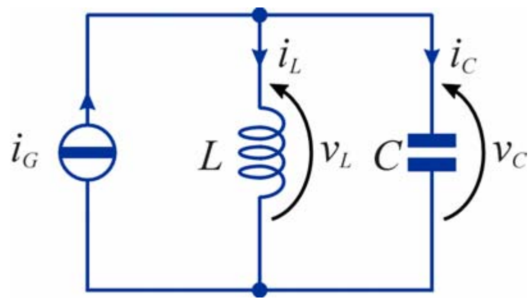


Caso senza perdite

$$\alpha^2 = 0, \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

- Questo caso corrisponde all'assenza di componenti in grado di dissipare energia





RLC serie $\rightarrow$ LC serie

$$R \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L} \rightarrow 0$$

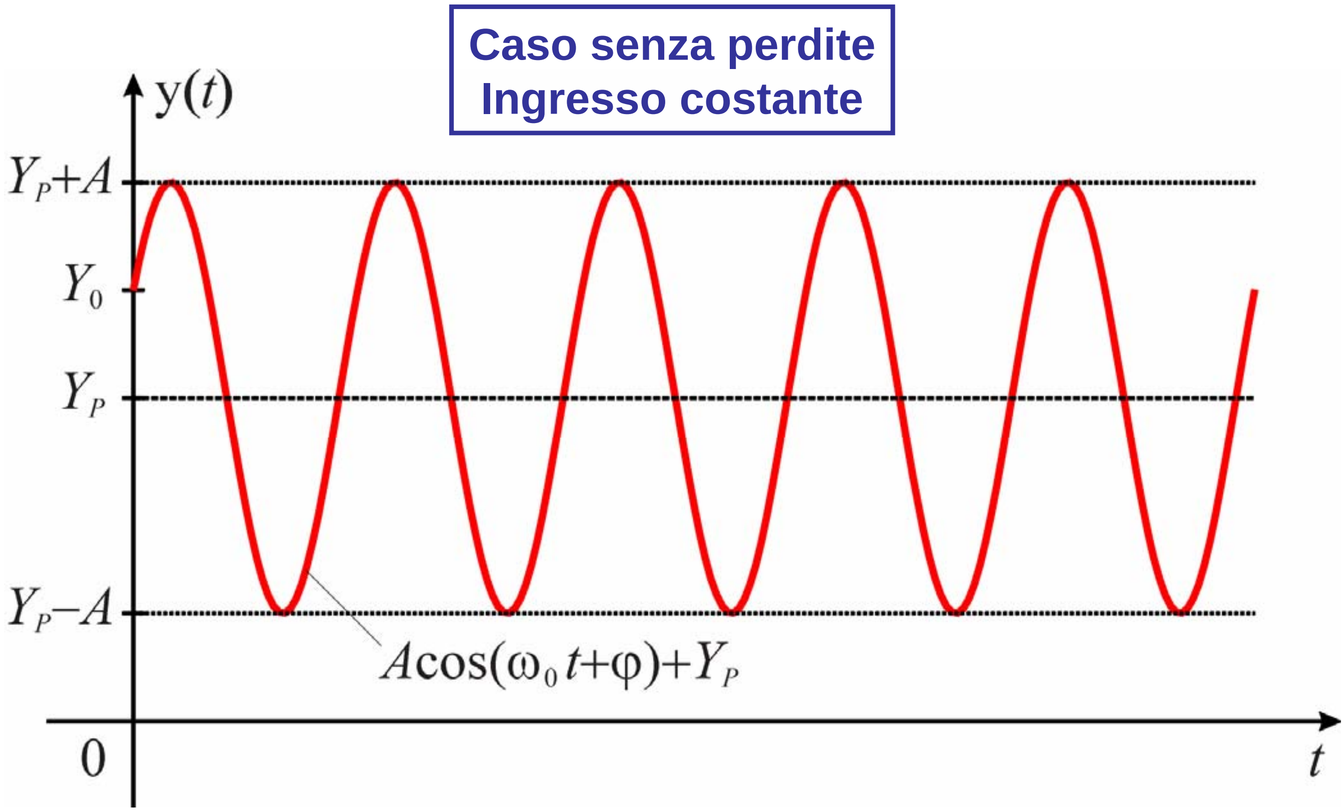
RLC parallelo $\rightarrow$ LC parallelo

$$R \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2RC} \rightarrow 0$$

Caso senza perdite

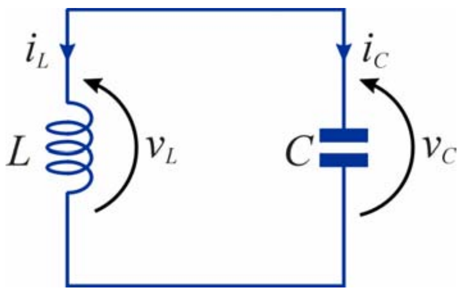
- In queste condizioni l'equazione differenziale è
  $$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = f(t)$$
- L'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie coniugate
  $$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm j\omega_0$$
- L'integrale generale dell'equazione omogenea è una funzione sinusoidale di pulsazione ω_0
  $$y_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
  - non si annulla per $t \rightarrow \infty$ ma rimane limitata
  - in questo caso il circuito è **semplicemente stabile**
- L'espressione della risposta completa è
  $$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + y_P(t)$$

Risposta di un circuito del secondo ordine



Oscillatore armonico

- Se l'ingresso è nullo, i circuiti LC serie e parallelo si riducono al circuito seguente



- Considerando (per esempio) l'equazione in v_C si ottiene

$$v_C(t) = v_L(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Quindi si ha anche

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C\frac{d\,v_C}{dt} = \omega_0 C V_M \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- La tensione e la corrente sono sinusoidali con pulsazione ω_0

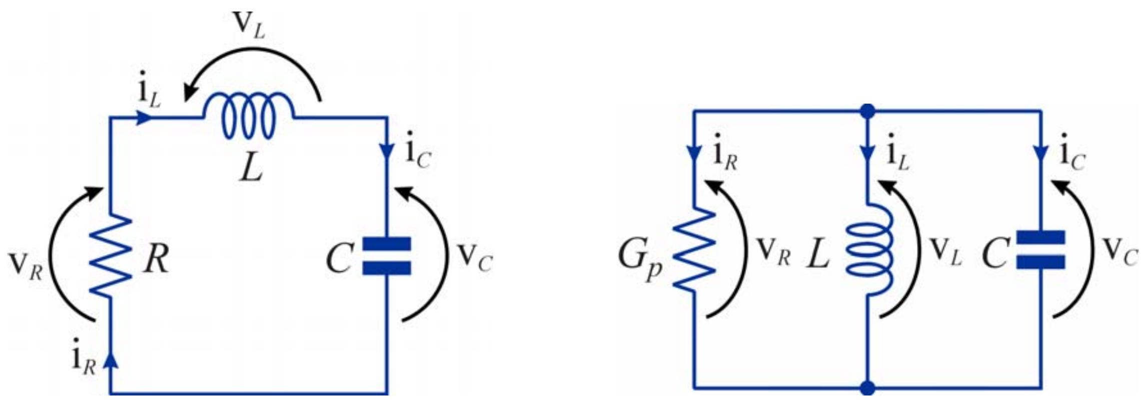
Oscillatore armonico

- Energia accumulata nel condensatore
  $$\mathrm{w}_C(t) = \frac{1}{2}C\,\mathrm{v}_C^2(t) = \frac{1}{2}CV_M^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$
- Energia accumulata nell'induttore
  $$\mathrm{w}_L(t) = \frac{1}{2}L\,\mathrm{i}_L^2(t) = \frac{1}{2}L\omega_0^2C^2V_M^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}CV_M^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)$$
- Energia totale
  $$\mathrm{w}_T = \mathrm{w}_C(t) + \mathrm{w}_L(t) = \frac{1}{2}CV_M^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2C^2V_M^2 = \frac{1}{2}LI_M^2$$
- L'energia totale è costante e coincide con i valori massimi assunti da $\mathrm{w}_C(t)$ e da $\mathrm{w}_L(t)$
- $\mathrm{w}_C(t)$ è massima quando $\mathrm{w}_L(t)$ si annulla e viceversa

➡ Si ha uno scambio continuo di energia, senza perdite, tra il condensatore e l'induttore

Oscillatore smorzato

- Si inserisce un resistore di resistenza R_s in serie a L e C oppure un resistore di conduttanza G_p in parallelo a L e C



- A partire dalla condizione $R_s = 0$ oppure $G_p = 0$ si aumenta il valore di R_s o di G_p

➡ Aumenta il valore di α che nei due casi è $\alpha = \dfrac{R_s}{2L}$ o $\alpha = \dfrac{G_p}{2C}$

Oscillatore smorzato

- Inizialmente il circuito è sottosmorzato
  - a causa della dissipazione nel resistore l'energia accumulata nel circuito tende a zero per $t \to \infty$
  - l'ampiezza delle oscillazioni decresce come $e^{-\alpha t}$
  - la pulsazione $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ diminuisce all'aumentare di R_s o G_p
- Aumentando α si raggiunge la condizione di smorzamento critico per

$$\alpha = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad R_s = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad G_p = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

  - in queste condizioni la pulsazione ω_d è uguale a zero
  - ➡ a partire da questo punto le risposte del circuito non hanno più andamento oscillante
- Aumentando ulteriormente α il circuito diviene sovrasmorzato
  - al crescere di α una delle soluzioni dell'equazione caratteristica tende a $-\infty$ mentre l'altra tende a zero
  - ➡ per $t \to \infty$ la risposta tende a zero sempre più lentamente

Luogo delle soluzioni dell'equazione caratteristica