

Elettromagnetismo stazionario

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 6-4-2014)

Campi statici e stazionari

- **Campo di corrente stazionario**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0\end{aligned}\quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

- **Campo elettrostatico**
Campo elettrico stazionario

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_c\end{aligned}\quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

- **Campo magnetico stazionario**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Campi statici e stazionari

- Nello studio dei campi statici e stazionari si incontrano di frequente situazioni in cui sono verificate le seguenti condizioni:
 - ♦ Il campo in una regione τ è descritto mediante due vettori \mathbf{V}_I e \mathbf{V}_S localmente proporzionali (la costante di proporzionalità in generale dipende dal punto)
$$\mathbf{V}_S = \kappa \mathbf{V}_I \quad \kappa = \kappa(P)$$
 - ♦ Il vettore \mathbf{V}_I è irrotazionale nella regione τ
$$\nabla \times \mathbf{V}_I = 0$$
 - ♦ Il vettore \mathbf{V}_S è solenoidale nella regione τ
$$\nabla \cdot \mathbf{V}_S = 0$$

3

Campi statici e stazionari

- Queste condizioni sono verificate
 - ♦ nelle regioni in cui non sono presenti campi elettrici impressi per il campo stazionario di corrente
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_I = \mathbf{E} \quad \mathbf{V}_S = \mathbf{J} \quad \kappa = \sigma$$
 - ♦ nelle regioni in cui non sono presenti cariche elettriche per il campo elettrostatico e il campo elettrico stazionario
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_I = \mathbf{E} \quad \mathbf{V}_S = \mathbf{D} \quad \kappa = \varepsilon$$
 - ♦ nelle regioni in cui è nulla la densità di corrente per il campo magnetico stazionario
$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_I = \mathbf{H} \quad \mathbf{V}_S = \mathbf{B} \quad \kappa = \mu$$

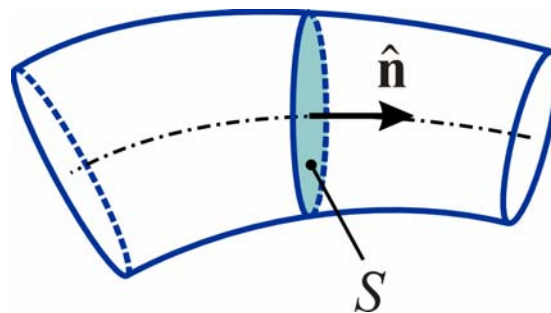
4

Proprietà dei vettori solenoidali

- Si considera un vettore \mathbf{V}_S solenoidale in una regione τ
- *Nella regione τ , all'interno di un tubo di flusso di \mathbf{V}_S , il flusso ha lo stesso valore attraverso tutte le sezioni trasversali*

$$\Phi = \int_S \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \text{costante}$$

- ➔ Per un vettore solenoidale si può parlare di flusso associato al tubo di flusso (**portata del tubo di flusso**)



5

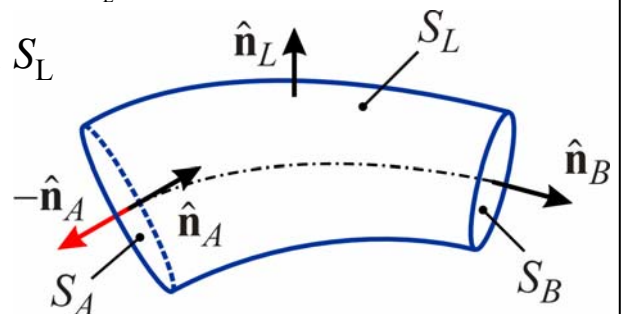
Costanza del flusso - dimostrazione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{V}_S delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B
- \mathbf{V}_S è solenoidale ➔ è nullo il suo flusso attraverso la superficie chiusa S_T formata da S_A , S_B e dalla superficie laterale S_L

$$\oint_{S_T} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} \mathbf{V}_S \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_A) dS + \int_{S_B} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS + \int_{S_L} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dS = 0$$

- Le linee di flusso di \mathbf{V}_S sono tangenti a S_L
 - ➔ Il flusso di \mathbf{V}_S attraverso S_L è nullo
- ➔ I flussi attraverso S_A e S_B sono uguali

$$\int_{S_A} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \int_{S_B} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS = \Phi$$



- ➔ Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A e S_B si può affermare che il flusso ha lo stesso valore Φ su tutte le superfici trasversali

6

Vettori ovunque solenoidali

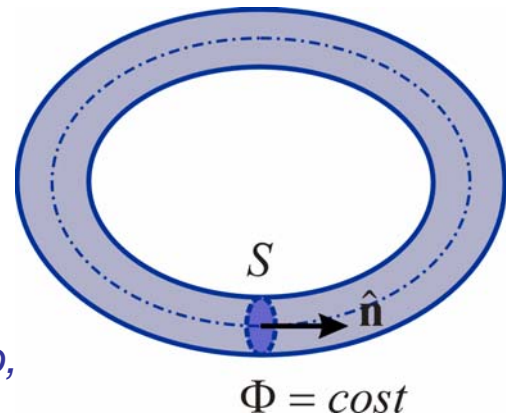
- All'interno di una regione τ in cui \mathbf{V}_S è solenoidale non possono esistere sezioni terminali del tubo di flusso

- ◆ infatti se S_T fosse una sezione terminale dovrebbe essere

$$\int_{S_T} \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

in contraddizione col fatto che il flusso deve essere uguale in tutte le sezioni trasversali

- ➔ Se \mathbf{V}_S è solenoidale in tutto lo spazio, i tubi di flusso di \mathbf{V}_S , devono essere chiusi (eventualmente all'infinito)



7

Potenziale

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{V}_S delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso e interamente contenuto nella regione in cui valgono le condizioni

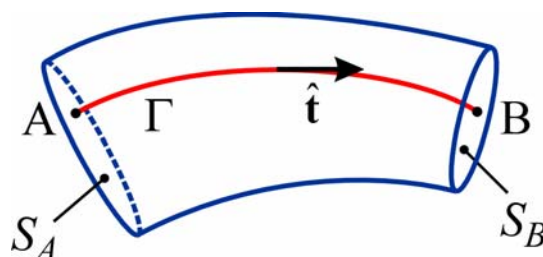
$$\nabla \times \mathbf{V}_I = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_S = 0 \quad \mathbf{V}_S = \kappa \mathbf{V}_I$$

- La regione in terna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa

- ➔ All'interno del tronco di tubo di flusso possibile esprimere \mathbf{V}_I come gradiente di un potenziale U

$$\mathbf{V}_I = -\nabla U$$



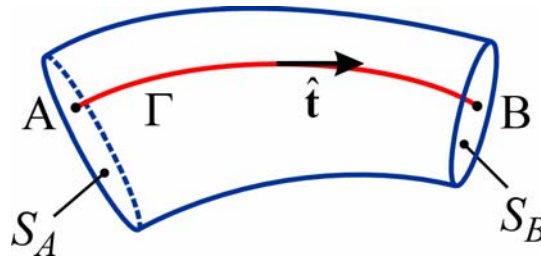
8

Potenziale

- Dato che \mathbf{V}_I e \mathbf{V}_S sono paralleli, S_A e S_B sono ortogonali alle linee di campo di \mathbf{V}_I
 - ➔ S_A e S_B sono superfici equipotenziali
- La differenza di potenziale tra le superfici S_A e S_B è

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- ◆ A e B sono due punti generici appartenenti rispettivamente a S_A e S_B
- ◆ L'integrale è valutato lungo una linea arbitraria Γ che collega A e B



9

Relazione tra potenziale e flusso

- A un tronco di tubo di flusso di \mathbf{V}_S delimitato da due superfici trasversali ortogonali possono essere associati in modo univoco
 - ◆ un flusso Φ attraverso la generica sezione trasversale
 - ◆ una differenza di potenziale U_{AB} tra le superfici terminali
- Nelle condizioni indicate valgono le seguenti proprietà:
 - ◆ *La differenza di potenziale U_{AB} il flusso Φ sono proporzionali tra loro*
 - ◆ *La costante di proporzionalità K_{AB} dipende unicamente dalle proprietà geometriche del tubo di flusso e dalle proprietà del mezzo in cui ha sede il campo*

$$U_{AB} = K_{AB} \Phi$$

$$K_{AB} = \frac{U_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_A^B \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

10

Relazione tra potenziale e flusso

- Come si vedrà in seguito, la relazione

$$U_{AB} = K_{AB} \Phi$$

corrisponde

- ♦ alla **legge di Ohm** (in forma integrale), nel caso del campo di corrente stazionario (\mathbf{J} , \mathbf{E})

$$v_{AB} = R_{AB} i$$

- ♦ alla **legge del condensatore**, nel caso del campo elettrico stazionario (\mathbf{D} , \mathbf{E})

$$v_{AB} = \frac{1}{C_{AB}} Q$$

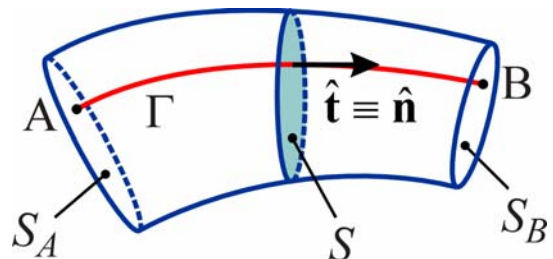
- ♦ alla **legge di Hopkinson**, nel caso del campo magnetico stazionario (\mathbf{B} , \mathbf{H})

$$\Psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi$$

11

Determinazione della costante K_{AB}

- Per calcolare K_{AB} è conveniente fare coincidere
 - ♦ Γ con una linea di campo
 - ♦ S con una superficie equipotenziale (sezione normale)
- In questo modo
 - ♦ $\hat{\mathbf{t}} \equiv \hat{\mathbf{n}}$
 - ♦ \mathbf{V}_I e \mathbf{V}_S sono paralleli a $\hat{\mathbf{t}}$
- Inoltre, dato che il flusso di \mathbf{V}_S è indipendente dalla sezione, si può valutare considerando, al variare di x lungo Γ , la superficie $S(x)$ ortogonale a Γ e passante per x



$$K_{AB} = \frac{\int_S^B \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S^A \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS} = \frac{\int_0^l V_I(x) dx}{\int_S V_S dS} = \int_0^l \frac{V_I(x)}{\int_{S(x)} V_S dS} dx$$

l = lunghezza di Γ
 x = ascissa curvilinea lungo Γ

12

Tubo di flusso filiforme

- Se l'area della sezione trasversale è molto piccola (→ tubo filiforme) si può assumere che V_S e κ siano uniformi sulla superficie S
 - sia V_S che κ dipendono solo da x
 - L'espressione della costante K_{AB} è

$$K_{AB} = \int_0^l \frac{V_I(x) dx}{\int_{S(x)} V_S(x) dS} = \int_0^l \frac{V_I(x) dx}{\kappa(x) V_I(x) \int_{S(x)} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\kappa(x) A(x)}$$

$A(x)$ = area della sezione $S(x)$

- Quindi K_{AB} non dipende da V_I e V_S , ma solo da κ e dalle proprietà geometriche del tubo di flusso
- Se, inoltre, κ e l'area della sezione hanno valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, si ottiene

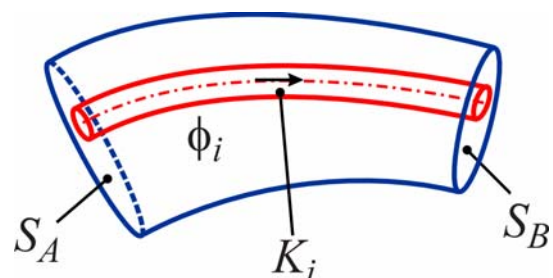
$$K_{AB} = \frac{l}{\kappa A}$$

13

Tubo di flusso generico

- Un tubo di flusso non filiforme può essere suddiviso in un insieme di tubi di flusso filiformi elementari, le cui sezioni terminali sono contenute nelle superfici S_A e S_B
- All' i -esimo tubo di flusso elementare è associato il flusso ϕ_i
- Per tutti i tubi di flusso la differenza di potenziale è pari a U_{AB}
- Per ciascun tubo elementare, applicando il procedimento precedente, si può definire una costante K_i , data da

$$K_i = \frac{U_{AB}}{\phi_i}$$



14

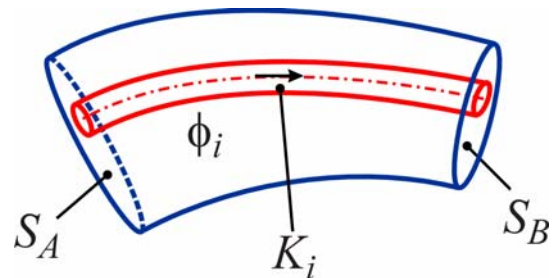
Tubo di flusso generico

- Il flusso totale è dato dalla somma dei flussi dei tubi elementari

$$\Phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{U_{AB}}{K_i}$$

- Quindi K_{AB} può essere ottenuta da

$$K_{AB} = \frac{U_{AB}}{\Phi} = \frac{U_{AB}}{\sum_i \frac{U_{AB}}{K_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{K_i}}$$



- Dato che le K_i dipendono solo dalla configurazione geometrica e dalla costante κ , lo stesso vale anche per K_{AB}

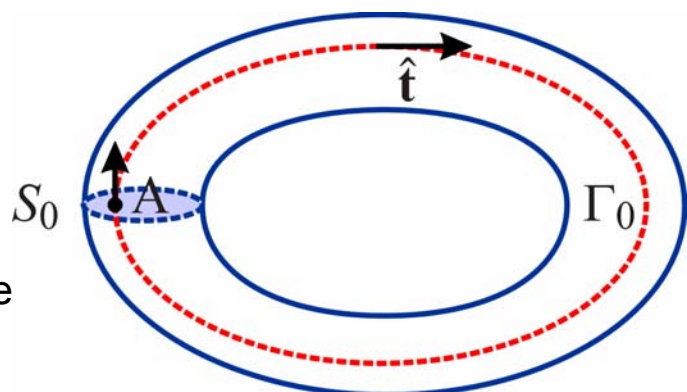
15

Tubi di flusso chiusi

- Si considera il caso in cui la regione τ all'interno della quale valgono le condizioni $\nabla \times \mathbf{V}_I = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{V}_S = 0$ non è semplicemente connessa
- Si considera un tubo di flusso di \mathbf{V}_S chiuso e interamente contenuto in τ
- In questo caso è possibile che la circuitazione di \mathbf{V}_I su una linea chiusa Γ_0 contenuta nel tubo di flusso non sia uguale a zero

$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = C \neq 0$$

- Si taglia il tubo di flusso con una superficie S_0 ortogonale alle linee di campo
- ➔ La regione interna alla superficie formata da S_0 e dalla superficie laterale del tubo di flusso è semplicemente connessa



16

Tubi di flusso chiusi

- All'interno del tubo di flusso si può definire un potenziale U
- In un punto A della superficie S_0 il potenziale in genere è discontinuo
- Se si indica con $U(A^+)$ il potenziale sulla faccia superiore di S_0 e con $U(A^-)$ il potenziale sulla faccia inferiore si ha

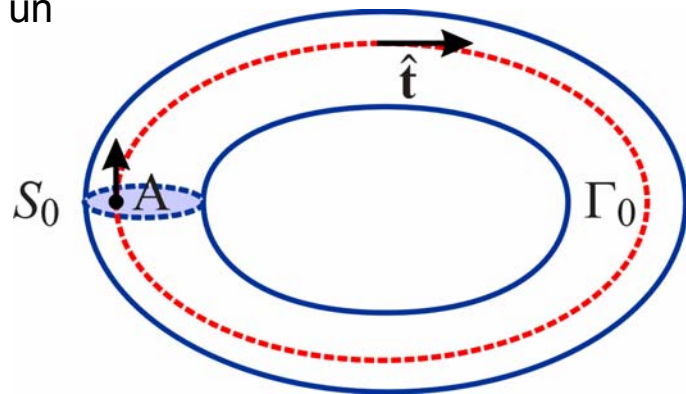
$$U(A^+) - U(A^-) = \int_{A^+}^{A^-} \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\Gamma_0} \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = C$$

- Procedendo come nel caso di un tubo di flusso aperto si ottiene

$$C = K\Phi$$

dove

$$K = \frac{\oint_{\Gamma_0} \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{V}_S \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$



17

Tubi di flusso chiusi

- Se il tubo di flusso fosse contenuto in una regione τ semplicemente connessa in cui \mathbf{V}_I è irrotazionale, la circuitazione di \mathbf{V}_I su ogni linea chiusa Γ_0 sarebbe nulla

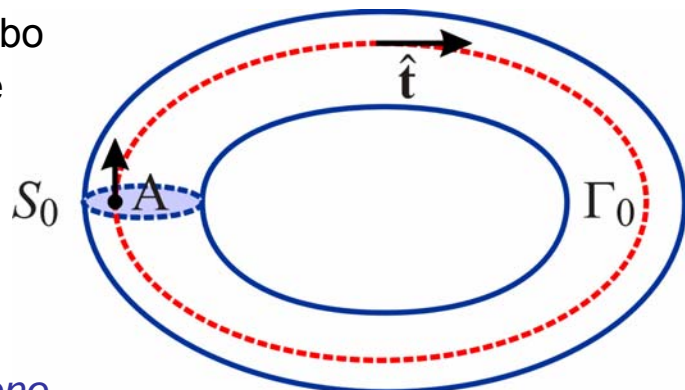
$$\oint_{\Gamma_0} \mathbf{V}_I \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- In queste condizioni, per ogni tubo di flusso chiuso di \mathbf{V}_S si avrebbe

$$0 = K\Phi \Rightarrow \Phi = 0$$

- ➔ quindi anche \mathbf{V}_S sarebbe identicamente nullo

- ➔ *Tubi di flusso chiusi di \mathbf{V}_S possono esistere solo se \mathbf{V}_I non è ovunque irrotazionale*

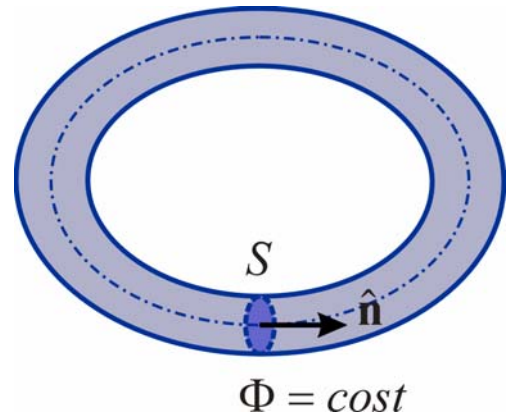


18

Circuito elettrico elementare

- Il vettore \mathbf{J} è ovunque solenoidale
- ➔ I tubi di flusso di \mathbf{J} sono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di \mathbf{J} costituisce un **circuito elettrico elementare**
- ➔ Il flusso di \mathbf{J} attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore
- Questo valore rappresenta la **corrente** associata al tubo di flusso

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



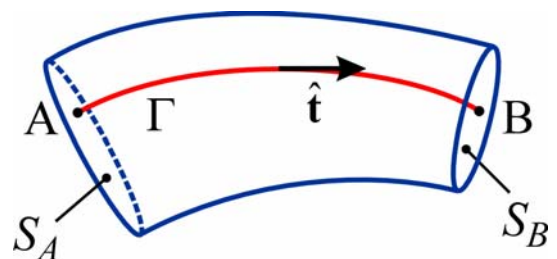
19

Tensione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{J} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tronco di tubo di flusso il mezzo sia lineare isotropo e che non agiscano campi impressi
- \mathbf{E} è ovunque irrotazionale, quindi si può porre $\mathbf{E} = -\nabla V$
- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di \mathbf{E}
 - ➔ sono due superfici equipotenziali
- La tensione (differenza di potenziale) tra le due superfici è

$$v_{AB} = V(A) - V(B) = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti rispettivamente di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ che collega A e B



20

Resistenza

- Si definisce **resistenza** (unità di misura ohm, Ω) del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione v_{AB} e la corrente i

$$R_{AB} = \frac{v_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

- Il reciproco della resistenza è detto **conduttanza** (unità di misura siemens, S)

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{i}{v_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- *La resistenza e la conduttanza non dipendono da \mathbf{E} e da \mathbf{J} , ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla conducibilità del materiale*

21

Legge di Ohm in forma integrale

- La differenza di potenziale (tensione) tra le sezioni terminali del tubo di flusso e la corrente attraverso il tubo di flusso sono legate dalla relazione

$$v_{AB} = R_{AB} i \quad \text{Legge di Ohm in forma integrale}$$

e quindi

$$i = G_{AB} v_{AB} \quad (G_{AB} = 1/R_{AB})$$

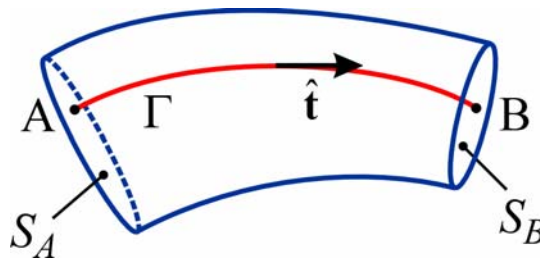
22

Tubo di flusso sede di f.e.m.

- Si considera il caso in cui nel tubo di flusso agisce anche un campo impresso \mathbf{E}_i
- Si assume che all'interno del tubo di flusso, valga la condizione
$$\nabla \times \mathbf{E}_i = 0$$
(normalmente verificata nei casi di interesse pratico)
- Si scelgono arbitrariamente due punti A e B sulle superfici terminali del tubo di flusso e una linea Γ che collega i due punti
- Si definisce **forza elettromotrice (f.e.m.)** agente nel tubo di flusso tra le superfici S_A e S_B la quantità

$$e = \int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

(unità di misura volt)



23

Legge di Ohm per un tubo di flusso sede di f.e.m.

- In queste condizioni la resistenza del tubo di flusso è data dal rapporto

$$R_{AB} = \frac{v_{AB} + e}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS}$$

che risulta indipendente da \mathbf{E} , \mathbf{E}_i e \mathbf{J}

- ➔ La legge di Ohm assume la forma

$$v_{AB} = R_{AB} i - e$$

24

Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- Si considera un tubo di flusso chiuso (circuito elettrico elementare)
 - ➔ Le sezioni S_A e S_B coincidono
 - ➔ v_{AB} ed e coincidono, rispettivamente, con l'integrale del campo elettrico e del campo impresso lungo una linea chiusa

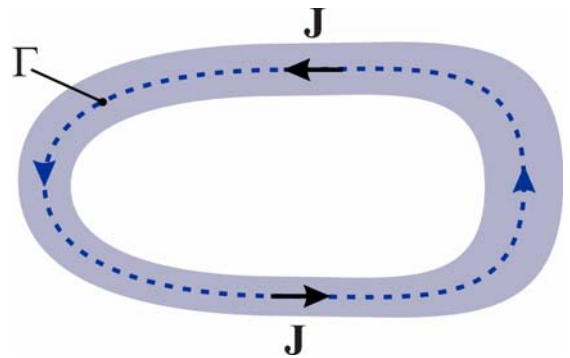
- \mathbf{E} è ovunque irrotazionale, quindi è conservativo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- La condizione $\nabla \times \mathbf{E}_i = 0$ all'interno del tubo di flusso non implica che il campo impresso sia conservativo, dato che la regione interna al tubo di flusso non è semplicemente connessa

- ➔ In generale si ha

$$e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \neq 0$$



25

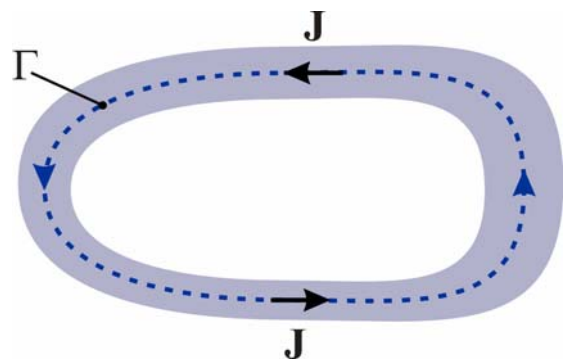
Legge di Ohm per un circuito elettrico elementare

- L'espressione della resistenza del tubo di flusso chiuso è quindi

$$R = \frac{\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS} = \frac{e}{i}$$

- ➔ Per un tubo di flusso chiuso la legge di Ohm diviene

$$Ri = e$$



26

Generatori

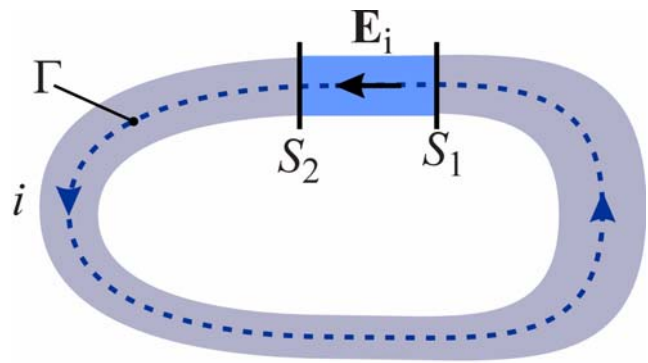
- Normalmente Il campo impresso è diverso da zero solo in alcune regioni del circuito
- Nell'esempio $\mathbf{E}_i \neq 0$ solo nel tratto compreso fra le sezioni S_1 e S_2 quindi

$$e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove Γ_{12} è il tratto di Γ compreso tra le due sezioni

- Le regioni in cui agiscono i campi impressi corrispondono a dispositivi nei quali avviene conversione in energia elettrica di energia di altro tipo (es. meccanica, termica, chimica)

➔ **generatori elettrici**



27

Necessità dei campi impressi

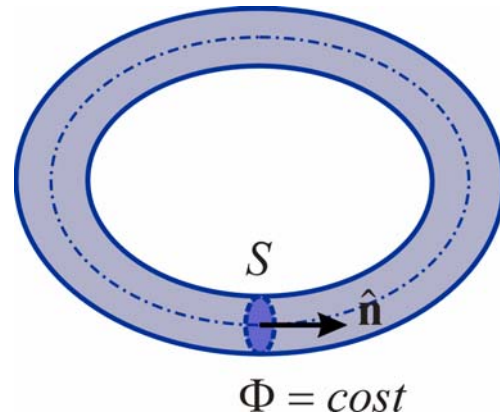
- In assenza di campi impressi la legge di Ohm per un tubo di flusso chiuso fornisce
 $Ri = 0$
- In presenza del solo campo elettrico \mathbf{E} conservativo non si può avere corrente nel circuito
 - ◆ se le cariche percorrono traiettorie chiuse il lavoro del campo elettrico è nullo
 - ◆ nel circuito non può circolare corrente, dato che questo comporterebbe una dissipazione di energia per effetto Joule
- ➔ Affinché si possa avere una corrente nel circuito è indispensabile la presenza di un campo impresso non conservativo

28

Circuito magnetico elementare

- Il vettore \mathbf{B} è ovunque solenoidale
- ➔ I tubi di flusso di \mathbf{B} non possono avere sezioni terminali, quindi devono chiusi (eventualmente all'infinito)
- Un tubo di flusso chiuso di \mathbf{B} costituisce un **circuito magnetico elementare**
- ➔ Il flusso di \mathbf{B} attraverso ogni sezione trasversale del tubo di flusso assume lo stesso valore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



29

Potenziale scalare magnetico

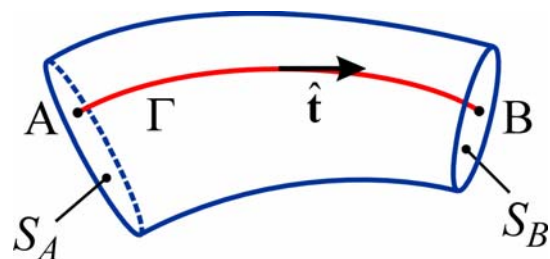
- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tubo di flusso il mezzo sia lineare isotropo
- Se all'interno del tronco di tubo di flusso la densità di corrente \mathbf{J} è nulla si ha

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

- Dato che la regione interna al tronco di tubo di flusso è semplicemente connessa, in tale regione è possibile definire un **potenziale scalare magnetico** ψ [unità di misura A]

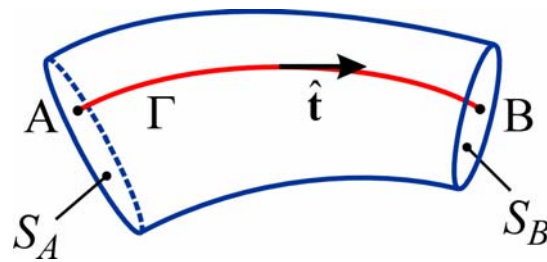
$$\mathbf{H} = -\nabla\psi$$

- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di \mathbf{H}
 - ➔ sono due superfici equipotenziali



30

Tensione magnetica



- La **tensione magnetica** [A] tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso è

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ , interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B

31

Riluttanza e permeanza

- Si definisce **riluttanza** [unità di misura henry⁻¹ = H⁻¹] del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione magnetica ψ_{AB} e il flusso di induzione magnetica Φ

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto **permeanza** [unità di misura henry, H]

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{\mathcal{R}_{AB}} = \frac{\Phi}{\psi_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La riluttanza e la permeanza non dipendono da \mathbf{B} e da \mathbf{H} , ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del materiale*

32

Legge di Hopkinson

- La tensione magnetica tra le sezioni terminali di un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} e il flusso magnetico attraverso il tubo sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\Psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi \quad \text{Legge di Hopkinson}$$

e quindi

$$\Phi = \mathcal{P}_{AB} \Psi_{AB} \quad (\mathcal{P}_{AB} = 1/\mathcal{R}_{AB})$$

33

Tubi di flusso chiusi

- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata, altrimenti \mathbf{H} e \mathbf{B} risulterebbero nulli
- In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = i_c$$

- Quindi la riluttanza del tubo di flusso chiuso può essere espressa come

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} H dl}{\int_S B dS} = \frac{i_c}{\Phi}$$

34

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico elementare

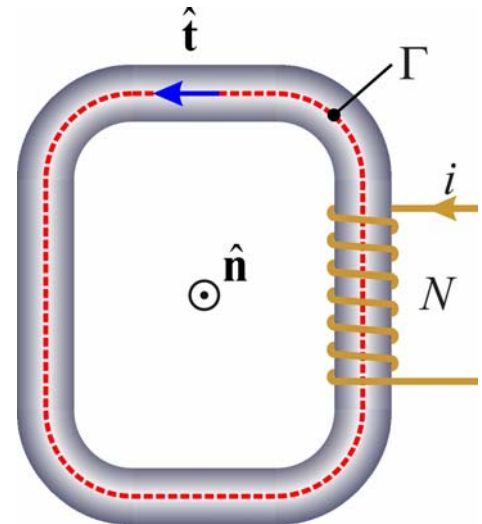
- ➔ Per un tubo di flusso chiuso la legge di Hopkinson assume la forma

$$\mathcal{R}\Phi = i_c$$

- In particolare, se il tubo di flusso è concatenato con un avvolgimento formato da N spire e percorso da una corrente i , si ha

$$\mathcal{R}\Phi = Ni$$

- La corrente concatenata i_c è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) (ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico)



35

Circuiti magnetici

- Per il campo magnetico stazionario è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff per i circuiti elettrici
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un circuito elettrico "equivalente"
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di \mathbf{B} è noto a priori
 - ◆ sistemi dotati di particolari simmetrie
 - ◆ circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti

36

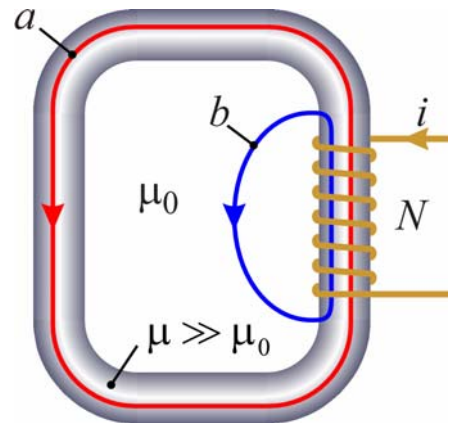
Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti (Tutti i mezzi, vuoto compreso, sono magneticamente permeabili)
- Mentre le conducibilità dei buoni conduttori e quelle degli isolanti possono differire di 18-24 ordini di grandezza, le permeabilità magnetiche possono differire, al più, di 5-6 ordini di grandezza

Esempio:

Circuito magnetico costituito da un materiale ad elevata permeabilità ($\mu \gg \mu_0$) circondato da un mezzo con permeabilità relativamente bassa ($\mu \cong \mu_0$)

- Sono possibili due tipi di linee di flusso
 - ♦ *a*) linee che si sviluppano interamente nel mezzo ad elevata permeabilità
 - ♦ *b*) linee che in parte si sviluppano nel mezzo a bassa permeabilità



37

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

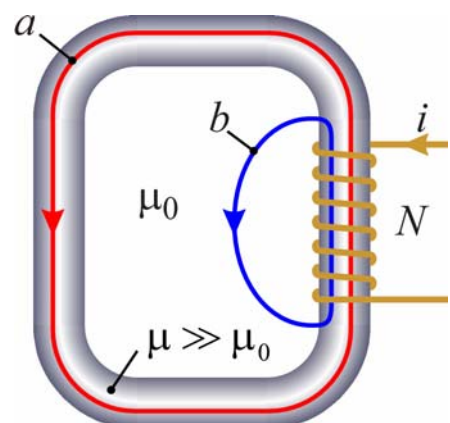
- Si considerano due tubi di flusso filiformi aventi assi coincidenti con le linee *a* e *b*
- Dalla legge di Hopkinson si ottiene

$$\Phi_a = \frac{Ni}{\mathcal{R}_a} \quad \Phi_b = \frac{Ni}{\mathcal{R}_b}$$

- Dato che il tubo di flusso *b* comprende un tratto a bassa permeabilità risulta

$$\mathcal{R}_b \gg \mathcal{R}_a \quad \Rightarrow \quad \Phi_b \ll \Phi_a$$

- ➔ E' possibile trascurare il flusso dovuto a linee del tipo *b* e considerare l'anello di materiale ad elevata permeabilità come un tubo di flusso di **B**

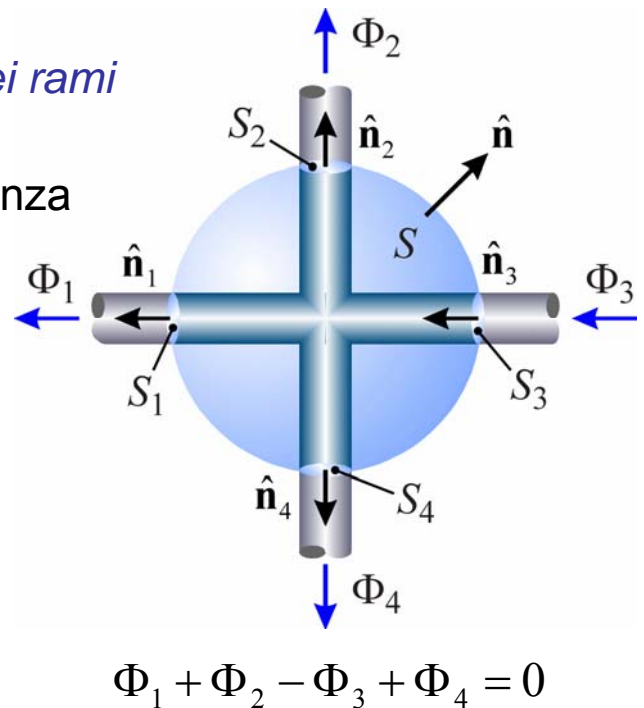


38

Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla
- ➔ In particolare si ha che:
La somma algebrica dei flussi dei rami afferenti ad un nodo è nulla
- Questa legge è diretta conseguenza del fatto che \mathbf{B} è solenoidale

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \sum_k \pm \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS = \\ &= \sum_k \pm \Phi_k = 0 \end{aligned}$$



39

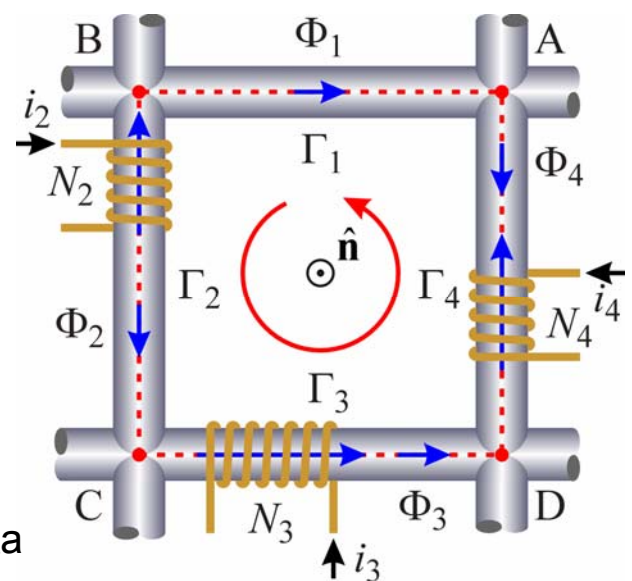
Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

- La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa
- Questa legge si ottiene direttamente dalla legge di Ampere

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl &= \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \\ &= \sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = i_C \end{aligned}$$

- Se la forza magnetomotrice è prodotta da un insieme di avvolgimenti concatenati con la maglia

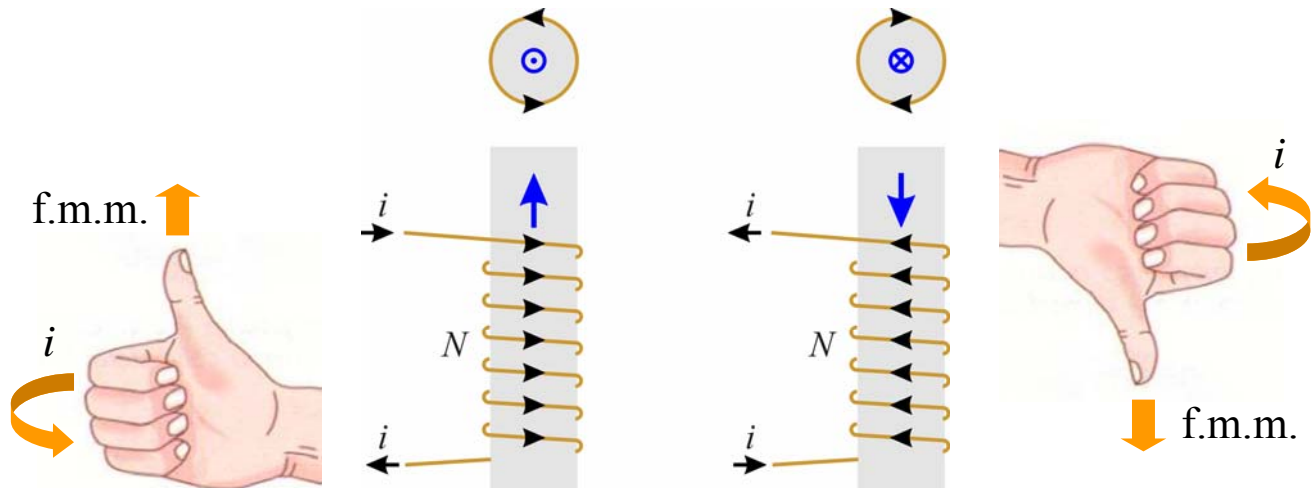
$$\sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$\begin{aligned} -\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4 &= \\ &= -N_2 i_2 + N_3 i_3 + N_4 i_4 \end{aligned}$$

40

Versi di riferimento delle f.m.m.



- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento orientati relativamente ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra
- A secondo membro dell'equazione di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, segno – se è discorde

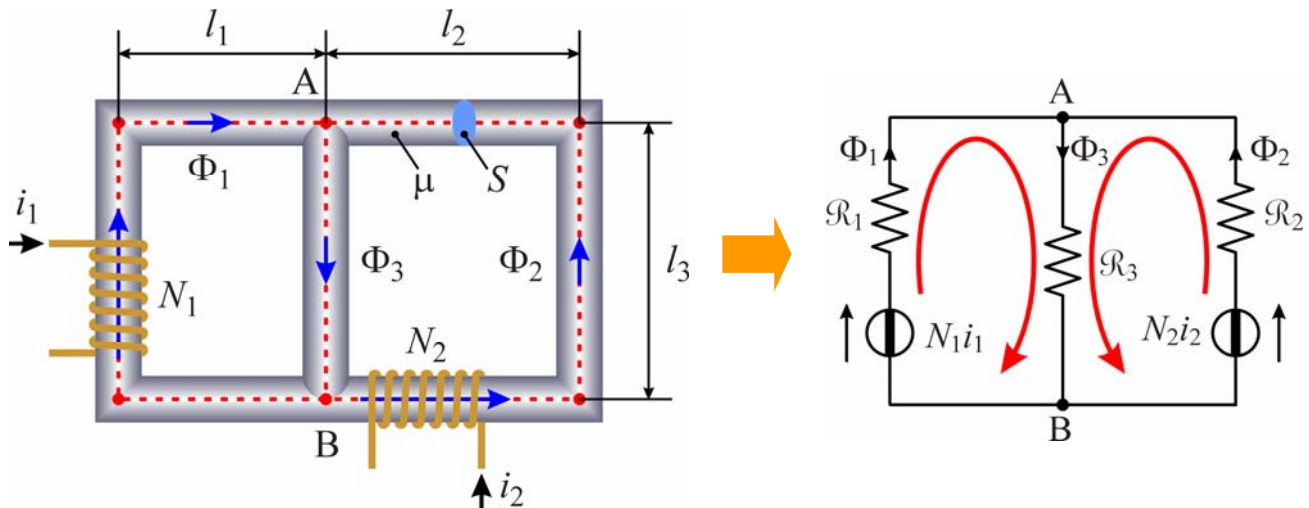
41

Analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
R	\mathcal{R}
i	Φ
v	Ψ
(f.e.m.) e	(f.m.m.) Ni
$v_k = R_k i_k$	$\Psi_k = \mathcal{R}_k \Phi_k$
$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_k \pm \Phi_k = 0$
$\sum_k \pm R i_k = \sum_k \pm e_k$	$\sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$

42

Esempio



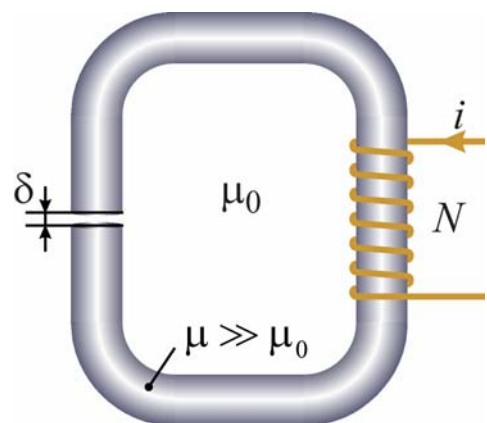
$$\mathcal{R}_1 = \frac{2l_1 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2l_2 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_1 i_1 \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$

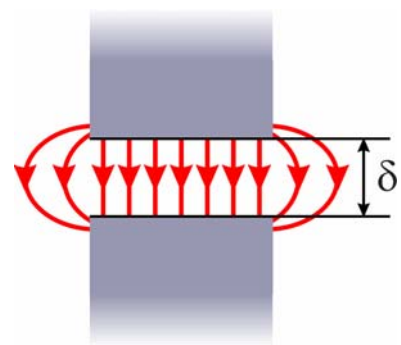
43

Circuiti magnetici con traferri

- In alcuni casi, in un circuito magnetico si possono avere delle interruzioni del materiale ad elevata permeabilità (**traferri**)



- La presenza di traferri di piccolo spessore non altera in modo significativo l'andamento delle linee di flusso di \mathbf{B} (si hanno degli *effetti di bordo*, spesso trascurabili)



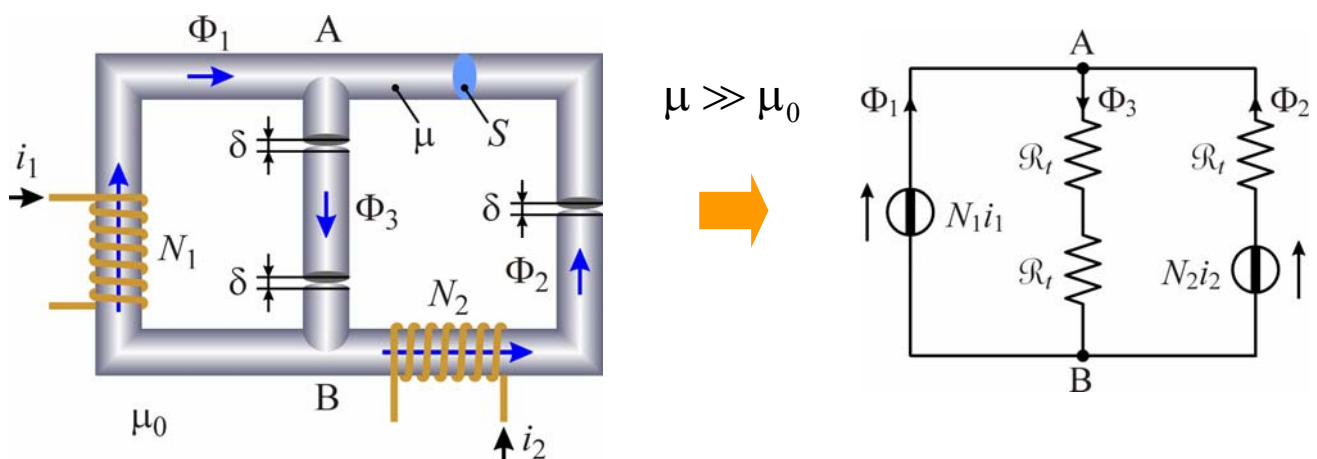
44

Circuiti magnetici con traferri

- Qualora sia necessario tenere conto degli effetti di bordo, si può valutare la riluttanza dei traferri assumendo un'area efficace $S' > S$ (S = sezione del nucleo in corrispondenza del traferro)
 - ◆ Un metodo empirico per definire l'area efficace consiste nell'aggiungere un bordo di larghezza pari allo spessore del traferro
- I traferri possono alterare notevolmente l'entità dei flussi magnetici, dato che le loro riluttanze possono essere molto elevate anche per valori modesti dello spessore δ
 - ➔ Spesso le riluttanze dei tratti di materiale ad elevata permeabilità risultano trascurabili rispetto alle riluttanze dei traferri
 - ➔ Nel circuito elettrico "equivalente" i tratti ad elevata permeabilità corrispondono a conduttori ideali e i traferri a corrispondono a resistori

45

Esempio



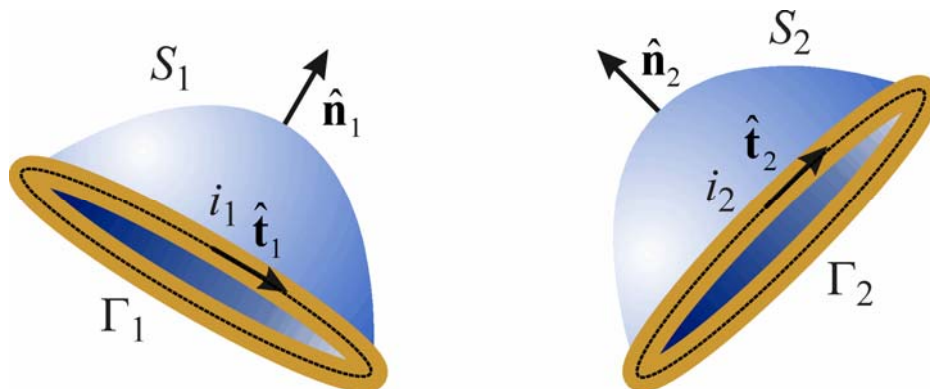
Traferri di uguale spessore δ

$$\text{Riluttanza di un traferro: } \mathcal{R}_t = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

46

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Si considerano due circuiti elettrici Γ_1 e Γ_2 percorsi dalle correnti i_1 e i_2 e immersi in un mezzo lineare isotropo



- ➔ In questa ipotesi le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle correnti sono lineari
- ➔ I flussi di induzione magnetica concatenati con i due circuiti sono funzioni lineari delle correnti i_1 e i_2

47

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

- I coefficienti L_1 e L_2 sono detti **coefficienti di autoinduzione** o **(auto)induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti **coefficienti di mutua induzione** o **mutue induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- Si può dimostrare che risulta sempre verificata l'uguaglianza $M_{12} = M_{21} = M$ quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti

48

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente i_k , quando la corrente nell'altro circuito è nulla

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_1} \right|_{i_2=0} \qquad L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

- Il coefficiente di mutua induzione rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente nell'altro circuito valutato quando la corrente i_k è nulla

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

49

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le definizioni di coefficienti di auto e mutua induzione possono essere generalizzate al caso di N circuiti
- In questo caso risulta

$$\Phi_{c1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N$$

$$\Phi_{c2} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \dots + M_{2N} i_N$$

⋮

$$\Phi_{cN} = M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \dots + L_N i_N$$

dove

$$L_k = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_k} \right|_{i_h=0 \forall h \neq k}$$

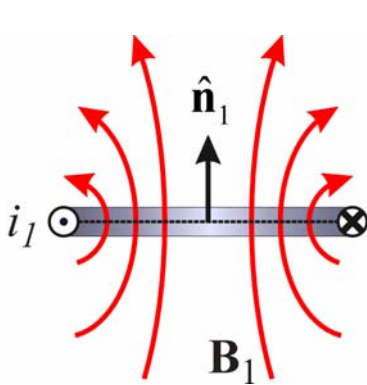
$$M_{kj} = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_j} \right|_{i_h=0 \forall h \neq j}$$

- Inoltre si ha

$$M_{hk} = M_{kh}$$

50

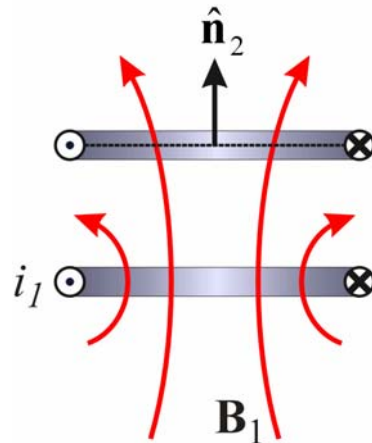
Segni dei coefficienti di auto e mutua induzione



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0$$

$$\Rightarrow L_1 > 0$$

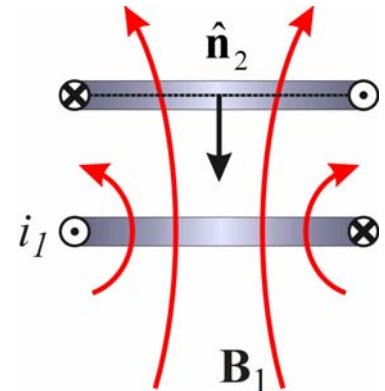
Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} > 0$$

$$\Rightarrow M > 0$$

Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} < 0$$

$$\Rightarrow M < 0$$

51

Esempio 1

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

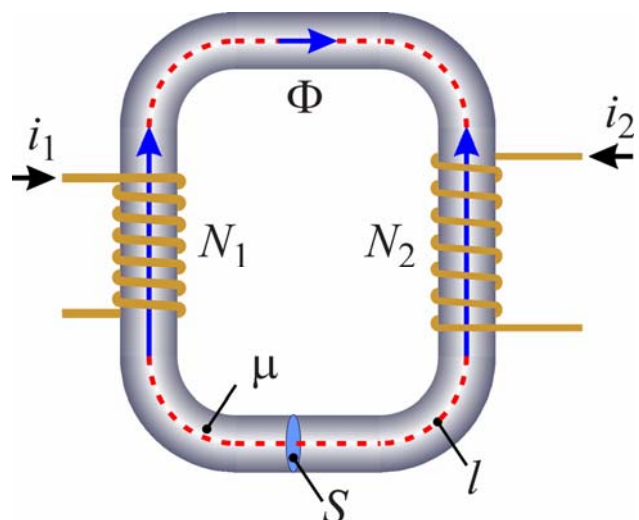
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



52

Esempio 2

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

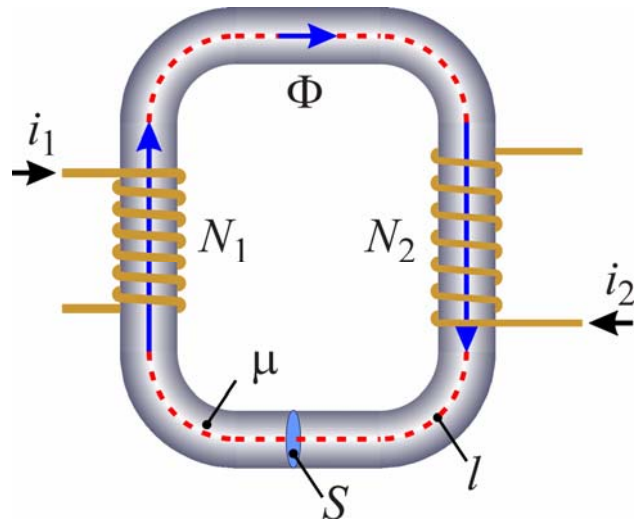
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- ➔ Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



53

Nota

- Per un avvolgimento formato da N spire disposto su un ramo di un circuito magnetico il flusso concatenato Φ_c si ottiene moltiplicando il flusso Φ del ramo per il numero di spire

$$\Phi_c = \pm N \Phi$$

- Al flusso concatenato si attribuisce segno + quando il verso della corrente nell'avvolgimento e il verso del flusso sono orientati secondo la regola della mano destra
- Si attribuisce segno - in caso contrario

54

Conduttori in regime elettrostatico

- In condizioni statiche $\mathbf{J} = 0$, quindi deve risultare $\sigma \mathbf{E} = 0$
- ➔ Di conseguenza si ha
 - $\sigma \neq 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$
 - $\mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \sigma = 0$
- ➔ Il campo elettrico può essere diverso da 0 solo in un mezzo isolante ($\sigma = 0$)
- ➔ All'interno di un conduttore ($\sigma \neq 0$)
 - ◆ il campo elettrico è nullo
 - ◆ il potenziale è costante
- ➔ La superficie esterna di un conduttore è una superficie equipotenziale
 - ◆ la componente tangente del campo elettrico è nulla
 - ◆ il campo elettrico all'esterno del conduttore è normale alla superficie

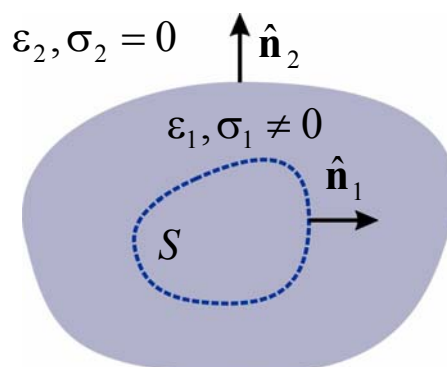
55

Conduttori in regime elettrostatico

- Per una generica superficie chiusa interamente contenuta all'interno del conduttore, dalla legge di Gauss si ottiene

$$Q = \varepsilon_1 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = 0$$

- ➔ La densità di carica all'interno del conduttore è nulla



56

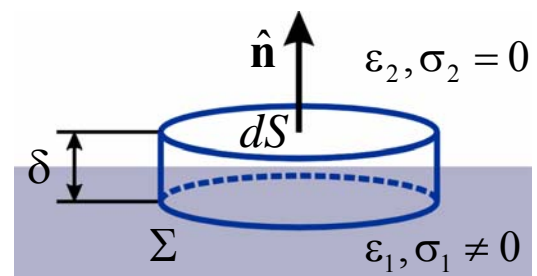
Conduttori in regime elettrostatico

- Si considera una superficie cilindrica infinitesima con asse ortogonale alla superficie del conduttore e con una base all'interno del conduttore e una all'esterno
- Si assume che la superficie laterale sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'area di base dS
- In presenza di campo elettrico esterno il flusso di \mathbf{E} attraverso la superficie è dato dal solo contributo della base esterna

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = EdS$$

- Per la legge di Gauss, sulla superficie del conduttore deve essere presente una distribuzione di carica con densità superficiale σ_c tale che

$$Q = \sigma_c dS = \varepsilon_2 EdS \Rightarrow \sigma_c = \varepsilon_2 E = D$$



57

Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

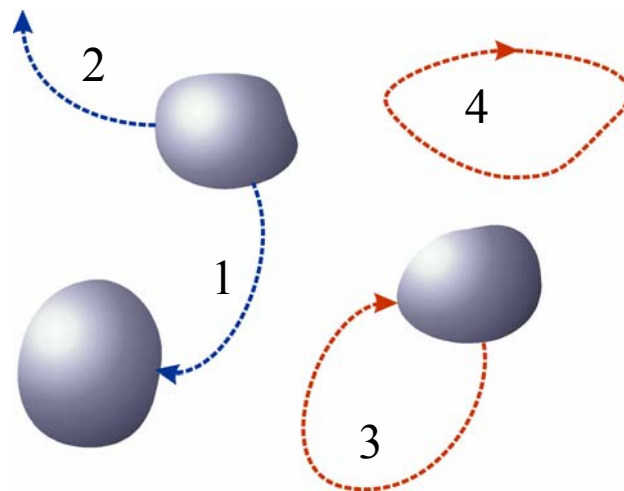
- Si considera un sistema costituito da conduttori carichi separati da un mezzo isolante (dielettrico)
- Si assume $\rho_{\text{lib}} = 0$ all'esterno dei conduttori
- ➔ Nella regione esterna ai conduttori, per un generico tubo di flusso di \mathbf{D} il flusso è indipendente dalla sezione
- ➔ Per un tronco di tubo di flusso delimitato da due superfici S_A e S_B ortogonali alle linee di campo, la differenza di potenziale tra le superfici terminali e il flusso di \mathbf{D} sono legati da una relazione del tipo

$$V_{AB} = K_{AB} \Phi$$

58

Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Si possono avere solo tubi di flusso di \mathbf{D} che vanno
 - ♦ da un conduttore a un altro (1)
 - ♦ da un conduttore all'infinito (2)
- Non è possibile che un tubo di flusso
 - ♦ abbia entrambe le sezioni terminali sullo stesso conduttore (3)
 - ♦ si richiuda su se stesso (4)



59

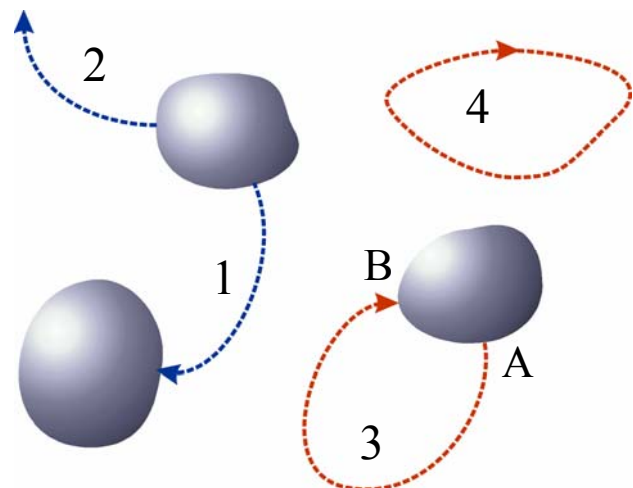
Campo elettrostatico all'esterno dei conduttori

- Dato che i conduttori sono equipotenziali, per un tubo di flusso del tipo (3) la tensione risulterebbe nulla
 - ♦ Quindi si annullerebbe il flusso di \mathbf{D} e di conseguenza anche \mathbf{D} dovrebbe essere nullo

$$K_{AB}\Phi = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0$$

- In modo analogo, dato che \mathbf{E} è conservativo, anche per un tubo di flusso di tipo (4) si otterrebbe

$$K_{AB}\Phi = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0$$

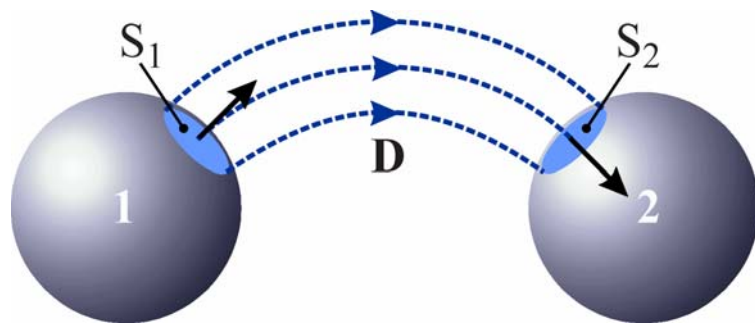


60

Condensatore elementare

- Si considerano due conduttori separati da un dielettrico lineare nel quale la densità di carica è nulla
- Si considera inoltre un tubo di flusso di \mathbf{D} che ha origine sul conduttore 1 e termina sul conduttore 2
- Sulle superfici terminali S_1 e S_2 \mathbf{D} è discontinuo, quindi devono essere presenti due distribuzioni superficiali di carica
- ➔ Si può dimostrare che le cariche sulle superfici S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_Q = - \underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$



61

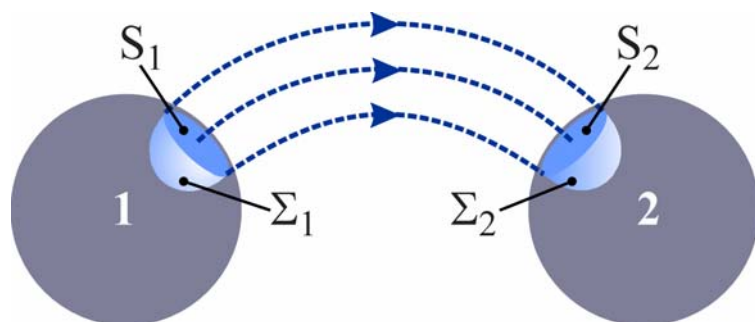
Condensatore elementare

- Si forma una superficie chiusa unendo alla superficie laterale del tubo di flusso e due superfici Σ_1 e Σ_2 interne ai conduttori
- Il flusso di \mathbf{D} attraverso questa superficie è nullo (\mathbf{D} è nullo all'interno dei conduttori ed è tangente alla superficie laterale)

➔ Quindi risulta

$$\int_{S_1} \sigma_c dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = - \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = Q$$

- ➔ Il sistema formato dalle superfici S_1 e S_2 e dal tubo di flusso che le collega costituisce un **condensatore elementare**



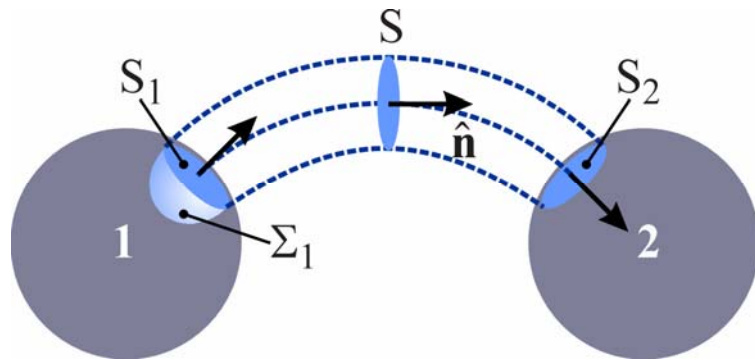
62

Flusso di \mathbf{D} e carica

- All'esterno dei conduttori il flusso di \mathbf{D} ha lo stesso valore attraverso ogni sezione trasversale S del tubo
- Si può verificare che, con i versi di riferimento indicati nella figura, questo valore coincide con la carica totale su S_1

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \sigma_c dS_1 = Q$$

- Per dimostrarlo è sufficiente applicare la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1 , S e dal tratto della superficie laterale del tubo compreso tra S_1 ed S



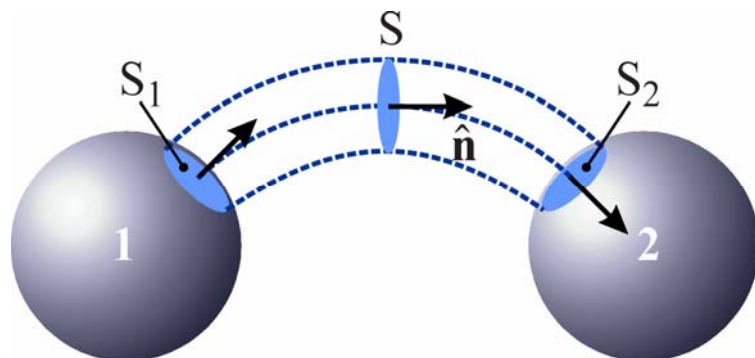
63

Tensione

- Le superfici S_1 e S_2 sono equipotenziali (e quindi ortogonali alle linee di campo di \mathbf{E} e di \mathbf{D})
- La tensione tra due sezioni terminali del tubo di flusso può essere espressa come

$$v_{12} = V(P_1) - V(P_2) = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- dove P_1 e P_2 sono due punti arbitrari di S_1 e S_2 e Γ è una linea arbitraria che unisce i due punti



64

Capacità

- Si definisce **capacità** C (unità di misura farad, F) del tubo di flusso il rapporto tra il valore assoluto della carica sulle sezioni terminali e la differenza di potenziale tra i conduttori

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- *La capacità dipende solo dalla geometria del sistema e dalle proprietà del mezzo interposto tra i conduttori*
- La definizione di capacità di un tubo di flusso di \mathbf{D} è analoga alla definizione di conduttanza di un tubo di flusso di \mathbf{J}

65

Condensatore

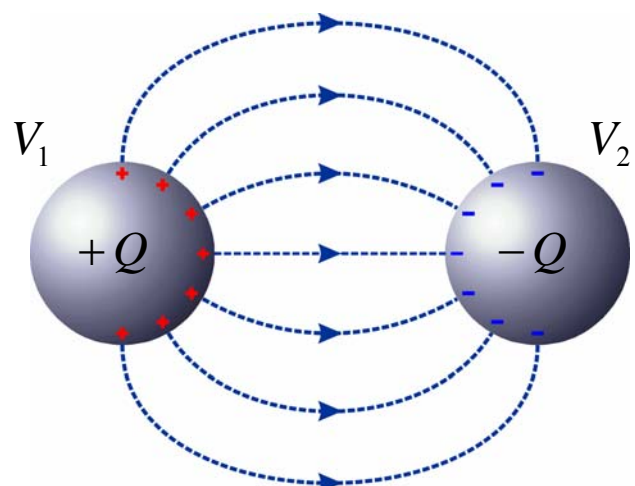
- **Condensatore:** sistema formato da due conduttori (armature) disposti in modo tale che tutte le linee di campo uscenti da un conduttore terminino sull'altro
- ➔ Le cariche totali sulle superfici dei conduttori sono uguali e opposte
- Si definisce **capacità** del condensatore il rapporto

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Q = valore assoluto della carica

V_1 = potenziale del conduttore con carica $+Q$

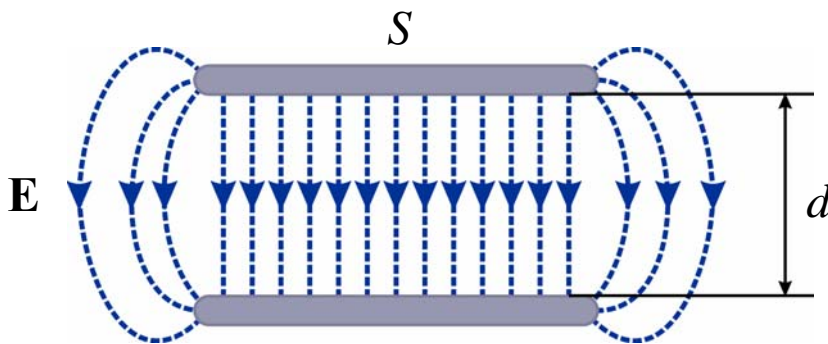
V_2 = potenziale del conduttore con carica $-Q$



66

Esempio - condensatore a facce piane parallele

- Armature piane parallele di area S
- Distanza tra le armature d piccola rispetto alle dimensioni lineari delle armature
- Se si trascurano gli *effetti di bordo*, si può assumere che il campo elettrico tra le armature sia uniforme



$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

67

Conduttori in condizioni stazionarie

- In condizioni stazionarie, all'interno di un conduttore i vettori \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{J} soddisfano le equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$$

- Se il conduttore è omogeneo si ottiene

$$\rho_c = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon \mathbf{J}}{\sigma} \right) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- ➔ All'interno di un conduttore omogeneo la densità volumetrica di carica è sempre nulla
- A differenza del caso elettrostatico, in presenza di correnti stazionarie questa proprietà vale solo se il mezzo è omogeneo

68

Campo elettrico all'esterno dei conduttori

- La superficie di un conduttore percorso da corrente non è equipotenziale
- ➔ Deve essere presente un campo elettrico anche all'esterno di un conduttore
 - ◆ Infatti l'integrale di linea del campo elettrico lungo una linea esterna al conduttore che collega due punti della superficie è uguale alla differenza di potenziale tra i due punti, quindi il campo elettrico all'esterno non può essere nullo
- ➔ A differenza di quanto avviene nel caso elettrostatico, esistono linee di campo che collegano punti appartenenti allo stesso conduttore
- ➔ Il campo elettrico all'esterno del conduttore in generale non è ortogonale alla superficie del conduttore

69

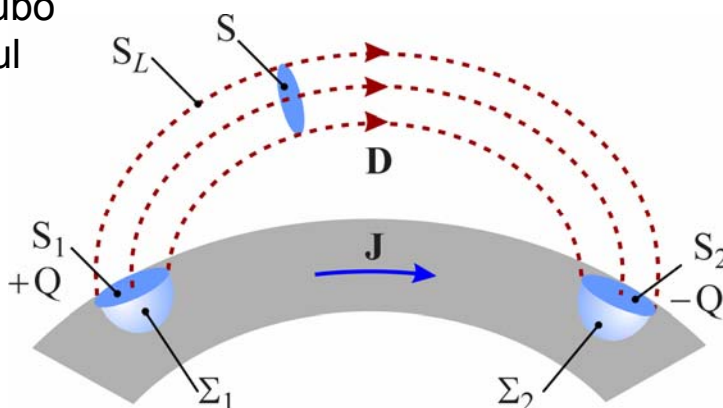
Condensatore elementare

- Si considera un conduttore omogeneo percorso da corrente circondato da un dielettrico con permittività ε
- Si assume che all'esterno del conduttore sia $\rho_c = 0$
- Sulla superficie del conduttore è presente una distribuzione superficiale di carica con densità

$$\sigma_c = \varepsilon E_n = D_n \quad E_n, D_n = \text{componenti di } \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{D} \text{ ortogonali alla superficie}$$

- Sulle superfici terminali di un tubo di flusso che inizia e termina sul conduttore sono presenti due cariche uguali e opposte

$$\underbrace{\int_{S_1} \sigma_c dS_1}_Q = - \underbrace{\int_{S_2} \sigma_c dS_2}_{-Q}$$



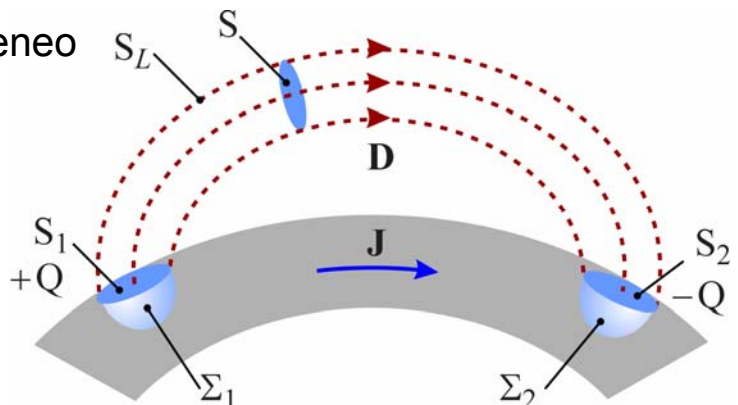
70

Condensatore elementare

- Per dimostrare le affermazioni precedenti, in primo luogo si osserva che è nullo il flusso di \mathbf{J} attraverso le superfici Σ_1 e Σ_2 interne al conduttore
 - \mathbf{J} è solenoidale \Rightarrow è nullo il flusso di \mathbf{J} attraverso le superfici chiuse formate da Σ_1 e S_1 e da Σ_2 e S_2
 - Il flusso di \mathbf{J} attraverso S_1 e S_2 è nullo perché il conduttore costituisce un tubo di flusso di \mathbf{J}
 - \Rightarrow Quindi devono annullarsi anche i flussi attraverso Σ_1 e Σ_2

- Il conduttore è lineare e omogeneo
 - \Rightarrow \mathbf{D} è proporzionale a \mathbf{J}

- \Rightarrow Quindi anche il flusso di \mathbf{D} attraverso Σ_1 e Σ_2 è nullo



71

Condensatore elementare

- Applicando la legge di Gauss alla superficie chiusa formata da Σ_1 , S e dal tratto della superficie laterale S_L compreso tra S_1 ed S si ottiene

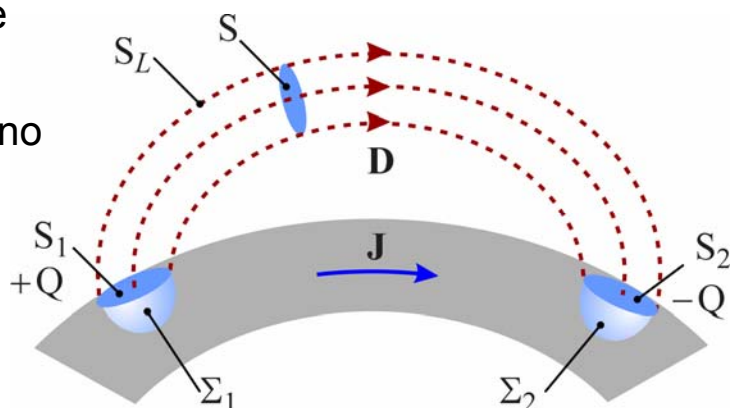
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q = \int_{S_1} \sigma_c dS_1$$

- \Rightarrow Quindi la densità di carica sulla superficie del conduttore è

$$\sigma_c = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

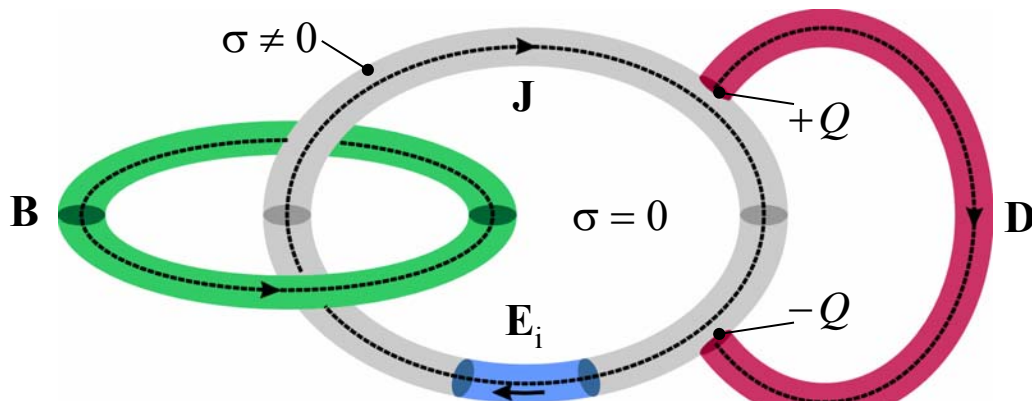
- Il flusso attraverso la superficie formata da S_L , Σ_1 e Σ_2 è nullo
- \Rightarrow Quindi le cariche su S_1 e S_2 sono uguali e opposte

$$\int_{S_1} \sigma_c dS_1 + \int_{S_2} \sigma_c dS_2 = 0$$



72

Elettromagnetismo stazionario - riepilogo



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$



**Legge di
Hopkinson**

$$\mathcal{R}\Phi = i_c$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$



**Legge
di Ohm**

$$Ri = e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$



$$\frac{Q}{C} = V$$

**Equazione del
condensatore**

73

Elettromagnetismo stazionario - riepilogo

● Resistenza

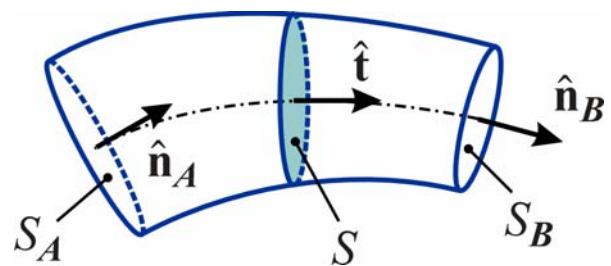
$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{i} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S \mathbf{J} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\sigma(x)A(x)}$$

● Riluttanza

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} H dl}{\int_S \mathbf{B} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x)A(x)}$$

● Capacità

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{V_{AB}}{Q} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} E dl}{\int_S \mathbf{D} dS} = \int_0^l \frac{dx}{\epsilon(x)A(x)}$$



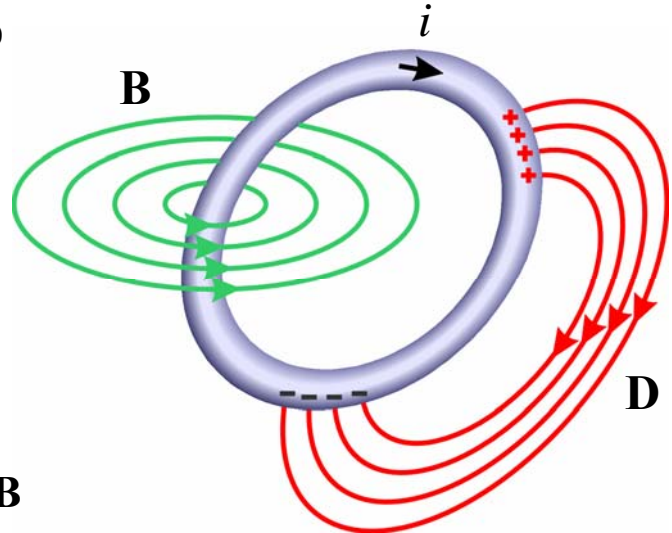
Le ultime uguaglianze
valgono nel caso di
tubi di flusso "filiformi"

74

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

- Sulla superficie di un conduttore percorso da corrente è presente una distribuzione superficiale di carica
- ➔ Alla superficie del conduttore si appoggiano dei tubi di flusso di \mathbf{D} sulle cui sezioni terminali si localizzano cariche uguali e opposte
- ➔ Questi tubi di flusso costituiscono dei condensatori elementari

- La corrente nel circuito genera un campo magnetico
- ➔ Un circuito elettrico è sempre concatenato con tubi di flusso di \mathbf{B}

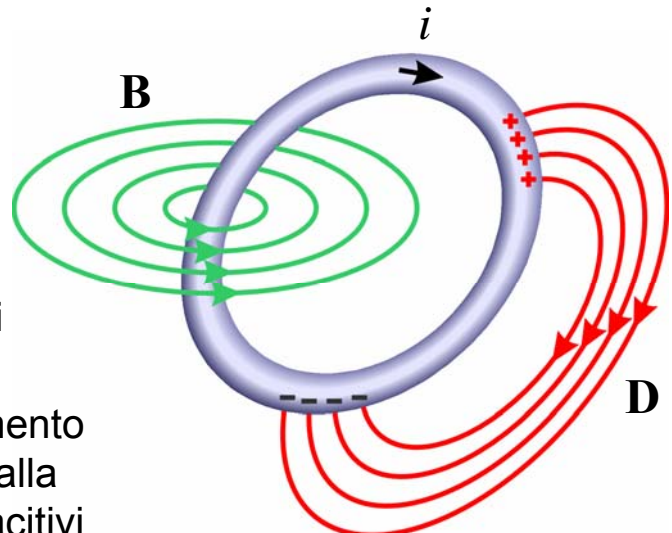


75

Effetti capacitivi e induttivi associati a un circuito

- In **condizioni stazionarie** è possibile studiare il campo di corrente prescindendo dalla presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico all'esterno del conduttore
- Noti il potenziale e la corrente nel conduttore si possono determinare il campo magnetico e la distribuzione della carica sulla superficie

- In **condizioni non stazionarie** le equazioni che governano il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno del conduttore sono accoppiate con le equazioni del campo di corrente
- ➔ In queste condizioni il comportamento del circuito è influenzato anche dalla presenza di effetti induttivi e capacitivi



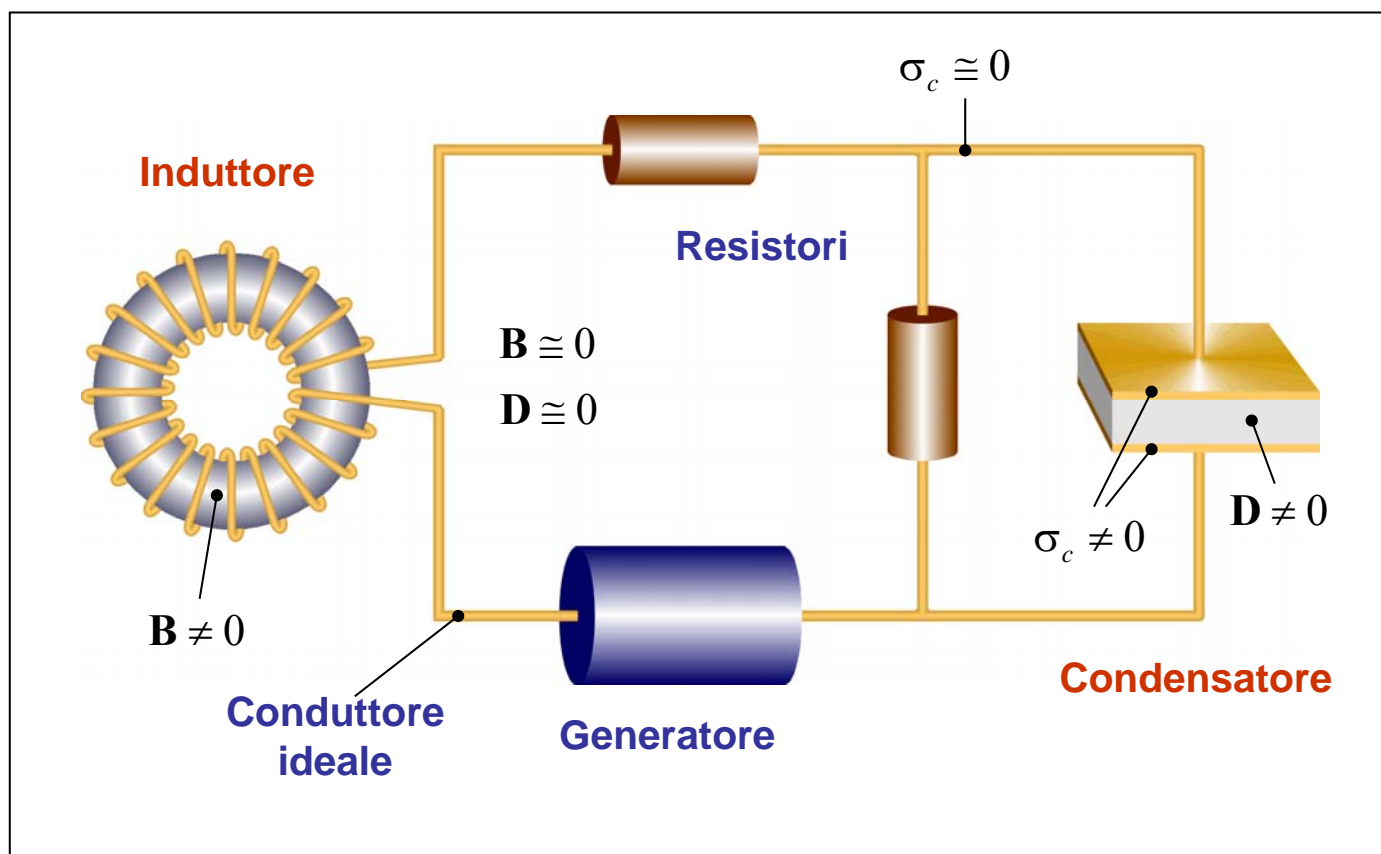
76

Induttori e condensatori

- Normalmente i circuiti elettrici sono realizzati in modo che gli effetti induttivi e capacitivi siano significativi solo all'interno di determinate regioni che corrispondono a componenti detti **induttori** e **condensatori**
 - ➔ Proprietà che a rigore dovrebbero essere associate all'intero circuito possono essere attribuite a singoli componenti
- All'interno di un induttore i valori di **B** sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
 - ➔ Il flusso di **B** concatenato con il circuito è praticamente determinato dai soli contributi dei flussi negli induttori
- All'interno di un condensatore i valori di **D** sono molto maggiori rispetto a quelli assunti all'esterno
 - ➔ La densità di carica sulla superficie del conduttore assume valori significativi solo sulle armature dei condensatori

77

Esempio



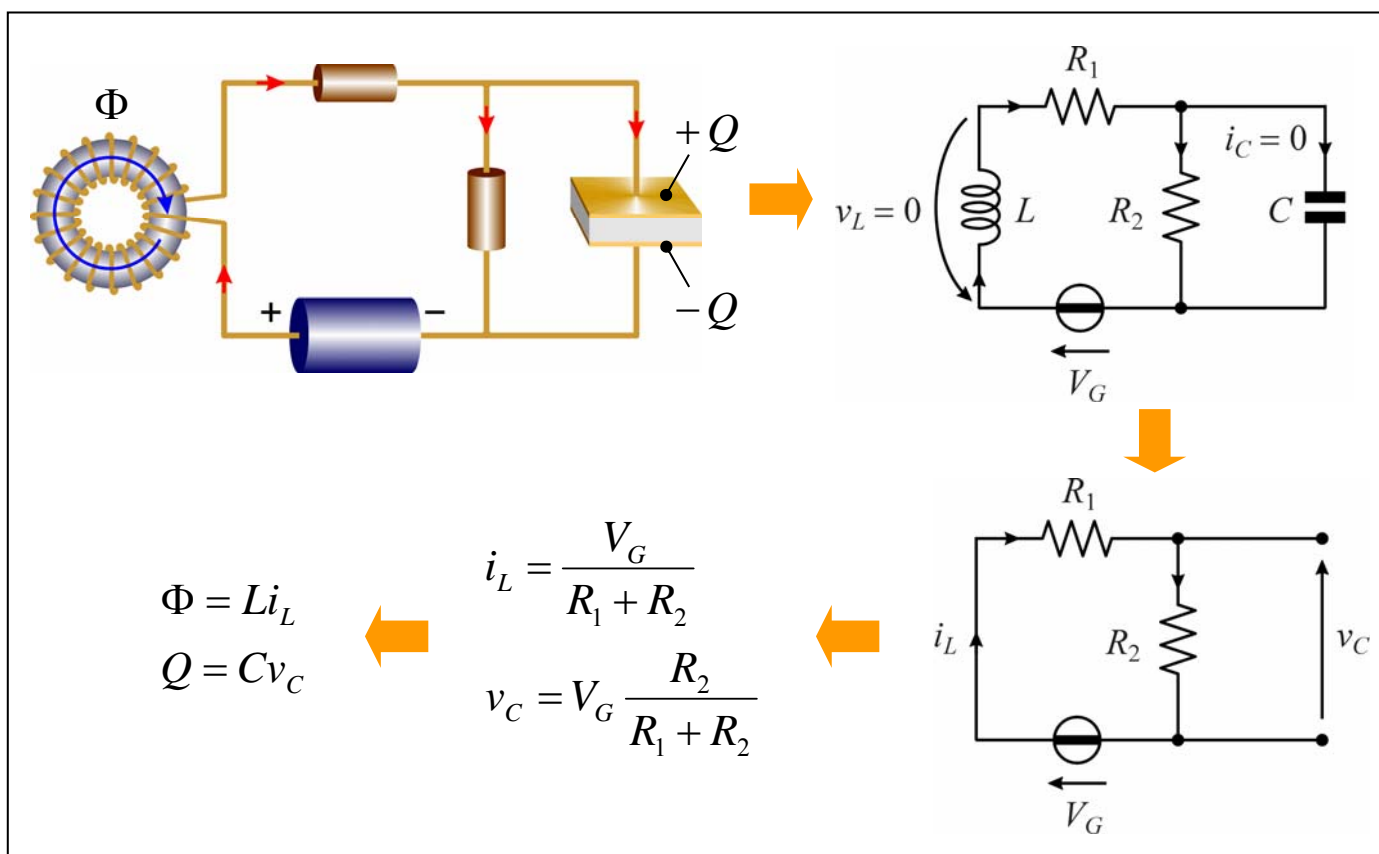
78

Induttori e condensatori in regime stazionario

- Se il conduttore può essere considerato ideale, la tensione dell'induttore è nulla
 - ➔ In regime stazionario un induttore equivale a un cortocircuito
- Dato che le armature del condensatore sono separate da un dielettrico, la corrente nel condensatore è nulla
 - ➔ In regime stazionario un condensatore equivale a un circuito aperto
- ➔ In regime stazionario è possibile determinare le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori studiando circuiti formati solo da componenti resistivi
 - ◆ Per gli induttori, dai valori delle correnti si possono ricavare i flussi di induzione magnetica
 - ◆ Per i condensatori, dai valori delle tensioni si possono ricavare le cariche

79

Esempio



80