

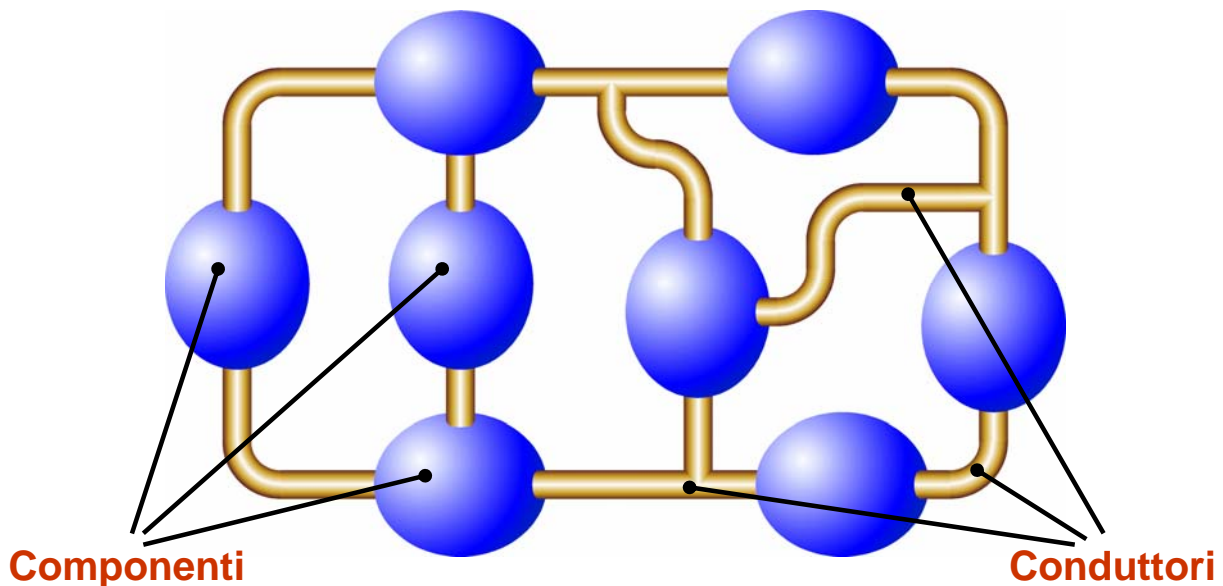
Circuiti elettrici

Introduzione

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 20-9-2014)

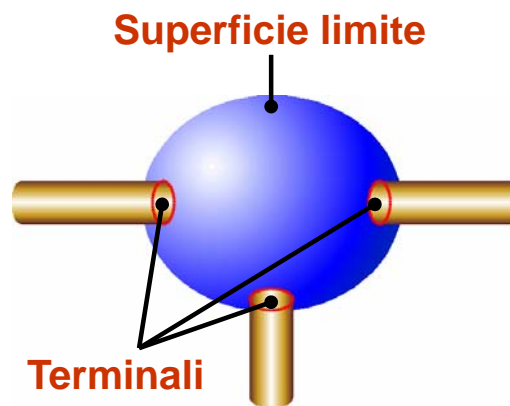
Circuiti elettrici

- Un **circuito** elettrico è un sistema elettromagnetico costituito dal **collegamento** di sottosistemi detti **componenti circuitali**



Componenti

- Un **componente** è un sottosistema idealmente delimitato da una superficie chiusa (**superficie limite**)
- La superficie limite può essere attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero (≥ 2) di regioni, dette **poli** o **terminali**



- Un componente dotato di N terminali è detto **N -polo**

3

Correnti e tensioni

- La definizione di componente di base sulle seguenti ipotesi:
 - ◆ Ad ogni terminale di un componente può essere associata in modo univoco una grandezza detta **corrente**
 - ◆ Ad ogni coppia di terminali di un componente può essere associata in modo univoco una grandezza detta **tensione**
 - ◆ Le interazioni di un componente con il resto del circuito (e in particolare gli scambi di energia elettromagnetica) sono completamente determinati dagli andamenti nel tempo delle correnti e delle tensioni ai suoi terminali
- ➔ Il **comportamento di un circuito** è definito dall'andamento nel tempo delle correnti e delle tensioni dei suoi componenti

4

Carica elettrica

- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare (unità di misura **coulomb**, C)
- I fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche sono detti fenomeni **elettromagnetici**
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
 - ◆ tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
 - ◆ tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

5

Corrente elettrica

- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata S (ad esempio la sezione di un conduttore o un terminale di un componente) in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo
- In generale si possono avere cariche dei due tipi e che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
 - ➔ La carica totale che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
 - ◆ Il segno dai vari contributi è ottenuto combinando il segno della carica con un segno + o - dipendente dal verso del moto

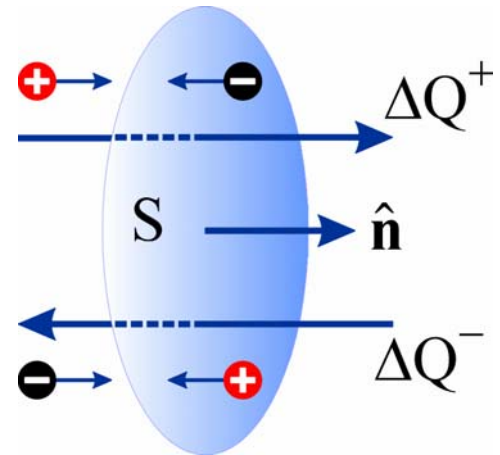
6

Definizione della corrente elettrica

- Si indica con ΔQ la carica che attraversa la superficie S in senso concorde con la normale \hat{n} nell'intervallo di tempo Δt

$$\Delta Q = \Delta Q^+ - \Delta Q^-$$

- ◆ Contributo positivo (ΔQ^+)
 - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
 - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
- ◆ Contributo negativo ($-\Delta Q^-$)
 - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
 - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



7

Definizione della corrente elettrica

- La corrente, $i(t)$, è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- ➔ La corrente è la derivata della funzione $Q(t)$ che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso S a partire da un certo istante iniziale fino all'istante t
- $Q(t)$ non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante t
 - ◆ è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a $Q(t)$

8

Verso di riferimento della corrente

- Il verso della normale alla superficie è detto **verso di riferimento** della corrente
- Il verso di riferimento
 - ◆ può essere scelto in modo arbitrario
 - ◆ non ha nessuna relazione con il verso del moto delle cariche
- La corrente può assumere sia valori positivi sia valori negativi
 - ◆ $i > 0$ ➔ trasferimento di una quantità positiva di carica in senso concorde con il verso di riferimento
 - ◆ $i < 0$ ➔ trasferimento di una quantità positiva di carica in senso opposto al il verso di riferimento

9

Verso fisico della corrente

- Indipendentemente dal tipo di cariche effettivamente presenti nel conduttore, è sempre possibile rappresentare una data corrente come risultato del moto di cariche positive dirette tutte nello stesso verso
- Il verso del moto di queste cariche positive è indicato *convenzionalmente* come **verso fisico della corrente**
- E' opportuno notare che
 - ◆ In generale, nello studio dei circuiti elettrici, i versi fisici delle correnti non sono noti a priori
 - ◆ Se le correnti non sono costanti nel tempo anche i loro versi fisici possono variare

10

Verso riferimento e verso fisico

- Per scrivere le equazioni di un circuito elettrico occorre assegnare alle correnti dei versi di riferimento
 - ◆ fissati a priori
 - ◆ costanti nel tempo
- ➔ **I versi di riferimento vengono scelti in modo arbitrario e non devono necessariamente coincidere con i versi fisici**
- A posteriori, il segno della corrente in relazione al verso di riferimento consente di determinare anche il verso fisico
 - ◆ Negli istanti in cui $i(t) > 0$ il verso fisico coincide con il verso di riferimento
 - ◆ Negli istanti in cui $i(t) < 0$ il verso fisico è opposto al verso di riferimento
- *In seguito, quando si parlerà di **verso della corrente** senza ulteriori specificazioni, si intenderà sempre verso di riferimento (non verso fisico)*

11

Unità di misura della corrente

- L'unità di misura della corrente elettrica è l'**ampere** (A)
- L'ampere è una delle unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale:

L'ampere è l'intensità di una corrente costante che percorrendo due conduttori rettilinei paralleli di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 metro nel vuoto, produce tra i conduttori una forza pari a 2×10^{-7} newton per unità di lunghezza
- Il **coulomb** (C) è un'unità derivata, definita in termini di ampere:

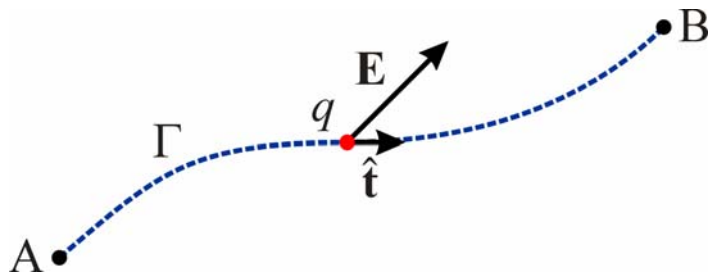
Il coulomb è la quantità di carica trasportata in un secondo da una corrente di un ampere

12

Tensione

- **Campo elettrico**: si dice che una regione dello spazio è sede di un campo elettrico $\mathbf{E}(P)$ se una carica elettrica q posta in quiete in un generico punto P di tale regione è soggetta ad una forza $\mathbf{F}(P) = q\mathbf{E}(P)$
- Si considera una carica q che si sposta da un punto A a un punto B lungo una linea Γ all'interno di una regione sede di campo elettrico
- **Tensione** tra il punto A e il punto B lungo Γ = lavoro per unità di carica compiuto dalle forze del campo elettrico quando la carica si muove da A a B lungo Γ

$$v_{AB,\Gamma} = \frac{1}{q} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



13

Potenziale

- In generale la tensione tra due punti A e B dipende dalla linea Γ considerata
- In casi particolari la tensione dipende solo dai punti estremi A e B
- In questi casi, scelto arbitrariamente un punto O (= **punto di riferimento**), si può definire una funzione scalare detta **potenziale**

$$V(P) = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

che rappresenta il lavoro per unità di carica compiuto dal campo elettrico quando una carica si sposta dal generico punto P al punto O (o il lavoro che si deve compiere contrastando le forze del campo elettrico per portare la carica dal punto O al punto P)

14

Tensione e differenza di potenziale

- Se la tensione tra due punti A e B, non dipende dalla linea, è possibile valutarla seguendo un percorso passante per il punto O

$$\begin{aligned}V_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \\ &= \int_A^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_B^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = V(A) - V(B)\end{aligned}$$

- ➔ la tensione può essere espressa come **differenza di potenziale** tra il punto A e il punto B

15

Tensione e differenza di potenziale

- La differenza di potenziale non dipende dalla scelta del punto di riferimento
- Si considerano i potenziali $V(P)$ e $V'(P)$, relativi ai punti di riferimento O e O'

$$V(P) = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad V'(P) = \int_P^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- I potenziali sono legati dalla relazione

$$V'(P) = \int_P^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_P^O \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \int_O^{O'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = V(P) - V(O')$$

- ➔ Quindi si ha

$$V'(A) - V'(B) = V(A) - V(O') - V(B) + V(O') = V(A) - V(B)$$

16

Unità di misura della tensione

- L'unità di misura della tensione è il **volt** (V)

Si dice che la tensione tra due punti A e B è di 1 volt se il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico quando una carica di 1 coulomb si sposta dal punto A al punto B è pari a 1 joule

17

Tensioni dei componenti

- Per un componente circuitale si assume che sia possibile associare in modo univoco una tensione ad ogni coppia di terminali
- ➔ La tensione è indipendente del percorso, almeno fino a che si considerano linee che non entrano nella superficie limite del componente
 - ◆ esternamente ai componenti e sulle superfici limite è possibile esprimere le tensioni come differenze di potenziale
- ➔ Su ciascun terminale il potenziale è costante
 - ◆ si può parlare semplicemente di tensione tra due terminali, senza specificare quale punto si considera all'interno di ciascun terminale
 - ◆ la forma e le dimensioni dei terminali non sono rilevanti ai fini del comportamento del circuito
 - ➔ i terminali possono essere considerati praticamente puntiformi

18

Tensioni dei componenti

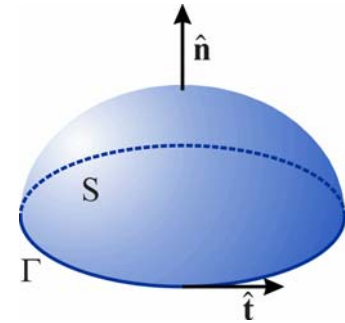
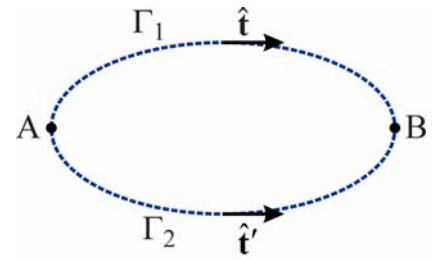
- Se all'esterno delle superfici limite dei componenti la tensione tra due punti non dipende dal percorso, l'integrale del campo elettrico lungo una linea chiusa deve essere nullo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}' dl = 0$$

- Per la *legge di Faraday* questo integrale è uguale all'opposto della derivata del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- Affinché il modello circuitale sia applicabile, nella regione esterna deve essere nulla, o comunque trascurabile, la derivata rispetto al tempo del vettore induzione magnetica \mathbf{B}



19

Verso di riferimento della tensione

- Per definire completamente una tensione occorre specificarne il **verso di riferimento**, cioè attribuire ad uno dei terminali il ruolo di **terminale positivo** e all'altro quello di **terminale negativo**
- Queste denominazioni indicano solo quali segni sono attribuiti ai potenziali dei terminali nella valutazione della differenza di potenziale, non quale dei terminali si trova effettivamente a potenziale maggiore
- Come avviene per la corrente, anche **il verso della tensione viene fissato a priori e può essere scelto in modo arbitrario**
- La tensione può assumere sia valori positivi sia valori negativi
 - $v > 0$ ➔ il terminale positivo ha potenziale maggiore del terminale negativo
 - $v < 0$ ➔ il terminale positivo ha potenziale minore del terminale negativo

20

Collegamenti

- I **collegamenti** tra i componenti sono realizzati unendo i loro terminali mediante **conduttori ideali** (**connessioni ideali**)
 - ◆ Un conduttore si dice ideale se la tensione tra due punti generici del conduttore è nulla indipendentemente dal valore della corrente che scorre nel conduttore stesso
- ➔ Il collegamento tra due o più terminali comporta che tali terminali siano allo stesso potenziale
- ➔ Forma e lunghezza dei conduttori che realizzano i collegamenti non hanno nessun effetto sul comportamento del circuito

21

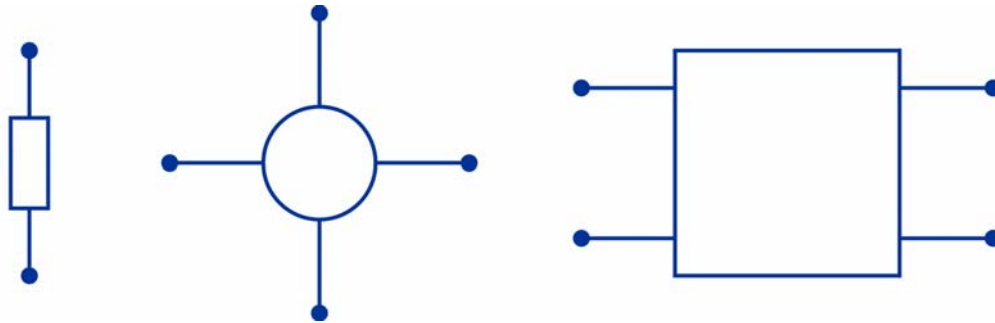
Definizioni

- **Nodo**: insieme di terminali uniti tra loro da connessioni ideali (come caso degenere, un nodo può essere costituito da un solo terminale isolato)
- **Ramo** o **lato**: tratto del circuito che unisce due nodi
- **Maglia**: percorso chiuso formato da rami del circuito che attraversa una sequenza di nodi senza passare più di una volta per uno stesso nodo (e per uno stesso ramo)

22

Simboli dei componenti

- Un componente generico viene indicato con un simbolo costituito da
 - ◆ un cerchio o un rettangolo che rappresenta la superficie limite
 - ◆ dei segmenti che rappresentano i terminali

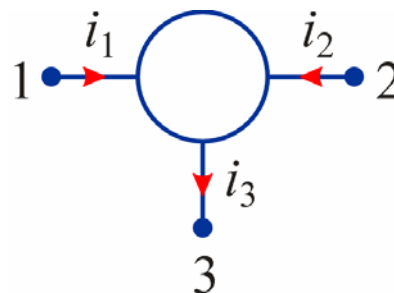


- I versi di riferimento delle correnti si indicano mediante frecce poste sui terminali
- I versi di riferimento delle tensioni si indicano ponendo i simboli + e - vicino ai terminali, oppure mediante una freccia diretta dal terminale negativo a quello positivo

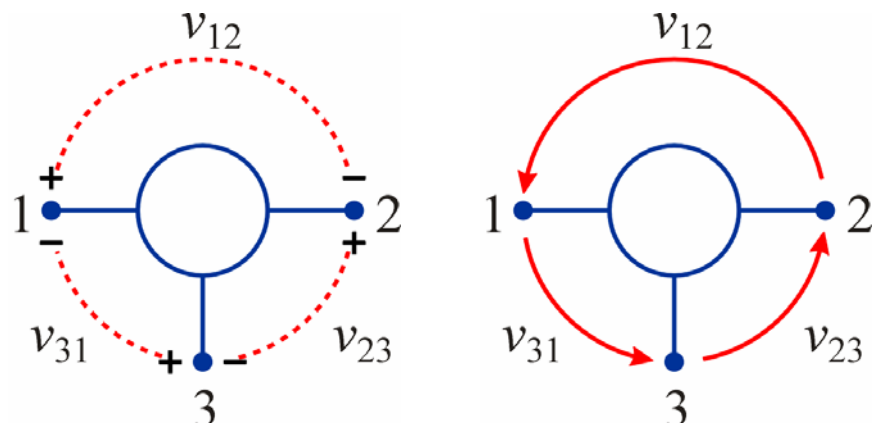
23

Rappresentazione dei versi di riferimento

Versi delle correnti



Versi delle tensioni

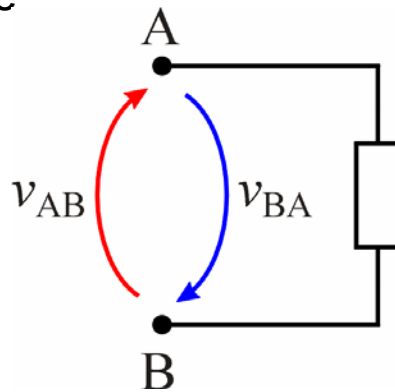


24

Nota

- La tensione tra due terminali o due nodi A e B viene indicata con il simbolo v_{AB}
 - ◆ il primo indice rappresenta il terminale (o il nodo) positivo
 - ◆ il secondo indice rappresenta il terminale (o il nodo) negativo
- Quindi si ha anche

$$v_{AB} = -v_{BA}$$



25

Rappresentazione dei collegamenti

- I collegamenti sono indicati unendo i terminali dei componenti mediante segmenti o archi che rappresentano i conduttori ideali
- Lo scopo dello schema è solo mostrare quali terminali sono collegati tra loro
 - ➔ Lo schema non riproduce necessariamente
 - le posizioni relative dei componenti
 - la forma dei conduttori con cui sono realizzate le connessionidalle quali non dipende il comportamento del circuito
 - ➔ Generalmente lo schema di un circuito può essere rappresentato in più modi

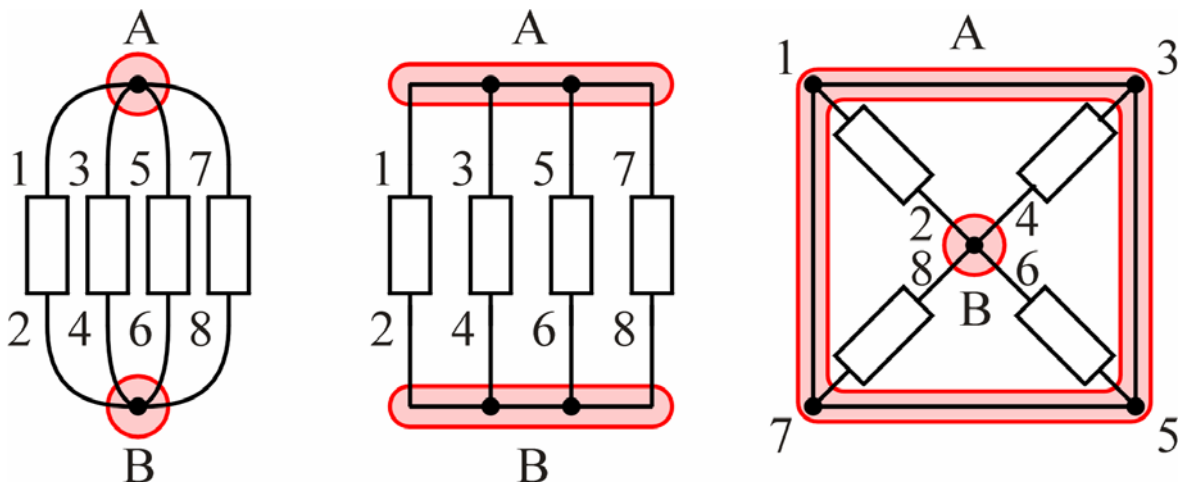
26

Rappresentazione dei collegamenti

- **Esempio:**

3 rappresentazioni equivalenti dello stesso collegamento

- ◆ I terminali 1 3 5 7, collegati tra loro, costituiscono un nodo (A)
- ◆ I terminali 2 4 6 8, collegati tra loro, costituiscono un nodo (B)



27

Equazioni di un circuito

- Le tensioni e le correnti di un circuito elettrico sono soggette a due tipi di vincoli, espressi da due gruppi di equazioni
- **Equazioni caratteristiche dei componenti (relazioni costitutive)**
 - ◆ dipendono dalle proprietà fisiche dei componenti
 - ◆ ciascuna equazione riguarda le tensioni e le correnti di un solo componente
- **Equazioni dei collegamenti (equazioni topologiche)**
 - ◆ dipendono solo dalla struttura dei collegamenti
 - ◆ riguardano le tensioni e le correnti di componenti diversi
 - ◆ derivano dalle **leggi di Kirchhoff**

28

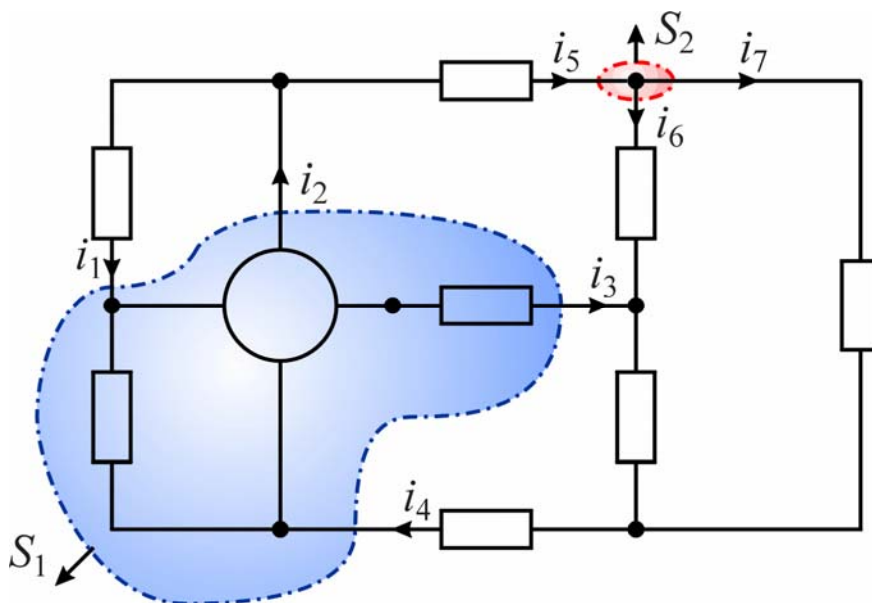
Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- *E' nulla la somma algebrica delle correnti che attraversano una superficie chiusa orientata esterna alle superfici limite dei componenti*
 - Alle correnti va attribuito segno + o segno - a seconda che i loro versi di riferimento siano concordi o discordi con il verso della normale alla superficie considerata
 - ◆ E' arbitrario scegliere di attribuire il segno + alle correnti uscenti o a quelle entranti
 - ◆ In seguito si utilizzerà prevalentemente la prima convenzione
 - Come caso particolare si può considerare una superficie chiusa che racchiude un solo nodo
- ➔ *E' nulla la somma algebrica delle correnti afferenti a un nodo*

29

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

● Esempio



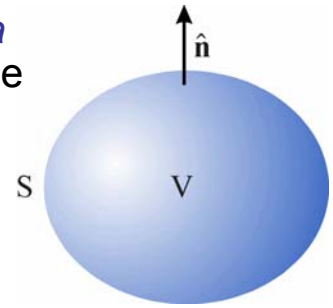
- ◆ **Superficie S_1 :** $-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$
- ◆ **Superficie S_2 :** $-i_5 + i_6 + i_7 = 0$

30

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKI)

- Per il *principio di conservazione della carica elettrica* la corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica Q contenuta all'interno della superficie stessa

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (\mathbf{J} = \text{densità di corrente})$$



- ➔ La LKI implica che non può variare la carica contenuta all'interno di ogni superficie chiusa che non attraversa le superfici limite dei componenti
- Per la *legge di Gauss*, ciò avviene se nella regione esterna è nulla, o comunque trascurabile, la derivata rispetto al tempo del campo elettrico

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- ➔ In queste condizioni nella regione esterna è nulla, o trascurabile, la *densità di corrente di spostamento*

$$\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

31

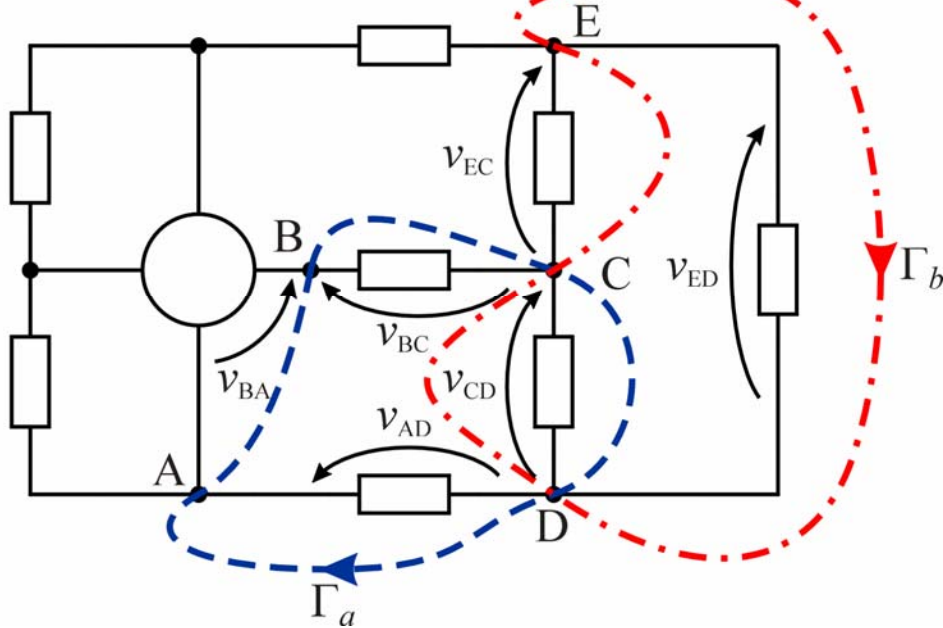
Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- *E' nulla la somma algebrica delle tensioni lungo una linea chiusa orientata passante per i nodi di un circuito ed esterna alle superfici limite dei componenti*
- Alle tensioni va attribuito segno + o segno - a seconda di quale terminale (positivo o negativo) si incontra per primo
 - ◆ In seguito si seguirà prevalentemente la convenzione di attribuire segno + quando il primo terminale è quello positivo e segno - quando il primo terminale è quello negativo
- Le equazioni non dipendono dalla forma delle linee considerate, ma solo dalla sequenza dei nodi toccati dalle linee stesse

32

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

Esempio



- ◆ **Linea Γ_a :** $-v_{BA} + v_{BC} + v_{CD} - v_{AD} = 0$
- ◆ **Linea Γ_b :** $v_{ED} - v_{CD} - v_{EC} = 0$

33

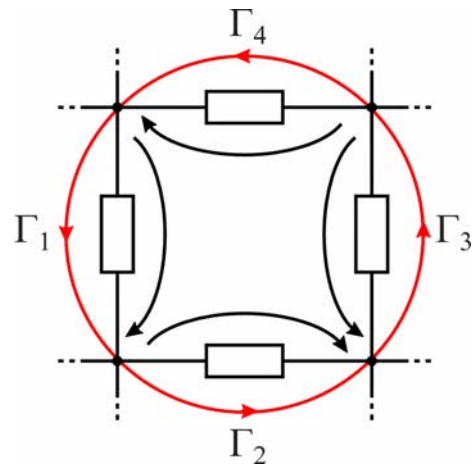
Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKV)

- La LKV è conseguenza del fatto che nella regione esterna deve essere nulla o trascurabile la variazione nel tempo dell'induzione magnetica \mathbf{B} , in queste condizioni, per una generica linea chiusa Γ risulta

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0$$

- Si suddivide la curva Γ in una successione di curve Γ_k , ciascuna delle quali collega un nodo al successivo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \pm V_k = 0$$

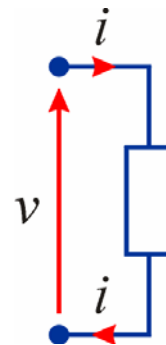


- L'integrale di \mathbf{E} lungo la linea Γ_k rappresenta la tensione V_k tra i nodi collegati dalla linea Γ_k o il suo opposto ($-V_k$) a seconda che il verso della tensione e il verso di Γ siano concordi o discordi

34

Bipoli

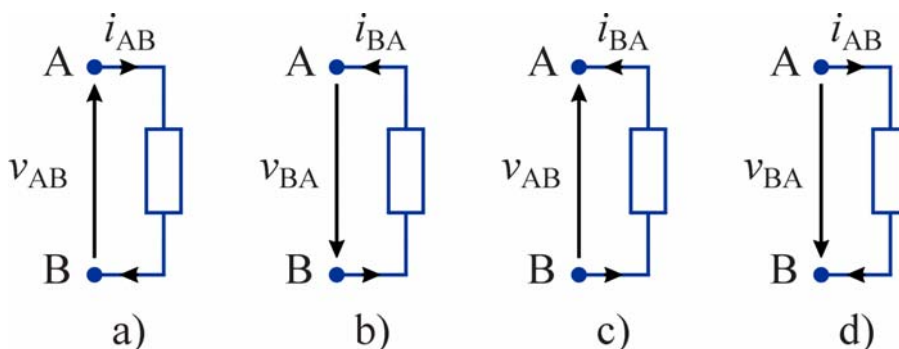
- Un componente a due terminali è detto **bipolo**
- Applicando la LKI ad una superficie che racchiude il solo bipolo si ottiene che la corrente entrante in uno dei terminali del bipolo deve essere uguale a quella uscente dall'altro terminale
- ➔ Ad un bipolo sono associate una corrente i e una tensione v
- La corrente e la tensione sono legate da un'**equazione caratteristica**, dipendente dalle proprietà fisiche del bipolo



35

Convenzione del generatore e dell'utilizzatore

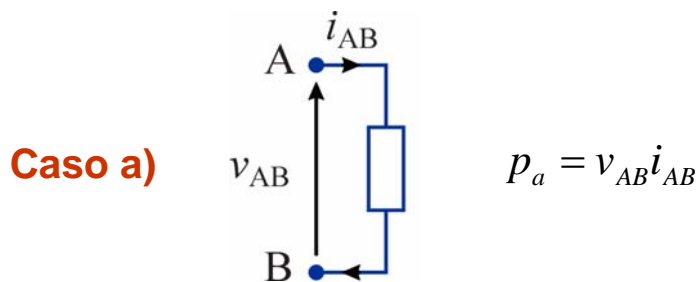
- Per la scelta dei versi di riferimento si hanno 4 possibilità:



- Casi a) e b): **convenzione dell'utilizzatore** (o **convenzione normale**)
 - ◆ la corrente ha verso di riferimento entrante dal terminale positivo (e uscente da quello negativo)
 - ◆ in questo caso i versi di riferimento si dicono anche **coordinati**
- Casi c) e d): **convenzione del generatore**
 - ◆ la corrente ha verso di riferimento entrante dal terminale negativo (e uscente da quello positivo)

36

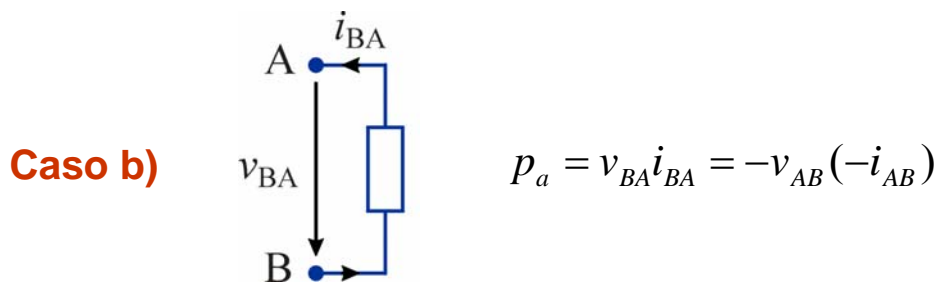
Convenzione dell'utilizzatore



- i_{AB} è la carica che nell'unità di tempo attraversa il bipolo da A verso B
- v_{AB} è la quantità di energia ceduta da una carica unitaria nel passaggio dal terminale A al terminale B
- Il prodotto $p_a = v_{AB} i_{AB}$ rappresenta l'energia ceduta nell'unità di tempo dalle cariche che attraversano il bipolo
 - ➔ $p_a =$ **potenza assorbita** dal bipolo (unità di misura watt, W)
- p_a può assumere valori positivi o negativi
 - ◆ $p_a > 0$ indica che il bipolo assorbe effettivamente energia
 - ◆ $p_a < 0$ indica che il bipolo eroga energia

37

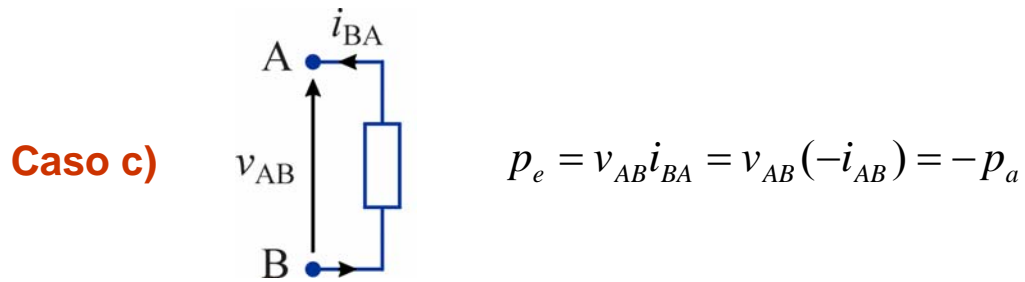
Convenzione dell'utilizzatore



- Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso precedente scambiando i ruoli dei terminali A e B
- $p_a = v_{BA} i_{BA} =$ **potenza assorbita** dal bipolo
- A parità di condizioni, rispetto al caso precedente cambiano sia il segno della tensione sia il segno della corrente, quindi il segno del prodotto non cambia

38

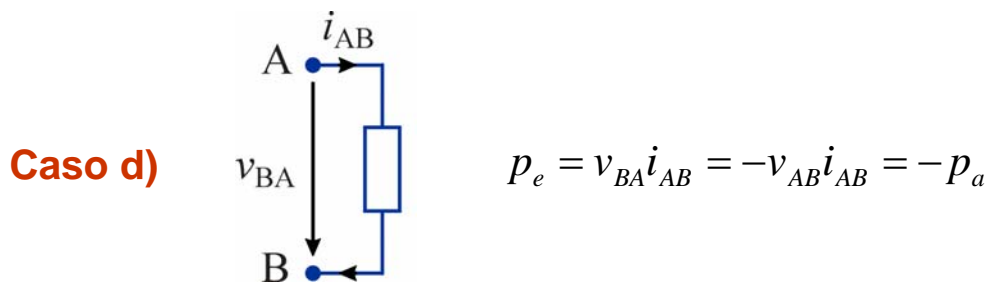
Convenzione del generatore



- i_{BA} è la carica che nell'unità di tempo attraversa il bipolo da B verso A
- v_{AB} è la quantità di energia che occorre fornire a una carica unitaria nel passaggio dal terminale A al terminale B
- Il prodotto $p_e = v_{AB} i_{BA}$ rappresenta l'energia fornita nell'unità di tempo alle cariche che attraversano il bipolo
 - ➔ $p_e =$ **potenza erogata** dal bipolo
- La potenza erogata è l'opposto della potenza assorbita $p_e = -p_a$
- p_e può assumere valori positivi o negativi
 - ◆ $p_e > 0$ ($\Rightarrow p_a < 0$) indica che il bipolo eroga effettivamente energia
 - ◆ $p_e < 0$ ($\Rightarrow p_a > 0$) indica che il bipolo assorbe energia

39

Convenzione del generatore



- Si possono ripetere le considerazioni fatte nel caso precedente scambiando i ruoli dei terminali A e B
- $p_e = v_{BA} i_{AB} = -p_a =$ **potenza erogata** dal bipolo

40

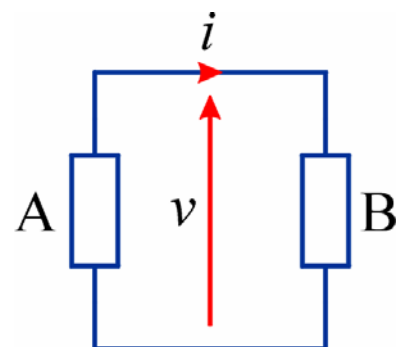
Note

- La scelta della convenzione è *arbitraria* e non deve necessariamente corrispondere all'effettivo comportamento del bipolo
- In seguito si adotterà prevalentemente la convenzione dell'utilizzatore
- Le equazioni caratteristiche dei bipoli saranno formulate assumendo che la tensione e la corrente siano orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
 - ➔ *Nei casi in cui sarà necessario adottare la convenzione del generatore le equazioni dei componenti dovranno essere modificate cambiando il segno della tensione o della corrente*
- Se sugli schemi viene indicato solo il verso della corrente o solo quello della tensione, si sottintende che l'altro verso di riferimento è correlato a quello indicato secondo la convenzione dell'utilizzatore
 - ➔ *Nei casi in cui si adotterà la convenzione del generatore entrambi i versi di riferimento saranno indicati esplicitamente*

41

Esempio

- Si considera un circuito formato da due bipoli A e B
 - ◆ per il bipolo A, v e i sono orientate secondo la convenzione del generatore
 - ◆ per il bipolo B, v e i sono orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
- Il prodotto $p = vi$ rappresenta
 - ◆ la *potenza erogata* da A
 - ◆ la *potenza assorbita* da B
- ➔ Il segno di p , in relazione ai versi di riferimento, consente di determinare in quale verso avviene il trasferimento di potenza
 - ◆ $p > 0$ indica che effettivamente A cede energia a B
 - ◆ $p < 0$ indica che B cede energia ad A



42

Esempio

- Si considera il caso in cui $v(t)$ e $i(t)$ hanno le seguenti espressioni

$$v(t) = 6 \cos(100\pi \cdot t) \text{ V}$$

$$i(t) = 2 \cos\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A}$$

(funzioni sinusoidali del tempo
con periodo 20 ms)

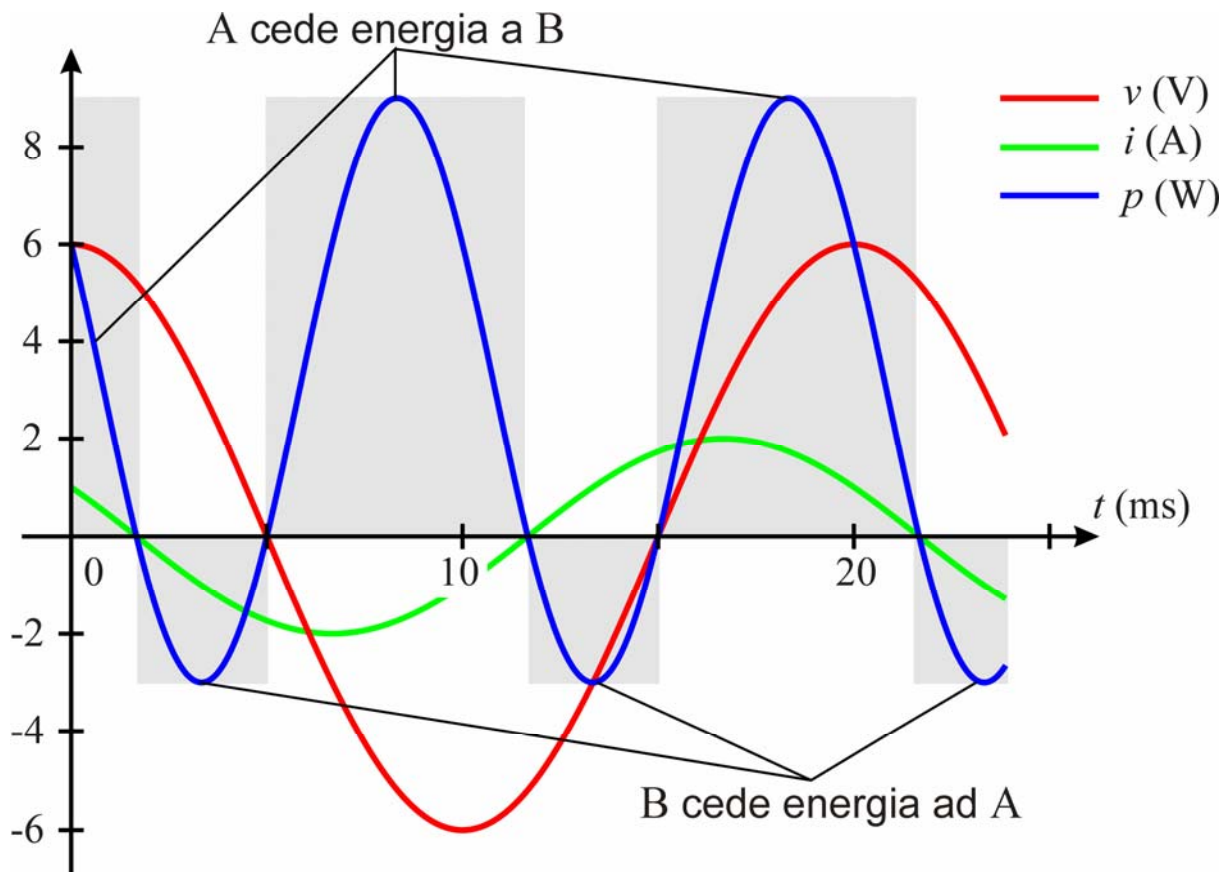
- ➔ In queste condizioni l'espressione della potenza è

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 12 \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3 + 6 \cos\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ W}$$

43

Esempio



44

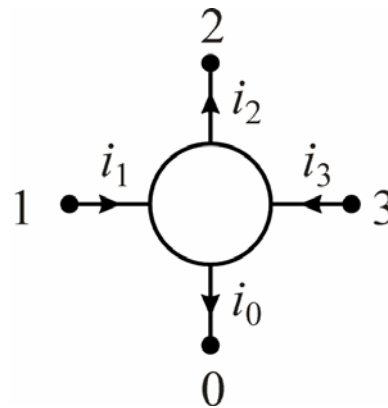
N-poli

- Un componente con N terminali è detto **N-polo**
- Ad un N -polo si possono associare N correnti
- La LKI richiede che valga la relazione:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \pm i_k = 0$$

- ➔ Note $N-1$ correnti è possibile ricavare l'ultima corrente
- ➔ Per caratterizzare un N -polo sono sufficienti le correnti di $N-1$ terminali

$$i_0 = i_1 - i_2 + i_3$$



45

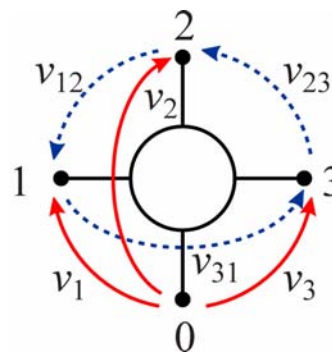
N-poli

- Ad un N -polo si possono associare $N(N-1)/2$ tensioni (una per ogni coppia di terminali)
- Queste tensioni sono vincolate dalla LKV
- ➔ Tutte le tensioni possono essere ricavate a partire dalle tensioni di $N-1$ terminali rispetto a un terminale scelto come riferimento
- ➔ Per caratterizzare un N -polo sono sufficienti $N-1$ tensioni

$$v_{12} = v_1 - v_2$$

$$v_{23} = v_2 - v_3$$

$$v_{31} = v_3 - v_1$$



- Le $N-1$ tensioni e le $N-1$ correnti di un N -polo sono legate da $N-1$ **equazioni caratteristiche**, dipendenti dalle proprietà fisiche del componente

46

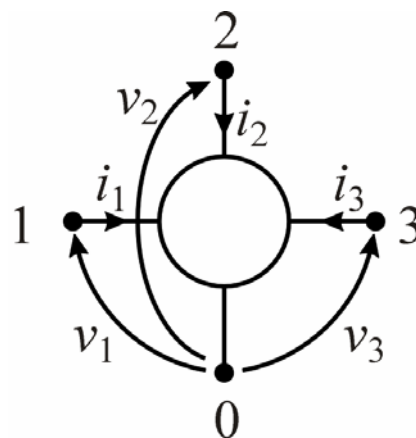
N-poli

- **Convenzione normale**

- ◆ Si fissa un terminale di riferimento (0)
- ◆ Si utilizzano per descrivere il comportamento del componente
 - le $N-1$ tensioni degli altri terminali rispetto al riferimento (che quindi ha sempre il ruolo di terminale negativo)
 v_1, \dots, v_{N-1}
 - Le $N-1$ correnti degli altri terminali prese con verso entrante
 i_1, \dots, i_{N-1}

- In queste condizioni, con considerazioni simili a quelle fatte nel caso dei bipoli, si può ricavare che la **potenza assorbita** dall' N -polo è

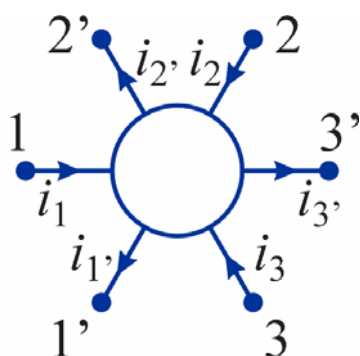
$$P_a = \sum_{k=1}^{N-1} v_k i_k$$



47

N-porte

- **Porta**: coppia di terminali di un componente tale che la corrente entrante in uno dei terminali è sempre uguale a quella uscente dall'altro
 - ➔ I terminali di un bipolo costituiscono una porta
- **N-porte** (o **N-plo bipolo**): componente con $2N$ terminali che costituiscono N porte



$$i_1 = i_{1'}$$

$$i_2 = i_{2'}$$

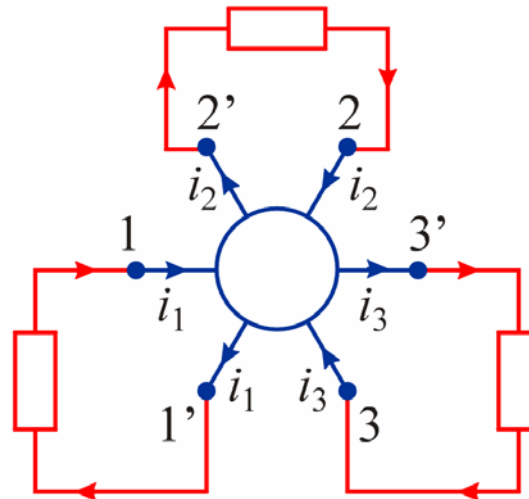
$$i_3 = i_{3'}$$

48

N-porte

- Se l'uguaglianza delle correnti ai terminali delle porte dipende dalla struttura interna del componente l' N -porte è detto **intrinseco**
- E' possibile che un componente con $2N$ terminali si comporti come un N -porte solo a conseguenza del collegamento ad altri componenti (N -porte **non intrinseco**)

Esempio

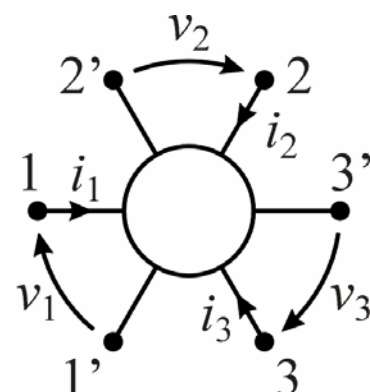


49

N-porte

- Il comportamento di un N -porte è caratterizzato mediante
 - ◆ le N correnti (i_1, \dots, i_N) associate alle porte
 - ◆ le N tensioni (v_1, \dots, v_N) tra le coppie di terminali di ciascuna porta
- Le N correnti e N tensioni alle porte sono vincolate da N equazioni caratteristiche
- **Convenzione dell'utilizzatore:** per ciascuna porta il verso della corrente è entrante nel terminale positivo
- In queste condizioni si può verificare che la **potenza assorbita** da un N -porte è

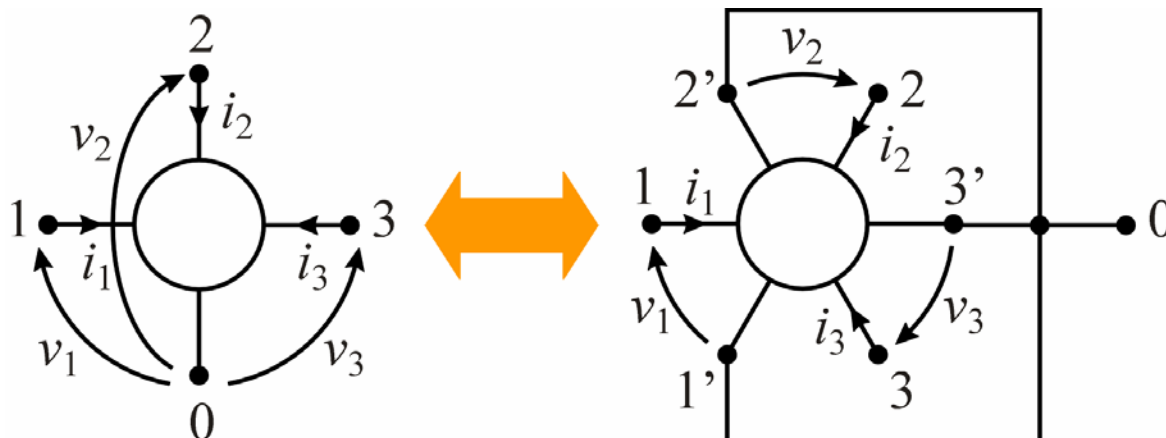
$$P_a = \sum_{k=1}^N v_k i_k$$



50

N-poli e N-porte

- Un generico $(N+1)$ -polo può essere visto come un N -porte avente tutti i terminali negativi delle porte collegati tra loro



- Come si vedrà in seguito, questo consente di trattare in modo unificato i due tipi di componente

51

Classificazione dei componenti in base alle proprietà delle equazioni caratteristiche

- **Linearità**
 - ◆ *Componenti lineari*: le equazioni caratteristiche sono lineari
 - ◆ *Componenti non lineari*: le equazioni caratteristiche sono non lineari
- **Memoria**
 - ◆ *Componenti privi di memoria (resistivi)*: le equazioni contengono solo i valori delle correnti e delle tensioni relativi allo stesso istante
 - ◆ *Componenti dotati di memoria (dinamici)*: le equazioni coinvolgono valori delle tensioni e delle correnti relativi a istanti diversi
- **Tempo-varianza**
 - ◆ *Componenti tempo-varianti*: il tempo compare esplicitamente nelle equazioni caratteristiche
 - ◆ *Componenti tempo-invarianti*: il tempo compare solo implicitamente (come argomento delle tensioni e delle correnti)

52

Esempi – equazioni caratteristiche di bipoli

Equazione	Lineare	Dinamico	Tempo-variante
$v(t) = Ri(t)$	Sì	No	No
$i(t) = I_0 [e^{\alpha v(t)} - 1]$	No	No	No
$v(t) = [R_0 + R_1 \cos(\omega t)]i(t)$	Sì	No	Sì
$i(t) = a(t)v(t) + b(t)v^3(t)$	No	No	Sì
$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx$	Sì	Sì	No
$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	Sì	Sì	No
$i(t) = \frac{K}{\sqrt{V_0 - v(t)}} \frac{dv(t)}{dt}$	No	Sì	No

53

Energia

- L'integrale su un intervallo $[t_0, t_1]$ della potenza assorbita (erogata) da un componente rappresenta l'**energia assorbita (erogata)** nell'intervallo stesso (unità di misura **joule, J**)

$$w_a(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p_a(t) dt$$

Energia assorbita
nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$w_e(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p_e(t) dt = -w_a(t_0, t_1)$$

Energia erogata
nell'intervallo $[t_0, t_1]$

- In particolare, per $t_0 \rightarrow -\infty$ si ha

$$w_a(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p_a(t) dt$$

Energia assorbita
fino all'istante t_1

$$w_e(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p_e(t) dt = -w_a(t_1)$$

Energia erogata
fino all'istante t_1

54

Componenti attivi e passivi

- **Componente passivo:**

per tutti i possibili andamenti delle tensioni e delle correnti compatibili con le relazioni costitutive risulta

$$w_a(t) \geq 0 \quad \forall t$$

- **Componente attivo:**

esistono andamenti delle tensioni e delle correnti compatibili con le relazioni costitutive tali che, per qualche valore di t , risulta

$$w_a(t) < 0$$

➔ *Un componente attivo è un componente in grado di generare energia elettrica (cioè convertire energia di altro tipo in energia elettrica)*

55

Componenti attivi e passivi

- Dati due istanti $t_1 < t_2$, l'energia assorbita fino all'istante t_2 si può esprimere come

$$w_a(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} p_a(t) dt = \int_{-\infty}^{t_1} p_a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} p_a(t) dt = w_a(t_1) + w_a(t_1, t_2)$$

- Per un componente passivo deve essere

$$w_a(t_2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w_a(t_1) + w_a(t_1, t_2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w_a(t_1) \geq w_e(t_1, t_2)$$

➔ $w_e(t_1, t_2)$ può essere positiva

➔ il componente può erogare energia nell'intervallo $[t_1, t_2]$

➔ *per un componente passivo l'energia erogata in un intervallo $[t_1, t_2]$ non può superare l'energia assorbita fino all'istante iniziale dell'intervallo*

56

Componenti attivi e passivi

- Un componente attivo può generare energia (introdurre energia nel circuito)
- Un componente passivo può accumulare (almeno in parte) l'energia assorbita e, in seguito, restituire l'energia accumulata
 - ◆ un comportamento di questo tipo implica un vincolo tra i valori delle tensioni e correnti nell'intervallo $[t_1 t_2]$ da cui dipende $w_e(t_1, t_2)$ e i valori nell'intervallo $[-\infty t_1]$ da cui dipende $w_a(t_1)$
 - ➔ il componente deve essere dotato di memoria
 - ➔ per un componente passivo privo di memoria deve essere verificata la condizione
$$w_a(t_1, t_2) \geq 0 \quad \forall t_1, \forall t_2 \geq t_1$$

57

Analisi di un circuito

- **Dati:**
 - ◆ caratteristiche dei componenti
 - ◆ struttura dei collegamenti
- **Incognite:**
 - ◆ correnti e tensioni dei componenti
(nel caso generale sono funzioni incognite del tempo)
- **Equazioni:**
 - ◆ **equazioni dei collegamenti** (lineari algebriche omogenee)
 - legge di Kirchhoff per le correnti
 - legge di Kirchhoff per le tensioni
 - ◆ **equazioni dei componenti**
 - componenti lineari ➔ equazioni lineari
 - componenti non lineari ➔ equazioni non lineari
 - componenti privi di memoria ➔ equazioni algebriche
 - componenti dotati di memoria ➔ equazioni differenziali

58

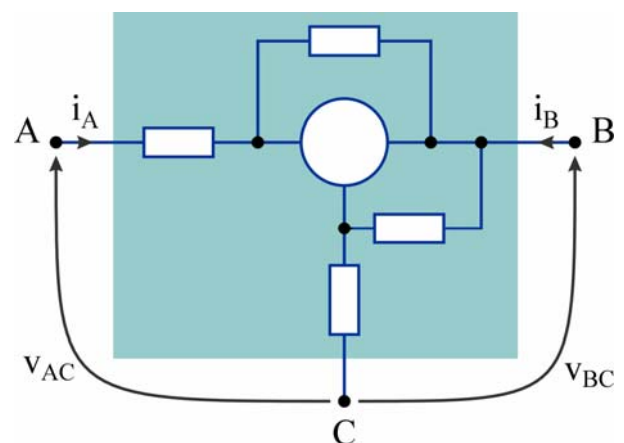
Componenti equivalenti

- Due componenti si dicono **equivalenti** se impongono gli stessi vincoli alle tensioni e alle correnti ai loro terminali, cioè se hanno le stesse equazioni caratteristiche
- Se un componente viene sostituito con un componente equivalente, le equazioni del circuito non cambiano
 - ➔ anche le tensioni e le correnti non cambiano
- *L'equivalenza riguarda esclusivamente il comportamento ai terminali, i fenomeni che avvengono all'interno di componenti equivalenti possono essere diversi*

59

Sottocircuiti

- Un blocco formato da componenti collegati tra loro (**sottocircuito**) che interagisce con la parte restante del circuito mediante un certo numero di terminali (**terminali esterni**) può essere considerato a sua volta un componente
- Le relazioni costitutive di questo componente possono essere ottenute a partire dalle leggi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive dei componenti da cui è formato, eliminando le tensioni e le correnti relative ai terminali interni
- Il concetto di equivalenza può essere esteso anche ai sottocircuiti
 - ➔ Se un sottocircuito viene sostituito con un sottocircuito equivalente, le tensioni e le correnti all'esterno del sottocircuito non cambiano



60

Modello elettromagnetico e modello circuitale

- **Modello elettromagnetico (Equazioni di Maxwell)**
 - ◆ Validità generale
 - ◆ Il sistema è descritto mediante grandezze dipendenti dal tempo e dalle coordinate spaziali
 - ◆ Richiede la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali
- **Modello circuitale**
 - ◆ Applicabile solo in casi particolari
 - ◆ Il sistema è descritto mediante grandezze che possono dipendere dal tempo ma sono indipendenti dalle coordinate spaziali
 - ◆ Richiede la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie o di equazioni algebriche

61

Equazioni fondamentali dell'Elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$
Equazioni di Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Equazioni di divergenza	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$

62

Limiti di validità del modello circuitale

- Il modello circuitale può essere derivato in termini rigorosi dalle equazioni di Maxwell per sistemi nei quali tutte le grandezze elettromagnetiche sono costanti nel tempo (**condizioni di regime stazionario**)
 - ◆ In particolare in regime stazionario sono nulle in tutto il sistema le derivate rispetto al tempo di **E** e **B**
 - ➔ Valgono le leggi di Kirchhoff
- Nel caso di grandezze elettromagnetiche variabili nel tempo è possibile dedurre modello circuitale dal modello elettromagnetico mediante opportune approssimazioni se le variazioni sono *sufficientemente lente* (**condizioni quasi stazionarie**)
 - ◆ In particolare le variazioni devono essere sufficientemente lente da consentire di trascurare le derivate rispetto al tempo di **E** e **B** nella regione esterna ai componenti (mentre si può ammettere che tali derivate assumano valori apprezzabilmente diversi da zero all'interno delle superfici limite dei componenti)

63

Limiti di validità del modello circuitale

- Per specificare cosa si intende per variazioni *sufficientemente lente* si può fare riferimento al **criterio del tempo di transito**
- Secondo il modello elettromagnetico, l'effetto della variazione di una grandezza elettromagnetica in un punto del sistema si propaga con una velocità finita c (**velocità della luce**, valore nel vuoto: $c_0 = 299792458$ m/s)
- L'effetto viene avvertito all'interno del sistema con un **ritardo di propagazione** dipendente dalla distanza dal punto considerato
- Se la massima distanza tra due punti del sistema è d_{\max} , il massimo ritardo di propagazione (**tempo di transito**) è

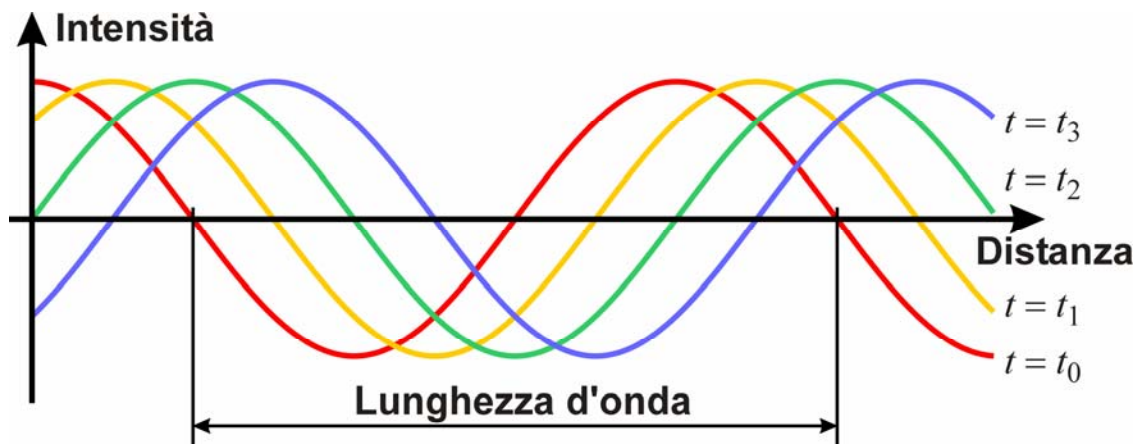
$$\tau_{\max} = \frac{d_{\max}}{c}$$

- Il modello circuitale non fa riferimento alle coordinate spaziali
- ➔ Affinché sia utilizzabile occorre che i ritardi siano trascurabili
- ➔ *Le variazioni devono essere abbastanza lente da permettere di considerare ogni grandezza elettromagnetica costante nell'intervallo τ_{\max}*

64

Limiti di validità del modello circuitale

- **Ipotesi:** le grandezze elettromagnetiche variano con legge sinusoidale
 - ◆ **frequenza** f
 - ◆ **periodo** $T = 1/f$
 - ◆ **lunghezza d'onda** $\lambda = cT = c/f$
- *La lunghezza d'onda rappresenta la distanza percorsa da un'onda in un tempo pari a un periodo e corrisponde alla distanza tra due punti consecutivi dell'onda aventi uguale fase*



65

Limiti di validità del modello circuitale

- Affinché il modello circuitale sia utilizzabile deve valere la condizione
$$T \gg \tau_{\max}$$
 - ➔ *Il periodo deve essere molto grande rispetto al tempo di transito*
- La condizione può essere posta anche nella forma
$$cT \gg c\tau_{\max} \quad \Rightarrow \quad \lambda \gg d_{\max}$$
 - ➔ *La massima dimensione del sistema deve essere trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda*
- Variazioni di tipo più generale possono essere espresse mediante sovrapposizione di funzioni sinusoidali (**serie** o **integrali di Fourier**)
 - ➔ Le condizioni precedenti devono essere verificate in corrispondenza della massima frequenza che occorre considerare

66

Limiti di validità del modello circuitale

f	T	$\lambda_0 = c_0/f$
50 Hz	20 ms	6000 km
100 Hz	10 ms	3000 km
1 kHz	1 ms	300 km
10 kHz	100 μ s	30 km
20 kHz	50 μ s	15 km
100 kHz	10 μ s	3 km
1 MHz	1 μ s	300 m
10 MHz	100 ns	30 m
100 MHz	10 ns	3 m
1 GHz	1 ns	300 mm
10 GHz	100 ps	30 mm

67

Circuiti concentrati e distribuiti

- I circuiti studiati in questo corso sono detti **circuiti a parametri concentrati**
 - ◆ sistemi con dimensione abbastanza piccole da consentire di trascurare i ritardi di propagazione
 - ◆ descritti mediante grandezze che non dipendono dalle coordinate spaziali
 - ◆ il comportamento non dipende dalle posizioni relative dei componenti, ma solo dal modo in cui sono collegati
- Esistono anche sistemi che si estendono prevalentemente in una o due dimensioni, lungo le quali i ritardi di propagazione non sono trascurabili (per esempio le *linee di trasmissione*)
 - ◆ Per questi sistemi è possibile utilizzare modelli di tipo circuitale che fanno uso di grandezze dipendenti da una o due coordinate spaziali (➔ **circuiti a parametri distribuiti**)

68