

Teoremi dei circuiti

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 12-3-2014)

Teorema di Tellegen

- **Ipotesi:**

- ◆ Circuito con n nodi e l lati
- ◆ Versi di riferimento scelti per tutti i lati secondo la convenzione dell'utilizzatore
- ◆ $\{v_1, \dots, v_l\}$ = insieme di tensioni che soddisfano la LKV per il circuito considerato
- ◆ $\{i_1, \dots, i_l\}$ = insieme di correnti che soddisfano la LKI per il circuito considerato

➔ La somma estesa a tutti i lati del circuito dei prodotti $v_k i_k$ è nulla

$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = 0$$

Teorema di Tellegen – Dimostrazione (1)

- Le tensioni dei lati soddisfano la LKV
 - ➔ possono essere espresse come differenze tra tensioni di nodo (rispetto ad un nodo di riferimento arbitrario)
- Si indica con $i_{PQ} = -i_{QP}$ la corrente totale dei lati che collegano il nodo P al nodo Q (diretta da P a Q)
 - ◆ se non c'è nessun lato tra i nodi P e Q ➔ $i_{PQ} = 0$
 - ◆ se c'è un solo lato k che collega i nodi P e Q
 - se il lato va da P a Q ➔ $v_k i_k = (v_P - v_Q) i_{PQ}$
 - se il lato va da Q a P ➔ $v_k i_k = (v_Q - v_P) i_{QP} = (v_P - v_Q) i_{PQ}$
 - ◆ se ci sono più lati che collegano i nodi P e Q
 - ➔ il prodotto $(v_P - v_Q) i_{PQ}$ rappresenta la somma dei prodotti $v_k i_k$ estesa a tutti questi lati

3

Teorema di Tellegen – Dimostrazione (2)

➔ Quindi si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^l v_k i_k &= \frac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} \sum_{Q=0}^{n-1} (v_P - v_Q) i_{PQ} = \frac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} \sum_{Q=0}^{n-1} (v_P i_{PQ} + v_Q i_{QP}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} v_P \underbrace{\left(\sum_{Q=0}^{n-1} i_{PQ} \right)}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{Q=0}^{n-1} v_Q \underbrace{\left(\sum_{P=0}^{n-1} i_{QP} \right)}_{=0} = 0\end{aligned}$$

- ◆ I fattori $\frac{1}{2}$ derivano dal fatto che, se i nodi P e Q variano su tutto l'insieme dei nodi del circuito, ogni lato viene contato due volte
- ◆ Le sommatorie tra parentesi sono nulle perché rappresentano rispettivamente la corrente totale uscente dal nodo P e dal nodo Q (e le correnti dei lati per ipotesi soddisfano la LKI)

4

Teorema di Tellegen - Note

- Il teorema richiede solo che le tensioni e le correnti dei lati soddisfino le leggi di Kirchhoff, non è necessario che soddisfino anche le equazioni dei componenti
- Se le tensioni e le correnti soddisfano anche le equazioni dei componenti i prodotti $v_k i_k$ rappresentano le potenze assorbite
 - ➔ La somma delle potenze assorbite dai componenti di un circuito è nulla
 - ◆ Si indica con \mathcal{K}_G l'insieme dei valori di k per i quali il lato k è un generatore

$$-\sum_{k \in \mathcal{K}_G} v_k i_k = \sum_{k \notin \mathcal{K}_G} v_k i_k$$

- ➔ La potenza complessivamente erogata dai generatori è uguale alla somma delle potenze assorbite dagli altri componenti

5

Teorema di sostituzione

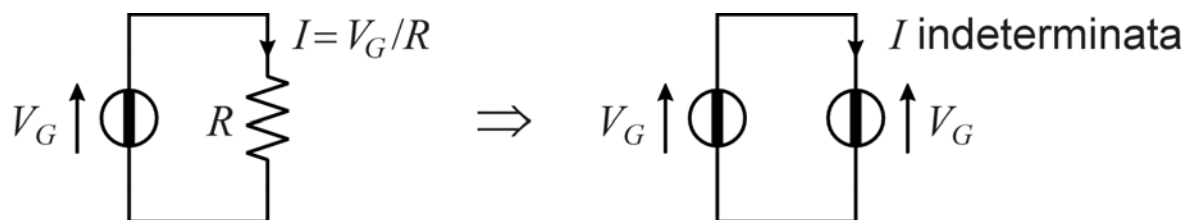
- **Ipotesi:**
 - ◆ Circuito con l lati
 - ◆ Unica soluzione $v_k = v_{k0}$ $i_k = i_{k0}$ ($k = 1, \dots, l$)
 - ◆ Il lato h corrisponde a un bipolo
 - ◆ **Caso a)**: Il circuito che si ottiene sostituendo il lato h con un generatore di tensione v_{h0} ammette un'unica soluzione
 - ◆ **Caso b)**: Il circuito che si ottiene sostituendo il lato h con un generatore di corrente i_{h0} ammette un'unica soluzione
- ➔ Sia nel caso a) sia nel caso b) la soluzione del circuito con il generatore al posto del lato h coincide con la soluzione del circuito originale
- **Dimostrazione:** è immediato verificare che la soluzione del circuito originale soddisfa anche le equazioni dei circuiti modificati a) e b)
 - ◆ le equazioni dei collegamenti dei due circuiti coincidono
 - ◆ la corrente (caso a) o la tensione (caso b) del lato h è compatibile con il generatore che sostituisce il lato stesso

6

Teorema di sostituzione - Nota

- Il teorema si può applicare solo se il circuito ottenuto sostituendo il lato h con un generatore ammette una e una sola soluzione
- In alcuni casi la sostituzione di un lato con un generatore può dare origine a circuiti impossibili o indeterminati

Esempio



7

Teorema di sovrapposizione

- **Ipotesi:** circuito formato da componenti lineari resistivi e da
 - ◆ N_V generatori indipendenti di tensione v_{G1}, \dots, v_{GN_V}
 - ◆ N_I generatori indipendenti di corrente i_{G1}, \dots, i_{GN_I}
- ➔ La tensione e la corrente del generico lato h sono combinazioni lineari delle tensioni e delle correnti impresse dei generatori indipendenti

$$v_h = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} r_{hk} i_{Gk}$$

$$i_h = \sum_{k=1}^{N_V} g_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \beta_{hk} i_{Gk}$$

- **Dimostrazione:** la proprietà è diretta conseguenza del fatto che le tensioni e le correnti dei lati sono la soluzione di un sistema di equazioni lineari algebriche nel quale le tensioni e le correnti impresse dei generatori costituiscono i termini noti

8

Coefficients di rete

- I coefficienti delle combinazioni sono detti **coefficienti di rete**
- I coefficienti di rete non dipendono dalle tensioni e correnti dei generatori indipendenti, ma solo dai parametri degli altri componenti

$$\alpha_{hk} = \frac{v_h}{v_{Gk}} \left| \begin{array}{l} v_{Gj}=0 \forall j \neq k \\ i_{Gj}=0 \forall j \end{array} \right.$$

guadagno di tensione

$$r_{hk} = \frac{v_h}{i_{Gk}} \left| \begin{array}{l} v_{Gj}=0 \forall j \\ i_{Gj}=0 \forall j \neq k \end{array} \right.$$

resistenza di ingresso ($h = k$)
resistenza di trasferimento ($h \neq k$)

$$g_{hk} = \frac{i_h}{v_{Gk}} \left| \begin{array}{l} v_{Gj}=0 \forall j \neq k \\ i_{Gj}=0 \forall j \end{array} \right.$$

conduttanza di ingresso ($h = k$)
conduttanza di trasferimento ($h \neq k$)

$$\beta_{hk} = \frac{i_h}{i_{Gk}} \left| \begin{array}{l} v_{Gj}=0 \forall j \\ i_{Gj}=0 \forall j \neq k \end{array} \right.$$

guadagno di corrente

9

Sovrapposizione degli effetti

- Ciascuno dei termini delle sommatorie rappresenta il valore che assume la tensione v_h o la corrente i_h se nel circuito agisce un solo generatore indipendente e tutti gli altri sono *spenti* (cioè le loro tensioni o correnti sono azzerate)

$$v_h = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} r_{hk} i_{Gk}$$

$$i_h = \sum_{k=1}^{N_V} g_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \beta_{hk} i_{Gk}$$

- ➔ *Le tensioni e le correnti possono essere ottenute sovrapponendo gli effetti prodotti dai singoli generatori indipendenti*

10

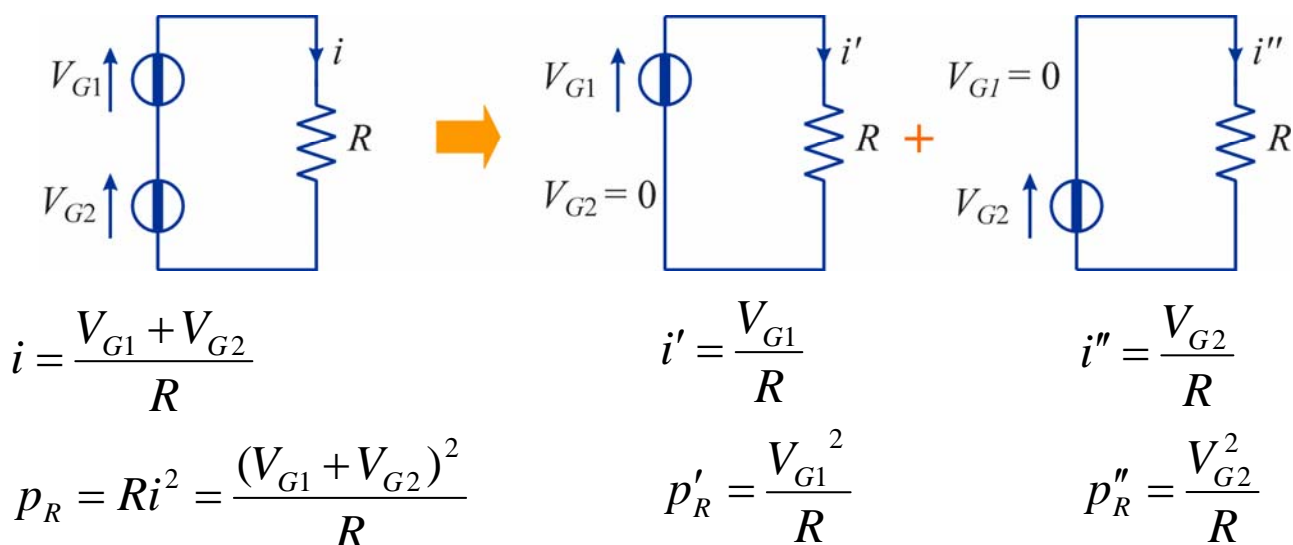
Analisi mediante sovrapposizione degli effetti

- L'analisi di un circuito con più generatori indipendenti può essere eseguita studiando i tutti i circuiti che si ottengono mantenendo un solo generatore volta e azzerando i rimanenti
 - ◆ *Spegnere un generatore indipendente di tensione corrisponde a sostituirlo con un cortocircuito*
 - ◆ *Spegnere un generatore indipendente di corrente corrisponde a sostituirlo con un circuito aperto*
- La soluzione del circuito è ottenuta sommando i contributi dei singoli generatori (se in tutte le fasi della risoluzione si mantengono gli stessi versi di riferimento)
- Il procedimento è conveniente quando i circuiti con un solo generatore hanno struttura più semplice rispetto al circuito completo
- In alcuni casi può essere conveniente dividere i generatori in gruppi, invece che considerarli singolarmente

11

Teorema di sovrapposizione e potenza

- Il teorema di sovrapposizione **non vale** per le potenze, legate da relazioni non lineari alle tensioni e alle correnti dei generatori



$$i = i' + i'' \quad p_R \neq p'_R + p''_R$$

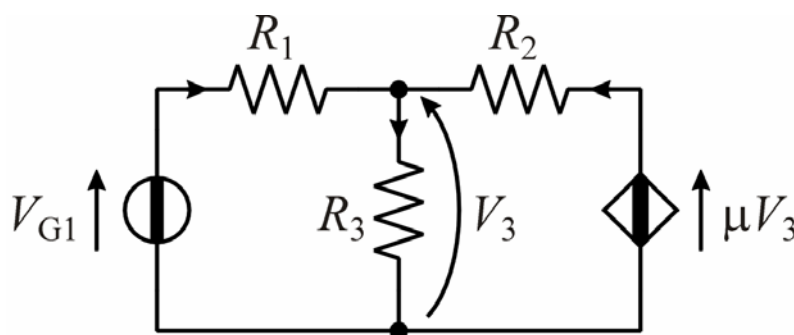
12

Teorema di sovrapposizione e generatori dipendenti

- Il teorema di sovrapposizione non riguarda i generatori dipendenti dato che le loro tensioni o correnti non sono termini noti delle equazioni del circuito
- E' comunque possibile utilizzare il teorema di sovrapposizione per risolvere circuiti con generatori dipendenti mediante il seguente procedimento:
 - ◆ Si sostituiscono i generatori dipendenti con generatori indipendenti di valore incognito
 - ◆ Mediante sovrapposizione, si determinano le tensioni o le correnti che controllano i generatori (**variabili di controllo**) in funzione delle tensioni o correnti incognite dei generatori (**variabili controllate**)
 - ◆ Si sostituiscono alle variabili controllate le loro espressioni in funzione delle variabili di controllo
 - ◆ In questo modo si ottengono delle equazioni in cui compaiono come incognite le sole variabili di controllo
 - ◆ Note le variabili di controllo, e quindi anche quelle controllate, si determinano le rimanenti tensioni e correnti

13

Esempio (1)



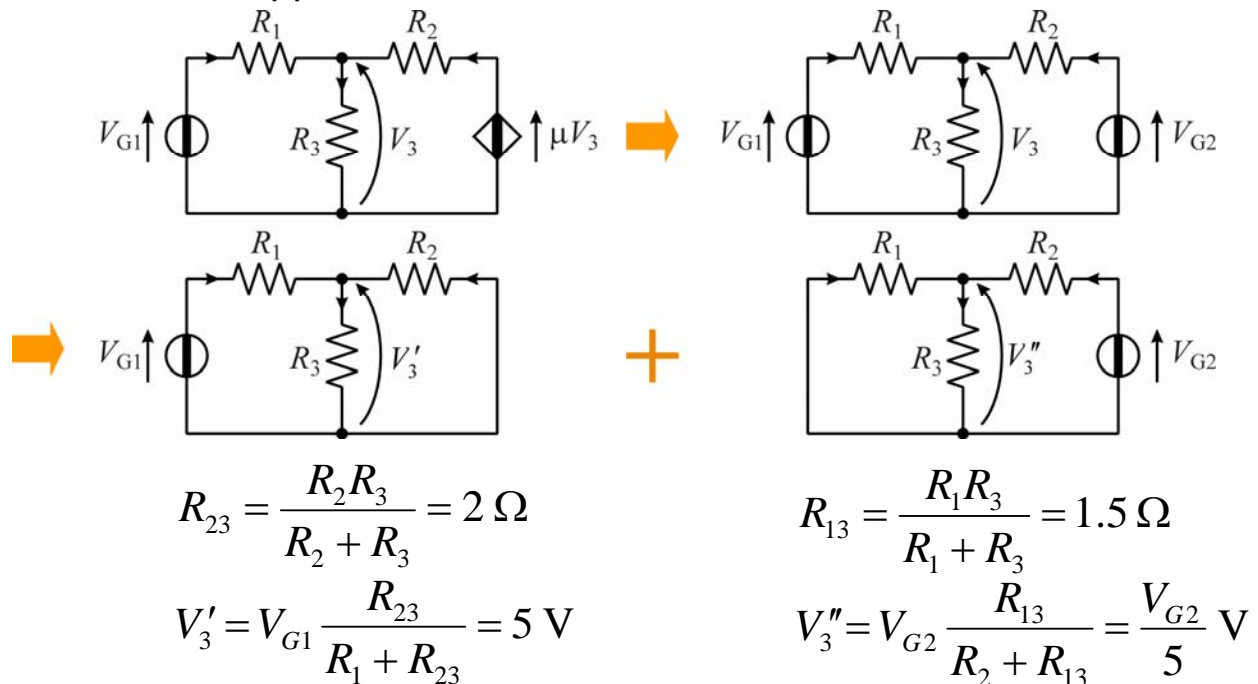
$$\begin{aligned}R_1 &= 2 \Omega \\R_2 &= 3 \Omega \\R_3 &= 6 \Omega \\V_{G1} &= 10 \text{ V} \\ \mu &= 2\end{aligned}$$

Determinare le correnti nei resistori.

14

Esempio (2)

- Si sostituisce il generatore dipendente con un generatore indipendente di tensione incognita V_{G2} e si calcola la variabile di controllo V_3 mediante sovrapposizione.



15

Esempio (3)

- Sommando i contributi dei due generatori e sostituendo a V_{G2} la sua espressione in funzione della variabile di controllo V_3 si ottiene un'equazione nell'incognita V_3

$$\left. \begin{aligned} V_3 = V'_3 + V''_3 = 5 + \frac{V_{G2}}{5} \\ V_{G2} = \mu V_3 = 2V_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_3 = 5 + \frac{2}{5} V_3 \Rightarrow V_3 = 15 \text{ V}$$

- Nota V_3 si possono determinare le correnti nei resistori

$$I_1 = \frac{V_{G1} - V_3}{R_1} = -2.5 \text{ A}$$

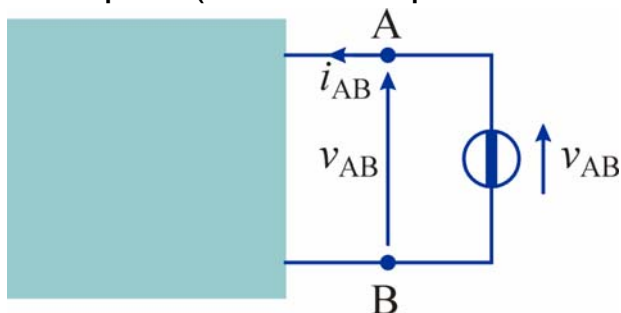
$$I_2 = \frac{V_{G2} - V_3}{R_2} = \frac{(\mu - 1)V_3}{R_2} = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = 2.5 \text{ A}$$

16

Resistenza equivalente (1)

- Si consideri un bipolo A-B formato da componenti lineari (non contenente generatori indipendenti)
- Se il bipolo è comandato in tensione è possibile collegare ai suoi terminali un generatore indipendente di tensione
- Il circuito così ottenuto è lineare
 - ➔ la corrente entrante nel bipolo risulta proporzionale alla tensione del generatore indipendente
 - ➔ *il bipolo è equivalente a un resistore*
- La costante di proporzionalità rappresenta la conduttanza equivalente del bipolo (e il suo reciproco la resistenza equivalente)



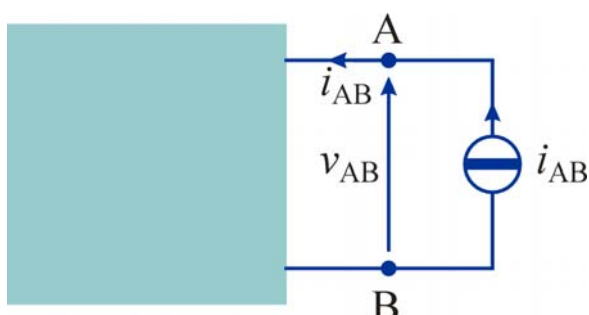
$$G_{eq} = \frac{i_{AB}}{v_{AB}}$$

$$R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}}$$

17

Resistenza equivalente (2)

- Se il bipolo A-B è comandato in corrente è possibile collegare ai suoi terminali un generatore indipendente di corrente
- Dato che il circuito è lineare, la tensione ai terminali del bipolo risulta proporzionale alla corrente del generatore indipendente
- La costante di proporzionalità rappresenta la resistenza equivalente del bipolo (e il suo reciproco la conduttanza equivalente)



$$R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}}$$

$$G_{eq} = \frac{i_{AB}}{v_{AB}}$$

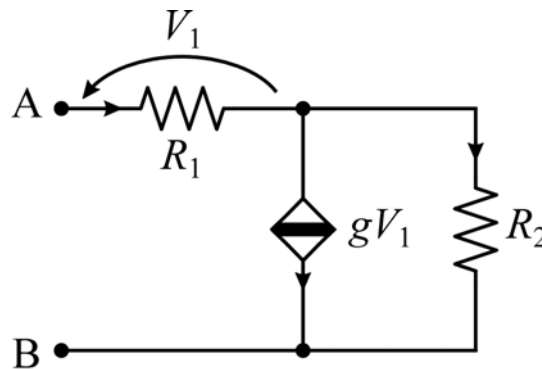
18

Resistenza equivalente - Nota

- In casi particolari il valore della resistenza equivalente può risultare negativo
- Se $R_{eq} < 0$, in ogni condizione di funzionamento (tranne il che per $v_{ab} = 0, i_{ab} = 0$) la potenza erogata dal bipolo è positiva, quindi il bipolo A-B è attivo
- ➔ La resistenza equivalente può essere negativa solo se il bipolo A-B contiene componenti attivi (come i generatori dipendenti)

19

Esempio



Determinare la resistenza equivalente del bipolo A-B.

- Il bipolo è comandato sia in tensione che in corrente
- ➔ E' possibile valutare la resistenza equivalente
 - ◆ collegando un generatore di tensione arbitraria V_{AB} ai suoi terminali e calcolando la corrente I_{AB}
 - ◆ collegando un generatore di corrente arbitraria I_{AB} ai suoi terminali e calcolando la tensione V_{AB}

20

Esempio – Metodo 1

- Si collega un generatore di tensione V_{AB} ai terminali del bipolo A-B (il valore di V_{AB} è irrilevante ai fini del calcolo di R_{eq})
- In primo luogo si ricava l'espressione della tensione V_1 , che controlla il generatore dipendente, in funzione di V_{AB}

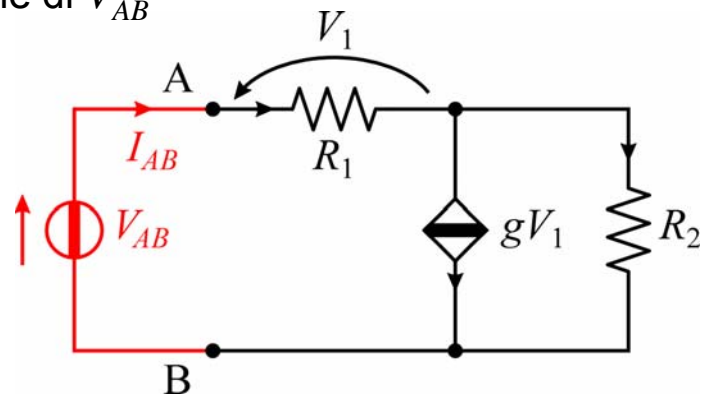
- Dalla LKV si ha

$$V_{AB} = V_1 + V_2$$

- Si esprime V_2 in funzione di V_1

$$V_2 = R_2 I_2 = R_2 (I_1 - gV_1) =$$

$$= R_2 \left(\frac{V_1}{R_1} - gV_1 \right)$$



- Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente si ricava

$$V_{AB} = V_1 + \frac{R_2}{R_1} V_1 - gR_2 V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_{AB} \frac{R_1}{R_1 + R_2 - gR_1 R_2}$$

21

Esempio – Metodo 1

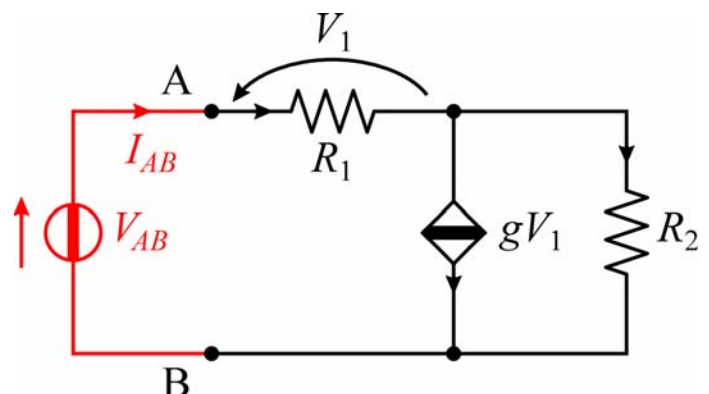
- Nota V_1 si può calcolare la corrente I_{AB}

$$I_{AB} = I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_{AB}}{R_1 + R_2 - gR_1 R_2}$$

- Dato che il bipolo A-B è lineare, si è ottenuta una corrente proporzionale alla tensione del generatore indipendente

- ➔ Il rapporto tra V_{AB} e I_{AB} non dipende da V_{AB} e rappresenta la resistenza equivalente del bipolo A-B

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = R_1 + R_2 - gR_1 R_2$$



22

Esempio – Metodo 2

- Si collega un generatore di tensione V_{AB} ai terminali del bipolo A-B (il valore di V_{AB} è irrilevante ai fini del calcolo di R_{eq})
- Dato che R_1 è in serie al generatore, si ottiene immediatamente l'espressione della variabile di controllo in funzione di I_{AB}

$$V_1 = R_1 I_{AB}$$

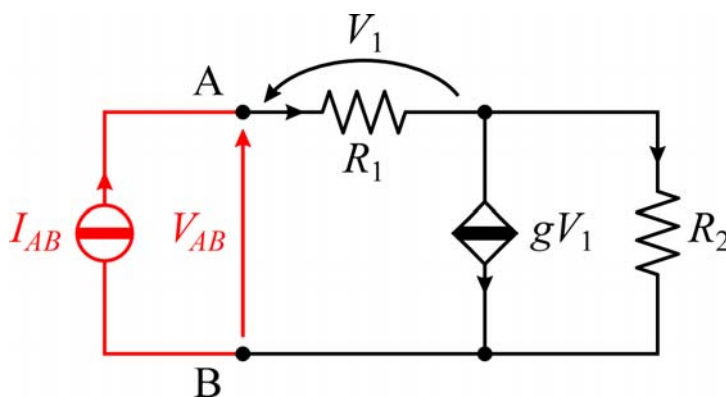
- Si calcola la tensione V_{AB}

- Dalla LKV si ha

$$V_{AB} = V_1 + V_2$$

- Si ricava l'espressione di V_2 in funzione di I_{AB}

$$V_2 = R_2 I_2 = R_2 (I_1 - gV_1) = (R_2 - gR_1 R_2) I_{AB}$$



23

Esempio – Metodo 2

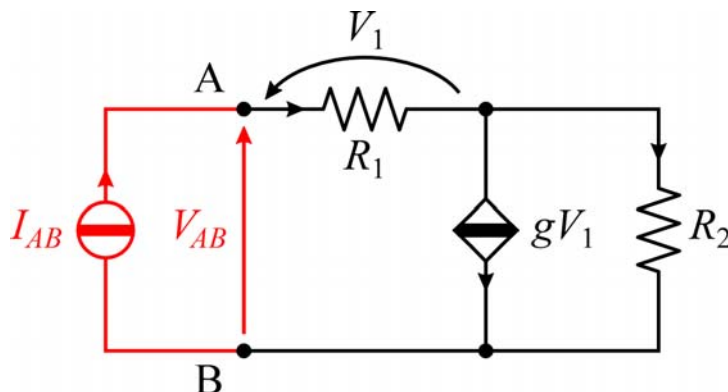
- Utilizzando le espressioni di V_1 e V_2 in funzione di I_{AB} , si ricava la seguente espressione di V_{AB}

$$V_{AB} = (R_1 + R_2 - gR_1 R_2) I_{AB}$$

- Dato che il bipolo è A-B lineare, si è ottenuta una tensione proporzionale alla corrente del generatore indipendente

- ➔ Il rapporto tra V_{AB} e I_{AB} non dipende da I_{AB} e rappresenta la resistenza equivalente del bipolo A-B

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = R_1 + R_2 - gR_1 R_2$$



24

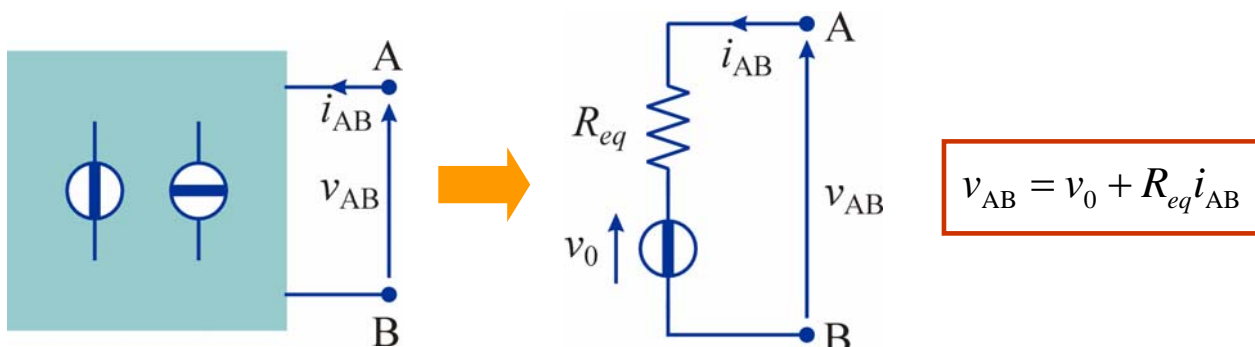
Note

- Se il bipolo è comandato sia in tensione che in corrente i due metodi sono equivalenti
 - ➔ Si può scegliere di utilizzare il generatore con cui la soluzione del circuito risulta più semplice
- Se si deve risolvere il circuito per via numerica, si può attribuire alla tensione o alla corrente del generatore indipendente un valore scelto arbitrariamente. Ad esempio:
 - ◆ si può collegare al bipolo un generatore di tensione da 1 V, in modo che il valore numerico (in ampere) della corrente I_{AB} coincida con quello della conduttanza equivalente del bipolo (in siemens)
 - ◆ si può collegare un generatore di corrente da 1 A, in modo che il valore numerico (in volt) della tensione V_{AB} coincida con quello della resistenza equivalente (in ohm)

25

Teorema di Thévenin

- **Ipotesi:** si considera un bipolo A-B
 - ◆ formato da componenti lineari e generatori indipendenti
 - ◆ comandato in corrente
- ➔ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di tensione v_0 in serie con un resistore R_{eq}
 - ◆ v_0 è la tensione a vuoto del bipolo A-B
 - ◆ R_{eq} è la resistenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



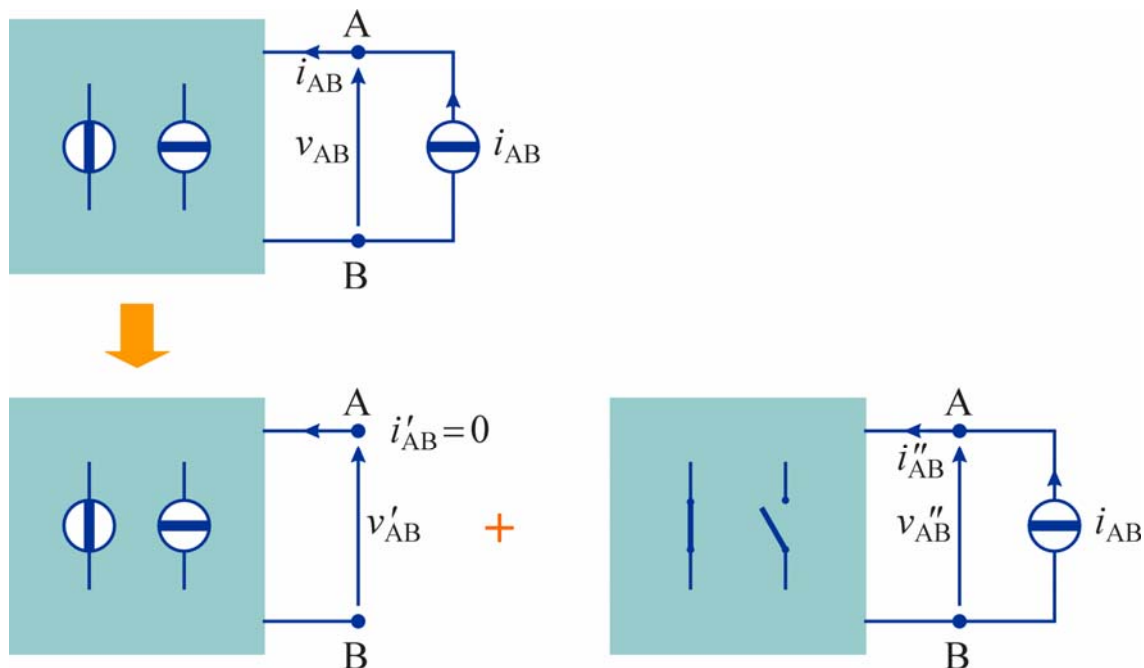
26

Teorema di Thévenin – Dimostrazione (1)

- Per ipotesi il bipolo è comandato in corrente
 - ➔ ad ogni valore della corrente i_{AB} corrisponde uno e un solo valore della tensione v_{AB}
- Per determinare la relazione tra la corrente e la tensione si può imporre il valore della corrente ai terminali mediante un generatore indipendente di corrente i_{AB} e valutare la tensione v_{AB} risolvendo il circuito così ottenuto
- Dato che il circuito è lineare, è possibile applicare il teorema di sovrapposizione e scomporre la tensione v_{AB} in due contributi
 - ◆ uno dovuto ai generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo, valutato con il generatore i_{AB} azzerato (➔ circuito aperto)
 - ◆ uno dovuto alla corrente i_{AB} , valutato con i generatori indipendenti interni azzerati

27

Teorema di Thévenin – Dimostrazione (2)



$$v_{AB} = v'_{AB} + v''_{AB} = v_0 + R_{eq} i_{AB}$$

28

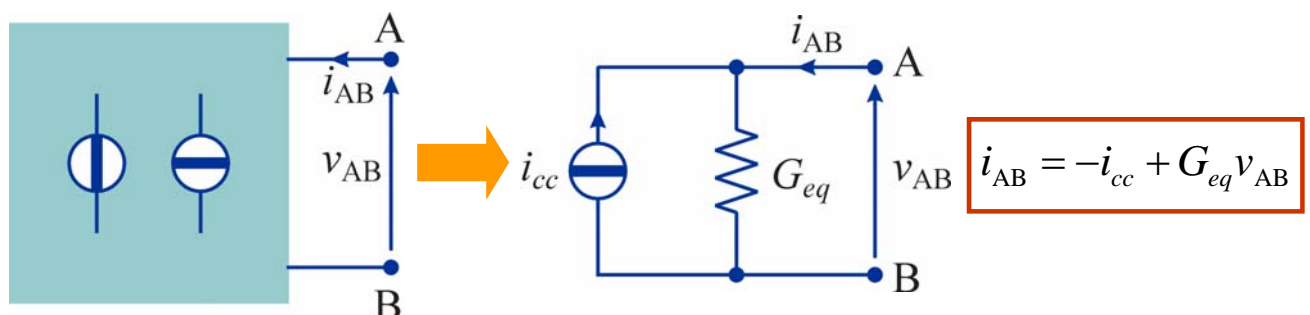
Teorema di Thévenin – Dimostrazione (3)

- Il primo contributo, v'_{AB} , rappresenta la **tensione a vuoto** del bipolo A-B
 - ◆ è una combinazione lineare delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B
 - ◆ non dipende dalla corrente i_{AB}
- Il secondo contributo, v''_{AB} , è proporzionale alla corrente del generatore esterno
 - ◆ la costante di proporzionalità, cioè il rapporto tra v''_{AB} e i_{AB} , rappresenta la **resistenza equivalente** del bipolo che si ottiene azzerando i generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B

29

Teorema di Norton

- **Ipotesi:** si considera un bipolo A-B
 - ◆ formato da componenti lineari e generatori indipendenti
 - ◆ comandato in tensione
- ➔ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di corrente i_{cc} in parallelo con un resistore di conduttanza G_{eq}
 - ◆ i_{cc} è la corrente di cortocircuito del bipolo A-B (con verso di riferimento, nel cortocircuito, diretto da A a B)
 - ◆ G_{eq} ($=1/R_{eq}$) è la conduttanza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



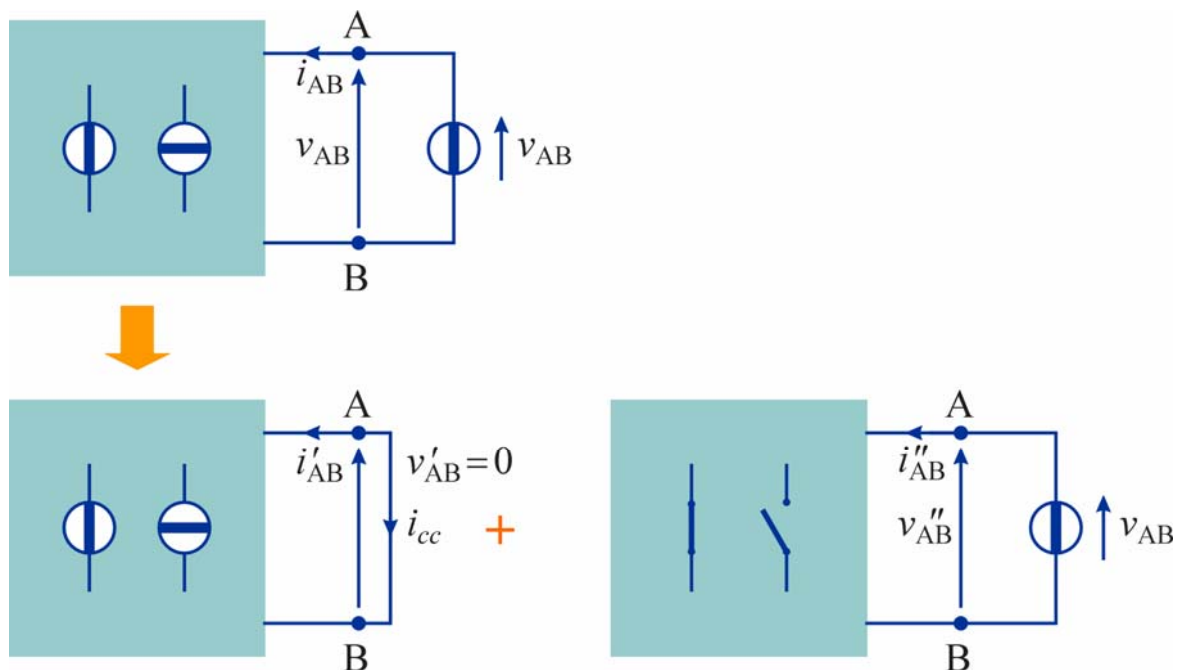
30

Teorema di Norton – Dimostrazione (1)

- Per ipotesi il bipolo è comandato in tensione
 - ➔ ad ogni valore della tensione v_{AB} corrisponde uno e un solo valore della corrente i_{AB}
- Per determinare la relazione tra la tensione e la corrente si può imporre il valore della tensione ai terminali mediante un generatore indipendente di tensione v_{AB} e valutare la corrente i_{AB} risolvendo il circuito così ottenuto
- Dato che il circuito è lineare, è possibile applicare il teorema di sovrapposizione e scomporre la corrente i_{AB} in due contributi
 - ◆ uno dovuto ai generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo, valutato con il generatore v_{AB} azzerato (➔ cortocircuito)
 - ◆ uno dovuto alla tensione v_{AB} , valutato con i generatori indipendenti interni azzerati

31

Teorema di Norton – Dimostrazione (2)



$$i_{AB} = i'_{AB} + i''_{AB} = -i_{cc} + G_{eq}v_{AB}$$

32

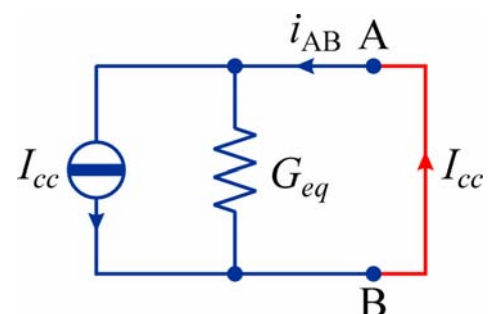
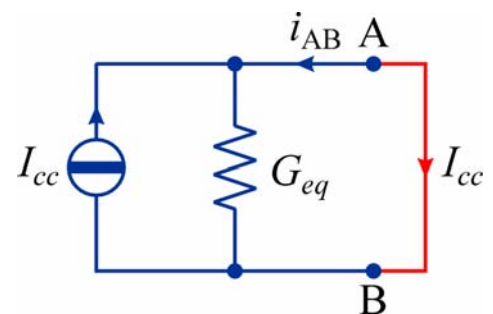
Teorema di Norton – Dimostrazione (3)

- Il primo contributo, i'_{AB} , rappresenta l'opposto della **corrente di cortocircuito** del bipolo A-B ($i'_{AB} = -i_{cc}$)
 - ◆ è una combinazione lineare delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B
 - ◆ non dipende dalla tensione v_{AB}
- Il secondo contributo, i''_{AB} , è proporzionale alla tensione del generatore esterno
 - ◆ la costante di proporzionalità, cioè il rapporto tra i''_{AB} e v_{AB} , rappresenta la **conduttanza equivalente** del bipolo che si ottiene azzerando i generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B

33

Teorema di Norton – Nota

- Il verso di riferimento attribuito alla corrente nel cortocircuito è correlato al verso del generatore presente nel circuito equivalente
 - ◆ una corrente diretta (nel cortocircuito) da A verso B corrisponde alla corrente di un generatore con il verso di riferimento entrante nel nodo A
 - ◆ se il verso di fosse scelto da B ad A, la corrente corrisponderebbe a quella di un generatore con verso entrante nel nodo B, quindi il circuito equivalente dovrebbe essere modificato come indicato nella figura

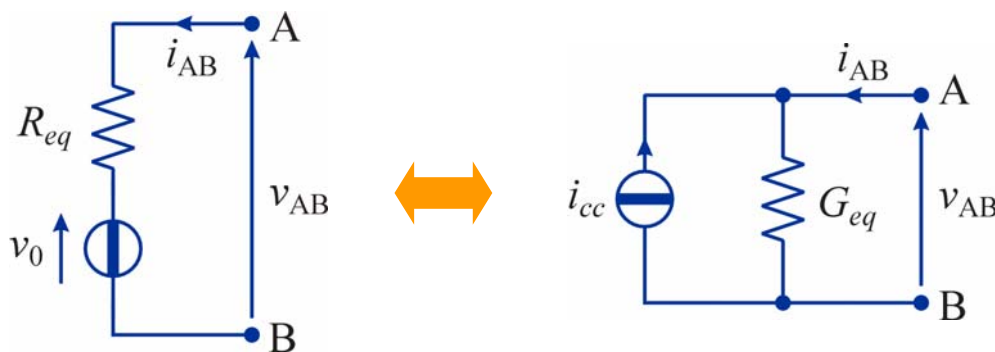


34

Bipoli equivalenti di Thévenin e Norton

- Se il bipolo A-B ammette sia il circuito equivalente di Thévenin sia il circuito equivalente di Norton, questi sono anche equivalenti tra loro, quindi (con i versi di riferimento indicati nella figura) valgono le relazioni

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} \quad v_0 = R_{eq} i_{cc}$$



35

Calcolo dei parametri dei bipoli equivalenti di Thévenin e Norton

- E' possibile ricavare simultaneamente i parametri del bipolo equivalente di Thévenin (o di Norton) risolvendo il circuito ottenuto collegando al bipolo dato un generatore indipendente di corrente (o di tensione) come è stato fatto per dimostrare i teoremi
- Spesso risulta più conveniente calcolare separatamente i tre parametri
- Per ciascun parametro si deve studiare un circuito diverso:
 - analisi del bipolo a vuoto, per il calcolo di V_0
 - analisi del bipolo con i terminali in cortocircuito per il calcolo di I_{cc}
 - analisi del bipolo con i generatori indipendenti azzerati per il calcolo di R_{eq}
- E' opportuno sottolineare che
 - le tre analisi sono indipendenti tra loro: nello studio di ciascuno di questi circuiti non si possono utilizzare valori di tensioni o correnti determinati risolvendo uno degli altri due circuiti
 - per il calcolo di R_{eq} **non si devono azzerare i generatori dipendenti**

36