Componenti dinamici

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 10-10-2013)

Carica e flusso

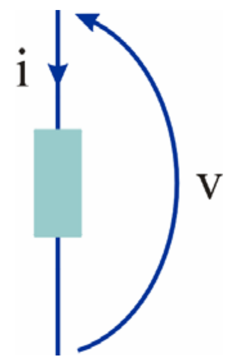
- Si considera un bipolo e si indicano con $v(t)$ e $i(t)$ la sua tensione e la sua corrente
- Definizione: **carica associata alla corrente $i(t)$**

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

  - Unità di misura: coulomb (C)
- Definizione: **flusso associato alla tensione $v(t)$**

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

  - Unità di misura: weber (Wb)



Carica e flusso - Note

- L'estremo inferiore degli integrali è posto a $-\infty$ per indicare che si deve tenere conto dell'andamento della corrente o della tensione per tutti gli istanti che precedono t
- In pratica questo significa che l'integrazione deve iniziare dal primo istante in cui la corrente o la tensione assume valore diverso da zero
- Formalmente è possibile associare una carica e un flusso alla corrente e alla tensione di un generico bipolo
- Solo in alcuni casi particolari a queste grandezze può essere attribuita una semplice interpretazione fisica (es. carica su un conduttore o flusso concatenato con un avvolgimento)

Bipoli resistivi, capacitivi e induttivi

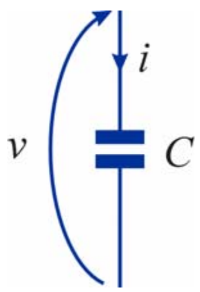
- **Bipolo resistivo**
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $v(t)$ e $i(t)$
    $$\mathrm{f_R}\left[v(t), i(t), t\right] = 0$$
- **Bipolo capacitivo** (**condensatore**)
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $v(t)$ e $q(t)$
    $$\mathrm{f_C}\left[v(t), q(t), t\right] = 0$$
- **Bipolo induttivo** (**induttore**)
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $i(t)$ e $\varphi(t)$
    $$\mathrm{f_L}\left[i(t), \varphi(t), t\right] = 0$$

Condensatori

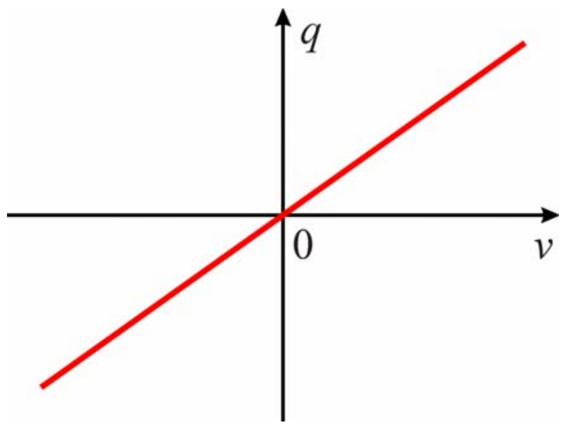
- **Condensatore**: bipolo la cui equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei della tensione e della carica
  $$\mathrm{f_C}[v(t), q(t), t] = 0$$
- **Condensatore tempo invariante**
  $$\mathrm{f_C}[v(t), q(t)] = 0$$
  - **Controllato in tensione**
    $$q(t) = \mathrm{Q}[v(t)] \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d\,\mathrm{Q}(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = C(v) \cdot \frac{dv}{dt}$$
  - **Controllato in carica**
    $$v(t) = \mathrm{V}[q(t)] \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d\,\mathrm{V}(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = S(q) \cdot i(t)$$

Condensatore (lineare tempo-invariante)

Simbolo



Curva caratteristica



- **Equazioni**: $q(t) = Cv(t)$
  $$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$
  (v e i orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore)
- C = **capacità** (unità di misura farad, F)

Condensatore – Proprietà di memoria (1)

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

- La tensione di un condensatore all'istante t dipende dall'andamento della corrente in tutti gli istanti precedenti
  - ➡ il condensatore è un componente **dotato di memoria**
- Si considera il comportamento di un condensatore a partire da un istante iniziale t_0
  - Tensione all'istante t_0

    $$V_0 = v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau$$
  - Carica all'istante t_0

    $$Q_0 = q(t_0) = CV_0$$

Condensatore – Proprietà di memoria (2)

- Tensione per $t > t_0$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = V_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$$

➡ Per determinare la tensione per $t > t_0$ occorre conoscere
  - la tensione (o la carica) per $t = t_0$
  - l'andamento della corrente per $t \geq t_0$

➡ Il valore della tensione (o della carica) all'istante t_0 riassume il comportamento del componente per $t \leq t_0$

Condensatore – Comportamento energetico (1)

- **Potenza assorbita**:

$$\mathrm{p}_a(t) = v(t)i(t) = v(t)\cdot C\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2(t)\right]$$

- **Energia assorbita** fino all'istante t

$$\mathrm{w}_a(t) = \int_{-\infty}^{t}\mathrm{p}_a(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}Cv^2(\tau)\right]d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

➡ L'energia assorbita fino all'istante t è determinata se è noto il valore all'istante t della tensione o della carica

➡ Se $C > 0$ l'energia assorbita fino all'istante t è $\geq 0 \quad \forall\ t$

➡ Se $C > 0$ il condensatore è un componente passivo

Condensatore – Comportamento energetico (2)

- Energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$

$$\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{p}_a(t)dt = \frac{1}{2}C\left[v^2(t_2) - v^2(t_1)\right] = \frac{1}{2C}\left[q^2(t_2) - q^2(t_1)\right]$$

  - Non dipende dall'andamento di $i(t)$ e $v(t)$ nell'intervallo $[t_1\ t_2]$
  - Dipende solo dai valori di v (o di q) agli istanti t_1 e t_2

- Per un condensatore passivo ($C > 0$)
  - L'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è negativa se $|v(t_2)| < |v(t_1)|$
  - L'energia erogata nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ non può superare l'energia assorbita fino a t_1

$$\mathrm{w}_e(t_1,t_2) = -\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \frac{1}{2}C\left[v^2(t_1) - v^2(t_2)\right] \leq \frac{1}{2}Cv^2(t_1) = \mathrm{w}_a(t_1)$$

Condensatore – Comportamento energetico (3)

- Se $v(t_1) = v(t_2)$ l'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è nulla
- Se $v(t)$ non è costante, all'interno dell'intervallo si possono individuare sottointervalli in cui il $|v(t)|$ aumenta e altri in cui diminuisce
- L'energia assorbita quando $|v(t)|$ aumenta è uguale all'energia erogata quando $|v(t)|$ diminuisce

➡ Il condensatore accumula energia ed è in grado di restituirla integralmente

➡ La quantità

$$\mathrm{w}_a(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

rappresenta l'**energia accumulata** nel condensatore all'istante t

- All'interno del condensatore non avvengono fenomeni dissipativi

➡ Il condensatore è un componente **privo di perdite**

Condensatore – Proprietà di continuità

- In un condensatore, se la corrente $i(t)$ è limitata, la tensione $v(t)$ è una funzione continua del tempo
- **Dimostrazione**: Dato che

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$$

la proprietà deriva direttamente dalla proprietà di continuità della funzione integrale:

  - $i(t)$ limitata ➡ $\exists M > 0 : \ |i(t)| \leq M \ \forall t$
  - $\forall t$ e $\forall \Delta t$ risulta

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau) d\tau \leq \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} |i(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} M d\tau = \frac{1}{C} M \Delta t$$

  - di conseguenza

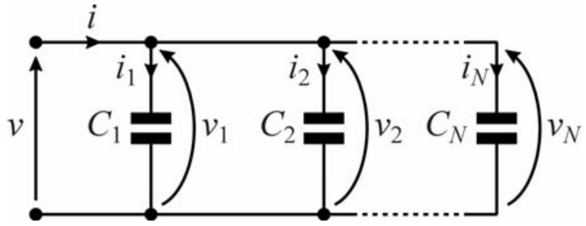
$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[v(t+\Delta t) - v(t) \right] = 0$$

  - quindi $v(t)$ e continua

Condensatori in parallelo

LKI $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

LKV $v = v_k \quad (k = 1, \ldots, N)$



Relazioni costitutive $i_k = C_k \dfrac{dv_k}{dt} \quad (k = 1, \ldots, N)$

➡ $$i = \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{dv_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_P \frac{dv}{dt}$$

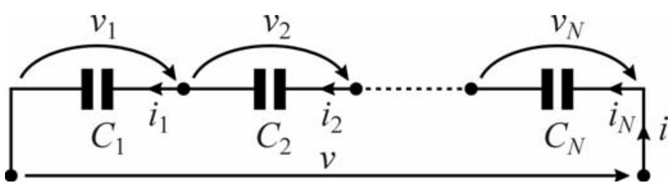
➡ N condensatori in parallelo equivalgono a un condensatore con capacità

$$C_P = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

Condensatori in serie

LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$



Relazioni costitutive $v_k = \dfrac{1}{C_k} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \ldots, N)$

➡ $$v = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^{t} i_k(\tau) d\tau = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k} \right) \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C_S} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$$

➡ N condensatori in serie equivalgono a un condensatore con capacità

$$C_S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}}$$

Induttori

- **Induttore**: bipolo la cui equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei della corrente e del flusso

$$f_L[i(t), \varphi(t), t] = 0$$

- **Induttore tempo invariante**

$$f_L[i(t), \varphi(t)] = 0$$

  - **Controllato in corrente**

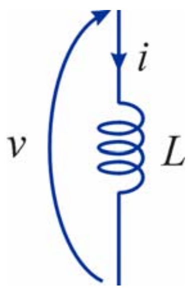
$$\varphi(t) = \Phi[i(t)] \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\Phi(i)}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L(i)\frac{di}{dt}$$

  - **Controllato in flusso**

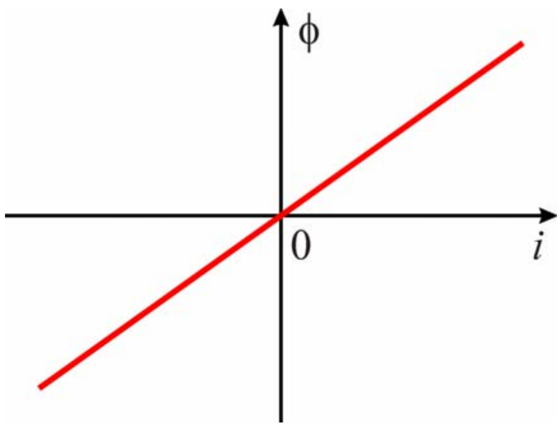
$$i(t) = \mathrm{I}[\varphi(t)] \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{d\,\mathrm{I}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \Gamma(\varphi) \cdot v(t)$$

Induttore (lineare tempo-invariante)

Simbolo



Curva caratteristica



- **Equazioni**: $\varphi(t) = L i(t)$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

(*v* e *i* orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore)

- L = **induttanza** (unità di misura henry, H)

Induttore – Proprietà di memoria (1)

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

- La corrente di un induttore all'istante t dipende dall'andamento della tensione in tutti gli istanti precedenti
  - ➡ l'induttore è un componente **dotato di memoria**
- Si considera il comportamento di un induttore a partire da un istante iniziale t_0
  - Corrente all'istante t_0

    $$I_0 = i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)d\tau$$

  - Flusso all'istante t_0

    $$\Phi_0 = \varphi(t_0) = LI_0$$

Induttore – Proprietà di memoria (2)

- Corrente per $t > t_0$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{\Phi_0}{L} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

➡ Per determinare la corrente per $t > t_0$ occorre conoscere
  - la corrente (o il flusso) per $t = t_0$
  - l'andamento della tensione per $t \geq t_0$

➡ Il valore della corrente (o del flusso) all'istante t_0 riassume il comportamento del componente per $t \leq t_0$

Induttore – Comportamento energetico (1)

- **Potenza assorbita**:

$$\mathrm{p}_a(t) = v(t)i(t) = L\frac{di}{dt}\cdot i(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]$$

- **Energia assorbita** fino all'istante t

$$\mathrm{w}_a(t) = \int_{-\infty}^{t}\mathrm{p}_a(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}Li^2(\tau)\right]d\tau = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2(t)}{L}$$

➡ L'energia assorbita fino all'istante t è determinata se è noto il valore all'istante t della corrente o del flusso

➡ Se $L > 0$ l'energia assorbita fino all'istante t è $\geq 0 \quad \forall\, t$

➡ Se $L > 0$ l'induttore è un componente passivo

Induttore – Comportamento energetico (2)

- Energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$

$$\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{p}_a(t)dt = \frac{1}{2}L\left[i^2(t_2) - i^2(t_1)\right] = \frac{1}{2L}\left[\varphi^2(t_2) - \varphi^2(t_1)\right]$$

  - Non dipende dall'andamento di $i(t)$ e $v(t)$ nell'intervallo $[t_1\ t_2]$
  - Dipende solo dai valori di i (o di φ) agli istanti t_1 e t_2

- Per un induttore passivo ($L > 0$)
  - L'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è negativa se $|i(t_2)| < |i(t_1)|$
  - L'energia erogata nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ non può superare l'energia assorbita fino a t_1

$$\mathrm{w}_e(t_1,t_2) = -\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t_1) - i^2(t_2)\right] \leq \frac{1}{2}Li^2(t_1) = \mathrm{w}_a(t_1)$$

Induttore – Comportamento energetico (3)

- Se $i(t_1) = i(t_2)$ l'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è nulla
- Se $i(t)$ non è costante, all'interno dell'intervallo si possono individuare sottointervalli in cui il $|i(t)|$ aumenta e altri in cui diminuisce
- L'energia assorbita quando $|i(t)|$ aumenta è uguale all'energia erogata quando $|i(t)|$ diminuisce

➡ L'induttore accumula energia ed è in grado di restituirla integralmente

➡ La quantità

$$w_a(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

rappresenta l'**energia accumulata** nell'induttore all'istante t

- All'interno dell'induttore non avvengono fenomeni dissipativi

➡ L'induttore è un componente **privo di perdite**

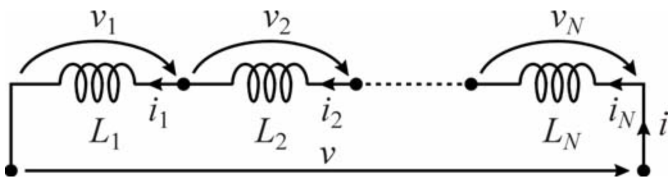
Induttore – Proprietà di continuità

- In un induttore, se la tensione $v(t)$ è limitata, la corrente $i(t)$ è una funzione continua del tempo
- **Dimostrazione**: Dato che

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

la proprietà deriva direttamente dalla proprietà di continuità della funzione integrale

Induttori in serie



LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$

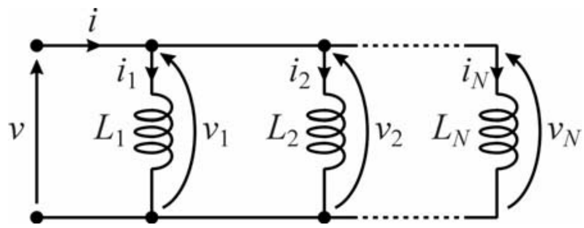
Relazioni costitutive $\mathrm{v}_k = L_k \dfrac{d\,\mathrm{i}_k}{dt} \quad (k = 1, \ldots, N)$

➡ $$v = \sum_{k=1}^{N} L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} L_k \right) \frac{di}{dt} = L_S \frac{di}{dt}$$

➡ N induttori in serie equivalgono a un induttore con induttanza

$$L_S = \sum_{k=1}^{N} L_k$$

Induttori in parallelo



LKI $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

LKV $v = v_k \quad (k = 1, \ldots, N)$

Relazioni costitutive $i_k = \dfrac{1}{L_k} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} v_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \ldots, N)$

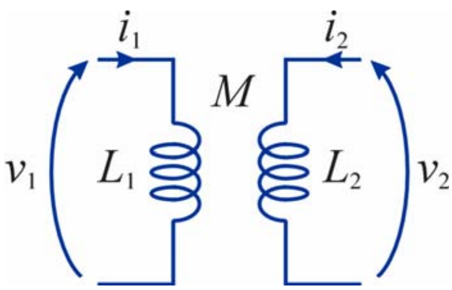
➡ $$i = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k} \int_{-\infty}^{t} v_k(\tau) d\tau = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k} \right) \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau = \frac{1}{L_P} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

➡ N induttori in parallelo equivalgono a un induttore con induttanza

$$L_P = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}}$$

Induttori accoppiati (1)

Simbolo



Equazioni

$$\varphi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$
$$\varphi_2(t) = M i_1(t) + L_2 i_2(t)$$

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

- $L_1, L_2 =$ **induttanze proprie** (**autoinduttanze**)
- $M =$ **mutua induttanza**
- I tre parametri si misurano in henry (H)
- **Coefficiente di accoppiamento**: $k = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$

Induttori accoppiati (2)

- Per un dispositivo fisicamente realizzabile valgono le condizioni

$$L_1 > 0 \qquad L_2 > 0 \qquad |M| < \sqrt{L_1 L_2} \qquad (\Rightarrow 0 \leq k < 1)$$

➡ E' possibile esprimere le correnti in funzione dei flussi

$$i_1(t) = \Gamma_1 \varphi_1(t) + \Gamma_M \varphi_2(t)$$
$$i_2(t) = \Gamma_M \varphi_1(t) + \Gamma_2 \varphi_2(t)$$

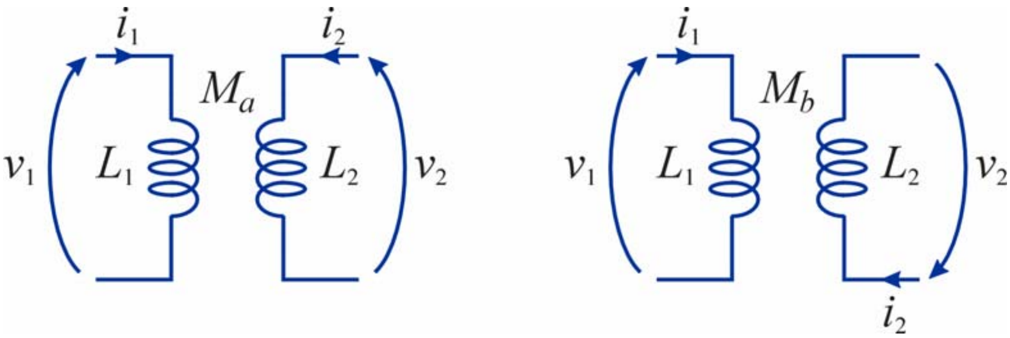
$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_M \\ \Gamma_M & \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

➡ Espressioni delle correnti in funzione delle tensioni

$$i_1(t) = \Gamma_1 \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)d\tau + \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)d\tau$$
$$i_2(t) = \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)d\tau + \Gamma_2 \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)d\tau$$

Induttori accoppiati (3)

- Il coefficiente di mutua induttanza può assumere sia valori positivi sia valori negativi
- Il segno dipende dalla scelta dei versi di riferimento



$$M_b = -M_a$$

Induttori perfettamente accoppiati (1)

- Due induttori si dicono **perfettamente accoppiati** se vale la relazione

  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ ➡ $k = 1$
- La condizione $k = 1$ rappresenta una situazione ideale, realizzabile solo in modo approssimato
- In queste condizioni la matrice $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ diventa singolare

➡ Non è possibile esprimere le correnti in funzione dei flussi (o delle tensioni)

Induttori perfettamente accoppiati (2)

- Le espressioni dei flussi possono essere poste nella forma

$$\varphi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t) = L_1\left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t)\right]$$

$$\varphi_2(t) = M i_1(t) + L_2 i_2(t) = M\left[i_1(t) + \frac{L_2}{M} i_2(t)\right] = M\left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t)\right]$$

- Se vale la condizione

$$i_1(t) = -\frac{M}{L_1} i_2(t)$$

i flussi sono nulli anche se le correnti non sono nulle

- Dal punto di vista fisico ciò corrisponde al fatto che i campi magnetici generati dalle due correnti sono tali da annullarsi in ogni punto
- In pratica questa condizione può essere realizzata solo in modo approssimato

Induttori accoppiati – Comportamento energetico (1)

- **Potenza assorbita**:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_a(t) &= v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = \\ &= L_1 \frac{di_1}{dt} i_1(t) + M \frac{di_2}{dt} i_1(t) + M \frac{di_1}{dt} i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2(t) = \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[L_1 i_1^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t) + L_2 i_2^2(t)\right]\right\} \end{aligned}$$

- **Energia assorbita** fino all'istante *t*:

$$\mathrm{w}_a(t) = \frac{1}{2}\left[L_1 i_1^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t) + L_2 i_2^2(t)\right]$$

Induttori accoppiati – Comportamento energetico (2)

- Per un componente fisicamente realizzabile valgono le condizioni

$$L_1 > 0 \qquad L_2 > 0 \qquad |M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

➡ L'energia assorbita fino all'istante t non è mai negativa

$$\mathrm{w}_a(t) = \frac{1}{2}\left[L_1 i_1^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t) + L_2 i_2^2(t) + \boxed{\frac{M^2}{L_1} i_2^2(t) - \frac{M^2}{L_1} i_2^2(t)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} L_1 \left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) \right]^2 + \frac{L_1 L_2 - M^2}{2L_1} i_2^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

➡ Se valgono queste condizioni gli induttori accoppiati sono un componente passivo

Induttori accoppiati – Comportamento energetico (3)

- Per due induttori perfettamente accoppiati se valgono le condizioni

$$L_1 > 0 \qquad L_2 > 0 \qquad |M| = \sqrt{L_1 L_2}$$

l'energia assorbita può essere posta nella forma

$$\mathrm{w}_a(t) = \frac{1}{2}\left[L_1 i_1^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t) + L_2 i_2^2(t) \right] = \frac{1}{2} L_1 \left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) \right]^2$$

➡ Anche in questo caso vale la proprietà

$$\mathrm{w}_a(t) \geq 0 \quad \forall t$$

➡ Nelle condizioni indicate il componente è passivo

Induttori accoppiati – Proprietà di continuità (1)

- Per gli **induttori non perfettamente accoppiati**, se $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono limitate, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono funzioni continue del tempo
- **Dimostrazione**: Dato che

$$i_1(t) = \Gamma_1 \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)d\tau + \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)d\tau$$
$$i_2(t) = \Gamma_M \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)d\tau + \Gamma_2 \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)d\tau$$

la proprietà deriva direttamente dalla proprietà di continuità della funzione integrale

Induttori accoppiati – Proprietà di continuità (2)

- Per gli **induttori perfettamente accoppiati** le espressioni delle tensioni possono essere poste nella forma

$$v_1(t) = L_1 \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) \right]$$
$$v_2(t) = M \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) \right]$$

- Se le correnti sono discontinue ma tali che

$$i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) = costante$$

le tensioni sono nulle

- ➡ Si possono avere discontinuità delle correnti anche in presenza di tensioni limitate
- ➡ Per gli induttori perfettamente accoppiati la proprietà di continuità non vale

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (1)

- In seguito, per semplicità, si supporrà di avere scelto i versi di riferimento in modo che risulti $M > 0$
- Se $M = \sqrt{L_1 L_2}$ le equazioni possono essere scritte nella forma

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2(t)}{dt} = L_1 \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2(t)\right]$$

$$v_2(t) = \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = \sqrt{L_1 L_2} \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2(t)\right]$$

- Ponendo $A = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$ da queste equazioni si ottiene

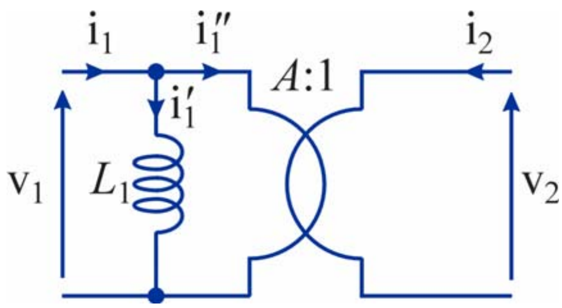
$$v_1(t) = L_1 \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \frac{1}{A} i_2(t)\right] \qquad \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = A$$

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (2)

- Due induttori perfettamente accoppiati possono essere rappresentati mediante un circuito equivalente costituito da un trasformatore ideale con rapporto spire A e da un induttore di induttanza L_1 collegato in parallelo al primario

$$v_1(t) = L_1 \frac{d}{dt}\left[i_1(t) + \frac{1}{A} i_2(t)\right]$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = A$$



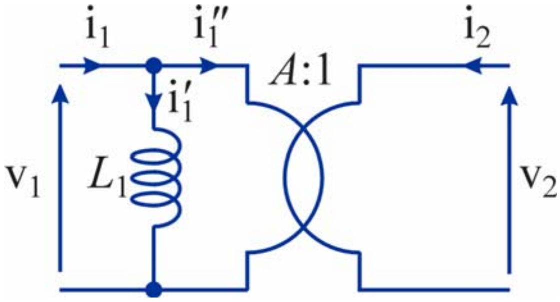
$$A = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

$$i_1''(t) = -\frac{1}{A} i_2(t)$$

$$i_1'(t) = i_1(t) + \frac{1}{A} i_2(t)$$

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (3)

- Un dispositivo fisico costituito da due induttori accoppiati può essere rappresentato mediante un trasformatore ideale se
  - l'accoppiamento si può ritenere perfetto $M \cong \sqrt{L_1 L_2}$
  - la corrente in L_1 è trascurabile $i_1' << i_1''$



- Se le tensioni e le correnti sono costanti si ha

$$v_1 = L_1 \frac{di_1'}{dt} = 0 \qquad v_2 = A v_1 = 0$$

  - ➡ Le due porte del dispositivo si comportano come cortocircuiti
  - ➡ Il dispositivo non funziona come un trasformatore ideale

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (4)

- **Esempio**: si assume che le tensioni e le correnti siano funzioni sinusoidali del tempo

$$i_1'(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha)$$

$$v_1(t) = V_M \cos(\omega t + \beta) = L_1 \frac{di_1'}{dt} = -\omega L_1 I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

- A parità di ampiezza della tensione V_M l'ampiezza della corrente I_M si riduce al crescere di L_1 e di ω

- Il dispositivo funziona come un trasformatore ideale se sono sufficientemente elevati i valori
  - dell'induttanza L_1
  - della pulsazione ω

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (5)

- Se gli induttori non sono perfettamente accoppiati si ha

  $M < \sqrt{L_1 L_2}$

- In questo caso si possono scomporre sia L_1 che L_2 nella somma di due termini in modo che risulti

  $L_1 = L_{10} + L_{1d} \qquad L_2 = L_{20} + L_{2d} \qquad M = \sqrt{L_{10} L_{20}}$

- Quindi le equazioni diventano

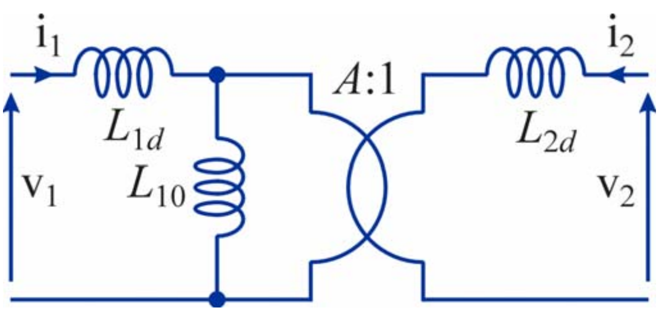
$$v_1(t) = L_{10}\frac{di_1(t)}{dt} + \sqrt{L_{10}L_{20}}\frac{di_2(t)}{dt} + L_{1d}\frac{di_1(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = \sqrt{L_{10}L_{20}}\frac{di_1(t)}{dt} + L_{20}\frac{di_2(t)}{dt} + L_{2d}\frac{di_2(t)}{dt}$$

Induttori accoppiati e trasformatore ideale (6)

- Le equazioni di due induttori non perfettamente accoppiati coincidono con le equazioni di due induttori perfettamente accoppiati di induttanza L_{10} e L_{20} alle cui porte sono collegati in serie due induttori L_{1d} e L_{2d}

➡ E’ possibile rappresentare i due induttori non perfettamente accoppiati con il seguente circuito equivalente



$L_1 = L_{10} + L_{1d}$

$L_2 = L_{20} + L_{2d}$

$M = \sqrt{L_{10} L_{20}}$

$A = \sqrt{\dfrac{L_{10}}{L_{20}}}$