

Richiami di teoria dell'elettromagnetismo

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 10-5-2015)

Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$
Legge di Ampere-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Legge di Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$
Legge di Gauss elettrica	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV$
Legge di Gauss magnetica	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$

Grandezze fondamentali

- ρ_c = densità di carica elettrica [C/m³]
- \mathbf{E} = campo elettrico [V/m]
- \mathbf{H} = campo magnetico [A/m]
- \mathbf{D} = induzione elettrica (spostamento elettrico) [C/m²]
- \mathbf{B} = induzione magnetica [T]
- \mathbf{J} = densità di corrente elettrica [A/m²]

3

Carica elettrica

- I fenomeni **elettromagnetici** sono i fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche
- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare [unità di misura coulomb, C]
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
 - ◆ tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
 - ◆ tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

4

Densità di carica

- Se si considerano fenomeni osservabili su scala macroscopica si può prescindere dalla natura granulare della carica e assumere che la carica si è distribuita con continuità nello spazio

- ➔ **Densità volumetrica di carica** [C/m³]

$$\rho_c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \Delta q = \text{carica contenuta nel volume } \Delta V$$

- In alcuni casi si hanno distribuzioni di carica che si sviluppano prevalentemente in una o due dimensioni

- ➔ **Densità superficiale di carica** [C/m²]

$$\sigma_c = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \Delta q = \text{carica associata alla superficie } \Delta S$$

- ➔ **Densità lineare di carica** [C/m]

$$\lambda_c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \Delta q = \text{carica associata al segmento } \Delta l$$

5

Cariche libere e cariche di polarizzazione

- **Cariche libere:** cariche che possono compiere spostamenti macroscopici e dare luogo a separazioni macroscopiche di carica
- **Cariche di polarizzazione:** cariche legate alla struttura atomica o molecolare che possono compiere solo spostamenti microscopici (conseguenti a deformazione o orientamento di atomi o molecole)
- **Conduttore:** mezzo materiale nel quale sono presenti cariche in grado di compiere spostamenti macroscopici
- **Dielettrico:** mezzo materiale nel quale tutte le cariche possono compiere solo spostamenti microscopici
- In seguito quando si parlerà di cariche senza ulteriori indicazioni si farà riferimento alle cariche libere

6

Corrente elettrica

- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata S in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo [unità di misura ampere, A]
- In generale si possono avere cariche positive e negative che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
 - ➔ La carica che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
 - ◆ Il segno del contributo di ciascuna carica dipende dal segno della carica stessa e dal verso del moto

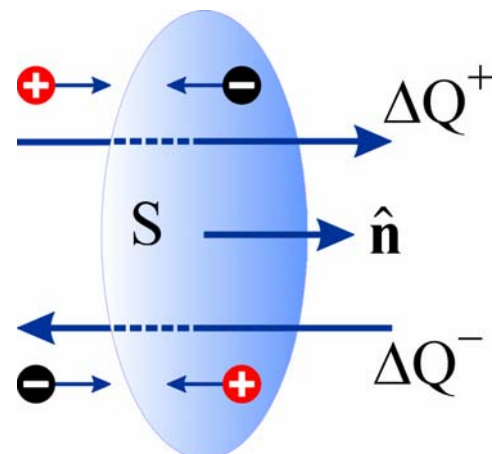
7

Definizione della corrente elettrica

- Si indica con ΔQ la carica che attraversa la superficie S in senso concorde con la normale \hat{n} nell'intervallo di tempo Δt

$$\Delta Q = \Delta Q^+ - \Delta Q^-$$

- ◆ Contributo positivo (ΔQ^+)
 - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
 - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
- ◆ Contributo negativo ($-\Delta Q^-$)
 - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
 - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



8

Definizione della corrente elettrica

- La corrente, $i(t)$, è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- ➔ La corrente è la derivata della funzione $Q(t)$ che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso S a partire da un certo istante iniziale fino all'istante t
- $Q(t)$ non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante t
 - ◆ è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a $Q(t)$

9

Densità di corrente

- La densità di **densità di corrente** \mathbf{J} [A/m^2] è un vettore definito in modo che la sua componente lungo la normale ad una superficie orientata S rappresenti la corrente per unità di superficie che fluisce attraverso S

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS}$$

- ➔ La corrente attraverso una superficie orientata S è uguale al flusso del vettore \mathbf{J} attraverso S

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

10

Definizione della densità di corrente

- Si considera una superficie orientata infinitesima dS attraversata da corrente elettrica
- Si assume che le cariche in moto abbiano densità ρ_c e velocità \mathbf{v}
- Nell'intervallo di tempo dt le cariche percorrono la distanza $\mathbf{v}dt$
- La carica che attraversa la superficie dS nell'intervallo dt è pari alla carica totale contenuta nel volume dV

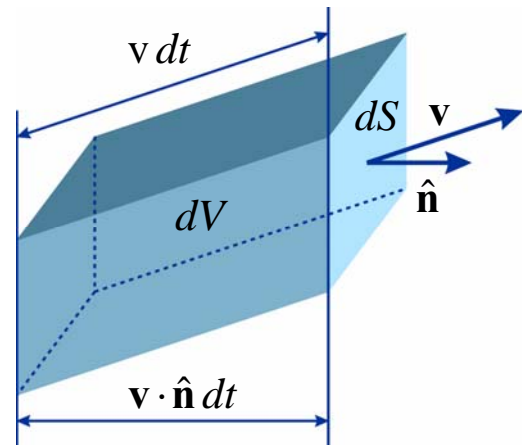
$$dQ = \rho_c dV = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dS$$

- La corrente attraverso dS è

$$di = \frac{dQ}{dt} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- quindi si ha

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{di}{dS} = \rho_c \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



11

Definizione della densità di corrente

- ➔ La densità di corrente è definita dalla relazione

$$\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$$

- Nel caso più generale, in cui le cariche non si muovono tutte con la stessa velocità \mathbf{v} e sono presenti sia cariche positive sia cariche negative (con densità ρ^+ e ρ^-), la densità di corrente si definisce come

$$\mathbf{J} = \rho_+ \langle \mathbf{v}_+ \rangle + \rho_- \langle \mathbf{v}_- \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}_+ \rangle, \langle \mathbf{v}_- \rangle = \text{velocità medie}$$

12

Forza di Lorentz

- Una carica puntiforme q in moto con velocità \mathbf{v} in una regione sede di un campo elettromagnetico è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{Forza di Lorentz}$$

- Questa relazione può essere assunta come definizione delle due funzioni vettoriali del punto e del tempo dette
 - ♦ **campo elettrico** \mathbf{E} [unità di misura volt/metro, V/m]
 - ♦ **induzione magnetica** \mathbf{B} [unità di misura tesla, T]

- Se si ha una distribuzione di carica con densità ρ_c in moto con velocità \mathbf{v} , la forza per unità di volume \mathbf{f} è

$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

13

Campo elettrico

- Si dice che una regione è sede di un **campo elettrico** se una carica di prova Δq puntiforme posta in quiete in un punto P della regione è soggetta ad una forza \mathbf{F}_e proporzionale al valore della carica
- Il vettore campo elettrico nel punto P è definito come

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_e}{\Delta q}$$

- ♦ Il passaggio al limite indica che la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non perturbare il campo presente nella regione considerata

14

Induzione magnetica

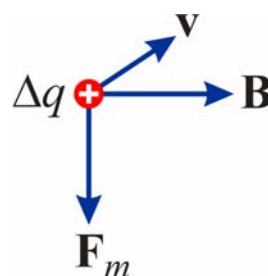
- Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova Δq puntiforme in moto con velocità istantanea \mathbf{v} in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza \mathbf{F}_e dovuta al campo elettrico) ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Il vettore **induzione magnetica** \mathbf{B} ha
 - ◆ direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza \mathbf{F}_m è nulla
 - ◆ verso tale che \mathbf{v} , \mathbf{B} e \mathbf{F}_m formino una terna destra
 - ◆ modulo dato da

$$B = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{F_{m\max}}{\Delta q v}$$

dove $F_{m\max}$ indica il valore massimo del modulo di \mathbf{F}_m (che si ottiene quando \mathbf{v} è ortogonale a \mathbf{B})



15

Induzione elettrica e campo magnetico

- Come si vedrà in seguito, i vettori \mathbf{D} (**induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m^2]) e \mathbf{H} (**campo magnetico** [A/m]) vengono introdotti per tenere conto di fenomeni che avvengono, in presenza di campi elettromagnetici, nei mezzi materiali
- Nel vuoto valgono le relazioni
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
- La costante ε_0 ($= 1/(c_0^2 \mu_0) \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$) è detta **permittività elettrica** (o **costante dielettrica**) del vuoto
- La costante μ_0 ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \cong 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ H}/\text{m}$) è detta **permeabilità magnetica** del vuoto

($c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m}/\text{s}$ è la velocità della luce nel vuoto)

16

Equazioni fondamentali

Leggi primarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

(Assunte come postulati)

Leggi secondarie

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_c \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

(Derivano dalle leggi primarie)

17

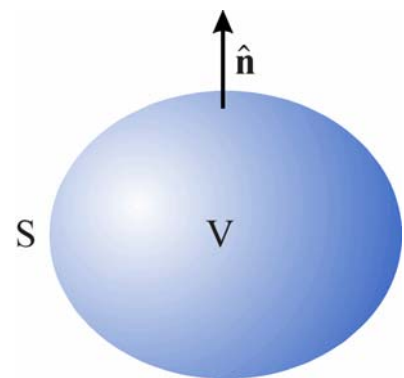
Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

- Forma integrale

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_i = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV = -\frac{dQ}{dt}$$



- ♦ V = regione delimitata da una superficie chiusa S
- ♦ Versore normale a S orientato verso l'esterno
- ♦ i = corrente uscente dalla superficie S
- *La corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*
 - ➔ La carica elettrica non può essere né creata né distrutta, ma può essere solo spostata

18

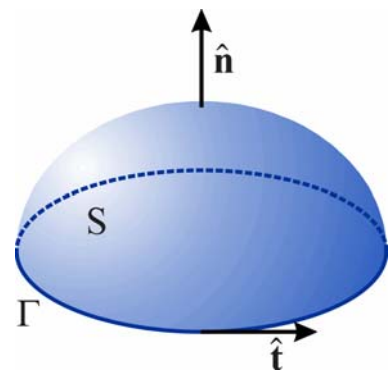
Legge di Ampere-Maxwell

- Forma locale

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Forma integrale

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c} = i_T$$



- ♦ Γ = curva chiusa
- ♦ S = generica superficie avente Γ come contorno
- ♦ Versore tangente a Γ e normale a S orientati come indicato in figura
- ♦ i_s = **corrente di spostamento** concatenata con S
- ♦ i_c = **corrente di conduzione** concatenata con S
- ♦ i_T = **corrente totale** concatenata con S
- *La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa*

19

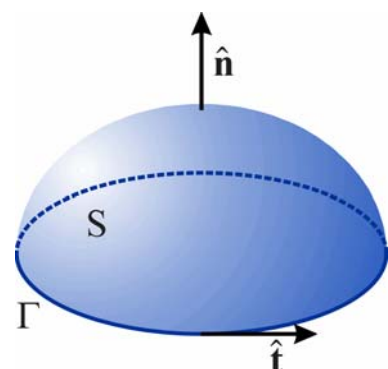
Legge di Faraday-Neumann-Lenz

- Forma locale

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Forma integrale

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}_e = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



- ♦ Γ = curva chiusa
- ♦ S = generica superficie avente Γ come contorno
- ♦ Versore tangente a Γ e normale a S orientati come indicato in figura
- ♦ e = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
- *La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa*

20

Legge di Gauss elettrica

- Si applica l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right)$$

- La divergenza di un rotore è nulla, quindi

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Utilizzando l'equazione di continuità si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = \text{cost}$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione $\mathbf{D} = 0$ e $\rho_c = 0$, si deduce che la costante deve essere nulla

➔ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$

21

Legge di Gauss elettrica

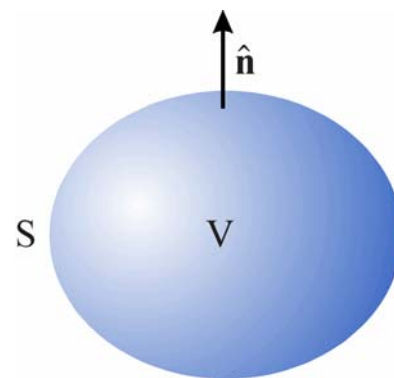
- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho_c dV = Q$$

- ◆ V = regione delimitata da una superficie chiusa S
- ◆ Versore normale a S orientato verso l'esterno
- *Il flusso uscente da una superficie chiusa del vettore induzione elettrica è uguale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*



22

Legge di Gauss magnetica

- Si applica l'operatore divergenza a primo e secondo membro dell'equazione di Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

- Dato che la divergenza di un rotore è nulla

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost}$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione $\mathbf{B} = 0$, si deduce che la costante deve essere nulla

➔ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

23

Legge di Gauss magnetica

- Forma locale

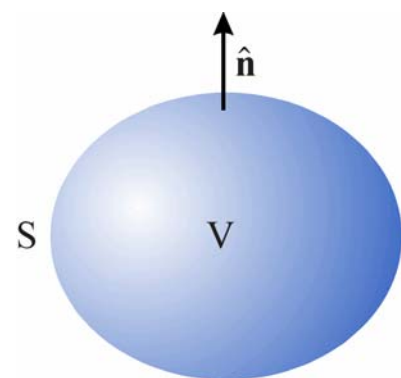
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

- ◆ V = regione delimitata da una superficie chiusa S
- ◆ Versore normale a S orientato verso l'esterno

- *Il flusso attraverso una superficie chiusa del vettore induzione magnetica è nullo*



24

Equazioni di legame materiale

- Le equazioni fondamentali non dipendono dalle proprietà dei mezzi materiali in cui ha sede il campo elettromagnetico
- L'effetto dei mezzi materiali sui campi elettromagnetici viene espresso mediante un insieme di equazioni dette **equazioni di legame materiale** o **relazioni costitutive**
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico le relazioni costitutive hanno la forma
 - ◆ $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$
 - ◆ $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
 - ◆ $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$
- Le relazioni costitutive possono dipendere, inoltre, da altre grandezze fisiche che definiscono lo stato del materiale (es. temperatura, pressione, ecc.)

25

Equazioni di legame materiale

- **Materiali omogenei:**
Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dal punto considerato
- **Materiali isotropi:**
Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dalle direzioni dei vettori
- **Materiali lineari:**
Le relazioni costitutive sono espresse da equazioni lineari del tipo
$$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \quad \mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} \quad \mathbf{J} = [\sigma]\mathbf{E}$$
in cui $[\varepsilon]$, $[\mu]$ e $[\sigma]$ rappresentano delle matrici
- **Materiali lineari isotropi:**
Le relazioni costitutive si riducono a relazioni di proporzionalità
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$
in cui ε , μ e σ sono costanti scalari

26

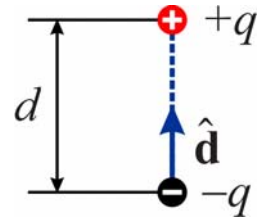
Dipolo elettrico

- Si considerano due cariche puntiformi uguali e opposte $\pm q$ poste a distanza d

- Si definisce **momento di dipolo elettrico** [C·m] la quantità

$$\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{d}} = qd \hat{\mathbf{d}}$$

$\hat{\mathbf{d}}$ = versore diretto dalla carica negativa alla carica positiva



- A una distanza dalle cariche molto grande rispetto a d il campo elettrico dipende solo da \mathbf{p} (non separatamente da d e q)
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $d \rightarrow 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $q \rightarrow \infty$ in modo tale che il prodotto qd tenda a un valore finito $p \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo elettrico**

27

Polarizzazione dei dielettrici

- Dal punto di vista macroscopico, si può ritenere che, in assenza di perturbazioni esterne, in un dielettrico siano presenti due distribuzioni continue di carica, una positiva (densità ρ_+) e una negativa (densità ρ_-), uguali e opposte in ogni punto

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

- In un elemento di volume ΔV sono contenute due cariche uguali e opposte $\rho_+ \Delta V$ e $\rho_- \Delta V$ i cui baricentri coincidono

➔ carica totale e momento di dipolo nulli

- Un campo elettrico esterno può produrre *piccoli* spostamenti \mathbf{l}_+ e \mathbf{l}_- delle cariche positive e delle cariche negative (➔ **polarizzazione del dielettrico**)

- ➔ All'interno dell'elemento di volume ΔV , lo spostamento relativo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$ tra i baricentri delle cariche positive e negative dà origine a un momento di dipolo elettrico

$$\Delta \mathbf{p} = \rho_+ \Delta V (\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-) = \rho_+ \mathbf{l} \Delta V$$

28

Polarizzazione per deformazione e orientamento

- Materiali **non polari**: le molecole non possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
 - ◆ In presenza di un campo elettrico esterno si ha una **polarizzazione per deformazione**
 - deformazione della distribuzione elettronica
 - spostamenti relativi degli atomi costituenti la molecola
- Materiali **polari**: le molecole possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
 - ◆ In assenza di campi esterni, a causa dell'agitazione termica i dipoli sono orientati in modo aleatorio
 - ➔ i dipoli si compensano e l'effetto macroscopico è nullo
 - ◆ Un campo esterno, oltre a produrre una polarizzazione per deformazione, tende ad allineare i dipoli (➔ **polarizzazione per orientamento**)

29

Vettore polarizzazione elettrica

- Lo stato di un dielettrico polarizzato può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **polarizzazione elettrica** [C/m²]

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho_+ \mathbf{I}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli elettrici equivale ad una distribuzione volumetrica di carica con densità

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{densità di carica di polarizzazione}$$

- Se il campo elettrico varia nel tempo si ha una variazione di \mathbf{P} che equivale alla presenza di una **densità di corrente di polarizzazione elettrica**

$$\mathbf{J}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

30

Induzione elettrica

- Legge di Gauss nel vuoto

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c$$

- In un dielettrico polarizzato, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche della carica di polarizzazione

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c + \rho_p$$

- Si esprime la carica di polarizzazione in funzione di \mathbf{P}

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

- Si definisce **induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m²] il vettore

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- ➔ Si ottiene un'espressione della legge di Gauss, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di carica libera ρ_c

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

31

Costante dielettrica

- In generale \mathbf{P} , e quindi \mathbf{D} , sono funzioni del campo elettrico \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

- In un materiale lineare isotropo \mathbf{P} e \mathbf{D} sono proporzionali a \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

↓

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

χ_e = **suscettività elettrica** del mezzo

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ = **costante dielettrica relativa** del mezzo

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = **permittività** o **costante dielettrica** del mezzo [F/m]

32

Costanti dielettriche relative di alcuni materiali

	ϵ_r		ϵ_r
Titanato di bario	$10^3 \div 10^4$	Nylon	$3.7 \div 5.5$
Ossido di titanio	$86 \div 173$	Quarzo	$4.3 \div 5$
Acqua distillata	80	Gomma	3
Alcool etilico	28	Polistirene	$2.4 \div 3$
Germanio	16	Ebanite	$2 \div 3$
Silicio	12	Porcellana	$2.7 \div 2.9$
Vetro	$4 \div 10$	Carta	$2 \div 2.5$
Allumina	9.5	Teflon	2.1
Bachelite	$5.7 \div 7$	Polietilene	$1.6 \div 2.4$
Mica	$5.7 \div 6.5$	Aria (1 atm)	1.0006

(Valori a 20 °C)

33

Dipolo magnetico

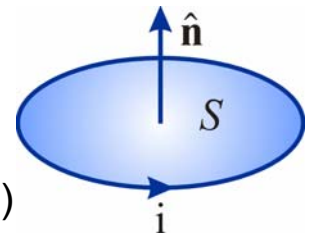
- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente i

- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [$A \cdot m^2$] la quantità

$$\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{n}} = i S \hat{\mathbf{n}}$$

S = area della superficie piana delimitata dalla spira

$\hat{\mathbf{n}}$ = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)



- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico dipende solo da \mathbf{m}
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $S \rightarrow 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $i \rightarrow \infty$ in modo tale che il prodotto Si tenda a un valore finito $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**

34

Magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume ΔV diviene sede di un momento di dipolo magnetico $\Delta \mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [A/m]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli magnetici equivale alla presenza nella materia di una **densità di corrente di polarizzazione magnetica**

$$\mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

35

Campo magnetico

- Legge di Ampere - Maxwell nel vuoto

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Nella materia, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche delle correnti di polarizzazione elettrica e magnetica

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}$$

- Si esprimono le correnti di polarizzazione in funzione di \mathbf{P} e \mathbf{M}

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

36

Campo magnetico

- Nell'espressione precedente, a secondo membro, la somma delle derivate rispetto al tempo fornisce la derivata dell'induzione elettrica
- Si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- ➔ Si ottiene un'espressione della legge di Ampere - Maxwell, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di corrente \mathbf{J} associata alle cariche libere

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} + \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

37

Equazione di continuità nei mezzi materiali

- Tenendo conto delle cariche e delle correnti di polarizzazione, l'equazione di continuità assume la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}) = -\frac{\partial(\rho_c + \rho_p)}{\partial t}$$

- Si esprimono le cariche e le correnti di polarizzazione in funzione di \mathbf{P} e \mathbf{M}

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M})}_{=0} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t}$$

- ➔ Anche in presenza di cariche e correnti di polarizzazione si ottiene una relazione che coinvolge solo le cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

38

Permeabilità magnetica

- In generale \mathbf{M} , e quindi \mathbf{B} , sono funzioni del campo magnetico \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

- In un materiale lineare isotropo \mathbf{M} e \mathbf{B} sono proporzionali a \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

↓

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

χ_m = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0 \mu_r$ = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

39

Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
 - ➔ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)
- ➔ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato
 - ➔ suscettività magnetica $\chi_m < 0$
(valori tipici dell'ordine di -10^{-5})
 - ➔ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1 + \chi_m) < 1$
(valori tipici leggermente inferiori a 1)
- χ_m e μ_R risultano indipendenti dalla temperatura

40

Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
 - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
 - ◆ non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
 - ➔ suscettività magnetica $\chi_m > 0$ (valori tipici dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$)
 - ➔ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1 + \chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
 - ➔ χ_m e μ_R diminuiscono all'aumentare della temperatura T

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (C = \text{costante}) \quad \text{Legge di Curie}$$

41

Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

Materiali diamagnetici	χ_m	Materiali paramagnetici	χ_m
Bismuto	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	Uranio	$4 \cdot 10^{-4}$
Mercurio	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	Platino	$2.6 \cdot 10^{-4}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	Cesio	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	Alluminio	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Grafite	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	Litio	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di sodio	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	Sodio	$7.2 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	Ossigeno (1 atm)	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Azoto (1 atm)	$-5 \cdot 10^{-9}$	Aria (1 atm)	$4 \cdot 10^{-7}$

(Valori a 20 °C)

42

Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**

- ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
- ◆ si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra **B** e **H** è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico T_C della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (C = \text{costante})$$

Legge di Curie-Weiss

43

Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di 10^{-6} - 10^{-3} m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno **H** i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di **H** si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di **H** produce un incremento di **B** uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto: $\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \Delta \mathbf{H}$

44

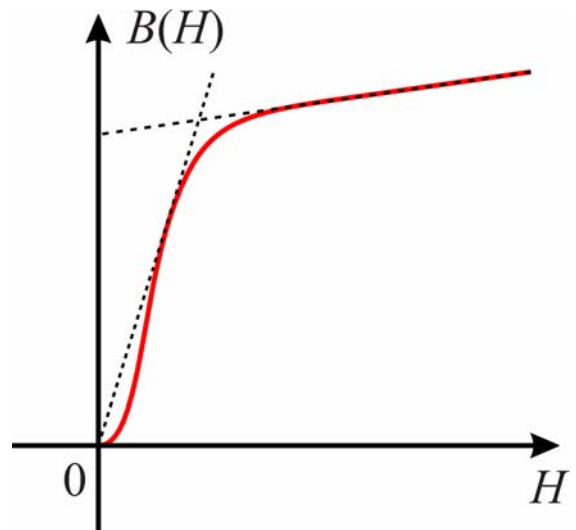
Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato $H = 0, B = 0$, inizialmente si ha un tratto con pendenza elevata
 - ➔ Valori elevati della permeabilità relativa differenziale

$$\mu_{r(d)}(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



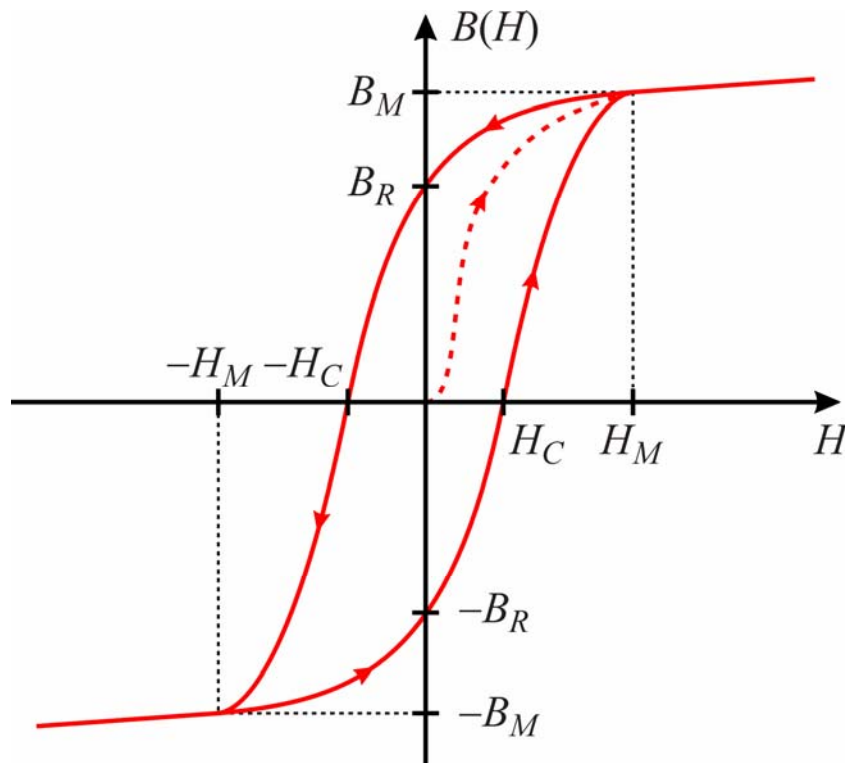
45

Isteresi magnetica

- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso
 - ➔ Riportando H a zero B non si annulla ma si porta ad un valore B_R (**induzione residua**)
- Per annullare B occorre applicare un campo magnetico inverso $-H_C$ (**campo magnetico coercitivo**)
- Se H viene fatto variare ciclicamente tra due valori $\pm H_M$ l'andamento di B è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

46

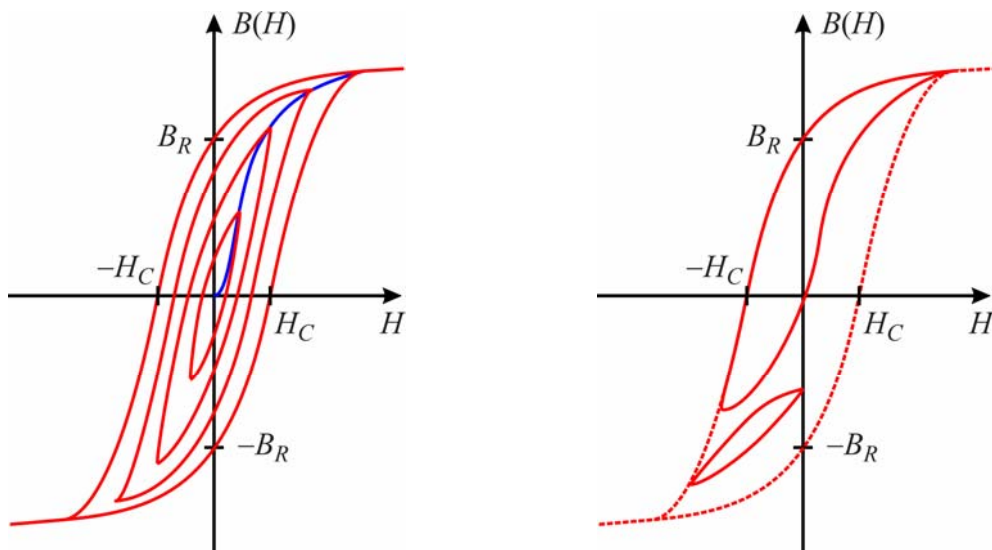
Ciclo di isteresi



47

Ciclo di isteresi

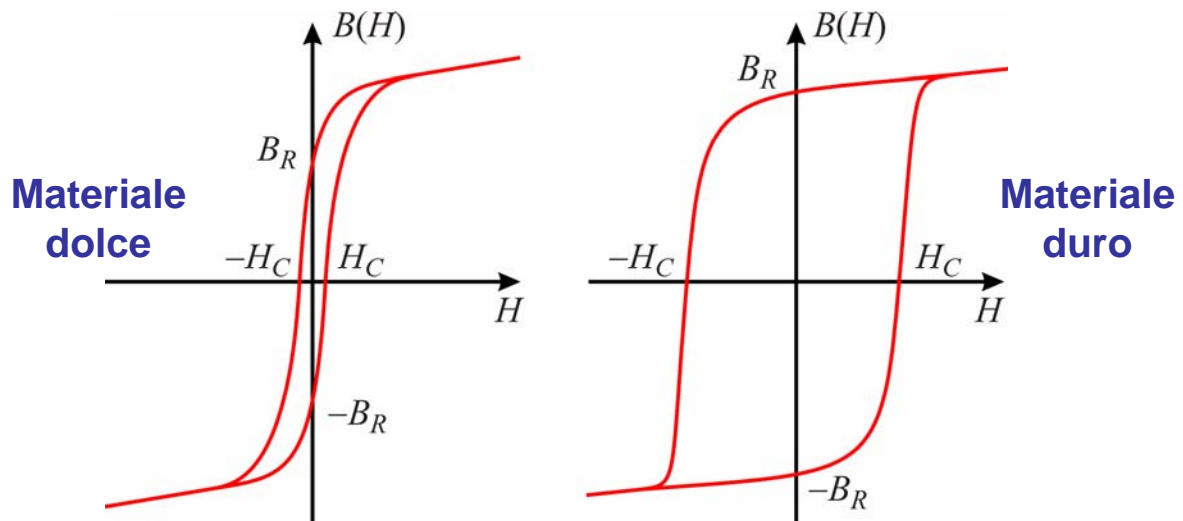
- Riducendo il valore di H_M si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici



48

Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
 - ◆ **Materiali dolci** ➔ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
 - ◆ **Materiali duri** ➔ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo



49

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali dolci	$\mu_{r(d)}$ iniziale	$\mu_{r(d)}$ massima	B_R [T]	H_C [A/m]
Cobalto	10	175	0.31	1000
Nichel	400	1100	0.33	130
Ferro puro	10^4	$2 \cdot 10^5$	1.2	4
Ferro commerciale	200	5000	1.2	80
Ghisa	70	600	1.4	500
Ferro-silicio 4%	500	7000	0.8	40
Permalloy (Ni, Fe 22%)	10^4	$5 \cdot 10^4$	0.6	4
Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%)	10^5	$3 \cdot 10^5$	0.6	0.4
Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)	$2.5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	0.6	1.2

(Valori a 20 °C)

50

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali duri	B_R [T]	H_C [kA/m]
Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)	1.05	5.6
Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)	1.28	51
Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)	1.05	120
Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)	0.54	44
Ferrite di bario ($BaFe_{12}O_{19}$)	0.43	170
Samario-cobalto ($SmCo_5$)	0.87	640
Neodimio-ferro-boro ($Nd_2Fe_{14}B$)	1.23	880

(Valori a 20 °C)

51

Legge di Ohm

- Per una vasta classe di materiali il legame tra la densità di corrente e il campo elettrico è lineare e isotropo ed è espresso dalla **legge di Ohm** (in forma locale)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

- ◆ $\sigma =$ **conducibilità** [siemens/metro, S/m]
- ◆ $\rho = 1/\sigma =$ **resistività** [ohm·metro, $\Omega \cdot m$]

- Buoni conduttori → ρ dell'ordine di $10^{-7} \div 10^{-8} \Omega \cdot m$
- Conduttore ideale → $\rho = 0, \sigma \rightarrow \infty$
- Isolanti → ρ dell'ordine di $10^7 \div 10^{18} \Omega \cdot m$
- Isolante ideale → $\rho \rightarrow \infty, \sigma = 0$

52

Dipendenza della resistività dalla temperatura

- La resistività e la conducibilità sono in generale funzioni della temperatura
- Per variazioni di temperatura di ampiezza limitata la dipendenza può essere considerata praticamente lineare

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 + \alpha\theta)$$

ρ_0 = resistività valutata alla temperatura di riferimento T_0 [$\Omega \cdot m$]

$\theta = T - T_0$ = variazione di temperatura rispetto a T_0 [$^{\circ}C$]

α = coefficiente di temperatura [$^{\circ}C^{-1}$]

53

Resistività di alcuni materiali

Conduttori	ρ [$\Omega \cdot m$]	α [$^{\circ}C^{-1}$]
Argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Oro	$2.36 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
Alluminio	$2.82 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Stagno	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
Piombo	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Costantana (Cu-Ni)	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Manganina (Cu-Ni-Mn)	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$9.6 \cdot 10^{-7}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$
Grafite	$3 \cdot 10^{-5} \div 6 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$

(Valori a 20 $^{\circ}C$)

54

Resistività di alcuni materiali

Semiconduttori	ρ [$\Omega \cdot m$]	α [$^{\circ}C^{-1}$]
Germanio	0.47	$-4.8 \cdot 10^{-2}$
Silicio	$6.4 \cdot 10^2$	$-7.5 \cdot 10^{-2}$
Isolanti	ρ [$\Omega \cdot m$]	
Carta	$10^7 \div 10^{10}$	
Bachelite	$10^9 \div 10^{10}$	
Porcellana	$10^9 \div 10^{13}$	
Polietilene	10^{13}	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
Mica	$10^{12} \div 10^{14}$	
Gomma	$10^{12} \div 10^{14}$	
Ebanite	10^{16}	
Quarzo fuso	10^{18}	

(Valori a 20 °C)

55

Campo elettrico impresso

- Oltre alle forze elettromagnetiche, sulle cariche possono agire anche forze di natura non elettrica (ad es. meccanica o chimica)
- In questo caso la forza per unità di carica viene detta **campo elettrico impresso**, \mathbf{E}_i
- In presenza di campi impressi la legge di Ohm assume la forma

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

da cui si ottiene anche

$$\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J} + \mathbf{J}_i)$$

avendo posto: $\mathbf{J}_i = -\sigma\mathbf{E}_i$ (**densità di corrente impressa**)

56

Effetto Joule

- Si considera una densità di carica ρ_c in moto con velocità \mathbf{v} in un mezzo di conducibilità σ
 - ➔ densità di corrente $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$
- In presenza di un campo elettrico \mathbf{E} e di un campo impresso \mathbf{E}_i , la forza per unità di volume che agisce sulla carica è
$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$
- La legge di Ohm indica che se la forza dovuta a \mathbf{E} ed \mathbf{E}_i è costante, la velocità delle cariche è costante
 - ➔ sulle cariche devono agire delle forze frenanti (analoghe a forze di attrito viscoso)
 - ➔ dissipazione di energia

57

Effetto Joule

- Il lavoro per unità di volume compiuto nell'intervallo dt dalle forze del campo elettrico e del campo impresso vale
$$\delta L = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{v} dt = \underbrace{\rho_c \mathbf{v}}_{=\mathbf{J}} \cdot \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)}_{=\mathbf{J}/\sigma} dt = \frac{J^2}{\sigma} dt$$
- Questo lavoro deve essere uguale all'energia dissipata per unità di volume
- In effetti l'esperienza mostra che in un conduttore di conducibilità σ , in presenza di una densità di corrente \mathbf{J} , nell'intervallo di tempo dt viene prodotta per unità di volume la quantità di calore

$$\delta Q = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

Legge di Joule

58