Teoremi dei circuiti

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 12-3-2014)

Teorema di Tellegen

- **Ipotesi:**
  - Circuito con n nodi e l lati
  - Versi di riferimento scelti per tutti i lati secondo la convenzione dell'utilizzatore
  - $\{v_1, \ldots, v_l\}$ = insieme di tensioni che soddisfano la LKV per il circuito considerato
  - $\{i_1, \ldots, i_l\}$ = insieme di correnti che soddisfano la LKI per il circuito considerato

➡ La somma estesa a tutti i lati del circuito dei prodotti $v_k i_k$ è nulla

$$\sum_{k=1}^{l} v_k i_k = 0$$

Teorema di Tellegen – Dimostrazione (1)

- Le tensioni dei lati soddisfano la LKV
  - ➡ possono essere espresse come differenze tra tensioni di nodo (rispetto ad un nodo di riferimento arbitrario)
- Si indica con $i_{PQ} = -i_{QP}$ la corrente totale dei lati che collegano il nodo P al nodo Q (diretta da P a Q)
  - se non c'è nessun lato tra i nodi P e Q ➡ $i_{PQ} = 0$
  - se c'è un solo lato k che collega i nodi P e Q
    - se il lato va da P a Q ➡ $v_k i_k = (v_P - v_Q) i_{PQ}$
    - se il lato va da Q a P ➡ $v_k i_k = (v_Q - v_P) i_{QP} = (v_P - v_Q) i_{PQ}$
  - se ci sono più lati che collegano i nodi P e Q
    - ➡ il prodotto $(v_P - v_Q) i_{PQ}$ rappresenta la somma dei prodotti $v_k i_k$ estesa a tutti questi lati

Teorema di Tellegen – Dimostrazione (2)

➡ Quindi si ha

$$\sum_{k=1}^{l} v_k i_k = \tfrac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} \sum_{Q=0}^{n-1} \left(v_P - v_Q\right) i_{PQ} = \tfrac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} \sum_{Q=0}^{n-1} \left(v_P i_{PQ} + v_Q i_{QP}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{P=0}^{n-1} v_P \underbrace{\left(\sum_{Q=0}^{n-1} i_{PQ} \right)}_{=0} + \tfrac{1}{2} \sum_{Q=0}^{n-1} v_Q \underbrace{\left(\sum_{P=0}^{n-1} i_{QP} \right)}_{=0} = 0$$

- I fattori ½ derivano dal fatto che, se i nodi P e Q variano su tutto l'insieme dei nodi del circuito, ogni lato viene contato due volte
- Le sommatorie tra parentesi sono nulle perché rappresentano rispettivamente la corrente totale uscente dal nodo P e dal nodo Q (e le correnti dei lati per ipotesi soddisfano la LKI)

Teorema di Tellegen - Note

- Il teorema richiede solo che le tensioni e le correnti dei lati soddisfino le leggi di Kirchhoff, non è necessario che soddisfino anche le equazioni dei componenti
- Se le tensioni e le correnti soddisfano anche le equazioni dei componenti i prodotti $v_k i_k$ rappresentano le potenze assorbite
  - ➡ La somme delle potenze assorbite dai componenti di un circuito è nulla
  - Si indica con $\mathcal{K}_G$ l'insieme dei valori di k per i quali il lato k è un generatore

$$-\sum_{k \in \mathcal{K}_G} v_k i_k = \sum_{k \notin \mathcal{K}_G} v_k i_k$$

➡ La potenza complessivamente erogata dai generatori è uguale alla somma delle potenze assorbite dagli altri componenti

Teorema di sostituzione

- **Ipotesi:**
  - Circuito con l lati
  - Unica soluzione $v_k = v_{k0}$ $i_k = i_{k0}$ $(k = 1,\dots,l)$
  - Il lato h corrisponde a un bipolo
  - **Caso a)**: Il circuito che si ottiene sostituendo il lato h con un generatore di tensione v_{h0} ammette un'unica soluzione
  - **Caso b)**: Il circuito che si ottiene sostituendo il lato h con un generatore di corrente i_{h0} ammette un'unica soluzione

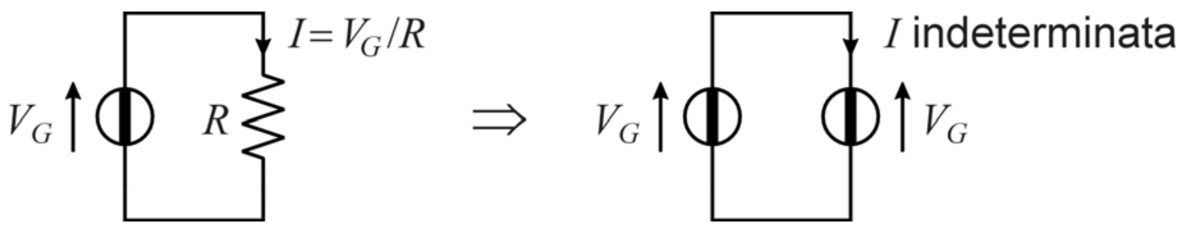
➡ Sia nel caso a) sia nel caso b) la soluzione del circuito con il generatore al posto del lato h coincide con la soluzione del circuito originale

- **Dimostrazione:** è immediato verificare che la soluzione del circuito originale soddisfa anche le equazioni dei circuiti modificati a) e b)
  - le equazioni dei collegamenti dei due circuiti coincidono
  - la corrente (caso a) o la tensione (caso b) del lato h è compatibile con il generatore che sostituisce il lato stesso

Teorema di sostituzione - Nota

- Il teorema si può applicare solo se il circuito ottenuto sostituendo il lato h con un generatore ammette una e una sola soluzione
- In alcuni casi la sostituzione di un lato con un generatore può dare origine a circuiti impossibili o indeterminati

Esempio



Teorema di sovrapposizione

- **Ipotesi:** circuito formato da componenti lineari resistivi e da
  - N_V generatori indipendenti di tensione $v_{G1}, \ldots, v_{GN_V}$
  - N_I generatori indipendenti di corrente $i_{G1}, \ldots, i_{GN_I}$
- ➡ La tensione e la corrente del generico lato h sono combinazioni lineari delle tensioni e delle correnti impresse dei generatori indipendenti

$$v_h = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} r_{hk} i_{Gk}$$

$$i_h = \sum_{k=1}^{N_V} g_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \beta_{hk} i_{Gk}$$

- **Dimostrazione:** la proprietà è diretta conseguenza del fatto che le tensioni e le correnti dei lati sono la soluzione di un sistema di equazioni lineari algebriche nel quale le tensioni e le correnti impresse dei generatori costituiscono i termini noti

Coefficienti di rete

- I coefficienti delle combinazioni sono detti **coefficienti di rete**
- I coefficienti di rete non dipendono dalle tensioni e correnti dei generatori indipendenti, ma solo dai parametri degli altri componenti

$$\alpha_{hk} = \left.\frac{v_h}{v_{Gk}}\right|_{\substack{v_{Gj}=0\ \forall j\neq k \\ i_{Gj}=0\ \forall j}}$$

guadagno di tensione

$$r_{hk} = \left.\frac{v_h}{i_{Gk}}\right|_{\substack{v_{Gj}=0\ \forall j \\ i_{Gj}=0\ \forall j\neq k}}$$

resistenza di ingresso $(h = k)$
resistenza di trasferimento $(h \neq k)$

$$g_{hk} = \left.\frac{i_h}{v_{Gk}}\right|_{\substack{v_{Gj}=0\ \forall j\neq k \\ i_{Gj}=0\ \forall j}}$$

conduttanza di ingresso $(h = k)$
conduttanza di trasferimento $(h \neq k)$

$$\beta_{hk} = \left.\frac{i_h}{i_{Gk}}\right|_{\substack{v_{Gj}=0\ \forall j \\ i_{Gj}=0\ \forall j\neq k}}$$

guadagno di corrente

Sovrapposizione degli effetti

- Ciascuno dei termini delle sommatorie rappresenta il valore che assume la tensione v_h o la corrente v_h se nel circuito agisce un solo generatore indipendente e tutti gli altri sono *spenti* (cioè le loro tensioni o correnti sono azzerate)

$$v_h = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} r_{hk} i_{Gk}$$

$$i_h = \sum_{k=1}^{N_V} g_{hk} v_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \beta_{hk} i_{Gk}$$

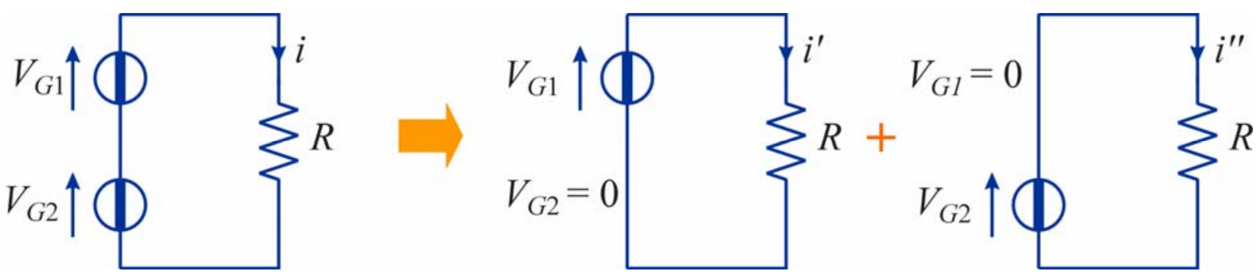
➡ *Le tensioni e le correnti possono essere ottenute sovrapponendo gli effetti prodotti dai singoli generatori indipendenti*

Analisi mediante sovrapposizione degli effetti

- L'analisi di un circuito con più generatori indipendenti può essere eseguita studiando i tutti i circuiti che si ottengono mantenendo un solo generatore volta e azzerando i rimanenti
  - *Spegnere un generatore indipendente di tensione corrisponde a sostituirlo con un cortocircuito*
  - *Spegnere un generatore indipendente di corrente corrisponde a sostituirlo con un circuito aperto*
- La soluzione del circuito è ottenuta sommando i contributi dei singoli generatori (se in tutte le fasi della risoluzione si mantengono gli stessi versi di riferimento)
- Il procedimento è conveniente quando i circuiti con un solo generatore hanno struttura più semplice rispetto al circuito completo
- In alcuni casi può essere conveniente dividere i generatori in gruppi, invece che considerarli singolarmente

Teorema di sovrapposizione e potenza

- Il teorema di sovrapposizione **non vale** per le potenze, legate da relazioni non lineari alle tensioni e alle correnti dei generatori



$$i = \frac{V_{G1}+V_{G2}}{R} \qquad i' = \frac{V_{G1}}{R} \qquad i'' = \frac{V_{G2}}{R}$$

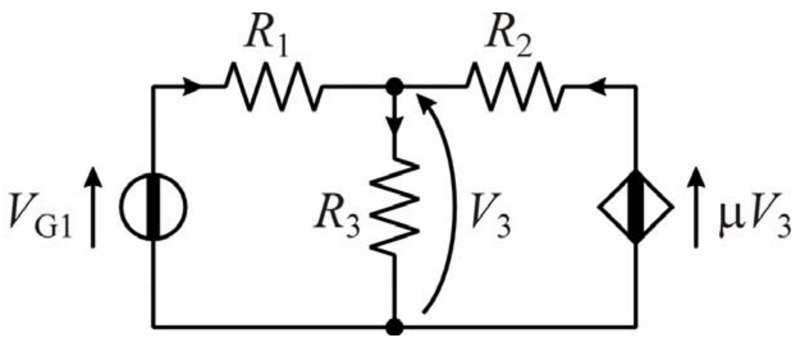
$$p_R = Ri^2 = \frac{(V_{G1}+V_{G2})^2}{R} \qquad p'_R = \frac{{V_{G1}}^2}{R} \qquad p''_R = \frac{V_{G2}^2}{R}$$

$$\boxed{i = i' + i'' \qquad p_R \neq p'_R + p''_R}$$

Teorema di sovrapposizione e generatori dipendenti

- Il teorema di sovrapposizione non riguarda i generatori dipendenti dato che le loro tensioni o correnti non sono termini noti delle equazioni del circuito
- E' comunque possibile utilizzare il teorema di sovrapposizione per risolvere circuiti con generatori dipendenti mediante il seguente procedimento:
  - Si sostituiscono i generatori dipendenti con generatori indipendenti di valore incognito
  - Mediante sovrapposizione, si determinano le tensioni o le correnti che controllano i generatori (**variabili di controllo**) in funzione delle tensioni o correnti incognite dei generatori (**variabili controllate**)
  - Si sostituiscono alle variabili controllate le loro espressioni in funzione delle variabili di controllo
  - In questo modo si ottengono delle equazioni in cui compaiono come incognite le sole variabili di controllo
  - Note le variabili di controllo, e quindi anche quelle controllate, si determinano le rimanenti tensioni e correnti

Esempio (1)



$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 3\ \Omega$

$R_3 = 6\ \Omega$

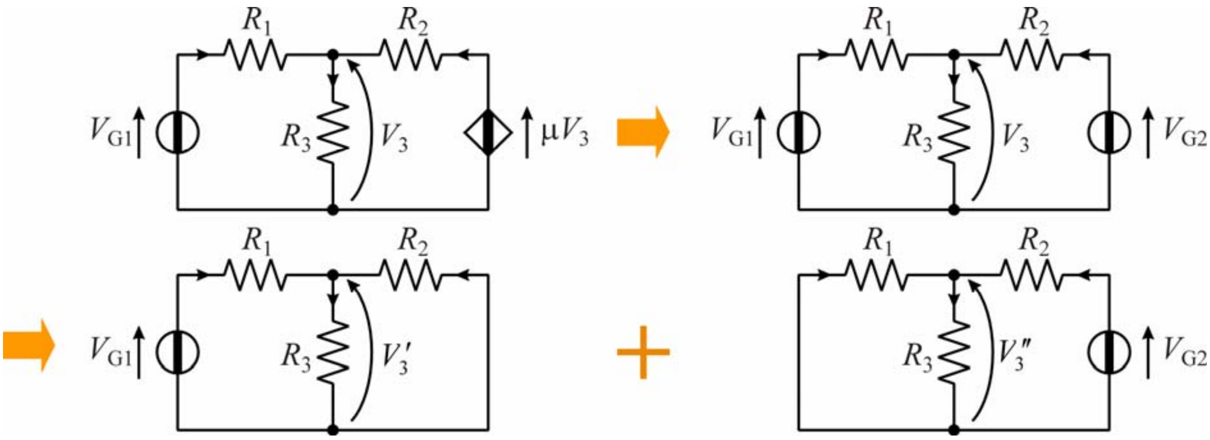
$V_{G1} = 10\ \mathrm{V}$

$\mu = 2$

Determinare le correnti nei resistori.

Esempio (2)

- Si sostituisce il generatore dipendente con un generatore indipendente di tensione incognita V_{G2} e si calcola la variabile di controllo V_3 mediante sovrapposizione.



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2\ \Omega \qquad R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 1.5\ \Omega$$

$$V_3' = V_{G1} \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 5\ \text{V} \qquad V_3'' = V_{G2} \frac{R_{13}}{R_2 + R_{13}} = \frac{V_{G2}}{5}\ \text{V}$$

Esempio (3)

- Sommando i contributi dei due generatori e sostituendo a V_{G2} la sua espressione in funzione della variabile di controllo V_3 si ottiene un'equazione nell'incognita V_3

$$\left.\begin{array}{l} V_3 = V_3' + V_3'' = 5 + \dfrac{V_{G2}}{5} \\ V_{G2} = \mu V_3 = 2V_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V_3 = 5 + \frac{2}{5} V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 15\ \text{V}$$

- Nota V_3 si possono determinare le correnti nei resistori

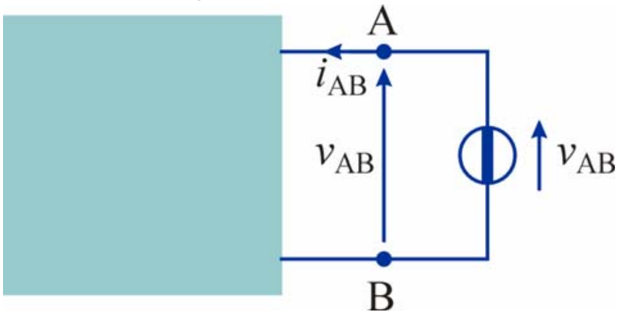
$$I_1 = \frac{V_{G1} - V_3}{R_1} = -2.5\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_{G2} - V_3}{R_2} = \frac{(\mu - 1)V_3}{R_2} = 5\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = 2.5\ \text{A}$$

Resistenza equivalente (1)

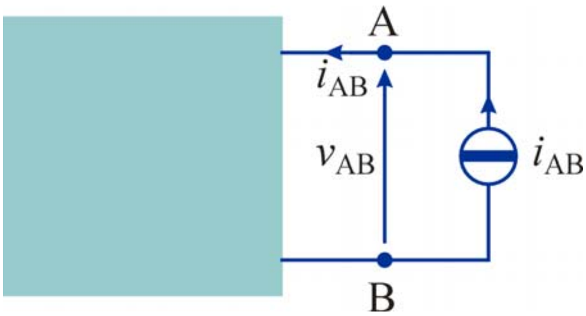
- Si consideri un bipolo A-B formato da componenti lineari (non contenente generatori indipendenti)
- Se il bipolo è comandato in tensione è possibile collegare ai suoi terminali un generatore indipendente di tensione
- Il circuito così ottenuto è lineare
  - ➨ la corrente entrante nel bipolo risulta proporzionale alla tensione del generatore indipendente
  - ➨ *il bipolo è equivalente a un resistore*
- La costante di proporzionalità rappresenta la conduttanza equivalente del bipolo (e il suo reciproco la resistenza equivalente)



$$G_{eq} = \frac{i_{AB}}{v_{AB}} \qquad R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}}$$

Resistenza equivalente (2)

- Se il bipolo A-B è comandato in corrente è possibile collegare ai suoi terminali un generatore indipendente di corrente
- Dato che il circuito è lineare, la tensione ai terminali del bipolo risulta proporzionale alla corrente del generatore indipendente
- La costante di proporzionalità rappresenta la resistenza equivalente del bipolo (e il suo reciproco la conduttanza equivalente)



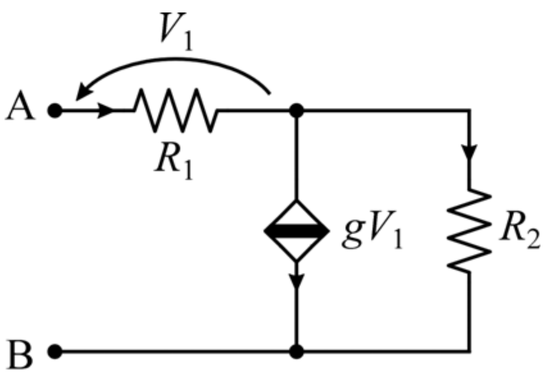
$$R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i_{AB}} \qquad G_{eq} = \frac{i_{AB}}{v_{AB}}$$

Resistenza equivalente - Nota

- In casi particolari il valore della resistenza equivalente può risultare negativo
- Se $R_{eq} < 0$, in ogni condizione di funzionamento (tranne il che per $v_{ab} = 0$, $i_{ab} = 0$) la potenza erogata dal bipolo è positiva, quindi il bipolo A-B è attivo

➡ La resistenza equivalente può essere negativa solo se il bipolo A-B contiene componenti attivi (come i generatori dipendenti)

Esempio



Determinare la resistenza equivalente del bipolo A-B.

- Il bipolo è comandato sia in tensione che in corrente

➡ E’ possibile valutare la resistenza equivalente
  - collegando un generatore di tensione arbitraria V_{AB} ai suoi terminali e calcolando la corrente I_{AB}
  - collegando un generatore di corrente arbitraria I_{AB} ai suoi terminali e calcolando la tensione V_{AB}

Esempio – Metodo 1

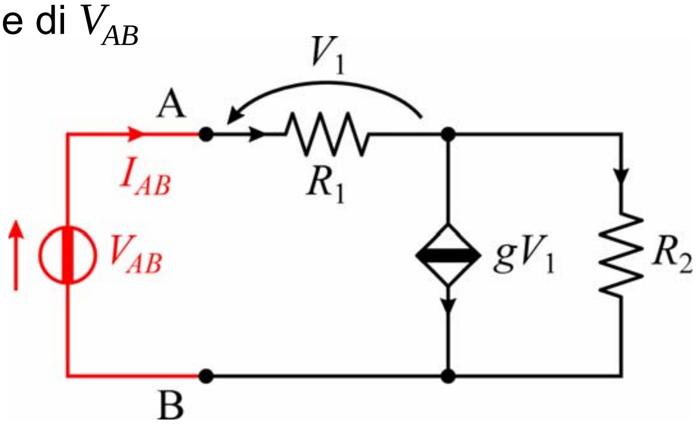
- Si collega un generatore di tensione V_{AB} ai terminali del bipolo A-B (il valore di V_{AB} è irrilevante ai fini del calcolo di R_{eq})
- In primo luogo si ricava l'espressione della tensione V_1, che controlla il generatore dipendente, in funzione di V_{AB}
- Dalla LKV si ha

$$V_{AB} = V_1 + V_2$$

- Si esprime V_2 in funzione di V_1

$$V_2 = R_2 I_2 = R_2(I_1 - gV_1) =$$

$$= R_2\left(\frac{V_1}{R_1} - gV_1\right)$$



- Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente si ricava

$$V_{AB} = V_1 + \frac{R_2}{R_1}V_1 - gR_2V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_{AB}\frac{R_1}{R_1 + R_2 - gR_1R_2}$$

Esempio – Metodo 1

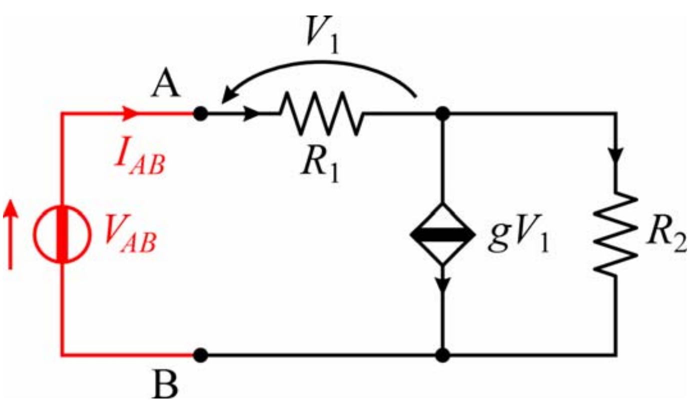
- Nota V_1 si può calcolare la corrente I_{AB}

$$I_{AB} = I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_{AB}}{R_1 + R_2 - gR_1R_2}$$

- Dato che il bipolo A-B è lineare, si è ottenuta una corrente proporzionale alla tensione del generatore indipendente

➡ Il rapporto tra V_{AB} e I_{AB} non dipende da V_{AB} e rappresenta la resistenza equivalente del bipolo A-B

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = R_1 + R_2 - gR_1R_2$$



Esempio – Metodo 2

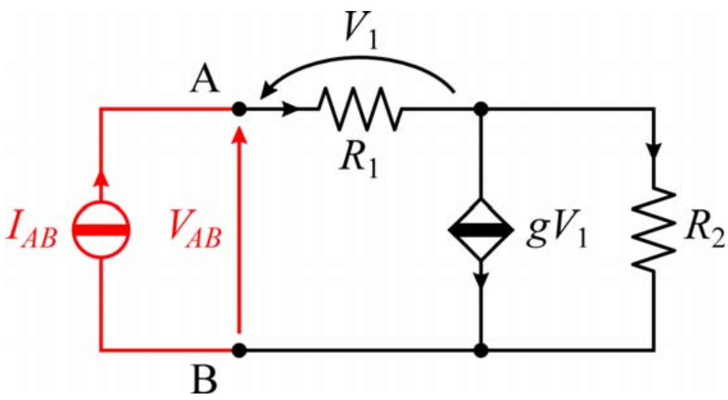
- Si collega un generatore di tensione V_{AB} ai terminali del bipolo A-B (il valore di V_{AB} è irrilevante ai fini del calcolo di R_{eq})
- Dato che R_1 è in serie al generatore, si ottiene immediatamente l'espressione della variabile di controllo in funzione di I_{AB}

$$V_1 = R_1 I_{AB}$$

- Si calcola la tensione V_{AB}
- Dalla LKV si ha

$$V_{AB} = V_1 + V_2$$

- Si ricava l'espressione di V_2 in funzione di I_{AB}



$$V_2 = R_2 I_2 = R_2(I_1 - gV_1) = (R_2 - gR_1R_2)I_{AB}$$

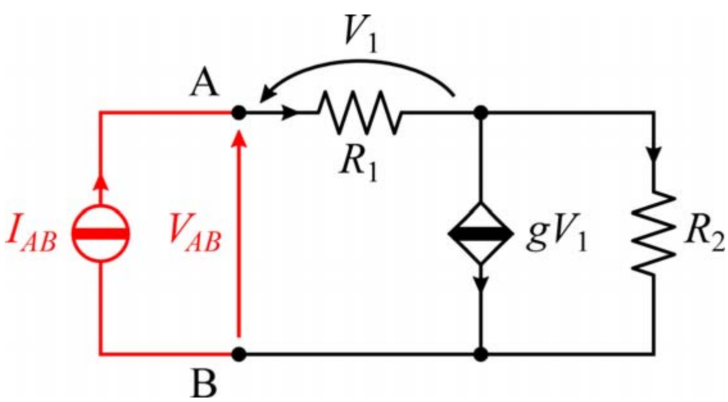
Esempio – Metodo 2

- Utilizzando le espressioni di V_1 e V_2 in funzione di I_{AB}, si ricava la seguente espressione di V_{AB}

$$V_{AB} = (R_1 + R_2 - gR_1R_2)I_{AB}$$

- Dato che il bipolo è A-B lineare, si è ottenuta una tensione proporzionale alla corrente del generatore indipendente
- ➡ Il rapporto tra V_{AB} e I_{AB} non dipende da I_{AB} e rappresenta la resistenza equivalente del bipolo A-B

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = R_1 + R_2 - gR_1R_2$$



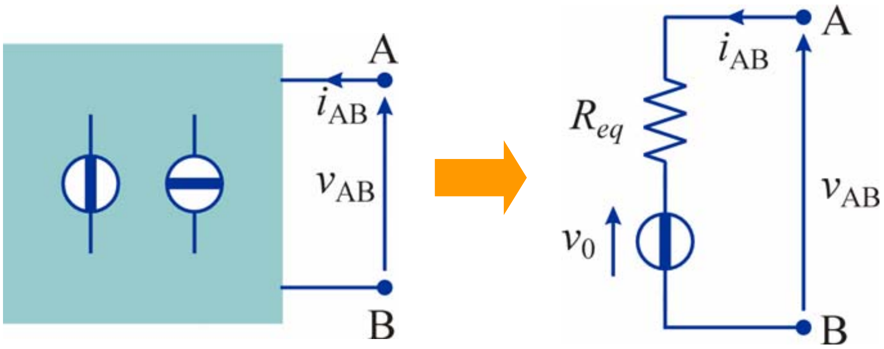
Note

- Se il bipolo è comandato sia in tensione che in corrente i due metodi sono equivalenti
  - ➡ Si può scegliere di utilizzare il generatore con cui la soluzione del circuito risulta più semplice
- Se si deve risolvere il circuito per via numerica, si può attribuire alla tensione o alla corrente del generatore indipendente un valore scelto arbitrariamente. Ad esempio:
  - si può collegare al bipolo un generatore di tensione da 1 V, in modo che il valore numerico (in ampere) della corrente I_{AB} coincida con quello della conduttanza equivalente del bipolo (in siemens)
  - si può collegare un generatore di corrente da 1 A, in modo che il valore numerico (in volt) della tensione V_{AB} coincida con quello della resistenza equivalente (in ohm)

Teorema di Thévenin

- **Ipotesi:** si considera un bipolo A-B
  - formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - comandato in corrente

➡ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di tensione v_0 in serie con un resistore R_{eq}
  - v_0 è la tensione a vuoto del bipolo A-B
  - R_{eq} è la resistenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati

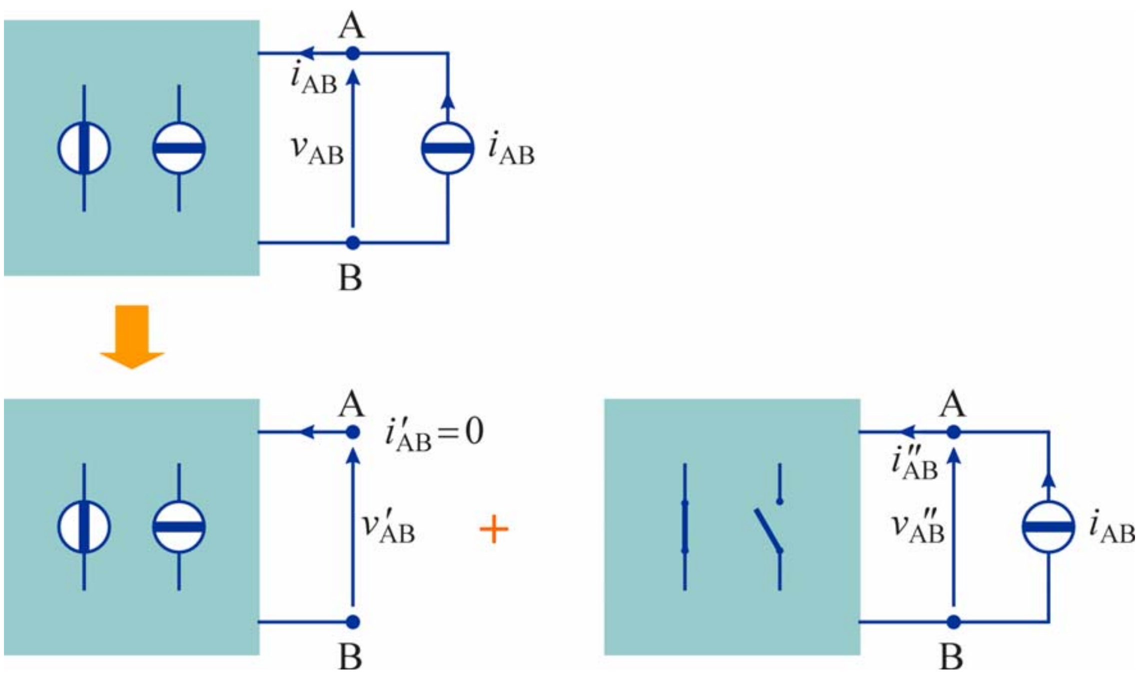


$$\boxed{v_{\mathrm{AB}} = v_0 + R_{eq} i_{\mathrm{AB}}}$$

Teorema di Thévenin – Dimostrazione (1)

- Per ipotesi il bipolo è comandato in corrente
  - ➡ ad ogni valore della corrente i_{AB} corrisponde uno e un solo valore della tensione v_{AB}
- Per determinare la relazione tra la corrente e la tensione si può imporre il valore della corrente ai terminali mediante un generatore indipendente di corrente i_{AB} e valutare la tensione v_{AB} risolvendo il circuito così ottenuto
- Dato che il circuito è lineare, è possibile applicare il teorema di sovrapposizione e scomporre la tensione v_{AB} in due contributi
  - uno dovuto ai generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo, valutato con il generatore i_{AB} azzerato (➡ circuito aperto)
  - uno dovuto alla corrente i_{AB}, valutato con i generatori indipendenti interni azzerati

Teorema di Thévenin – Dimostrazione (2)



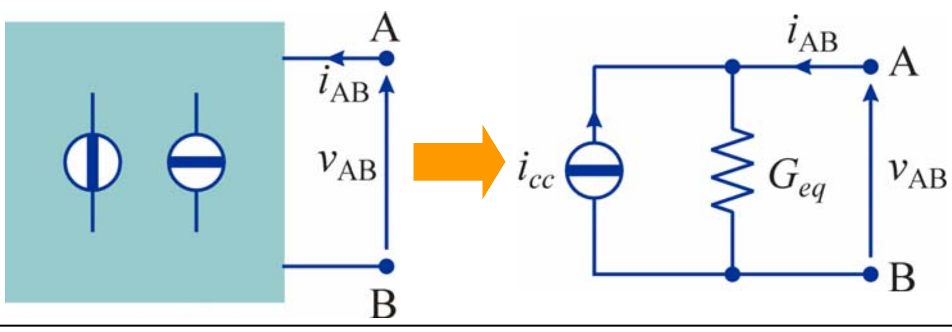
$$v_{AB} = v'_{AB} + v''_{AB} = v_0 + R_{eq} i_{AB}$$

Teorema di Thévenin – Dimostrazione (3)

- Il primo contributo, v'_{AB}, rappresenta la **tensione a vuoto** del bipolo A-B
  - è una combinazione lineare delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B
  - non dipende dalla corrente i_{AB}
- Il secondo contributo, v''_{AB}, è proporzionale alla corrente del generatore esterno
  - la costante di proporzionalità, cioè il rapporto tra v''_{AB} e i_{AB}, rappresenta la **resistenza equivalente** del bipolo che si ottiene azzerando i generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B

Teorema di Norton

- **Ipotesi:** si considera un bipolo A-B
  - formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - comandato in tensione
- ➡ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di corrente i_{cc} in parallelo con un resistore di conduttanza G_{eq}
  - i_{cc} è la corrente di cortocircuito del bipolo A-B (con verso di riferimento, nel cortocircuito, diretto da A a B)
  - G_{eq} $(=1/R_{eq})$ è la conduttanza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati

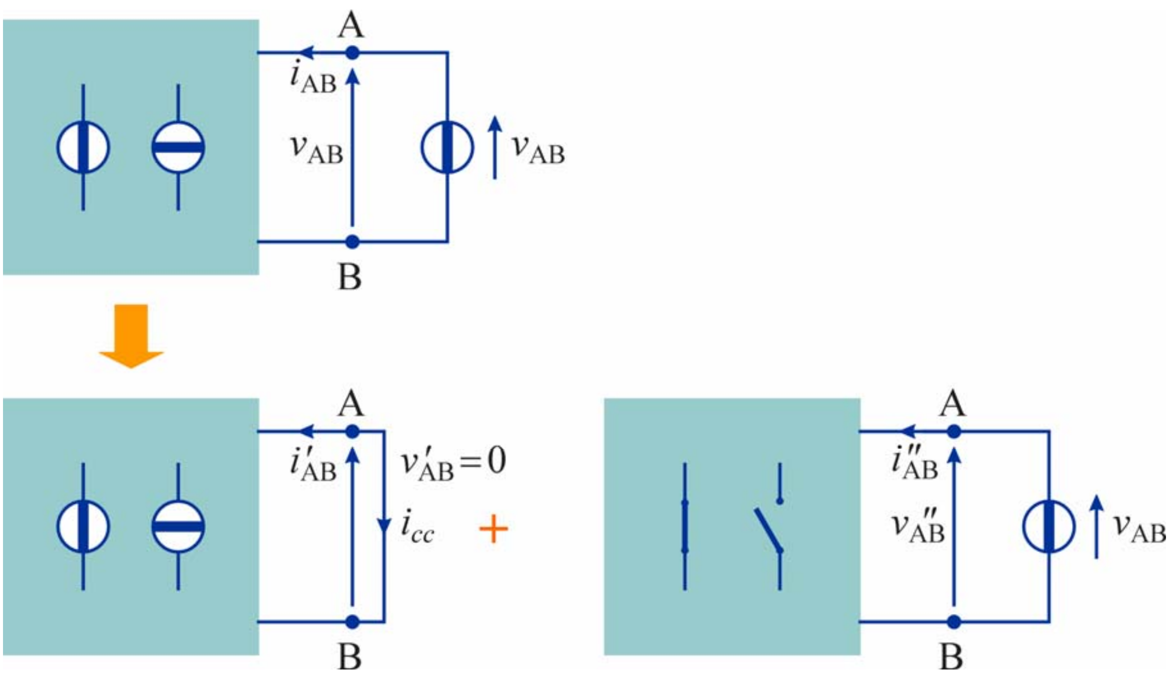


$$\boxed{i_{AB} = -i_{cc} + G_{eq} v_{AB}}$$

Teorema di Norton – Dimostrazione (1)

- Per ipotesi il bipolo è comandato in tensione
  - ➡ ad ogni valore della tensione v_{AB} corrisponde uno e un solo valore della corrente i_{AB}
- Per determinare la relazione tra la tensione e la corrente si può imporre il valore della tensione ai terminali mediante un generatore indipendente di tensione v_{AB} e valutare la corrente i_{AB} risolvendo il circuito così ottenuto
- Dato che il circuito è lineare, è possibile applicare il teorema di sovrapposizione e scomporre la corrente i_{AB} in due contributi
  - uno dovuto ai generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo, valutato con il generatore v_{AB} azzerato (➡ cortocircuito)
  - uno dovuto alla tensione v_{AB}, valutato con i generatori indipendenti interni azzerati

Teorema di Norton – Dimostrazione (2)



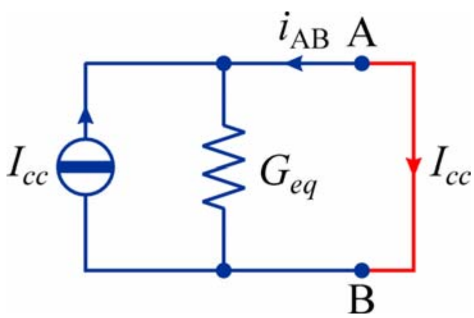
$$i_{AB} = i'_{AB} + i''_{AB} = -i_{cc} + G_{eq} v_{AB}$$

Teorema di Norton – Dimostrazione (3)

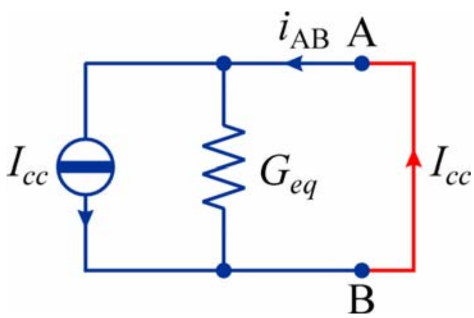
- Il primo contributo, i'_{AB}, rappresenta l'opposto della **corrente di cortocircuito** del bipolo A-B $(i'_{AB} = -i_{cc})$
  - è una combinazione lineare delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B
  - non dipende dalla tensione v_{AB}
- Il secondo contributo, i''_{AB}, è proporzionale alla tensione del generatore esterno
  - la costante di proporzionalità, cioè il rapporto tra i''_{AB} e v_{AB}, rappresenta la **conduttanza equivalente** del bipolo che si ottiene azzerando i generatori indipendenti contenuti nel bipolo A-B

Teorema di Norton – Nota

- Il verso di riferimento attribuito alla corrente nel cortocircuito è correlato al verso del generatore presente nel circuito equivalente
  - una corrente diretta (nel cortocircuito) da A verso B corrisponde alla corrente di un generatore con il verso di riferimento entrante nel nodo A



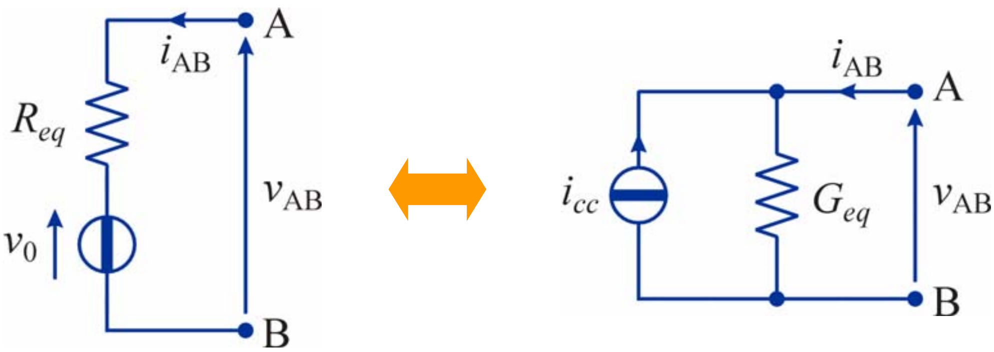
  - se il verso di fosse scelto da B ad A, la corrente corrisponderebbe a quella di un generatore con verso entrante nel nodo B, quindi il circuito equivalente dovrebbe essere modificato come indicato nella figura



Bipoli equivalenti di Thévenin e Norton

- Se il bipolo A-B ammette sia il circuito equivalente di Thévenin sia il circuito equivalente di Norton, questi sono anche equivalenti tra loro, quindi (con i versi di riferimento indicati nella figura) valgono le relazioni

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} \qquad\qquad v_0 = R_{eq} i_{cc}$$



Calcolo dei parametri dei bipoli equivalenti di Thévenin e Norton

- E' possibile ricavare simultaneamente i parametri del bipolo equivalente di Thévenin (o di Norton) risolvendo il circuito ottenuto collegando al bipolo dato un generatore indipendente di corrente (o di tensione) come è stato fatto per dimostrare i teoremi
- Spesso risulta più conveniente calcolare separatamente i tre parametri
- Per ciascun parametro si deve studiare un circuito diverso:
  - analisi del bipolo a vuoto, per il calcolo di V_0
  - analisi del bipolo con i terminali in cortocircuito per il calcolo di I_{cc}
  - analisi del bipolo con i generatori indipendenti azzerati per il calcolo di R_{eq}
- E' opportuno sottolineare che
  - le tre analisi sono indipendenti tra loro: nello studio di ciascuno di questi circuiti non si possono utilizzare valori di tensioni o correnti determinati risolvendo uno degli altri due circuiti
  - per il calcolo di R_{eq} **non si devono azzerare i generatori dipendenti**