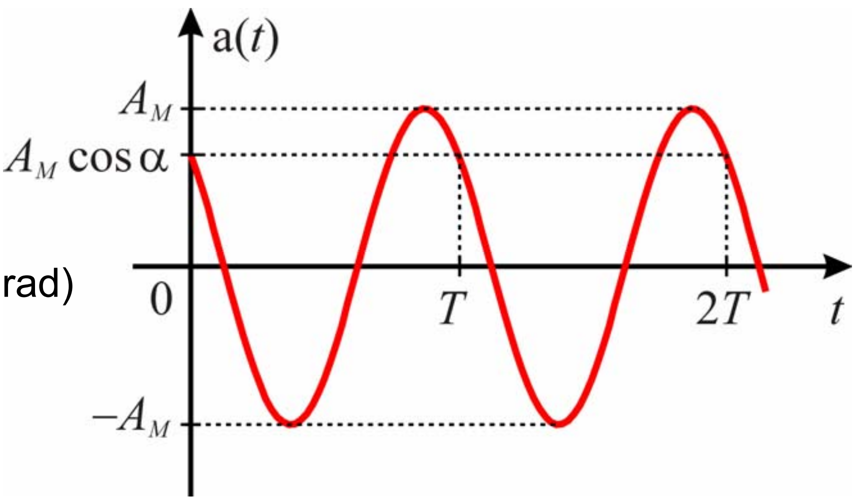
Circuiti in regime sinusoidale

Parte 1

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 23-10-2015)

Funzioni sinusoidali

$$\boxed{a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)}$$



A_M = ampiezza

α = fase iniziale (radianti, rad)

$(-\pi < \alpha \leq \pi)$

ω = pulsazione (rad/s)

f = frequenza (hertz, Hz)

T = periodo (secondi, s)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Regimi sinusoidali (1)

- Si considera un circuito lineare dinamico in cui tutti i generatori indipendenti sono sinusoidali e hanno la stessa pulsazione ω
- Le equazioni del circuito costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari nel quale i termini noti sono funzioni sinusoidali con pulsazione ω
- Le equazioni generalmente ammettono una soluzione sinusoidale con pulsazione ω
- Se il circuito è asintoticamente stabile, questa soluzione particolare rappresenta la componente di regime della risposta (➡ **regime sinusoidale**)

Regimi sinusoidali (2)

- **Regime sinusoidale**: condizione di funzionamento di un circuito nella quale tutte le tensioni e le correnti sono funzioni sinusoidali del tempo aventi la stessa pulsazione ω
- Fissata la pulsazione, una funzione sinusoidale è definita da due parametri
  - ampiezza
  - fase
- Il problema della determinazione della soluzione particolare sinusoidale delle equazioni del circuito (cioè della determinazione delle ampiezze e delle fasi di tutte le tensioni e correnti) può essere ricondotto ad un problema di tipo algebrico mediante la **trasformata di Steinmetz**
- Il metodo di analisi basato sulla trasformata di Steinmetz è detto anche **metodo simbolico**

Trasformata di Steinmetz

- **Trasformata di Steinmetz: $\mathcal{S}$**
  - Ad ogni funzione sinusoidale di pulsazione ω
    $a(t) = A_M\cos(\omega t+\alpha)$
    si associa un numero complesso $\mathbf{A}$ avente
    - modulo A_M (= ampiezza della funzione sinusoidale)
    - argomento α (= fase della funzione sinusoidale)

$$\mathbf{A} = \mathcal{S}\{a(t)\} = A_M e^{j\alpha} = A_M(\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

  - $\mathbf{A}$ = **fasore** o **numero complesso rappresentativo** di $a(t)$

- **Antitrasformata di Steinmetz: $\mathcal{S}^{-1}$**

$$a(t) = \mathcal{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[A_M e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = A_M\cos(\omega t+\alpha)$$

Interpretazione geometrica

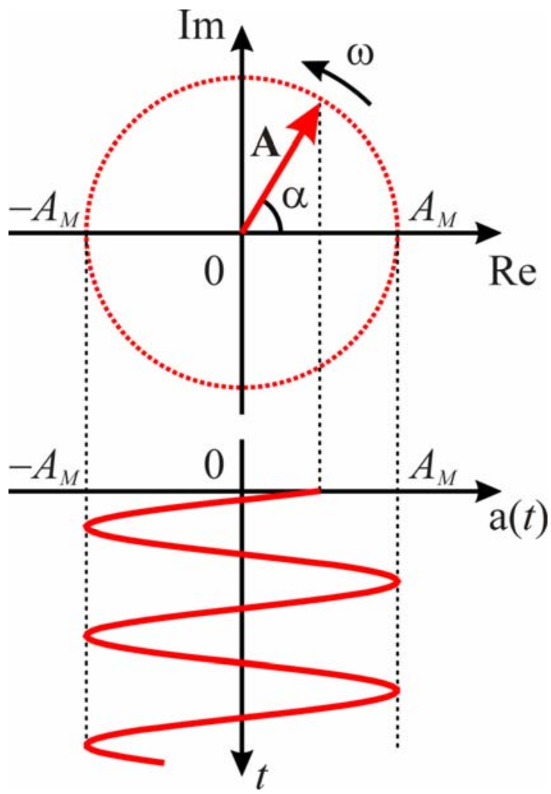
- La funzione

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}\,\mathrm{e}^{j\omega t} = A_M\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\alpha)}$$

  può essere rappresentata nel piano complesso mediante un vettore che ruota con velocità angolare ω
- La proiezione sull'asse reale restituisce la funzione $a(t)$

$$a(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = A_M\cos(\omega t+\alpha)$$

- Il fasore $\mathbf{A}$ determina la posizione del vettore per $t = 0$, a partire dalla quale, nota ω, si può ricostruire $a(t)$



Proprietà della trasformata di Steinmetz (1)

Unicità

- *La trasformata di Steinmetz stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni sinusoidali di pulsazione* ω *e i numeri complessi*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad && \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M \, \mathrm{e}^{j\alpha} \\
&\mathrm{b}(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) \qquad && \mathbf{B} = \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = B_M \, \mathrm{e}^{j\beta}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{b}(t) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz (2)

Linearità

- *La trasformata di Steinmetz è un'operazione lineare*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad && \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M \, \mathrm{e}^{j\alpha} \\
&\mathrm{b}(t) = B_M \cos(\omega t + \beta) \qquad && \mathbf{B} = \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = B_M \, \mathrm{e}^{j\beta}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\forall k_1, k_2 \in / : \\
&\mathbb{S}\{k_1 \, \mathrm{a}(t) + k_2 \, \mathrm{b}(t)\} = k_1 \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} + k_2 \mathbb{S}\{\mathrm{b}(t)\} = k_1 \mathbf{A} + k_2 \mathbf{B}
\end{aligned}
$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz (3)

Regola di derivazione

- *La trasformata della derivata di una funzione sinusoidale si ottiene moltiplicando per $j\omega$ la trasformata della funzione*

$$\mathrm{a}(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \qquad \mathbf{A} = \mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = A_M \,\mathrm{e}^{j\alpha}$$

$$\boxed{\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = j\omega\mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\} = j\omega\mathbf{A}}$$

- Dimostrazione:

$$\frac{d\,\mathrm{a}}{dt} = -\omega A_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = \omega A_M \,\mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A_M \,\mathrm{e}^{j\alpha}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega A_M \,\mathrm{e}^{j\alpha} = j\omega\mathbf{A} = j\omega\mathbb{S}\{\mathrm{a}(t)\}$$

Proprietà della trasformata di Steinmetz (4)

Regola di derivazione

- Applicando ricorsivamente la regola di derivazione si possono ottenere le trasformate delle derivate di ordine superiore

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^2\,\mathrm{a}}{dt^2}\right\} = j\omega\cdot\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}}{dt}\right\} = (j\omega)^2\mathbf{A} = -\omega^2\mathbf{A}$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^3\,\mathrm{a}}{dt^3}\right\} = j\omega\cdot\mathbb{S}\left\{\frac{d^2\,\mathrm{a}}{dt^2}\right\} = (j\omega)^3\mathbf{A} = -j\omega^3\mathbf{A}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{S}\left\{\frac{d^n\,\mathrm{a}}{dt^n}\right\} = j\omega\cdot\mathbb{S}\left\{\frac{d\,\mathrm{a}^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\} = (j\omega)^n\mathbf{A}$$

Antitrasformata

- Noto il numero complesso rappresentativo $\mathbf{A}$ di una funzione sinusoidale

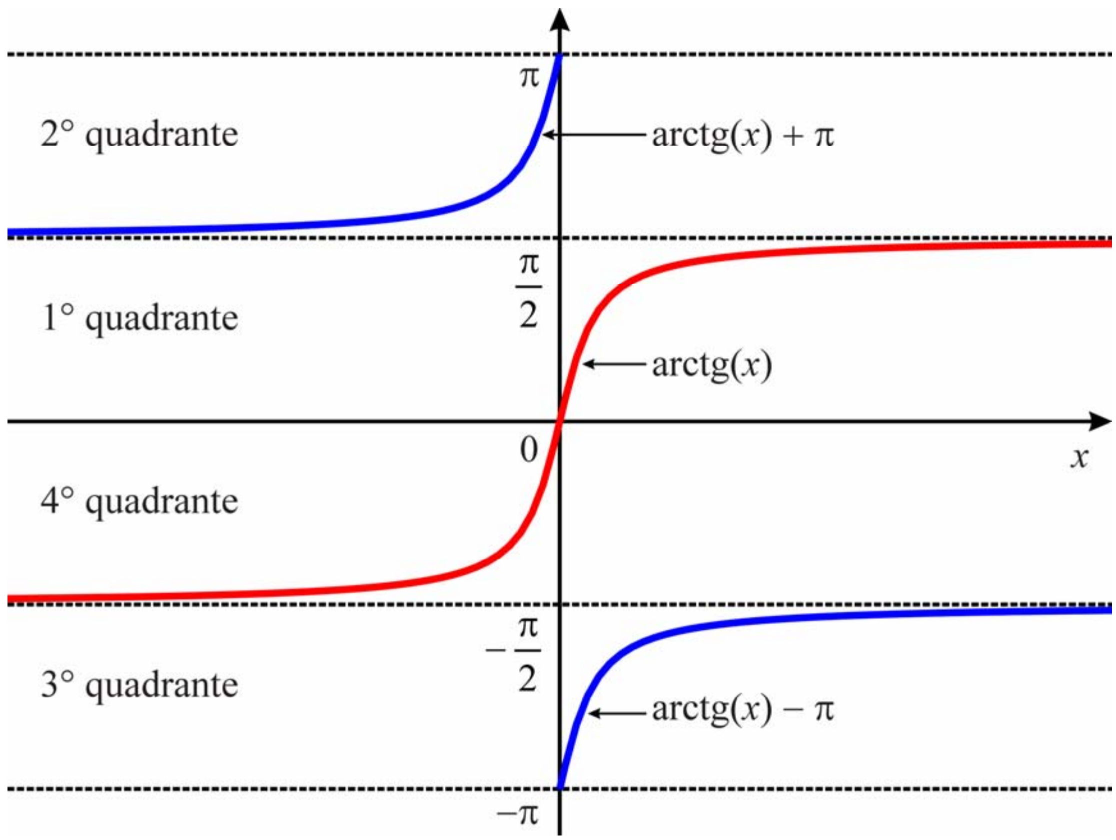
  $$\mathbf{A} = A_M e^{ja} = x + jy$$

  e nota la pulsazione ω, è possibile determinare in modo univoco la funzione sinusoidale $\mathrm{a}(t)$ mediante la relazione

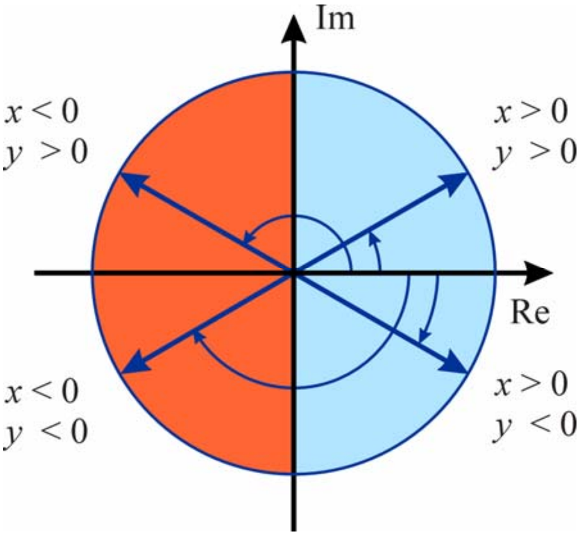
  $$\mathrm{a}(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{\mathbf{A}\} = A_M \cos(\omega t + \alpha) = |\mathbf{A}| \cos[\omega t + \arg(\mathbf{A})]$$

- **Nota:**
  - Vale la relazione $\mathrm{tg}\alpha = y/x$ ma questo non consente di affermare che $\alpha = \mathrm{arctg}(y/x)$
  - Dato che la funzione tangente ha periodo π esistono due valori di α nell'intervallo $]-\pi\ \pi]$ in cui la tangente ha lo stesso valore
  - ➡ Per determinare α occorre tenere conto dei segni di x e y

Antitrasformata – determinazione della fase (1)



Antitrasformata – determinazione della fase (2)



$$\mathbf{A} = x + jy = A_M e^{j\alpha}$$

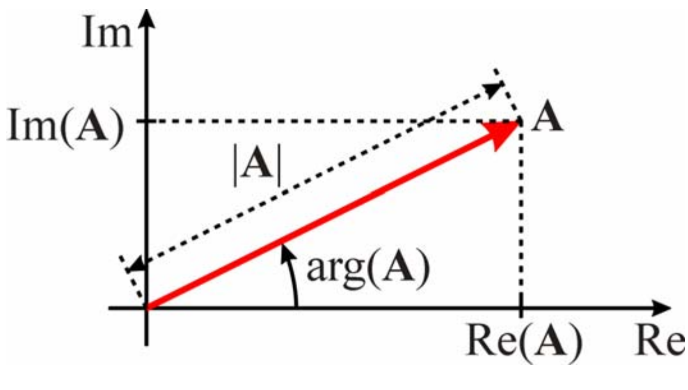
$$A_M = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{per } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot \mathrm{sgn}(y) & \text{per } x = 0 \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi\cdot\mathrm{sgn}(y) & \text{per } x < 0, y \neq 0 \\ \pi & \text{per } x < 0, y = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ -1 & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

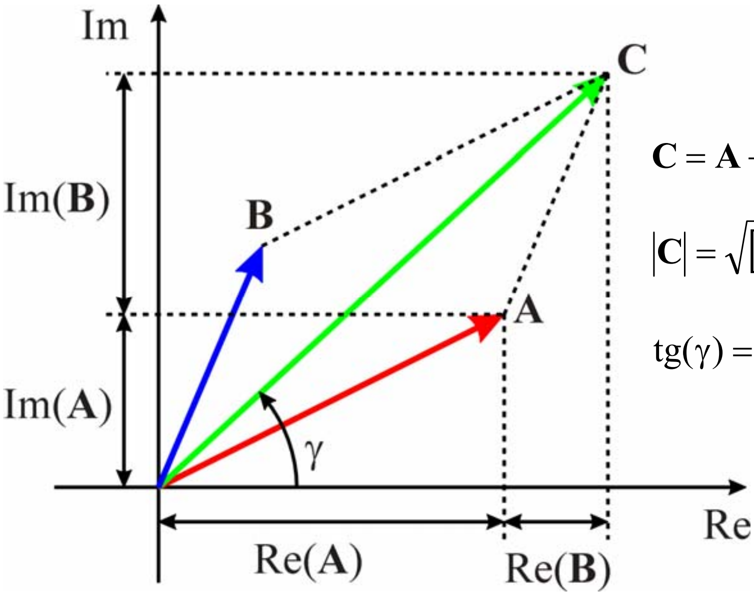
Diagrammi fasoriali

- I fasori possono essere rappresentati mediante vettori nel piano complesso
  - Le operazioni sui fasori possono essere eseguite anche operando graficamente sui vettori
  - I diagrammi nel piano complesso (**diagrammi fasoriali**) possono essere utilizzati per visualizzare le relazioni tra i fasori



Operazioni grafiche sui fasori (1)

- La somma tra due fasori può essere eseguita per via grafica mediante la regola del parallelogramma



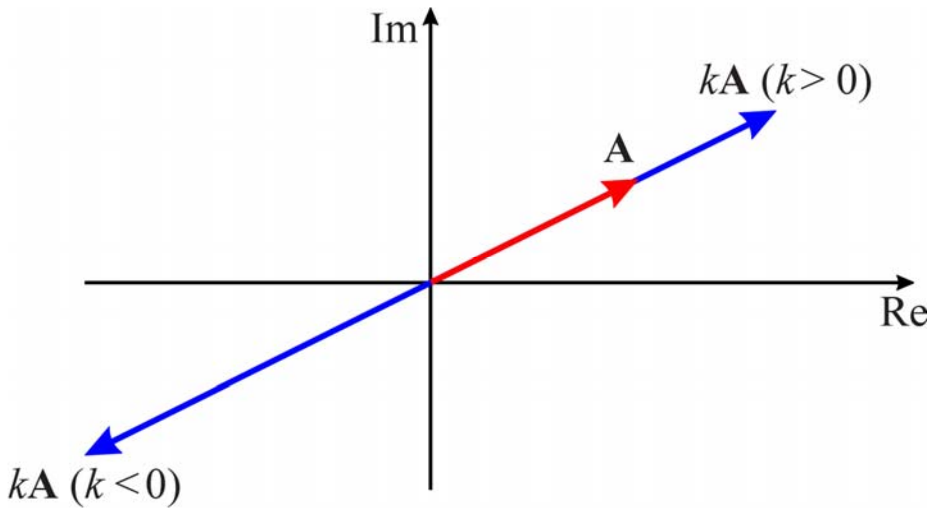
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\mathrm{Re}(\mathbf{A}) + \mathrm{Re}(\mathbf{B})\right] + j\left[\mathrm{Im}(\mathbf{A}) + \mathrm{Im}(\mathbf{B})\right]$$

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(\mathbf{A}) + \mathrm{Re}(\mathbf{B})\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(\mathbf{A}) + \mathrm{Im}(\mathbf{B})\right]^2}$$

$$\mathrm{tg}(\gamma) = \frac{\mathrm{Im}(\mathbf{A}) + \mathrm{Im}(\mathbf{B})}{\mathrm{Re}(\mathbf{A}) + \mathrm{Re}(\mathbf{B})}$$

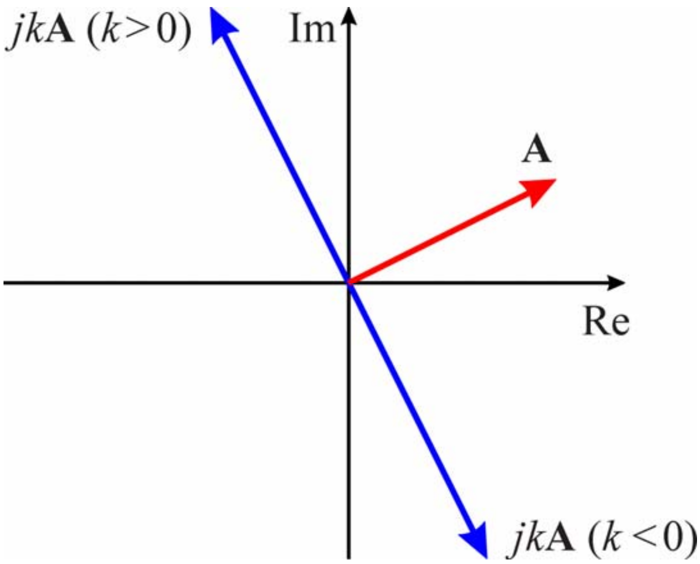
Operazioni grafiche sui fasori (2)

- Moltiplicando un fasore $\mathbf{A}$ per una costante reale positiva k si ottiene un fasore il cui modulo è $k\mathbf{A}$
- Moltiplicando un fasore $\mathbf{A}$ per una costante reale negativa k si ottiene un fasore il cui modulo è $k\mathbf{A}$ e che ha verso opposto ad $\mathbf{A}$



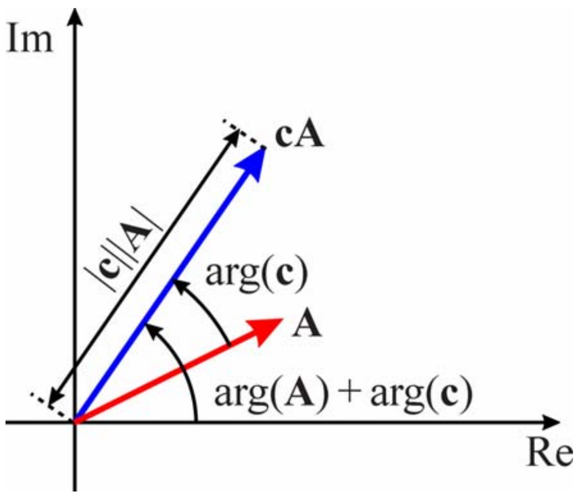
Operazioni grafiche sui fasori (3)

- Moltiplicando un fasore $\mathbf{A}$ per una costante immaginaria jk si ottiene un fasore con modulo $k|\mathbf{A}|$ e ruotato di 90° rispetto ad $\mathbf{A}$
  - in senso antiorario per $k > 0$
  - in senso orario per $k < 0$



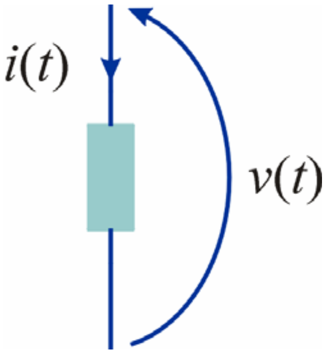
Operazioni grafiche sui fasori (4)

- Moltiplicando un fasore $\mathbf{A}$ per una costante complessa $\mathbf{c}$ si ottiene un fasore con modulo $|\mathbf{c}||\mathbf{A}|$ e argomento $\arg(\mathbf{A}) + \arg(\mathbf{c})$



- **Nota**: Come si vedrà in seguito, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{cA}$ sono fasori, $\mathbf{c}$ non è un fasore (per questo non si parla di prodotto tra due fasori)

Bipoli in regime sinusoidale



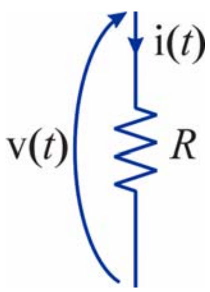
- Condizioni di regime sinusoidale
- Tensione e corrente orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore:

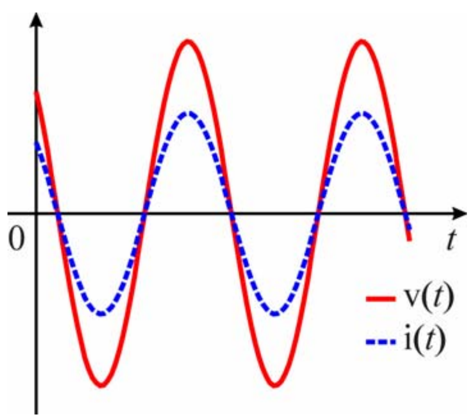
$$\mathrm{v}(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V) \qquad \mathbf{V} = \mathfrak{S}\{\mathrm{v}(t)\} = V_M e^{j\varphi_V}$$
$$\mathrm{i}(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathfrak{S}\{\mathrm{i}(t)\} = I_M e^{j\varphi_I}$$

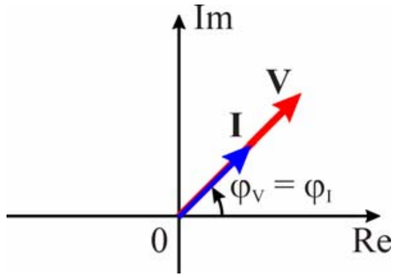
- **Sfasamento fra tensione e corrente**: $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$

Resistore in regime sinusoidale

$$\mathrm{v}(t) = R\,\mathrm{i}(t) = RI_M \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I}$$
$$\mathrm{i}(t) = G\,\mathrm{v}(t) = GV_M \cos(\omega t + \varphi_V) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = G\mathbf{V}$$



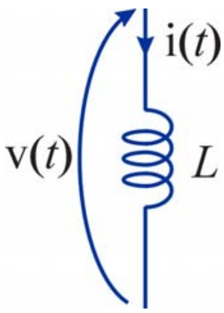


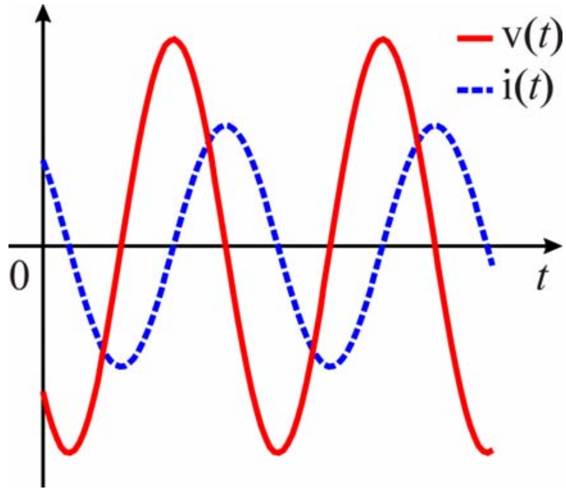


$V_M = RI_M$

$\varphi_V = \varphi_I \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ la tensione e la corrente sono **in fase**

Induttore in regime sinusoidale





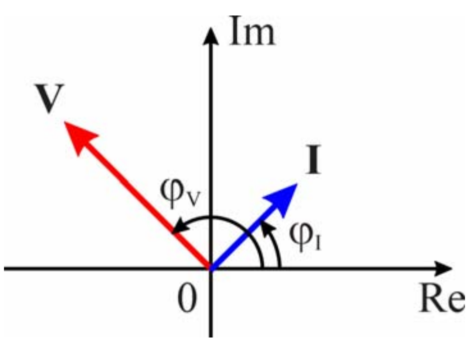
$$v(t) = L\frac{d\,i}{dt} = -\omega L I_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_I) = \omega L I_M \cos(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2})$$

$$V_M = \omega L I_M$$

$\varphi_V = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$ ➡ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ➡ la corrente è **in quadratura in ritardo** rispetto alla tensione

Induttore – relazioni tra i fasori

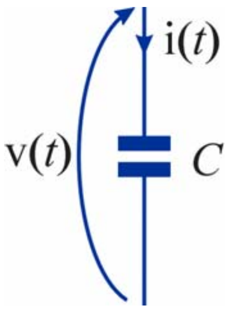
$$v(t) = L\frac{d\,i}{dt} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} = jX_L\mathbf{I} \\ \mathbf{I} = -j\frac{1}{\omega L}\mathbf{V} = jB_L\mathbf{V} \end{array}$$

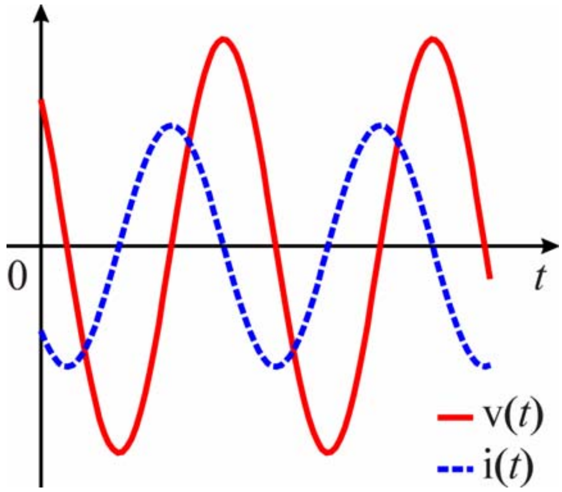


Reattanza: $X_L = \omega L$

Suscettanza: $B_L = -\frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{X_L}$

Condensatore in regime sinusoidale





$$\mathrm{i}(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = -\omega C V_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_V) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi_V + \frac{\pi}{2})$$

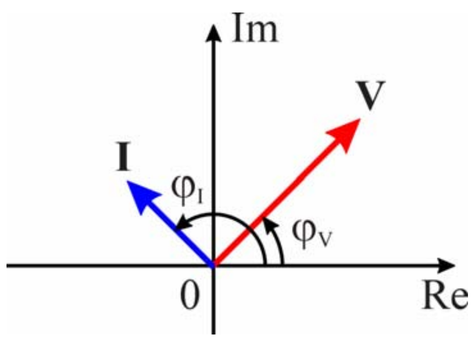
$$I_M = \omega C V_M$$

$\varphi_V = \varphi_I - \frac{\pi}{2}$ ➡ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ➡ la corrente è **in quadratura in anticipo** rispetto alla tensione

Condensatore – relazioni tra i fasori

$\mathrm{i}(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}$ ➡ $\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} = jB_C\mathbf{V}$

$\mathbf{V} = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} = jX_C\mathbf{I}$



Suscettanza: $B_C = \omega C$

Reattanza: $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{B_C}$

Legge di Ohm simbolica (1)

- Le relazioni tra i fasori della tensione e della corrente per il resistore, l'induttore e il condensatore sono casi particolari delle equazioni

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

Componente	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$
Resistore	R	G
Induttore	$j\omega L$	$-j\dfrac{1}{\omega L}$
Condensatore	$-j\dfrac{1}{\omega C}$	$j\omega C$

Legge di Ohm simbolica (2)

- Più in generale, per un bipolo lineare non contenente generatori indipendenti, la tensione e la corrente sono legate tra loro da relazioni differenziali lineari omogenee
- ➡ Per la proprietà di linearità e la regola di derivazione della trasformata di Steinmetz, le corrispondenti relazioni tra i fasori della tensione e della corrente sono lineari algebriche omogenee, e quindi ancora del tipo

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$$

- Nel caso generale $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ sono funzioni complesse della pulsazione

$$\mathbf{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\mathbf{Y}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

Impedenza

- Per un bipolo lineare non contenente generatori si definisce **impedenza** il rapporto

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{Z} = R + jX \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} R = \textbf{resistenza} \\ X = \textbf{reattanza} \end{array}$$

(unità di misura ohm)

- Il modulo dell'impedenza è uguale al rapporto tra le ampiezze della tensione e della corrente

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_M}{I_M}$$

- L'argomento dell'impedenza è uguale allo sfasamento tra la tensione e la corrente

$$\arg(\mathbf{Z}) = \varphi = \varphi_V - \varphi_I$$

$\varphi > 0$ ➡ corrente in ritardo sulla tensione

$\varphi < 0$ ➡ corrente in anticipo sulla tensione

Ammettenza

- Il reciproco dell'impedenza è detto **ammettenza**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{I_M}{V_M} e^{-j\varphi}$$

$$\mathbf{Y} = G + jB \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} G = \textbf{conduttanza} \\ B = \textbf{suscettanza} \end{array}$$

(unità di misura siemens)

- Valgono le relazioni

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \qquad \mathbf{Z} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow\; G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{|\mathbf{Z}|^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} = -\frac{X}{|\mathbf{Z}|^2}$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{|\mathbf{Y}|^2} \qquad X = -\frac{B}{G^2 + B^2} = -\frac{B}{|\mathbf{Y}|^2}$$

Nota

- Il termine **fasori** viene utilizzato per indicare numeri complessi che corrispondono (tramite la trasformata di Steinmetz) a funzioni sinusoidali
- Nelle relazioni $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ o $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$, $\mathbf{V}$ è $\mathbf{I}$ sono fasori, perché rappresentano funzioni sinusoidali $v(t)$ e $i(t)$
- L'impedenza $\mathbf{Z}$ e l'ammettenza $\mathbf{Y}$ non corrispondono a funzioni sinusoidali, ma rappresentano le operazioni (in generale differenziali) che legano le funzioni $v(t)$ e $i(t)$

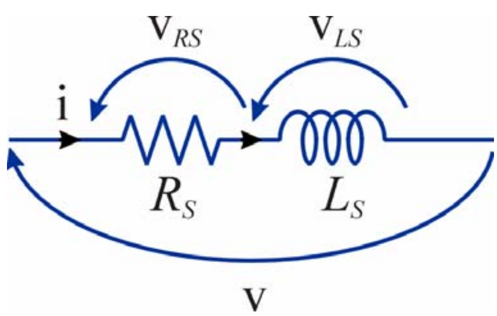
➡ L'impedenza $\mathbf{Z}$ e l'ammettenza $\mathbf{Y}$ non sono fasori ma **operatori** complessi

Bipolo RL serie (1)

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_{RS}(t) + \mathrm{v}_{LS}(t) = R_S i(t) + L_S \frac{d\,\mathrm{i}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{LS} = \left(R_S + j\omega L_S\right)\mathbf{I}$$



Impedenza:

$$\mathbf{Z} = R_S + j\omega L_S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = R_S \\ X = \omega L_S \end{cases} \qquad \varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L_S}{R_S}\right)$$

Ammettenza:

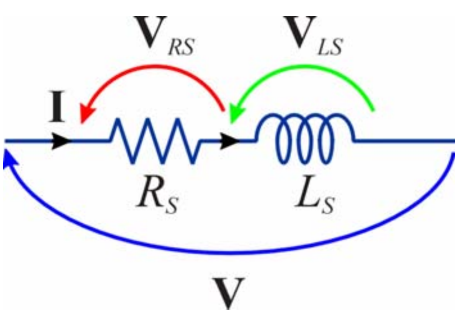
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} - j\frac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \\ B = -\dfrac{\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \end{cases}$$

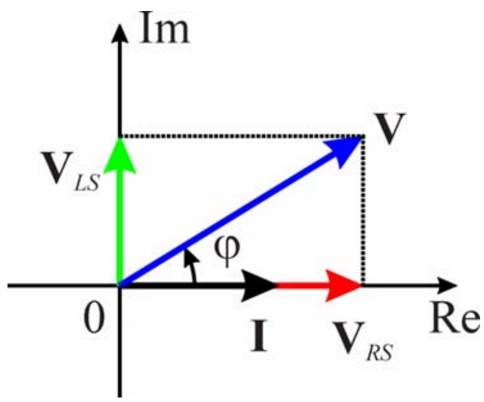
Bipolo RL serie (2)

- Per un bipolo RL serie passivo (con R_S e $L_S > 0$) si ha
  - $R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z}) > 0 \qquad X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z}) > 0$
  - $G = \mathrm{Re}(\mathbf{Y}) > 0 \qquad B = \mathrm{Im}(\mathbf{Y}) < 0$
  - $0 < \varphi < \pi/2$ ➡ la corrente è sfasata in ritardo rispetto alla tensione
- Per $\omega \to 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
  - $|\mathbf{Z}| \to R_S$
  - $\varphi \to 0$
- Per $\omega \to \infty$ il bipolo tende a comportarsi come il solo induttore (e quindi come un circuito aperto)
  - $|\mathbf{Z}| \to \omega L_S \to \infty$
  - $\varphi \to \pi/2$

Bipolo RL serie (3)

Diagramma nel piano complesso

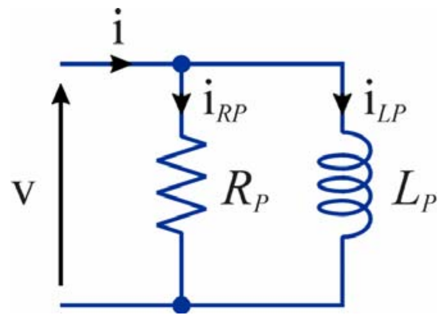




Ampiezze delle tensioni: $V_M = |\mathbf{V}| \qquad V_{RSM} = |\mathbf{V}_{RS}| \qquad V_{LSM} = |\mathbf{V}_{LS}|$

$$V_M = \sqrt{V_{RSM}^2 + V_{LSM}^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{V_{LSM}}{V_{RSM}}$$

Bipolo RL parallelo (1)



$$\mathrm{i}(t) = \mathrm{i}_{RP}(t) + \mathrm{i}_{LP}(t) = \frac{1}{R_P}\mathrm{v}(t) + \frac{1}{L_P}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{v}(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\mathrm{i}}{dt} = \frac{1}{R_P}\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{1}{L_P}\mathrm{v}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$j\omega\mathbf{I} = j\omega\frac{1}{R_P}\mathbf{V} + \frac{1}{L_P}\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{RL} = \left(\frac{1}{R_P} - j\frac{1}{\omega L_P}\right)\mathbf{V}$$

Bipolo RL parallelo (2)

Ammettenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_P} - j\frac{1}{\omega L_P} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{R_P} \\ B = -\dfrac{1}{\omega L_P} \end{cases}$$

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{\omega^2 R_P L_P^2}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\frac{\omega R_P^2 L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{\omega^2 R_P L_P^2}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \\ X = \dfrac{\omega R_P^2 L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \end{cases}$$

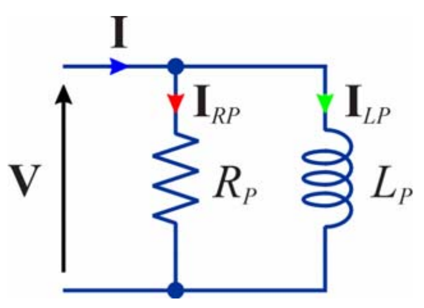
$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{R_P}{\omega L_P}\right)$$

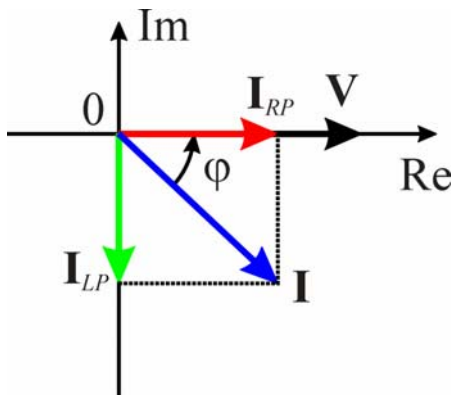
Bipolo RL parallelo (3)

- Per un bipolo RL parallelo passivo (con R_P e $L_P > 0$) si ha
  - $R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z}) > 0 \qquad X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z}) > 0$
  - $G = \mathrm{Re}(\mathbf{Y}) > 0 \qquad B = \mathrm{Im}(\mathbf{Y}) < 0$
  - $0 < \varphi < \pi/2$ ➡ la corrente è sfasata in ritardo rispetto alla tensione
- Per $\omega \rightarrow 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo induttore (e quindi come un cortocircuito)
  - $|\mathbf{Z}| \rightarrow \omega L_P \rightarrow 0$
  - $\varphi \rightarrow \pi/2$
- Per $\omega \rightarrow \infty$ il bipolo tende a comportarsi some il solo resistore
  - $|\mathbf{Z}| \rightarrow R_P$
  - $\varphi \rightarrow 0$

Bipolo RL parallelo (4)

Diagramma nel piano complesso

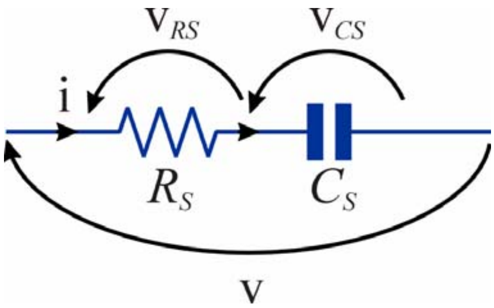




Ampiezze delle correnti: $\quad I_M = |\mathbf{I}| \qquad I_{RPM} = |\mathbf{I}_{RP}| \qquad I_{LPM} = |\mathbf{I}_{LP}|$

$$I_M = \sqrt{I_{RPM}^2 + I_{LPM}^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{I_{LPM}}{I_{RPM}}$$

Bipolo RC serie (1)



$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_{RS}(t) + \mathrm{v}_{CS}(t) = R_S\,\mathrm{i}(t) + \frac{1}{C_S}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{i}(x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = R_S \frac{d\,\mathrm{i}}{dt} + \frac{1}{C_S}\mathrm{i}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$j\omega\mathbf{V} = R_S\, j\omega\mathbf{I} + \frac{1}{C_S}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{RS} + \mathbf{V}_{CS} = \left(R_S - j\frac{1}{\omega C_S}\right)\mathbf{I}$$

Bipolo RC serie (2)

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = R_S - j\frac{1}{\omega C_S} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = R_S \\ X = -\dfrac{1}{\omega C_S} \end{cases} \qquad \varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_S C_S}\right)$$

Ammettenza:

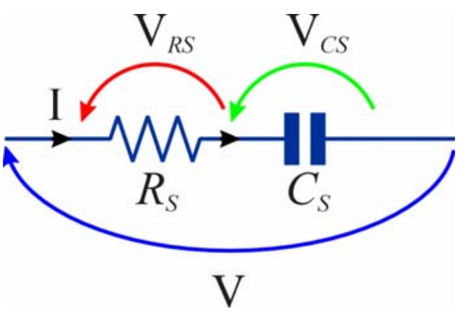
$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\omega^2 R_S C_S^2}{1+(\omega R_S C_S)^2} + j\frac{\omega C_S}{1+(\omega R_S C_S)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{\omega^2 R_S C_S^2}{1+(\omega R_S C_S)^2} \\ B = \dfrac{\omega C_S}{1+(\omega R_S C_S)^2} \end{cases}$$

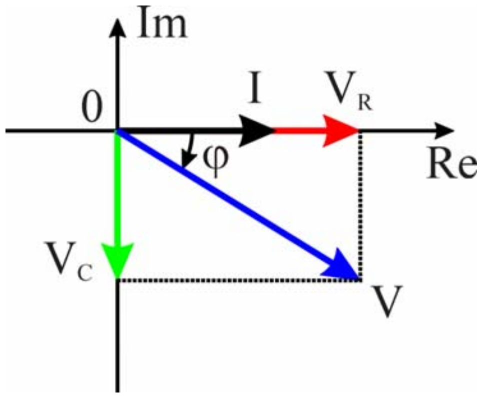
Bipolo RC serie (3)

- Per un bipolo RC serie passivo (con R_S e $C_S > 0$) si ha
  - $R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z}) > 0 \qquad X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z}) < 0$
  - $G = \mathrm{Re}(\mathbf{Y}) > 0 \qquad B = \mathrm{Im}(\mathbf{Y}) > 0$
  - $-\pi/2 < \varphi < 0$ ➡ la corrente è sfasata in anticipo rispetto alla tensione
- Per $\omega \to 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo condensatore (e quindi come un circuito aperto)
  - $|\mathbf{Z}| \to 1/(\omega C_S) \to \infty$
  - $\varphi \to -\pi/2$
- Per $\omega \to \infty$ il bipolo tende a comportarsi some il solo resistore
  - $|\mathbf{Z}| \to R_S$
  - $\varphi \to 0$

Bipolo RC serie (4)

Diagramma nel piano complesso





Ampiezze delle tensioni: $V_M = |\mathbf{V}| \qquad V_{RSM} = |\mathbf{V}_{RS}| \qquad V_{CSM} = |\mathbf{V}_{CS}|$

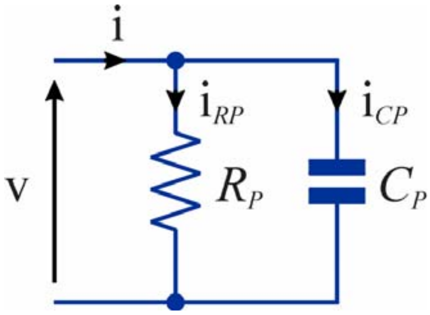
$$V_M = \sqrt{V_{RSM}^2 + V_{CSM}^2} \qquad \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{V_{CSM}}{V_{RSM}}$$

Bipolo RC parallelo (1)

$$\mathrm{i}(t) = \mathrm{i}_{RP}(t) + \mathrm{i}_{CP}(t) = \frac{1}{R_P}\mathrm{v}(t) + C_P\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{RP} + \mathbf{I}_{CP} = \left(\frac{1}{R_P} + j\omega C_P\right)\mathbf{V}$$



Ammettenza:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_P} + j\omega C_P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{R_P} \\ B = \omega C_P \end{cases}$$

Impedenza:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{R_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} - j\frac{\omega R_P^2 C_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{R_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \\ X = -\dfrac{\omega R_P^2 C_P}{1+(\omega R_P C_P)^2} \end{cases}$$

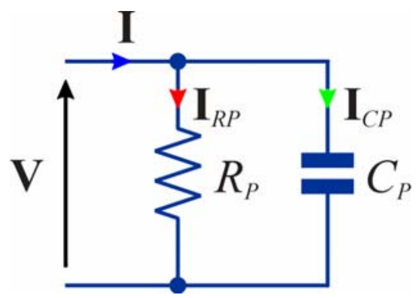
$$\varphi = \arg(\mathbf{Z}) = -\mathrm{arctg}(\omega R_P C_P)$$

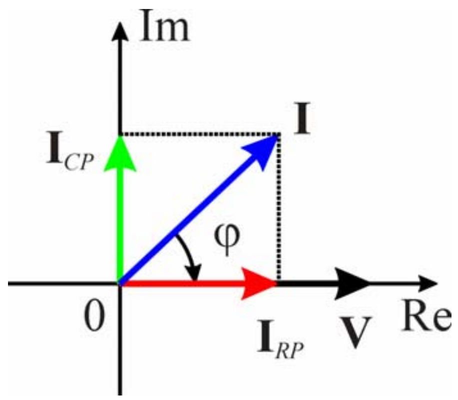
Bipolo RC parallelo (2)

- Per un bipolo RC parallelo passivo (con R_P e $C_P > 0$) si ha
  - $R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z}) > 0 \qquad X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z}) < 0$
  - $G = \mathrm{Re}(\mathbf{Y}) > 0 \qquad B = \mathrm{Im}(\mathbf{Y}) > 0$
  - $-\pi/2 < \varphi < 0$ ➡ la corrente è sfasata in anticipo rispetto alla tensione
- Per $\omega \to 0$ il bipolo tende a comportarsi come il solo resistore
  - $|\mathbf{Z}| \to R_P$
  - $\varphi \to 0$
- Per $\omega \to \infty$ il bipolo tende a comportarsi some il solo condensatore (e quindi come un cortocircuito)
  - $|\mathbf{Z}| \to 1/(\omega C_P) \to 0$
  - $\varphi \to -\pi/2$

Bipolo RC parallelo (3)

Diagramma nel piano complesso





Ampiezze delle correnti: $I_M = |\mathbf{I}|$ $\quad I_{RPM} = |\mathbf{I}_{RP}|$ $\quad I_{CPM} = |\mathbf{I}_{CP}|$

$$I_M = \sqrt{I_{RPM}^2 + I_{CPM}^2} \qquad \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{I_{CPM}}{I_{RPM}}$$

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (1)

Equazioni dei componenti

- Generatori indipendenti:
  sono note le tensioni o le correnti ➡ sono noti anche i loro fasori
  $$\mathbf{V} = \mathbf{V}_G$$
  $$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G$$
- Bipoli lineari:
  $$\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$$
  $$\mathbf{I} = \mathbf{YV}$$
- Generatori dipendenti:
  per la proprietà di linearità, le relazioni tra i fasori sono
  $$\mathbf{I}_2 = \alpha\mathbf{I}_1 \qquad \mathbf{I}_2 = g\mathbf{V}_1$$
  $$\mathbf{V}_2 = r\mathbf{I}_1 \qquad \mathbf{V}_2 = \mu\mathbf{V}_1$$

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (2)

Equazioni dei collegamenti

- Le relazioni tra le grandezze funzioni del tempo sono espresse da equazioni algebriche lineari omogenee del tipo

$$\sum_k \pm \mathrm{i}_k(t) = 0$$

$$\sum_k \pm \mathrm{v}_k(t) = 0$$

➡ Per le proprietà di unicità e di linearità della trasformata di Steinmetz

$$\sum_k \pm \mathbf{I}_k = 0 \qquad \mathbf{I}_k = \mathfrak{S}\{\mathrm{i}_k(t)\} \quad \mathbf{V}_k = \mathfrak{S}\{\mathrm{v}_k(t)\}$$

$$\sum_k \pm \mathbf{V}_k = 0$$

➡ *Le leggi di Kirchhoff valgono anche per i fasori delle tensioni e delle correnti*

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (3)

- Le equazioni di un circuito lineare in regime sinusoidale, scritte in termini di fasori, hanno la stessa forma delle equazioni di un circuito lineare resistivo in regime stazionario

- I teoremi e i metodi di analisi dedotti a partire delle equazioni generali dei circuiti resistivi si possono estendere ai circuiti in regime sinusoidale eseguendo le seguenti sostituzioni:
  - Resistenza ➡ Impedenza
  - Conduttanza ➡ Ammettenza
  - Tensione ➡ Fasore della tensione
  - Corrente ➡ Fasore della corrente

Analisi di circuiti in regime sinusoidale (4)

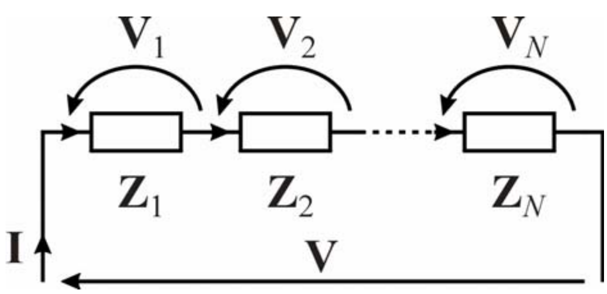
- In particolare si possono estendere ai circuiti lineari in regime sinusoidale
  - le relazioni di equivalenza come
    - serie, parallelo
    - stella-triangolo
    - trasformazione dei generatori
    - formule di Millman
  - i metodi di analisi generali
    - metodo delle maglie, metodo dei nodi e metodo degli anelli
  - il teorema di sovrapposizione
  - il teorema di sostituzione
  - i teoremi di Thévenin e Norton

Impedenze in serie e in parallelo

- **Impedenze in serie**

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k \qquad \mathbf{I}_k = \mathbf{I} \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{I}_k$$

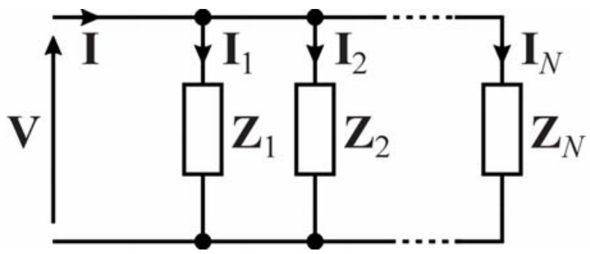
$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}_S \mathbf{I} \qquad \mathbf{Z}_S = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{Z}_K$$



- **Impedenze in parallelo**

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{I}_k \qquad \mathbf{V}_k = \mathbf{V} \qquad \mathbf{I}_k = \mathbf{Y}_k \mathbf{V}_k$$

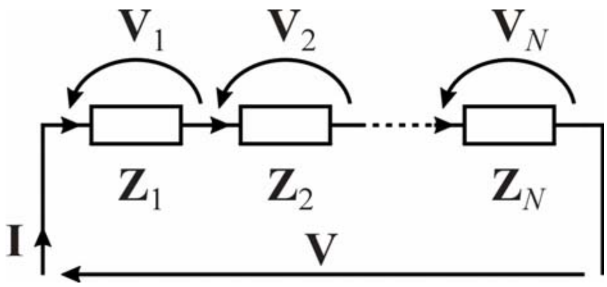
$$\Rightarrow \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}_P \mathbf{V} \qquad \mathbf{Y}_P = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{Y}_K \qquad \mathbf{Z}_P = \frac{1}{\mathbf{Y}_P} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mathbf{Z}_k}}$$



Partitore di tensione e di corrente

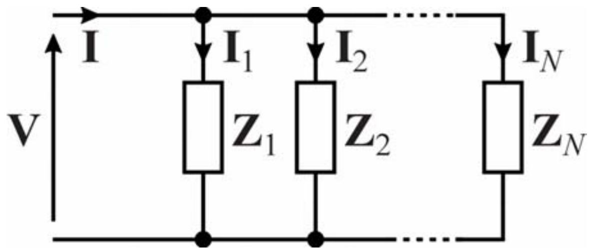
- **Partitore di tensione**

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}\frac{\mathbf{Z}_j}{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{Z}_k}$$

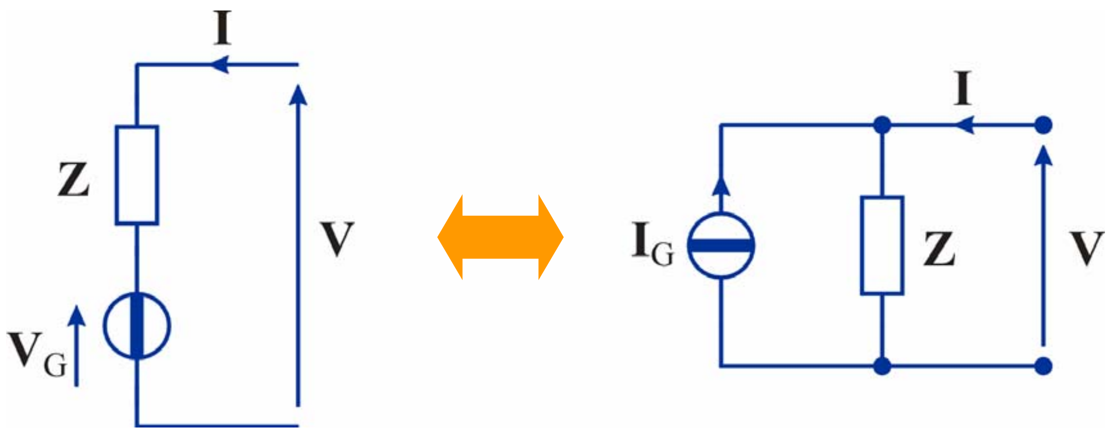


- **Partitore di corrente**

$$\mathbf{I}_j = \mathbf{I}\frac{\mathbf{Y}_j}{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{Y}_k}$$

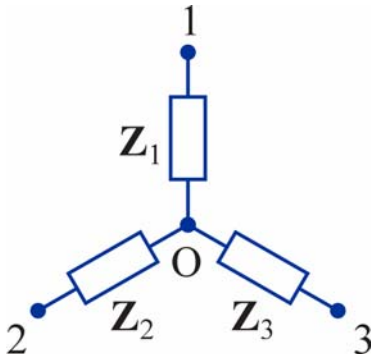


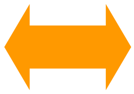
Trasformazioni dei generatori

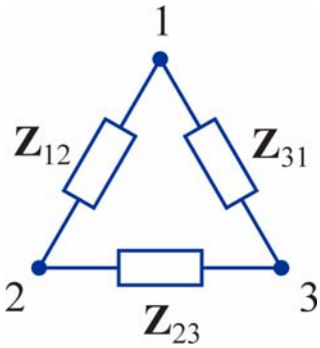


$$\mathbf{V}_G = \mathbf{Z}\mathbf{I}_G \qquad \mathbf{I}_G = \mathbf{Y}\mathbf{V}_G$$

Equivalenza stella-triangolo







$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{13}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{13} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_{13}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{13}+\mathbf{Z}_{23}} \qquad \mathbf{Z}_{23} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

Teorema di sovrapposizione

- **Ipotesi:**
  - circuito lineare contenente
    - N_V generatori indipendenti di tensione $v_{G1}(t)$, ..., $v_{GN_V}(t)$
    - N_I generatori indipendenti di corrente $i_{G1}(t)$, ..., $i_{GN_I}(t)$
  - tutti i generatori sono sinusoidali con la stessa pulsazione ω
  - condizioni di regime sinusoidale
- ➡ I fasori della tensione e della corrente del generico lato i sono combinazioni lineari dei fasori delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti

$$\mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^{N_V} \boldsymbol{\alpha}_{ik}\mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \mathbf{z}_{ik}\mathbf{I}_{Gk}$$

$$\mathbf{I}_i = \sum_{k=1}^{N_V} \mathbf{y}_{ik}\mathbf{V}_{Gk} + \sum_{k=1}^{N_I} \boldsymbol{\beta}_{ik}\mathbf{I}_{Gk}$$

Funzioni di rete

- I coefficienti delle combinazioni sono funzioni complesse della pulsazione ω e sono detti **funzioni di di rete**

$$\boldsymbol{\alpha}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$

(adimensionale)

$$\mathbf{z}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

(ha le dimensioni di un'impedenza)

$$\mathbf{y}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$

(ha le dimensioni di un'ammettenza)

$$\boldsymbol{\beta}_{ik} = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

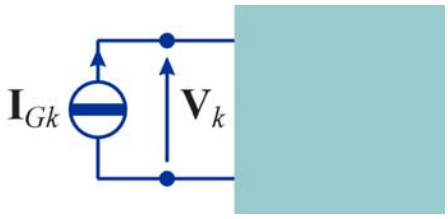
(adimensionale)

- Le funzioni di rete che mettono in relazione i fasori della tensione e della corrente dello stesso lato sono dette **funzioni di immettenza**
- Le funzioni di rete che mettono in relazione fasori di tensioni e correnti di lati diversi sono dette **funzioni di trasferimento**

Funzioni di immettenza

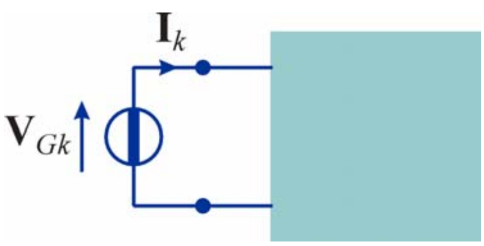
- **Impedenza di ingresso**

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{IN}k}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$



- **Ammettenza di ingresso**

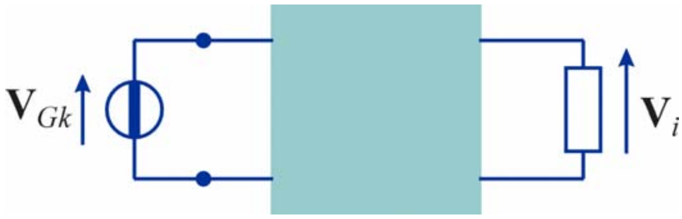
$$\mathbf{Y}_{\mathrm{IN}k}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



Funzioni di trasferimento (1)

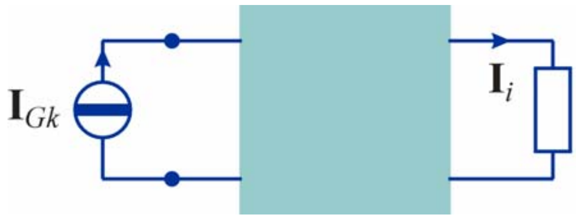
- **Rapporto di trasferimento di tensione**

$$\boldsymbol{\alpha}_{ik}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



- **Rapporto di trasferimento di corrente**

$$\boldsymbol{\beta}_{ik}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$



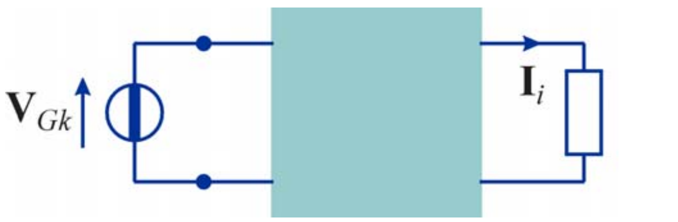
Funzioni di trasferimento (2)

- **Impedenza di trasferimento**

$$\mathbf{z}_{ik}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h\neq k}}$$

- **Ammettenza di trasferimento**

$$\mathbf{y}_{ik}(j\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_{Gk}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{Gh}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{Gh}=0\ \forall h}}$$



Funzioni di rete

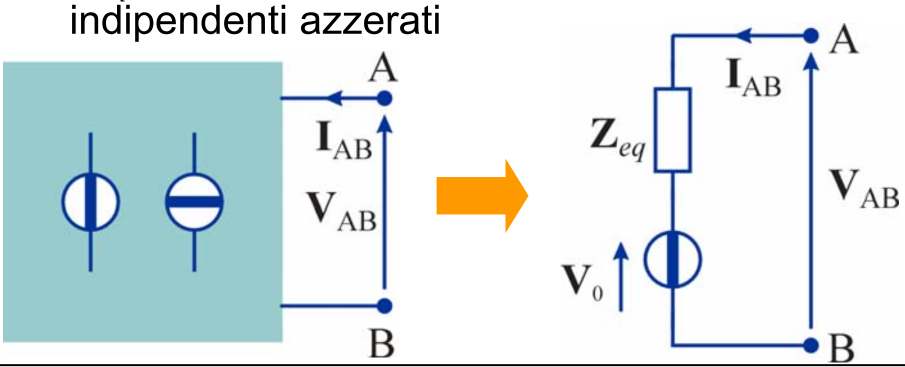
- Tutte le funzioni di rete sono funzioni razionali della variabile complessa $j\omega$ (cioè sono rapporti tra polinomi nella variabile $j\omega$)

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0}$$

- Ciò deriva dal fatto che i fasori delle tensioni e delle correnti possono essere calcolati a partire da un sistema di equazioni i cui coefficienti contengono i fattori $j\omega$ o $1/j\omega$ (presenti nelle equazioni caratteristiche dei componenti dinamici)
- I coefficienti dei polinomi, a_k e b_k, sono sempre reali e dipendono dai parametri dei componenti diversi dai generatori indipendenti

Teorema di Thévenin

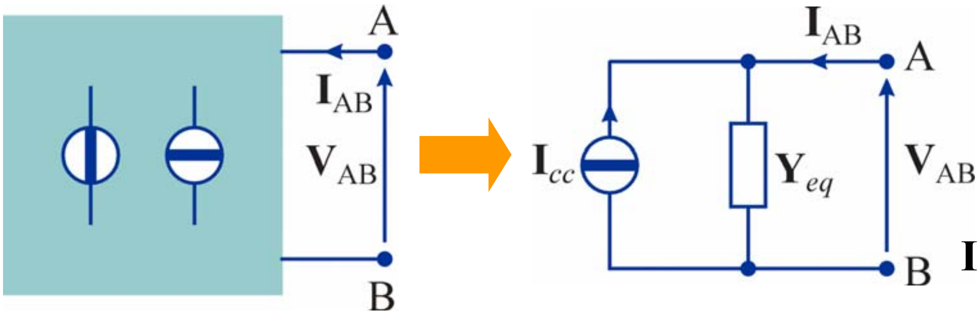
- **Ipotesi:**
  - condizioni di regime sinusoidale
  - il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - il bipolo A-B è comandato in corrente
- ⇨ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di tensione $\mathbf{V}_0$ in serie con un'impedenza $\mathbf{Z}_{eq}$
  - $\mathbf{V}_0$ è la tensione a vuoto del bipolo A-B
  - $\mathbf{Z}_{eq}$ è l'impedenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



$$\mathbf{V}_{\mathrm{AB}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I}_{\mathrm{AB}}$$

Teorema di Norton

- **Ipotesi:**
  - condizioni di regime sinusoidale
  - il bipolo A-B è formato da componenti lineari e generatori indipendenti
  - il bipolo A-B è comandato in tensione
- ➡ Il bipolo A-B equivale a un bipolo formato da un generatore indipendente di corrente $\mathbf{I}_{cc}$ in parallelo con un'ammettenza $\mathbf{Y}_{eq}$
  - $\mathbf{I}_{cc}$ è la corrente di cortocircuito del bipolo A-B
  - $\mathbf{Y}_{eq}$ è l'ammettenza equivalente del bipolo A-B con i generatori indipendenti azzerati



$$\mathbf{I}_{AB} = -\mathbf{I}_{cc} + \mathbf{Y}_{eq}\mathbf{V}_{AB}$$