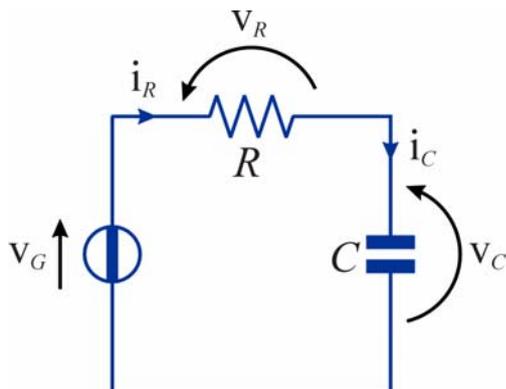


# Circuiti dinamici del primo e del secondo ordine

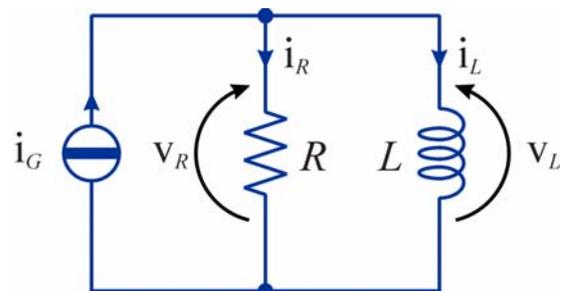
[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 2-4-2014)

## Circuiti elementari del primo ordine

- **Circuito del primo ordine:** circuito il cui stato è definito mediante una sola variabile
- ➔ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un'equazione differenziale del primo ordine
- Escludendo i casi degeneri, rientrano in questa categoria i circuiti che contengono un solo bipolo dinamico (condensatore o induttore)
- ➔ I casi più semplici sono i seguenti



**Circuito RC**



**Circuito RL**

# Circuiti elementari del primo ordine

- Si assume che siano noti
  - ◆ gli andamenti degli ingressi ( = grandezze impresse dai generatori indipendenti:  $v_G(t)$  e  $i_G(t)$  ) per  $t \geq t_0$
  - ◆ i valori delle variabili di stato per  $t = t_0$ 
    - $v_C(t_0) = V_{C0}$
    - $i_L(t_0) = I_{L0}$
- Si vogliono determinare le risposte dei circuiti per  $t > t_0$
- Senza perdita di generalità ci si può limitare a considerare il caso particolare in cui  $t_0 = 0$
- Le espressioni delle tensioni e delle correnti nel caso  $t_0 \neq 0$  si possono ottenere da quelle ricavate per  $t_0 = 0$  sostituendo  $t$  con  $t - t_0$

3

## Circuito RC elementare

- **LKI:**  $i_R(t) = i_C(t) = i(t)$
- **LKV:**  $v_R(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti:**

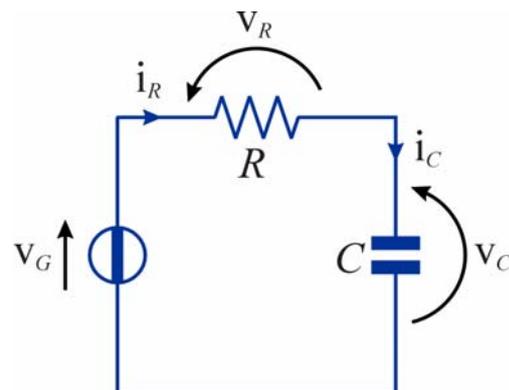
$$i(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_R(t) = Ri(t) = RC \frac{dv_C}{dt}$$



$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) = \frac{1}{\tau} v_G(t) \quad (\tau = RC)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale  $v_C(0) = V_{C0}$



4

## Circuito RL elementare

- **LKI:**  $i_R(t) + i_L(t) = i_G(t)$
- **LKV:**  $v_R(t) = v_L(t) = v(t)$
- **Componenti:**

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

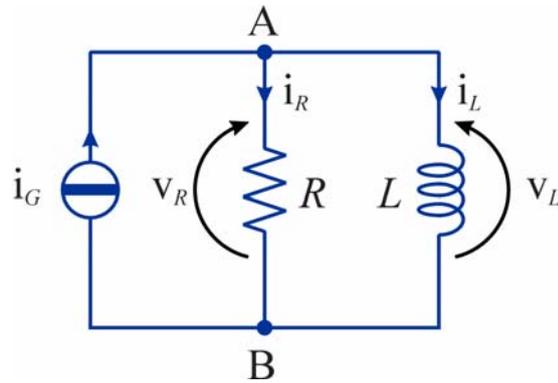
$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$$



$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} i_G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L(t) = \frac{1}{\tau} i_G(t) \quad \left( \tau = \frac{L}{R} \right)$$

- All'equazione si deve associare la condizione iniziale

$$i_L(0) = I_{L0}$$



5

## Equazione differenziale

- In entrambi i casi si è ottenuta un'equazione differenziale del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} f(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

- $f(t)$  = grandezza impressa del generatore indipendente
- $\tau$  = **costante di tempo**

- ◆ circuito RC  $\Rightarrow \tau = RC$

$$[R][C] = \frac{[V]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[Q]}{[I]} = [T]$$

- ◆ circuito RL  $\Rightarrow \tau = L/R = LG$

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{[\Phi]}{[I]} \times \frac{[I]}{[V]} = \frac{[\Phi]}{[V]} = [T]$$

6

## Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'integrale generale dell'equazione di stato può essere espresso come

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

- ◆  $x_H(t)$  = integrale generale dell'equazione omogenea associata
- ◆  $x_P(t)$  = soluzione particolare dell'equazione differenziale

- Per determinare  $x_H(t)$  si risolve l'equazione caratteristica

$$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

- Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$x_H(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

7

## Risoluzione dell'equazione differenziale

- L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)$$

- La costante  $k$  si determina imponendo che  $x(t)$  soddisfi la condizione iniziale

$$x(0) = k + x_P(0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad k = X_0 - x_P(0)$$

- ➔ L'espressione della soluzione (per  $t > 0$ ) è

$$x(t) = [X_0 - x_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + x_P(t)$$

8

## Soluzione particolare – ingresso costante

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una costante (indicata con  $F$ ), l'equazione diviene

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} F$$

- In questo caso è immediato riconoscere che l'equazione ammette la soluzione particolare costante

$$x_p(t) = F$$

9

## Soluzione particolare - ingresso sinusoidale

- Se la tensione o la corrente impressa del generatore indipendente è una funzione sinusoidale di pulsazione  $\omega$   
 $f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$

l'equazione ammette una soluzione particolare del tipo

$$x_p(t) = X_M \cos(\omega t + \xi)$$

- Per ricavare  $X_M$  e  $\xi$  si sostituisce  $x_p(t)$  nell'equazione differenziale

$$\frac{dx_p}{dt} + \frac{1}{\tau} x_p(t) = \frac{1}{\tau} f(t)$$

- Si applica la trasformata di Steinmetz al primo e al secondo membro dell'equazione differenziale

$$j\omega \mathbf{X}_p + \frac{1}{\tau} \mathbf{X}_p = \frac{1}{\tau} \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathfrak{S}\{f(t)\} = F_M e^{j\varphi} \\ \mathbf{X}_p &= \mathfrak{S}\{x_p(t)\} = X_M e^{j\xi} \end{aligned}$$

10

## Soluzione particolare - Ingresso sinusoidale

➔ Si determina il fasore di  $x_p(t)$

$$\mathbf{X}_p = \frac{\mathbf{F}}{1 + j\omega\tau}$$

● Si antitrasforma:

$$X_M = |\mathbf{X}_p| = \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\xi = \arg(\mathbf{X}_p) = \arg(\mathbf{F}) - \arg(1 + j\omega\tau) = \varphi - \arctg(\omega\tau)$$

➔ Quindi la soluzione particolare è

$$x_p(t) = \frac{X_M}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)]$$

11

## Componente transitoria e componente di regime

$$x(t) = \underbrace{[X_0 - x_p(0)] e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Componente transitoria}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Componente di regime}} \quad (\text{Se } \tau > 0)$$

**Componente  
transitoria**

**Componente  
di regime**

● Se  $\tau > 0$  il primo termine tende a zero per  $t \rightarrow \infty$

➔ **componente transitoria**

◆ la componente transitoria dipende sia dall'ingresso che dallo stato iniziale

● Per  $t \rightarrow \infty$  la risposta tende ad identificarsi con il secondo termine

➔ **componente di regime**

◆ la componente di regime dipende solo dall'ingresso

12

## Risposta libera e risposta forzata

$$x(t) = \underbrace{X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\downarrow} + \underbrace{x_p(t) - x_p(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\downarrow}$$

**Risposta con  
ingresso zero**

**Risposta nello  
stato zero**

- La risposta con ingresso zero (**risposta libera**)
  - ◆ è dovuta all'energia immagazzinata nel circuito all'istante iniziale
  - ◆ dipende solo dallo stato iniziale
  - ◆ tende a zero per  $t \rightarrow \infty$  (se  $\tau > 0$ )
- La risposta nello stato zero (**risposta forzata**)
  - ◆ dipende solo dall'ingresso
  - ◆ tende alla componente di regime per  $t \rightarrow \infty$  (se  $\tau > 0$ )

13

## Espressione della soluzione

- Se l'ingresso è costante la soluzione completa (per  $t > 0$ ) è

$$x(t) = (X_0 - F) e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

- Se l'ingresso è sinusoidale si ottiene

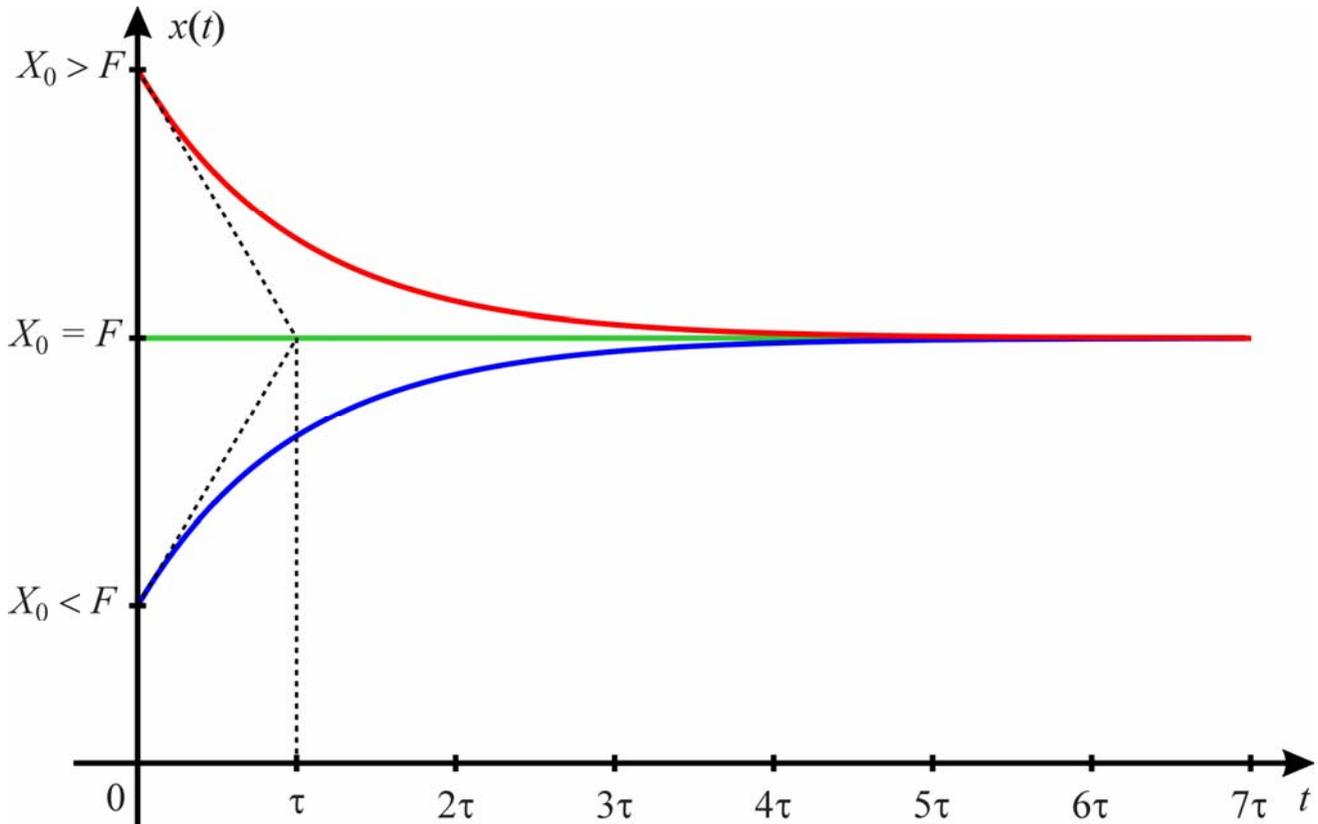
$$x(t) = \left( X_0 - \frac{F_M \cos \xi}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t + \xi)$$

dove

$$\xi = \varphi - \arctg(\omega\tau)$$

14

## Risposta con ingresso costante



15

## Costante di tempo

- La costante di tempo è un indice della velocità con cui la componente transitoria della risposta tende a zero
- In un tempo pari alla costante di tempo la componente transitoria si riduce al 37% circa del suo valore iniziale
- In un tempo pari a  $5\tau$  si riduce a meno dell'1% del valore iniziale
- In un tempo pari a  $7\tau$  si riduce a meno dello 0.1% del valore iniziale
- ➔ In pratica si può assumere che componente transitoria si annulli in un tempo dell'ordine di 5-7 volte la costante di tempo

$t$	$e^{-t/\tau}$
0	1.0000
$\tau$	0.3679
$2\tau$	0.1353
$3\tau$	0.0498
$4\tau$	0.0183
$5\tau$	0.0067
$6\tau$	0.0025
$7\tau$	0.0009

16

## Costante di tempo

- La retta tangente nel punto iniziale alla curva che rappresenta la risposta raggiunge il valore asintotico  $F$  per  $t = \tau$

- Dato che

$$x(t) = (X_0 - F)e^{-\frac{t}{\tau}} + F$$

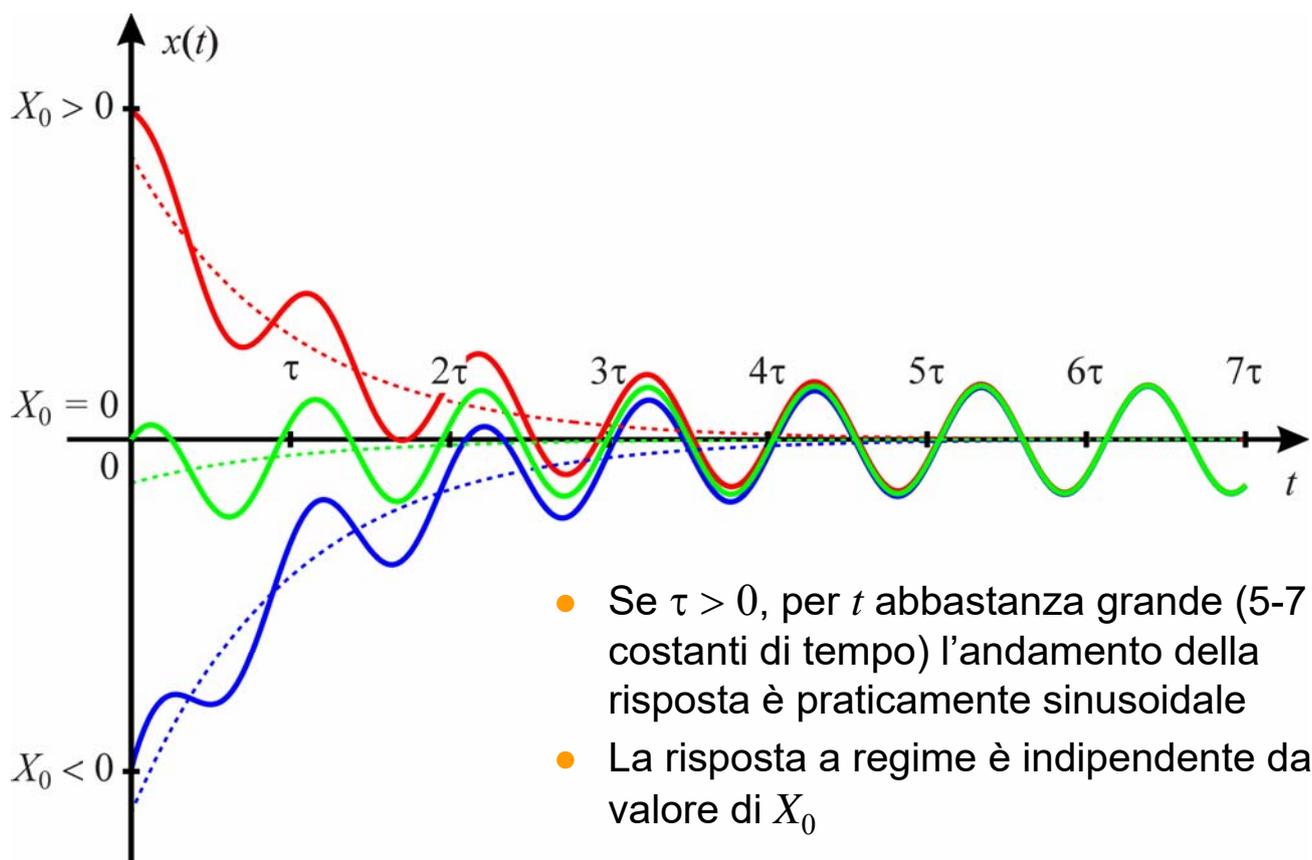
- L'equazione della retta tangente nel punto  $(0, X_0)$  è

$$x_R(t) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + X_0 = -\frac{(X_0 - F)}{\tau} t + X_0$$

- ➔ Quindi si ha  $x_R(t) = F$  per  $t = \tau$

17

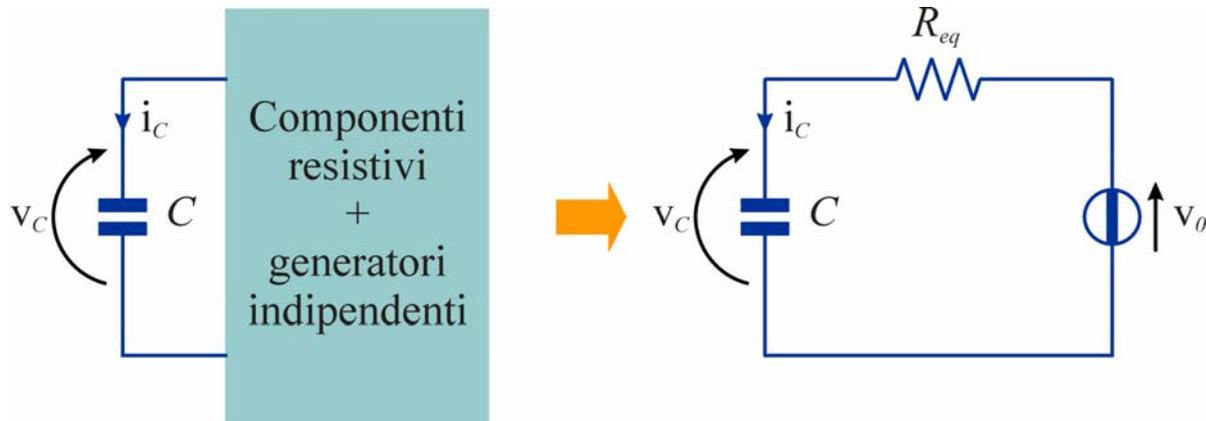
## Risposta con ingresso sinusoidale



18

## Circuiti con un solo condensatore

- Normalmente un circuito formato da un condensatore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RC elementare mediante il teorema di Thévenin



- Quindi l'espressione della tensione del condensatore per  $t > 0$  è

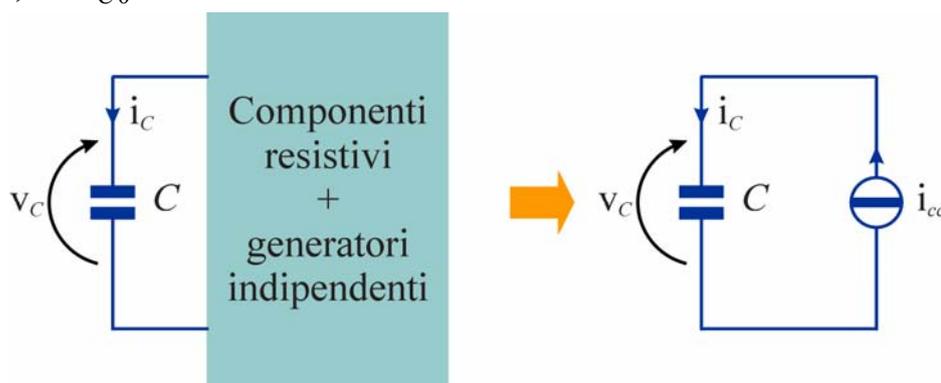
$$v_C(t) = [V_{C0} - v_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v_P(t) \quad \tau = R_{eq}C$$

19

## Circuiti con un solo condensatore

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di corrente, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Thévenin (ma solo quella di Norton con  $G_{eq} = 0$ )
- In questo caso la tensione del condensatore si può ottenere direttamente integrando la corrente del generatore

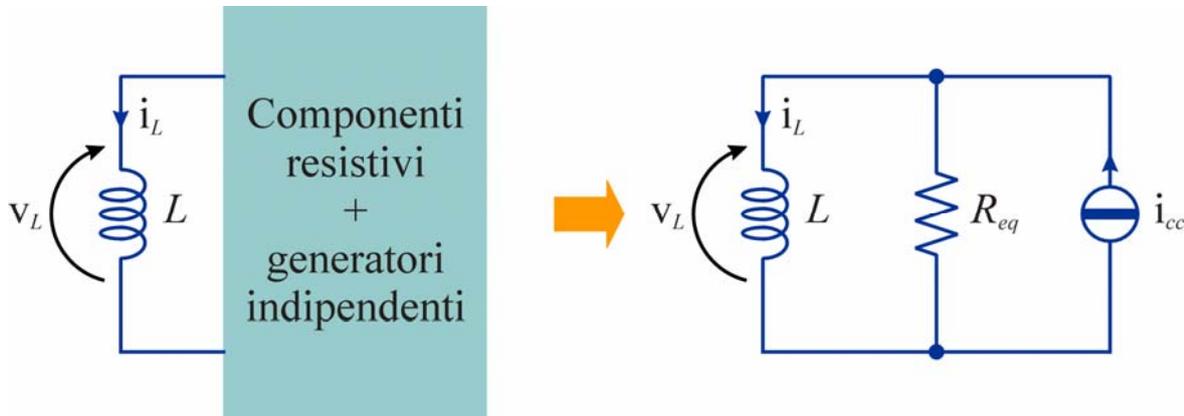
$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = i_{cc}(t) \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \Rightarrow v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_{cc}(x) dx$$



20

## Circuiti con un solo induttore

- Normalmente un circuito formato da un induttore e da componenti resistivi può essere ricondotto a un circuito RL elementare mediante il teorema di Norton



- Quindi l'espressione della corrente dell'induttore per  $t > 0$  è

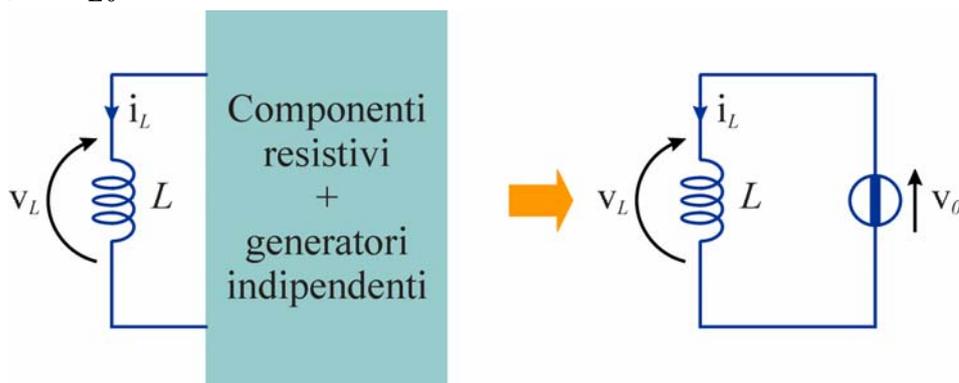
$$i_L(t) = [I_{L0} - i_P(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_P(t) \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

21

## Circuiti con un solo induttore

- Fa eccezione il caso particolare in cui il bipolo resistivo equivale a un generatore di tensione, e quindi non ammette la rappresentazione equivalente di Norton (ma solo quella di Thévenin con  $R_{eq} = 0$ )
- In questo caso la corrente dell'induttore condensatore si può ottenere direttamente integrando la tensione del generatore

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_0(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases} \Rightarrow i_L(t) = I_{L0} + \frac{1}{L} \int_0^t v_0(x) dx$$



22

## Espressioni delle altre risposte

- **Circuito RC**: essendo nota  $v_C(t)$  si può sostituire il condensatore con un generatore di tensione
- **Circuito RL**: essendo nota  $i_L(t)$  si può sostituire l'induttore con un generatore di corrente
- ➔ Le altre tensioni e correnti possono essere determinate risolvendo un circuito resistivo
- Dato che il circuito è lineare, ogni risposta può essere scomposta in un termine proporzionale a  $v_C(t)$  o  $i_L(t)$  e in un termine proporzionale alle grandezze impresse dei generatori indipendenti
- Ogni risposta del circuito ha un'espressione (per  $t > 0$ ) del tipo

$$y(t) = [Y_0 - y_P(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_P(t)$$

con la stessa costante di tempo  $\tau$

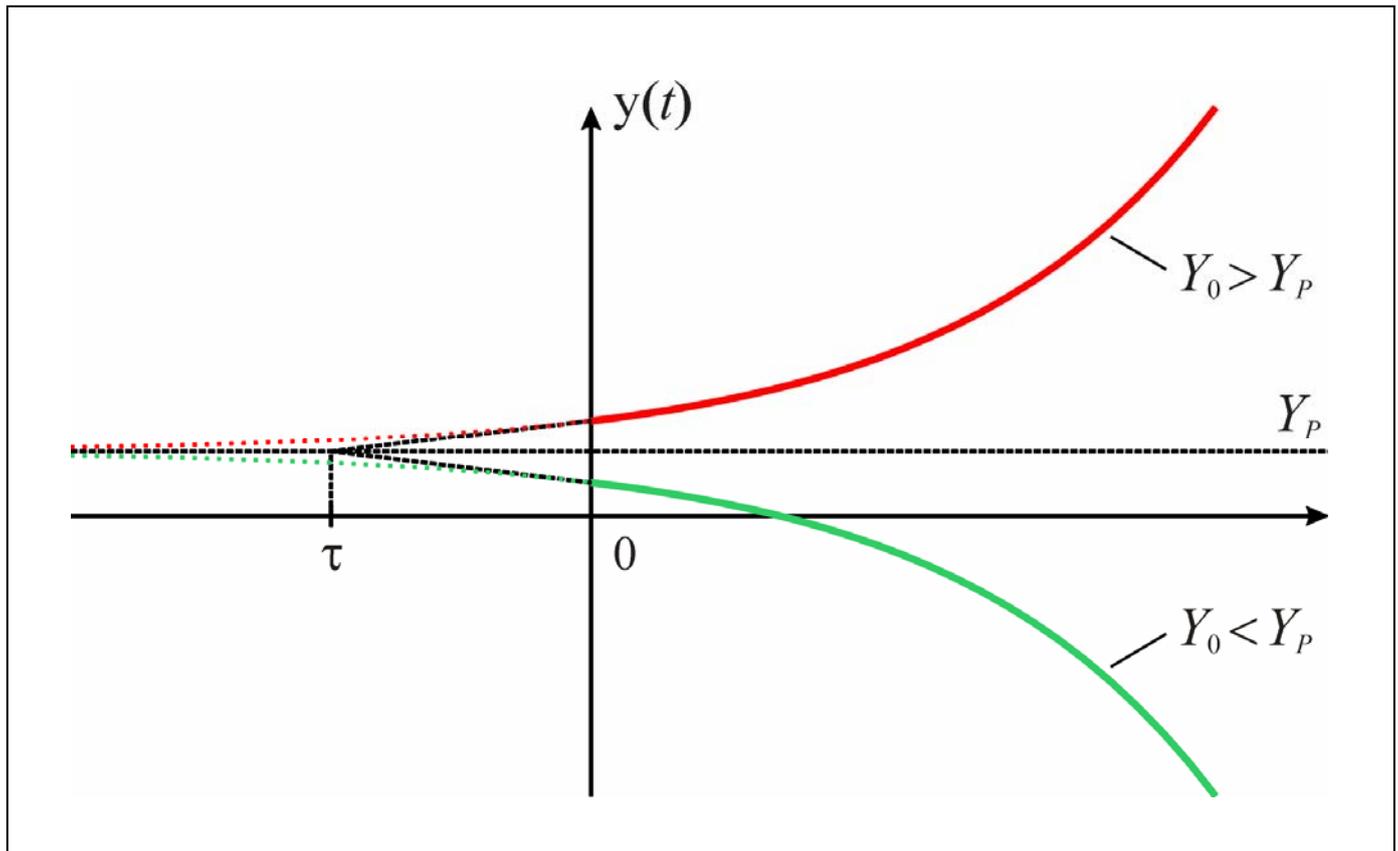
23

## Stabilità

- Se  $\tau > 0$  il termine esponenziale tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ 
  - ◆ Il circuito è **asintoticamente stabile**
  - ◆ Per  $t \rightarrow \infty$  tende ad una condizione di regime dipendente solo dagli ingressi
  - ◆ Questa situazione si verifica se i parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  sono positivi (➔ componenti passivi)
- Se  $\tau < 0$  il termine esponenziale diverge per  $t \rightarrow \infty$ 
  - ◆ Il circuito è **instabile**
  - ◆ Questa condizione si verifica, ad esempio, se  $R < 0$ , come può accadere se  $R$  rappresenta la resistenza equivalente di un bipolo che contiene generatori dipendenti

24

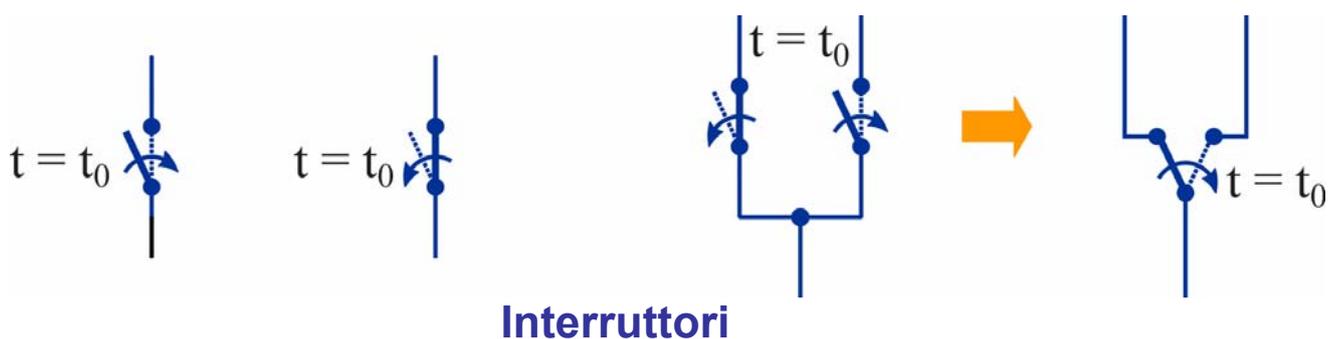
## Esempio - risposta con ingressi costanti per $\tau < 0$



25

## Condizioni iniziali

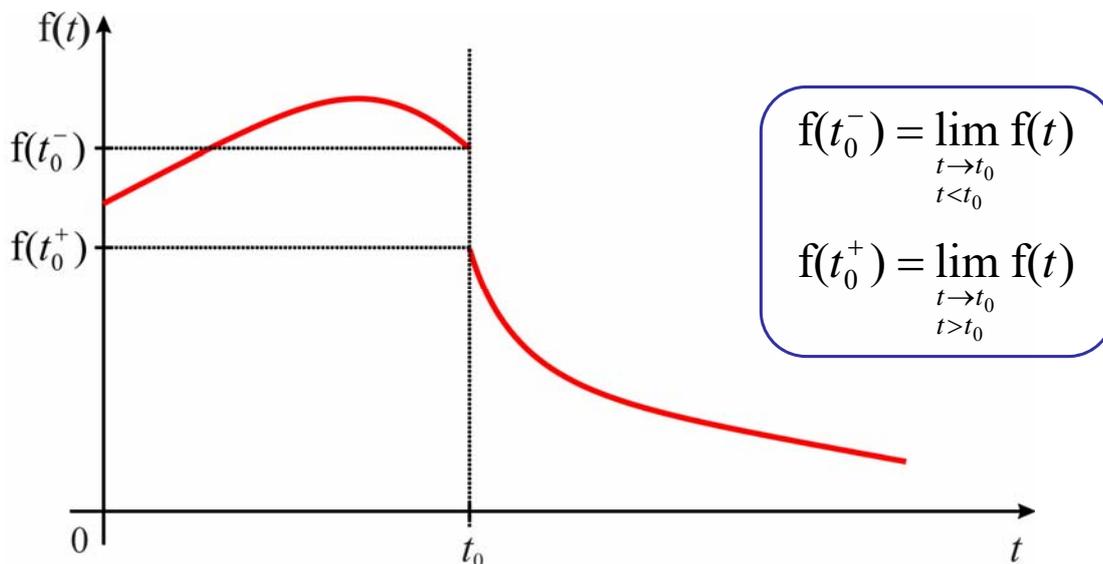
- In genere le condizioni iniziali non sono direttamente disponibili, ma devono essere determinate a partire da informazioni di tipo diverso
- Spesso è noto il comportamento del circuito prima di un istante iniziale  $t_0$  in corrispondenza del quale si ha una perturbazione dovuta alla commutazione di uno o più interruttori o a discontinuità delle grandezze impresse dei generatori



26

## Discontinuità

- All'istante  $t_0$  alcune tensioni o correnti nel circuito possono presentare una **discontinuità di prima specie** (cioè un "salto")
  - ➔ il loro valore per  $t = t_0$  non è definito
- In questo caso si definiscono i valori relativi agli istanti  $t_0^-$  e  $t_0^+$



27

## Dati iniziali e condizioni iniziali

- Spesso, nello studio dei circuiti dinamici in condizioni transitorie è noto il comportamento del circuito per  $t < t_0$ 
  - ➔ sono noti i valori delle tensioni e delle correnti all'istante  $t_0^-$  (**dati iniziali**)
- Per determinare la risposta per  $t > t_0$  occorrono i valori delle funzioni incognite e (delle loro derivate, per i circuiti di ordine superiore al primo) all'istante  $t_0^+$  (**condizioni iniziali**)
- All'istante  $t_0$  le tensioni e le correnti (e le loro derivate) possono essere discontinue
  - ➔ i valori a  $t_0^+$  in genere non coincidono con quelli a  $t_0^-$
- ➔ Occorre determinare la relazione tra i dati iniziali e le condizioni iniziali

28

## Continuità delle variabili di stato

### ● Proprietà di continuità

- ◆ Se la corrente di un condensatore è limitata, la tensione è una funzione continua del tempo
- ◆ Se la tensione di un induttore è limitata, la corrente è una funzione continua del tempo
- Per un circuito non degenere si può dimostrare che, se le grandezze impresse dei generatori sono limitate, anche le tensioni e le correnti di tutti i lati sono limitate (tensioni o correnti non limitate sono incompatibili con le equazioni del circuito)
- ➔ *Se gli ingressi sono limitati, le variabili di stato di un circuito non degenere sono continue*
  - ➔ i loro valori all'istante  $t_0^+$  coincidono con quelli a  $t_0^-$
  - ➔ sono definiti i valori delle variabili di stato per  $t = t_0$

29

## Determinazione delle condizioni iniziali

### Calcolo dei valori a $t_0^+$ delle tensioni e correnti

- Studiando il circuito per  $t = t_0^-$  si determinano i valori per  $t = t_0$  delle variabili di stato
- All'istante  $t_0^+$ , essendo note le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori, si possono sostituire
  - ◆ i condensatori con generatori di tensione
  - ◆ gli induttori con generatori di corrente
- In questo modo si ottiene un circuito resistivo, studiando il quale si possono determinare i valori all'istante  $t_0^+$  delle altre tensioni e correnti

30

## Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- Per  $t < 0$  il circuito rappresentato in figura è in condizioni di regime
- All'istante  $t = 0$  l'interruttore passa dalla posizione A alla posizione B
- Si vogliono determinare i valori negli istanti  $0^-$  e  $0^+$  di:

$$i_{R_1}(t), i_{R_2}(t), i_{R_3}(t), i_L(t), v_L(t), i_C(t), v_C(t)$$

$$R_1 = 4 \Omega$$

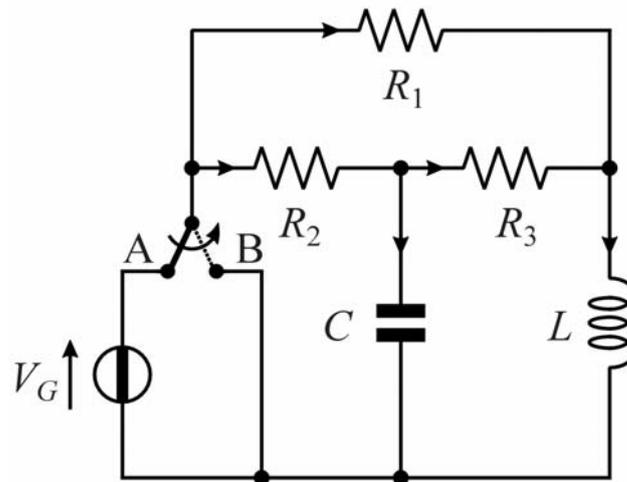
$$R_2 = 2 \Omega$$

$$R_3 = 2 \Omega$$

$$C = 0.5 \text{ F}$$

$$L = 0.5 \text{ H}$$

$$V_G = 12 \text{ V}$$



31

## Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- **Determinazione dei valori all'istante  $t = 0^-$** 
  - ♦ Il circuito è in condizioni di regime stazionario
  - ➔ Si esegue un'analisi in continua

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A} \quad v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

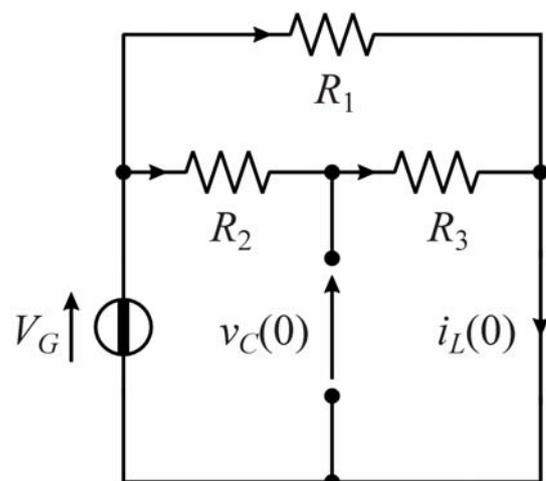


$$i_{R_1}(0^-) = \frac{V_G}{R_1} = 3 \text{ A}$$

$$i_{R_2}(0^-) = i_{R_3}(0^-) = \frac{V_G}{R_2 + R_3} = 3 \text{ A}$$

$$i_L(0) = i_{R_1}(0^-) + i_{R_3}(0^-) = 6 \text{ A}$$

$$v_C(0) = \frac{V_G R_3}{R_2 + R_3} = 6 \text{ V}$$



32

## Determinazione delle condizioni iniziali - Esempio

- Determinazione dei valori all'istante  $t = 0^+$

$$v_C(0) = 6 \text{ V} \quad i_L(0) = 6 \text{ A}$$



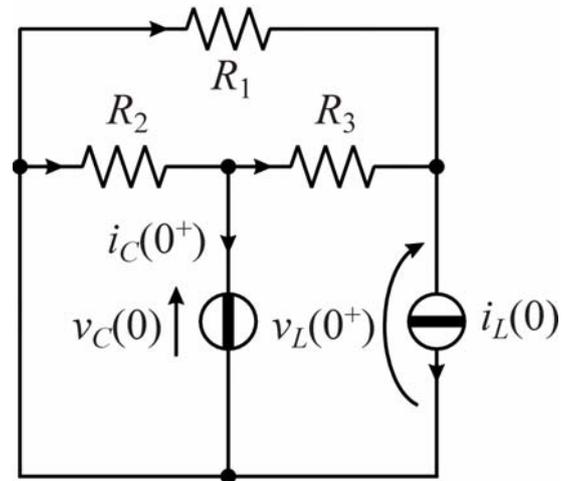
$$i_{R1}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_1 + R_3} + \frac{i_L(0)R_3}{R_1 + R_3} = 1 \text{ A}$$

$$i_{R2}(0^+) = -\frac{v_C(0)}{R_2} = -3 \text{ A}$$

$$i_{R3}(0^+) = \frac{v_C(0)}{R_1 + R_3} + \frac{i_L(0)R_1}{R_1 + R_3} = 5 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = -\frac{v_C(0)(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)} - \frac{i_L(0)R_1}{R_1 + R_3} = -8 \text{ A}$$

$$v_L(0^+) = -R_1 i_{R1}(0^+) = -4 \text{ V}$$



33

## Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (1)

- La risposta di un circuito del primo ordine a partire da un istante iniziale  $t_0 = 0$

$$y(t) = [Y_0 - y_p(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_p(t)$$

è determinata da tre informazioni

- il valore all'istante  $t = 0^+$ :  $Y_0$
  - la costante di tempo:  $\tau$
  - la soluzione particolare:  $y_p(t)$
- In molti casi di interesse pratico (es. circuiti con ingressi costanti o ingressi sinusoidali) queste informazioni possono essere ricavate direttamente, quindi la risposta può essere ottenuta senza fare uso delle equazioni differenziali

34

## Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (2)

- **Determinazione di  $Y_0$** 
  - ◆ Mediante un'analisi per  $t < 0$  si determina il valore iniziale della variabile di stato (  $v_C(0)$  o  $i_L(0)$  )
  - ◆ Se la risposta  $y(t)$  che si vuole determinare non coincide con la variabile di stato, si calcola  $Y_0 = y(0^+)$  analizzando il circuito resistivo ottenuto sostituendo
    - il condensatore con un generatore di tensione  $v_C(0)$
    - l'induttore con un generatore di corrente  $i_L(0)$
- **Determinazione di  $\tau$** 
  - ◆ Si calcola la resistenza equivalente della parte resistiva del circuito con i generatori indipendenti azzerati, quindi si pone
    - $\tau = R_{eq}C$  per i circuiti RC
    - $\tau = L/R_{eq}$  per i circuiti RL

35

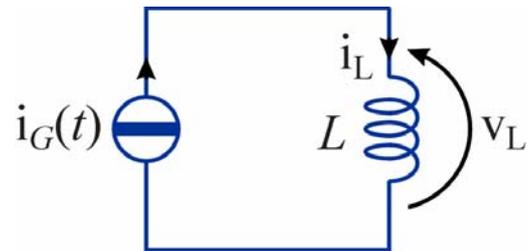
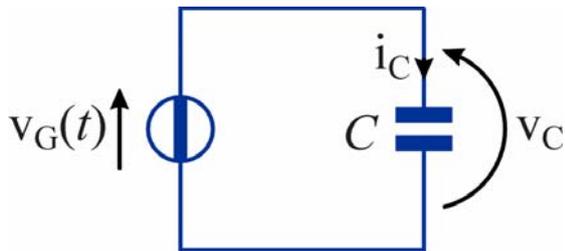
## Analisi di circuiti del 1° ordine – Metodo diretto (3)

- **Determinazione della soluzione particolare**
  - ◆ **Ingressi costanti**
    - Si esegue un'analisi in continua del circuito (nella configurazione per  $t > 0$ , cioè con gli eventuali interruttori nella posizione successiva alla commutazione che avviene all'istante iniziale)
    - Nell'analisi in continua
      - il condensatore è sostituito da un circuito aperto
      - l'induttore è sostituito da un cortocircuito
  - ◆ **Ingressi sinusoidali**
    - Si analizza il circuito (nella configurazione per  $t > 0$ ) con il metodo simbolico

36

## Circuiti degeneri

- Si considerano i casi limite in cui
  - ◆  $R = 0$  nel circuito RC elementare
  - ◆  $G = 1/R = 0$  nel circuito RL elementare



- In queste condizioni i circuiti sono degeneri e la variabile di stato ( $v_C$  o  $i_L$ ) coincide con l'ingresso ( $v_G$  o  $i_G$ ), quindi il circuito non ha variabili di stato indipendenti (ordine 0)

37

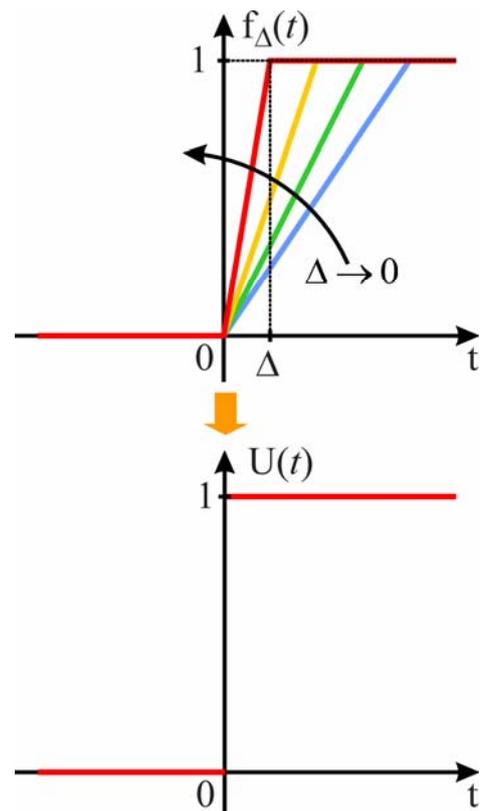
## Gradino unitario

- Si considera il caso in cui l'ingresso è una funzione del tipo

$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{t}{\Delta} & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 1 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$

- Per  $\Delta \rightarrow 0$ , la funzione  $f_{\Delta}(t)$  tende alla funzione **gradino unitario**  $U(t)$

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$



38

## Impulso di Dirac

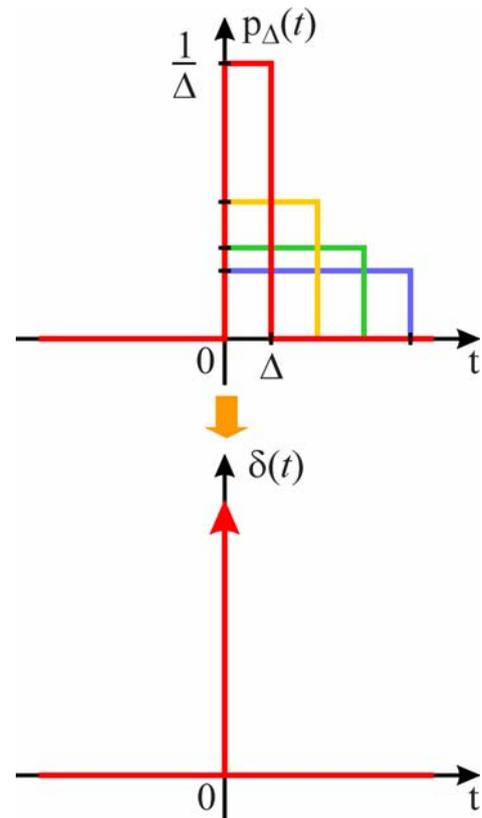
- La corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore sono

$$i_C(t) = C \frac{d f_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{d f_{\Delta}(t)}{dt}$$

- La derivata dell'ingresso è rappresentata da un impulso rettangolare di durata  $\Delta$  e ampiezza  $1/\Delta$  (e quindi area unitaria)

$$\frac{d f_{\Delta}}{dt} = p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1/\Delta & \text{per } 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{per } t > \Delta \end{cases}$$



39

## Impulso di Dirac

- Intuitivamente, il limite per  $\Delta \rightarrow 0$  di  $p_{\Delta}(t)$  è un impulso di area unitaria avente durata nulla e ampiezza infinita
- ➔ Il limite è rappresentato dall'**impulso di Dirac**,  $\delta(t)$ , caratterizzato dalle seguenti proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ \text{singolare} & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\Rightarrow \text{"area" unitaria})$$

- Queste proprietà non possono essere soddisfatte da una funzione ordinaria (per una funzione ordinaria la prima proprietà implica che l'integrale su un qualunque intervallo sia nullo)
- $\delta(t)$  non è una funzione ordinaria ma è una **distribuzione** (o **funzione generalizzata**)

40

## Impulso di Dirac

- L'integrale dell'impulso di Dirac è il gradino unitario

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = U(t)$$

- Quindi, formalmente, si può porre

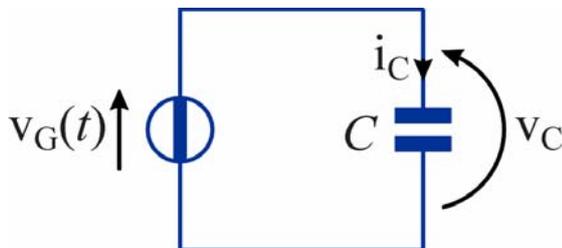
$$\frac{dU}{dt} = \delta(t)$$

- ➔ L'impulso di Dirac è la **derivata generalizzata** del gradino unitario  
(non si può parlare semplicemente di derivata, perché  $U(t)$  non è derivabile in senso ordinario, essendo discontinua)

41

## Impulsi di corrente e di tensione

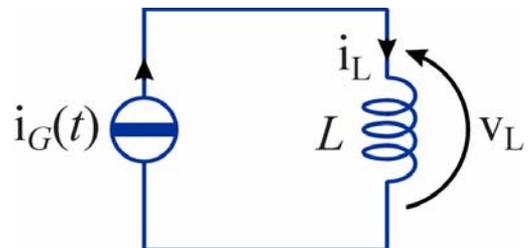
- In un condensatore a una discontinuità della tensione corrisponde un impulso di corrente (➔ corrente non limitata)
- In un induttore a una discontinuità della corrente corrisponde un impulso di tensione (➔ tensione non limitata)



$$v_G(t) = U(t)$$

$$v_C(t) = v_G(t) = U(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C\delta(t)$$



$$i_G(t) = U(t)$$

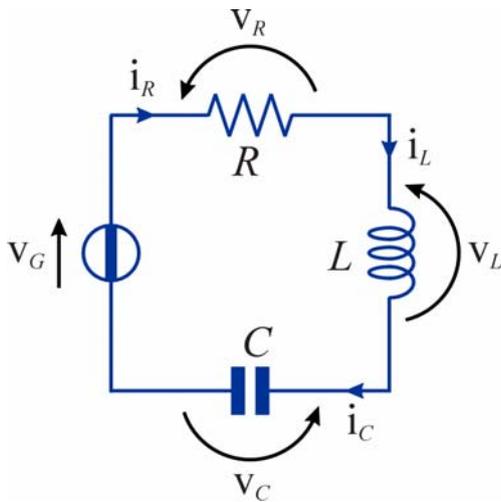
$$i_L(t) = i_G(t) = U(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L\delta(t)$$

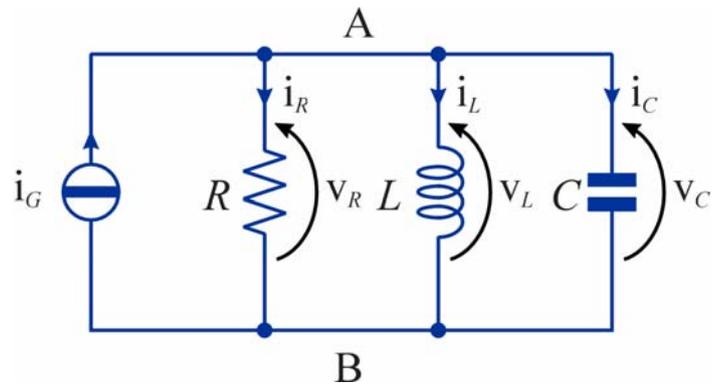
42

# Circuiti elementari del secondo ordine

## Circuito RLC serie



## Circuito RLC parallelo



- **Circuiti del secondo ordine:** circuiti contenenti due bipoli dinamici
  - ➔ La determinazione della risposta richiede la risoluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine

43

## Circuito RLC serie

- **LKI:**  $i_C(t) = i_L(t) = i_R(t)$
- **LKV:**  $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_G(t)$
- **Componenti:**

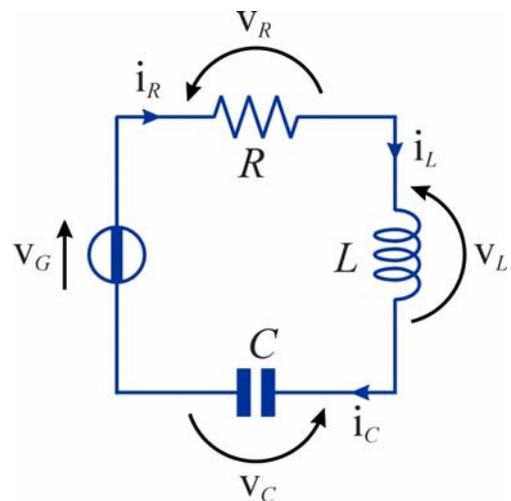
$$i_C(t) = C \frac{d v_C}{dt}$$

$$v_R(t) = R i_R(t) = RC \frac{d v_C}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{d i_L}{dt} = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2}$$



$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{d v_C}{dt} + v_C(t) = v_G(t)$$



44

## Circuito RLC serie

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante  $t = 0$  della tensione  $v_C$  e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

$$v_C(0) = V_{C0}$$

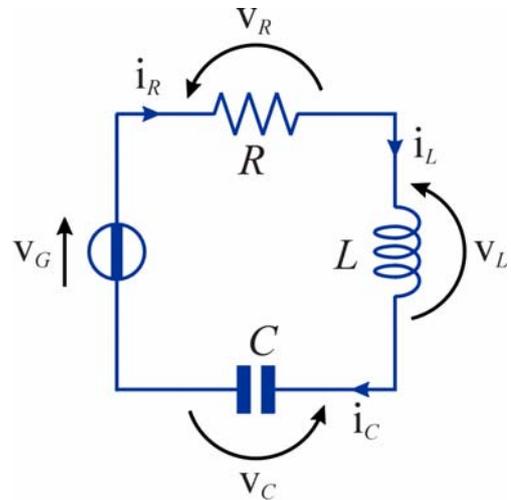
$$i_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$i_C(t) = C \frac{d v_C}{dt}$$

$$i_C(t) = i_L(t)$$

$$\rightarrow \left. \frac{d v_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{C} i_C(0) = \frac{1}{C} i_L(0) = \frac{I_{L0}}{C}$$



45

## Circuito RLC parallelo

- **LKI:**  $i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_G(t)$
- **LKV:**  $v_C(t) = v_L(t) = v_R(t)$
- **Componenti:**

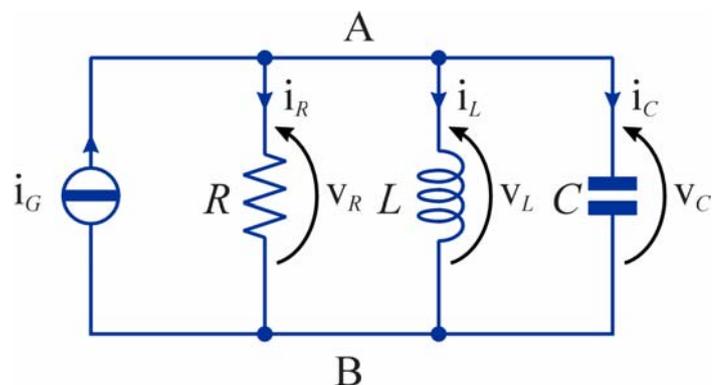
$$v_L(t) = L \frac{d i_L}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{d i_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{d v_C}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$



$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{d i_L}{dt} + i_L(t) = i_G(t)$$



46

## Circuito RLC parallelo

- All'equazione si devono associare le condizioni iniziali relative al valore all'istante  $t = 0$  della corrente  $i_L$  e della sua derivata
- Quest'ultima condizione può essere ottenuta a partire dai valori iniziali delle variabili di stato

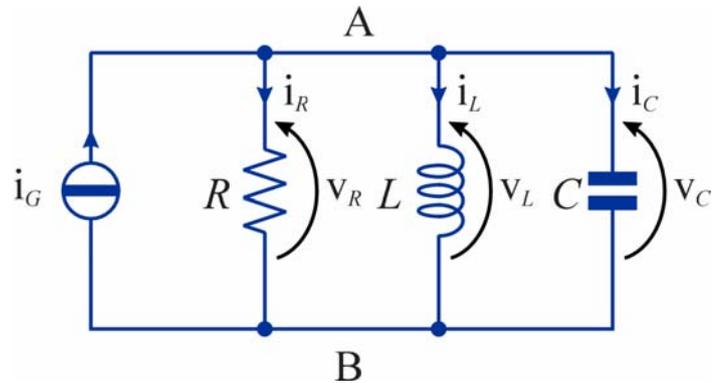
$$v_C(0) = V_{C0}$$

$$i_L(0) = I_{L0}$$

infatti si ha

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_L(t) = v_C(t)$$



$$\rightarrow \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L} v_L(0) = \frac{1}{L} v_C(0) = \frac{V_{C0}}{L}$$

47

## Circuiti del secondo ordine

- I circuiti del 2° ordine sono descritti da equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y(t) = f(t) \\ y(0^+) = Y_0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = Y_0' \end{cases}$$

- $\alpha$  = **coefficiente di smorzamento**

- ◆ circuito RLC serie  $\rightarrow \alpha = \frac{R}{2L}$

- ◆ circuito RLC parallelo  $\rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC}$

- $\omega_0$  = **pulsazione naturale**

- ◆ circuito RLC serie e parallelo  $\rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$R > 0, L > 0, C > 0$$



$$\alpha > 0, \omega_0^2 > 0$$

48

## Risposta di un circuito del secondo ordine

- Integrale generale dell'equazione differenziale

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

- ◆  $y_H(t)$  = integrale generale dell'equazione omogenea associata
- ◆  $y_P(t)$  = soluzione particolare dell'equazione differenziale

- Per determinare  $y_H(t)$  si risolve l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

- Si distinguono tre casi caratterizzati da valore positivo, nullo o negativo del discriminante  $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$

- ◆ **caso sovrasmorzato:**  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \omega_0^2$
- ◆ **caso con smorzamento critico:**  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \omega_0^2$
- ◆ **caso sottosmorzato:**  $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < \omega_0^2$

49

## Caso sovrasmorzato

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta > 0$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \alpha_d = \begin{cases} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{cases}$$

- ◆ Se  $\alpha > 0, \omega_0^2 > 0$ , dato che  $\alpha_d < \alpha$ , risulta  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

➔ Il circuito è asintoticamente stabile

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_H(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$$

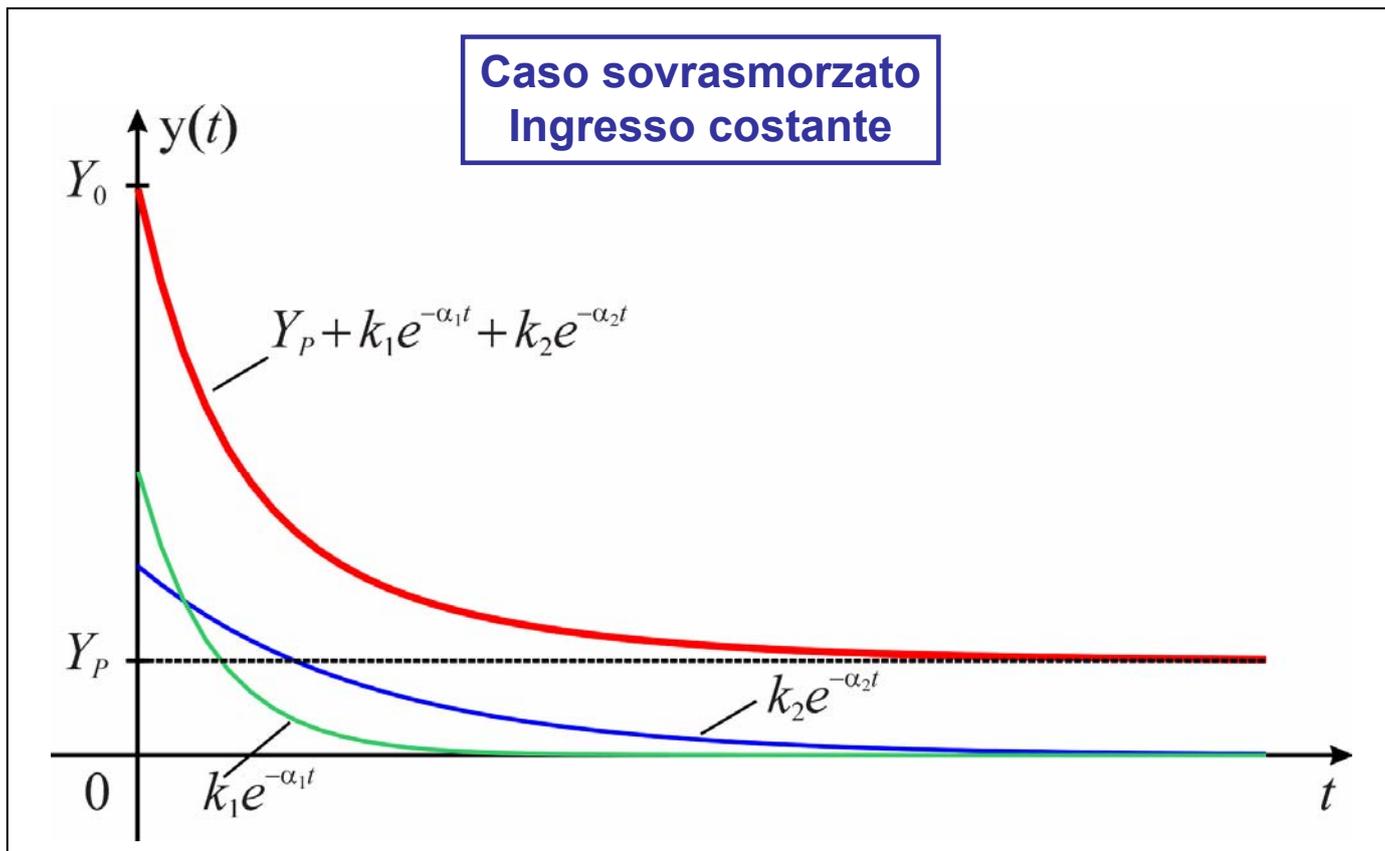
- Espressione della risposta:

$$y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t} + y_p(t)$$

- ◆  $k_1$  e  $k_2$  si determinano imponendo le condizioni iniziali

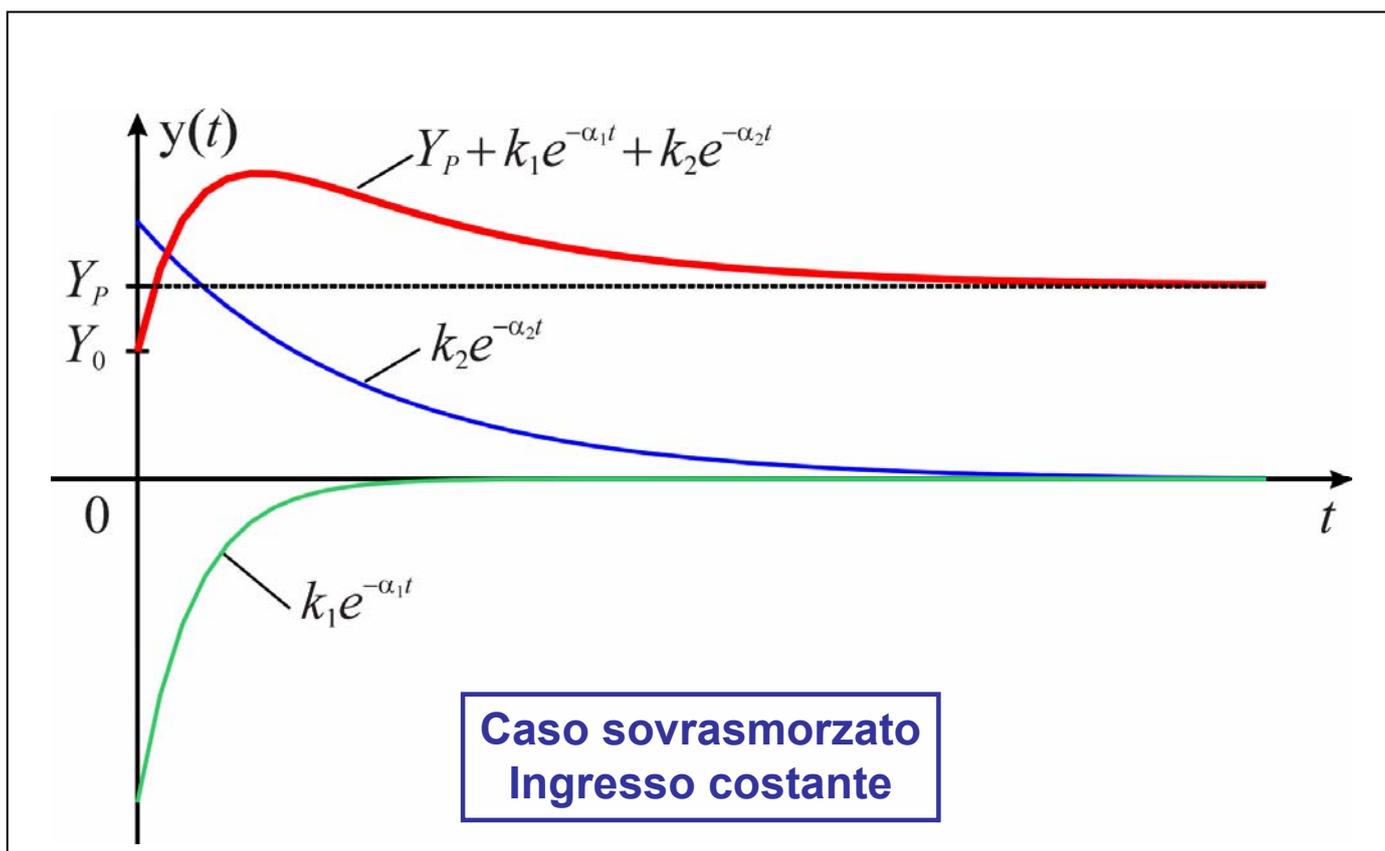
50

## Risposta di un circuito del secondo ordine



51

## Risposta di un circuito del secondo ordine



52

## Smorzamento critico

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

- ◆ Anche in questo caso se  $\alpha > 0$ , le soluzioni sono negative

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_H(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

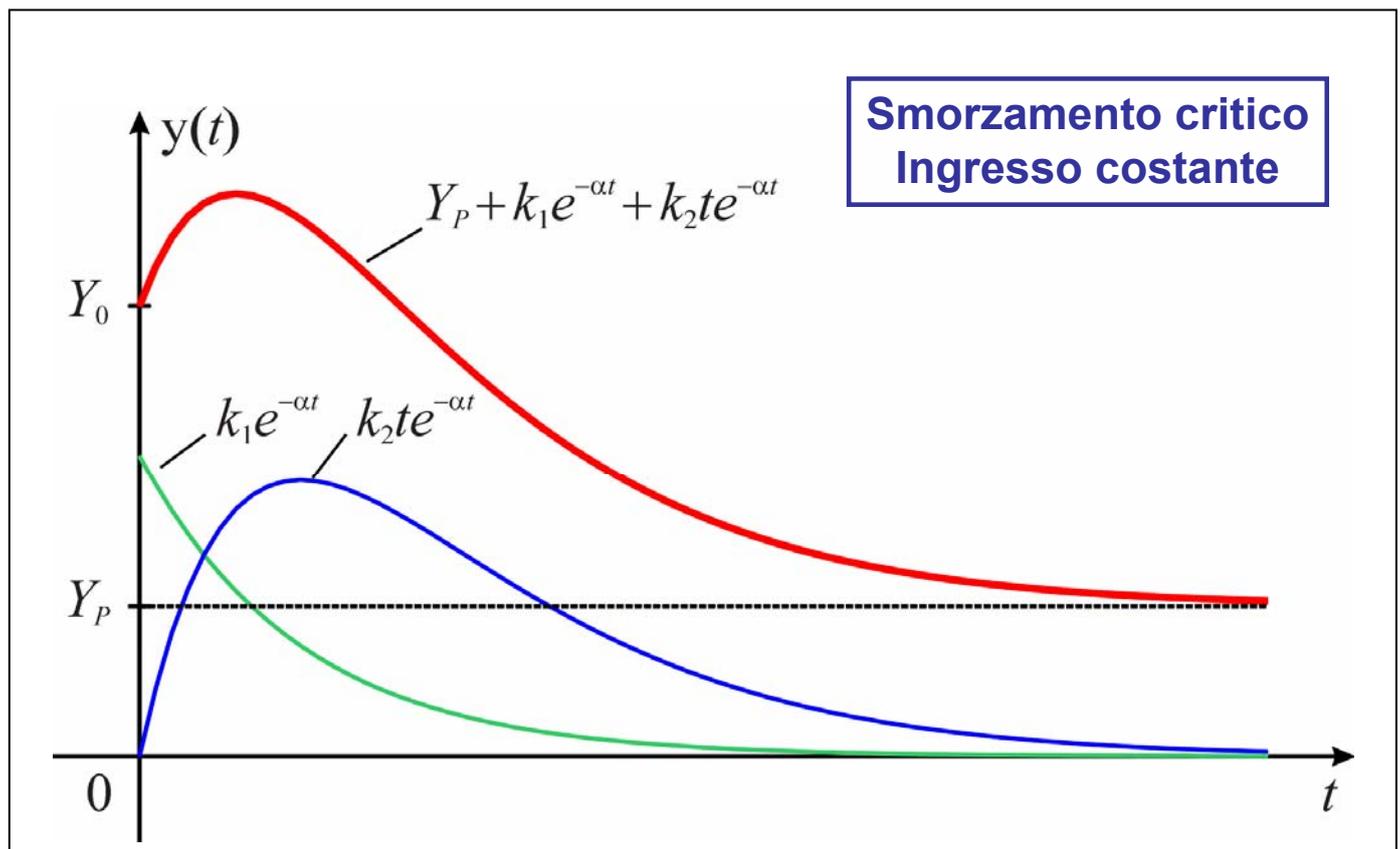
- Espressione della risposta:

$$y(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t} + y_p(t)$$

- ◆  $k_1$  e  $k_2$  si determinano imponendo le condizioni iniziali

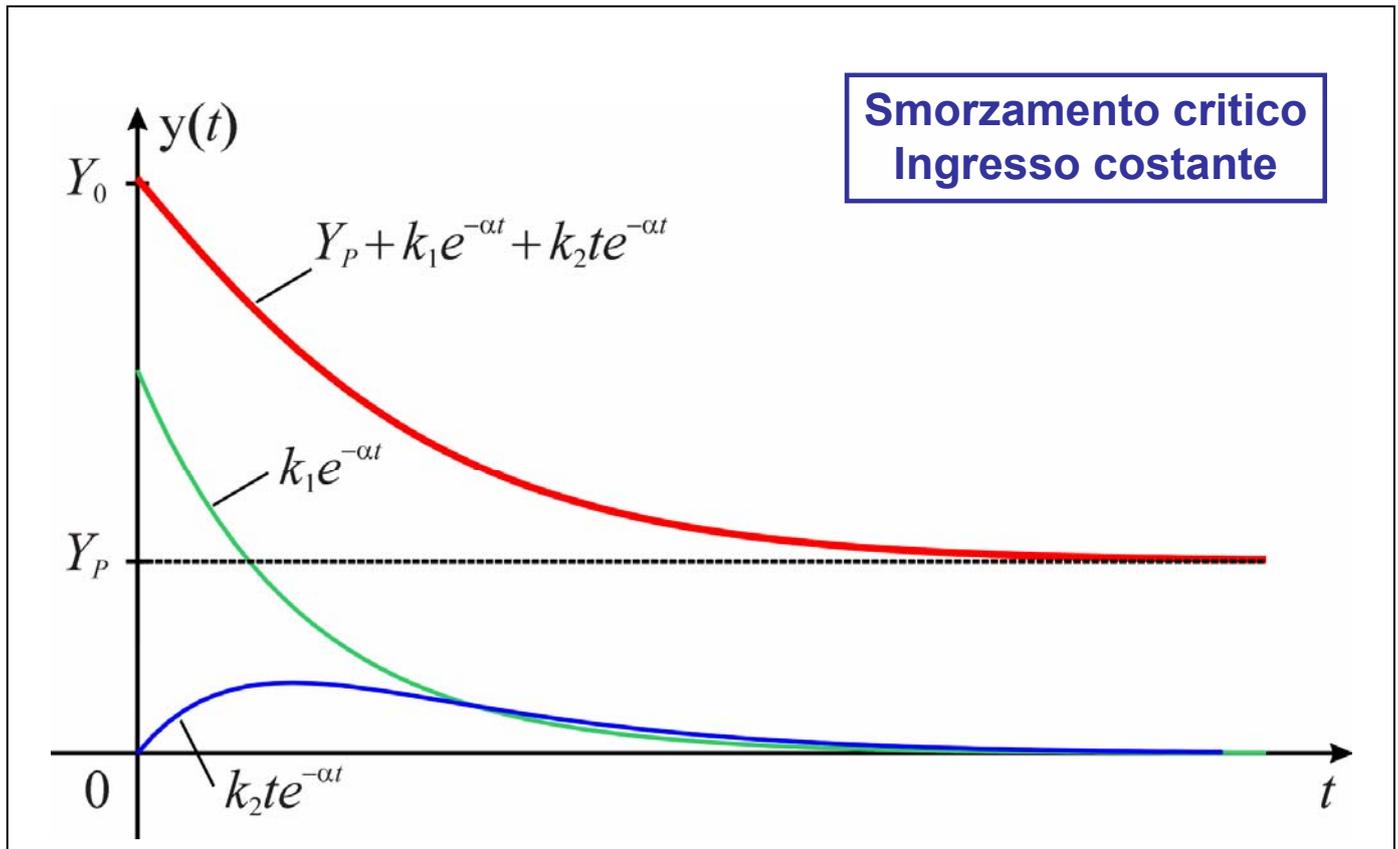
53

## Risposta di un circuito del secondo ordine



54

## Risposta di un circuito del secondo ordine



55

## Caso sottosmorzato

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

- L'equazione ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

- Affinché  $y_H(t)$  sia reale occorre che sia

$$k_2 = k_1^*$$

- Si pone

$$k_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \quad (A, \varphi \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0) \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

56

## Caso sottosmorzato

- Utilizzando la formula di Eulero si ottiene

$$\begin{aligned}y_H(t) &= k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} = \\&= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t} = \\&= A e^{-\alpha t} \left[ \frac{e^{j(\omega_d t + \varphi)} + e^{-j(\omega_d t + \varphi)}}{2} \right] = \\&= A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)\end{aligned}$$

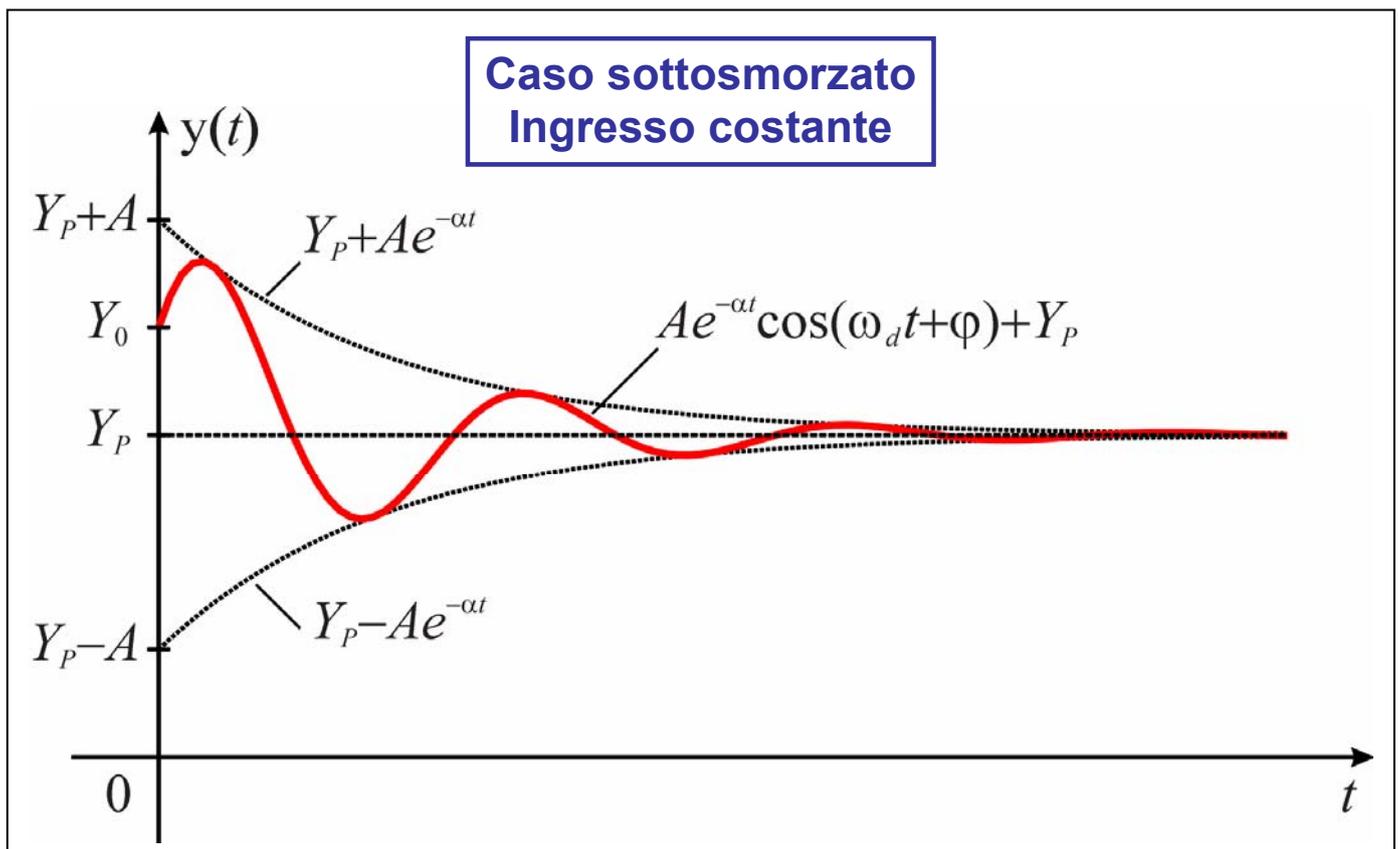
- ➔ Espressione della risposta:

$$y(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) + y_p(t)$$

- ◆ Anche in questo caso si devono determinare due costanti reali ( $A$  e  $\varphi$ ) imponendo le condizioni iniziali

57

## Risposta di un circuito del secondo ordine

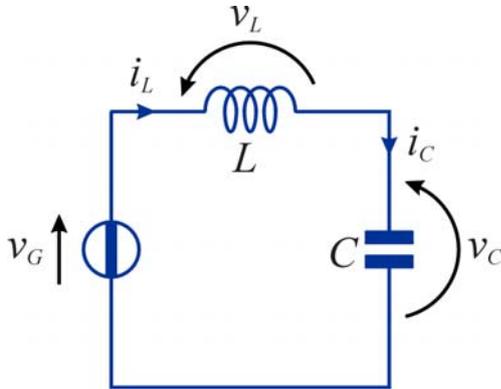


58

## Caso senza perdite

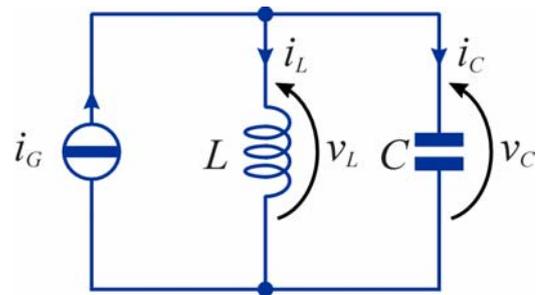
$$\alpha^2 = 0, \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

- Questo caso corrisponde all'assenza di componenti in grado di dissipare energia



RLC serie  $\rightarrow$  LC serie

$$R \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} \rightarrow 0$$



RLC parallelo  $\rightarrow$  LC parallelo

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC} \rightarrow 0$$

59

## Caso senza perdite

- In queste condizioni l'equazione differenziale è

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = f(t)$$

- L'equazione caratteristica ha due soluzioni immaginarie coniugate

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm j\omega_0$$

- L'integrale generale dell'equazione omogenea è una funzione sinusoidale di pulsazione  $\omega_0$

$$y_H(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

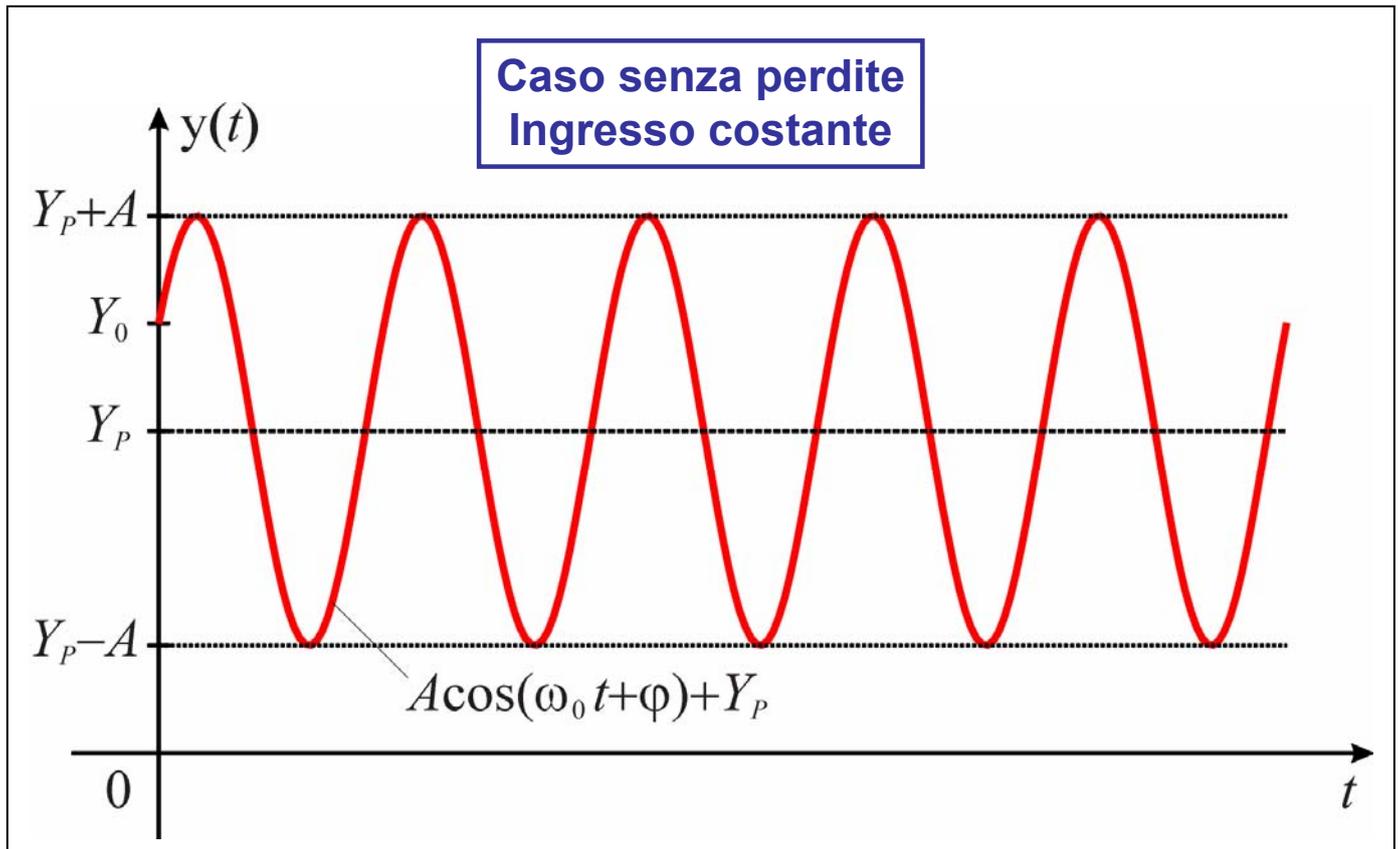
- ◆ non si annulla per  $t \rightarrow \infty$  ma rimane limitata
- ◆ in questo caso il circuito è **semplicemente stabile**

- L'espressione della risposta completa è

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + y_p(t)$$

60

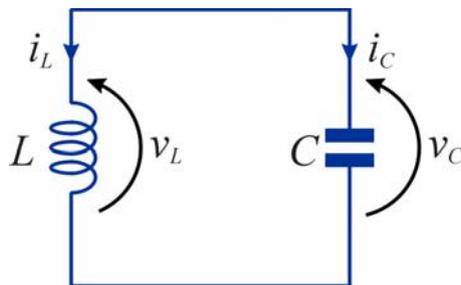
## Risposta di un circuito del secondo ordine



61

## Oscillatore armonico

- Se l'ingresso è nullo, i circuiti LC serie e parallelo si riducono al circuito seguente



- Considerando (per esempio) l'equazione in  $v_C$  si ottiene

$$v_C(t) = v_L(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Quindi si ha anche

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C \frac{d v_C}{dt} = \omega_0 C V_M \sin(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- La tensione e la corrente sono sinusoidali con pulsazione  $\omega_0$

62

## Oscillatore armonico

- Energia accumulata nel condensatore

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_V)$$

- Energia accumulata nell'induttore

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 V_M^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} C V_M^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- Energia totale

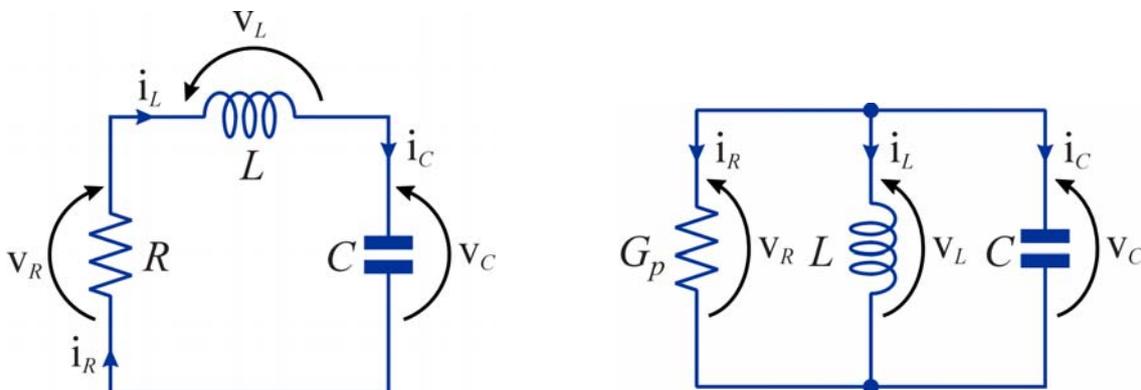
$$w_T = w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C V_M^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 V_M^2 = \frac{1}{2} L I_M^2$$

- L'energia totale è costante e coincide con i valori massimi assunti da  $w_C(t)$  e da  $w_L(t)$
- $w_C(t)$  è massima quando  $w_L(t)$  si annulla e viceversa
- ➔ Si ha uno scambio continuo di energia, senza perdite, tra il condensatore e l'induttore

63

## Oscillatore smorzato

- Si inserisce un resistore di resistenza  $R_s$  in serie a  $L$  e  $C$  oppure un resistore di conduttanza  $G_p$  in parallelo a  $L$  e  $C$



- A partire dalla condizione  $R_s = 0$  oppure  $G_p = 0$  si aumenta il valore di  $R_s$  o di  $G_p$

- ➔ Aumenta il valore di  $\alpha$  che nei due casi è  $\alpha = \frac{R_s}{2L}$  o  $\alpha = \frac{G_p}{2C}$

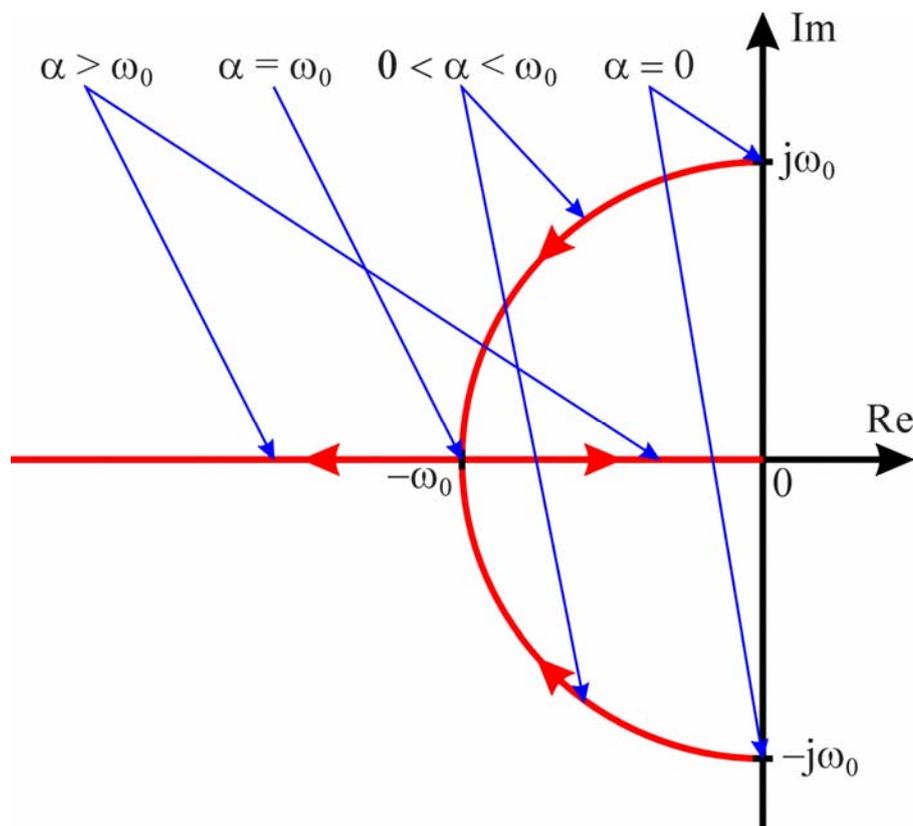
64

## Oscillatore smorzato

- Inizialmente il circuito è sottosmorzato
  - ◆ a causa della dissipazione nel resistore l'energia accumulata nel circuito tende a zero per  $t \rightarrow \infty$
  - ◆ l'ampiezza delle oscillazioni decresce come  $e^{-\alpha t}$
  - ◆ la pulsazione  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  diminuisce all'aumentare di  $R_s$  o  $G_p$
- Aumentando  $\alpha$  si raggiunge la condizione di smorzamento critico per  $\alpha = \omega_0 \Rightarrow R_s = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad G_p = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 
  - ◆ in queste condizioni la pulsazione  $\omega_d$  è uguale a zero
  - ➔ a partire da questo punto le risposte del circuito non hanno più andamento oscillante
- Aumentando ulteriormente  $\alpha$  il circuito diviene sovrasmorzato
  - ◆ al crescere di  $\alpha$  una delle soluzioni dell'equazione caratteristica tende a  $-\infty$  mentre l'altra tende a zero
  - ➔ per  $t \rightarrow \infty$  la risposta tende a zero sempre più lentamente

65

## Luogo delle soluzioni dell'equazione caratteristica



66