Richiami di teoria dell'elettromagnetismo

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 6-5-2018)

Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

	Forma locale	Forma integrale
Equazione di continuità	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_c\, dV$
Legge di Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$
Legge di Ampere-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$
Legge di Gauss elettrica	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \rho_c\, dV$
Legge di Gauss magnetica	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$

Grandezze fondamentali

- ρ_c = densità di carica elettrica [C/m^3]
- $\mathbf{E}$ = campo elettrico [V/m]
- $\mathbf{H}$ = campo magnetico [A/m]
- $\mathbf{D}$ = induzione elettrica (spostamento elettrico) [C/m^2]
- $\mathbf{B}$ = induzione magnetica [T]
- $\mathbf{J}$ = densità di corrente elettrica [A/m^2]

Carica elettrica

- I fenomeni **elettromagnetici** sono i fenomeni fisici riconducibili alle cariche elettriche
- La **carica elettrica** è una proprietà fondamentale della materia rappresentabile mediante una grandezza scalare
  [unità di misura coulomb, C]
- L'esperienza mostra che esistono due tipi di cariche
  - tra cariche dello stesso tipo si esercitano forze repulsive
  - tra cariche di tipo diverso si esercitano forze attrattive
- *Convenzionalmente* si attribuiscono valori positivi alle cariche di un tipo e negativi alle cariche dell'altro tipo

Densità di carica

- Se si considerano fenomeni osservabili su scala macroscopica si può prescindere dalla natura granulare della carica e assumere che la carica si a distribuita con continuità nello spazio
  - **Densità volumetrica di carica** [C/m^3]

$$\rho_c = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Δq = carica contenuta nel volume ΔV

- In alcuni casi si hanno distribuzioni di carica che si sviluppano prevalentemente in una o due dimensioni
  - **Densità superficiale di carica** [C/m^2]

$$\sigma_c = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

Δq = carica associata alla superficie ΔS

  - **Densità lineare di carica** [C/m]

$$\lambda_c = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Δq = carica associata al segmento Δl

Cariche libere e cariche di polarizzazione

- **Cariche libere:** cariche che possono compiere spostamenti macroscopici e dare luogo a separazioni macroscopiche di carica
- **Cariche di polarizzazione:** cariche legate alla struttura atomica o molecolare che possono compiere solo spostamenti microscopici (conseguenti a deformazione o orientamento di atomi o molecole)

- **Conduttore:** mezzo materiale nel quale sono presenti cariche in grado di compiere spostamenti macroscopici
- **Dielettrico:** mezzo materiale nel quale tutte le cariche possono compiere solo spostamenti microscopici

- In seguito quando si parlerà di cariche senza ulteriori indicazioni si farà riferimento alle cariche libere

Corrente elettrica

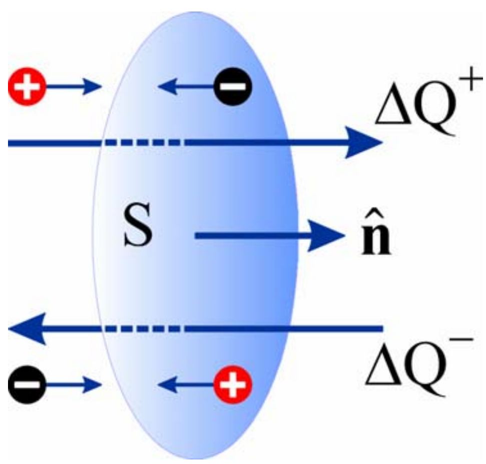
- La **corrente elettrica** è costituita da un flusso di cariche elettriche
- E' descritta da una grandezza scalare che rappresenta la quantità di carica che attraversa una superficie orientata S in senso concorde con la normale alla superficie nell'unità di tempo [unità di misura ampere, A]
- In generale si possono avere cariche positive e negative che si muovono sia in senso concorde sia in senso discorde con la normale
  - ➡ La carica che attraversa la superficie è valutata mediante una somma algebrica
  - Il segno del contributo di ciascuna carica dipende dal segno della carica stessa e dal verso del moto

Definizione della corrente elettrica

- Si indica con ΔQ la carica che attraversa la superficie S in senso concorde con la normale $\hat{\mathbf{n}}$ nell'intervallo di tempo Δt

$$\Delta Q = \Delta Q^{+} - \Delta Q^{-}$$

  - Contributo positivo (ΔQ^{+})
    - cariche positive dirette in senso concorde con la normale
    - cariche negative dirette in senso discorde con la normale
  - Contributo negativo ($-\Delta Q^{-}$)
    - cariche positive dirette in senso discorde con la normale
    - cariche negative dirette in senso concorde con la normale



Definizione della corrente elettrica

- La corrente, $\mathrm{i}(t)$, è definita dalla relazione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{Q}}{\Delta t} = \frac{d\,\mathrm{Q}}{dt}$$

➡ La corrente è la derivata della funzione $\mathrm{Q}(t)$ che rappresenta la quantità di carica transitata attraverso S a partire da un certo istante iniziale fino all'istante t

- $\mathrm{Q}(t)$ non si identifica necessariamente con la carica presente in qualche regione dello spazio all'istante t
  - è possibile che le stesse cariche (muovendosi lungo percorsi chiusi) forniscano più contributi a $\mathrm{Q}(t)$

Densità di corrente

- La densità di **densità di corrente** $\mathbf{J}$ [A/m^2] è un vettore definito in modo che la sua componente lungo la normale ad una superficie orientata S rappresenti la corrente per unità di superficie che fluisce attraverso S

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\,\mathrm{i}}{dS}$$

➡ La corrente attraverso una superficie orientata S è uguale al flusso del vettore $\mathbf{J}$ attraverso S

$$\mathrm{i} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Definizione della densità di corrente

- Si considera una superficie orientata infinitesima dS attraversata da corrente elettrica
- Si assume che le cariche in moto abbiano densità ρ_c e velocità $\mathbf{v}$
- Nell'intervallo di tempo dt le cariche percorrono la distanza vdt
- La carica che attraversa la superficie dS nell'intervallo dt è pari alla carica totale contenuta nel volume dV

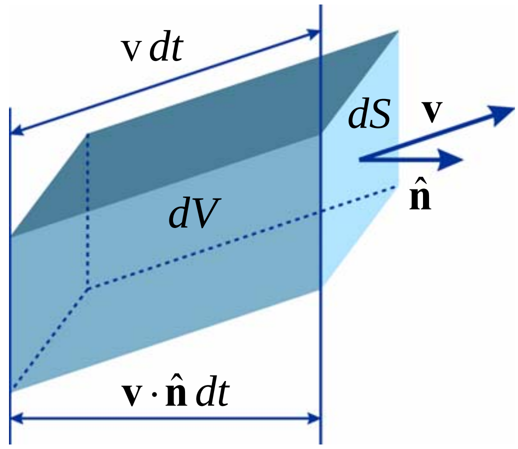
$$d\,\mathrm{Q} = \rho_c dV = \rho_c \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dt\,dS$$

- La corrente attraverso dS è

$$d\,\mathrm{i} = \frac{d\,\mathrm{Q}}{dt} = \rho_c\,\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

- quindi si ha

$$\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{d\,\mathrm{i}}{dS} = \rho_c\,\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$



Definizione della densità di corrente

- La densità di corrente è definita dalla relazione

$$\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$$

- Nel caso più generale, in cui le cariche non si muovono tutte con la stessa velocità $\mathbf{v}$ e sono presenti sia cariche positive sia cariche negative (con densità ρ^+ e ρ^-), la densità di corrente si definisce come

$$\mathbf{J} = \rho_+\langle\mathbf{v}_+\rangle + \rho_-\langle\mathbf{v}_-\rangle$$

$$\langle\mathbf{v}_+\rangle, \langle\mathbf{v}_-\rangle = \text{velocità medie}$$

Forza di Lorentz

- Una carica puntiforme q in moto con velocità $\mathbf{v}$ in una regione sede di un campo elettromagnetico è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Forza di Lorentz

- Questa relazione può essere assunta come definizione delle due funzioni vettoriali del punto e del tempo dette
  - **campo elettrico** $\mathbf{E}$ [unità di misura volt/metro, V/m]
  - **induzione magnetica** $\mathbf{B}$ [unità di misura tesla, T]
- Se si ha una distribuzione di carica con densità ρ_c in moto con velocità $\mathbf{v}$, la forza per unità di volume $\mathbf{f}$ è

$$\mathbf{f} = \rho_c(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho_c\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Campo elettrico

- Si dice che una regione è sede di un **campo elettrico** se una carica di prova Δq puntiforme posta in quiete in un punto P della regione è soggetta ad una forza $\mathbf{F}_e$ proporzionale al valore della carica
- Il vettore campo elettrico nel punto P è definito come

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\mathbf{F}_e}{\Delta q}$$

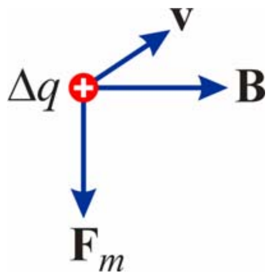
  - Il passaggio al limite indica che la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non perturbare il campo presente nella regione considerata

Induzione magnetica

- Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova Δq puntiforme in moto con velocità istantanea $\mathbf{v}$ in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza $\mathbf{F}_e$ dovuta al campo elettrico) ad una forza

  $\mathbf{F}_m = \Delta q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
- Il vettore **induzione magnetica** $\mathbf{B}$ ha
  - direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza $\mathbf{F}_m$ è nulla
  - verso tale che $\mathbf{v}$ $\mathbf{B}$ e $\mathbf{F}_m$ formino una terna destra
  - modulo dato da

$$B = \lim_{\Delta q\to 0}\frac{F_{m\max}}{\Delta q\, v}$$



dove $F_{m\max}$ indica il valore massimo del modulo di $\mathbf{F}_m$ (che si ottiene quando $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{B}$)

Induzione elettrica e campo magnetico

- Come si vedrà in seguito, i vettori $\mathbf{D}$ (**induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m^2]) e $\mathbf{H}$ (**campo magnetico** [A/m]) vengono introdotti per tenere conto di fenomeni che avvengono, in presenza di campi elettromagnetici, nei mezzi materiali
- Nel vuoto valgono le relazioni

  $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$

  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$
- La costante ε_0 ($= 1/(c_0^2\mu_0) \cong 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m) è detta **permittività elettrica** (o **costante dielettrica**) del vuoto
- La costante μ_0 ($= 4\pi\cdot 10^{-7} \cong 1.257\cdot 10^{-6}$ H/m) è detta **permeabilità magnetica** del vuoto

  ($c_0 = 2.99792458\cdot 10^{8}$ m/s è la velocità della luce nel vuoto)

Equazioni fondamentali

Leggi primarie

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

(Assunte come postulati)

Leggi secondarie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

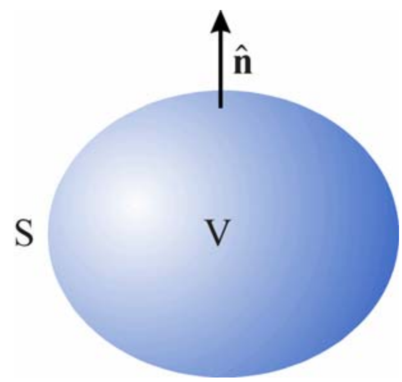
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(Derivano dalle leggi primarie)

Equazione di continuità (Principio di conservazione della carica elettrica)

- **Forma locale**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$



- Per ricavare la forma integrale si considera una superficie chiusa S che delimita un volume V
- Si orienta il versore normale a S verso l'esterno
- Si integrano primo e secondo membro sul volume V e si applica il teorema di Gauss (si possono scambiare l'integrale di volume e la derivata rispetto al tempo se S, e quindi V, non varia)

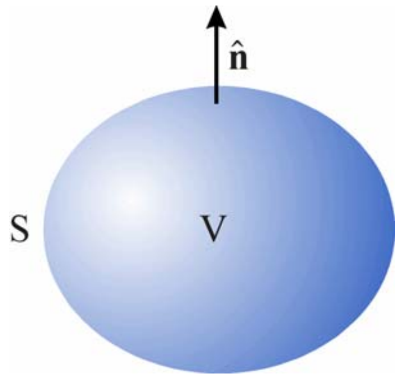
$$\left.\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= -\frac{d}{dt}\int_V \rho_c dV \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_c\, dV$$

Equazione di continuità
(Principio di conservazione della carica elettrica)

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{i} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V \rho_c\,dV}_{Q}$$

  - i = corrente uscente dalla superficie S
  - Q = carica contenuta nel volume V



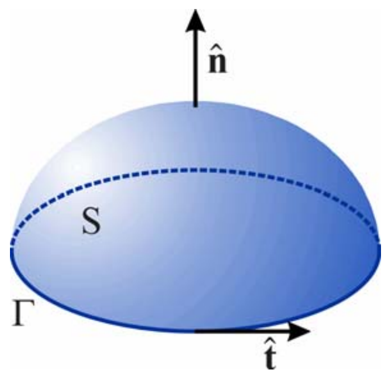
- *La corrente uscente da una superficie chiusa è uguale alla diminuzione nell'unità di tempo della carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*
  - La carica elettrica non può essere né creata né distrutta, ma può essere solo spostata
  - Nel caso di un sistema isolato ($i = 0$) la carica è costante nel tempo

Legge di Faraday-Neumann

- **Forma locale**

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa Γ e una generica superficie S avente Γ come contorno
- Si orientano il versore tangente a Γ e il versore normale a S secondo la regola della mano destra



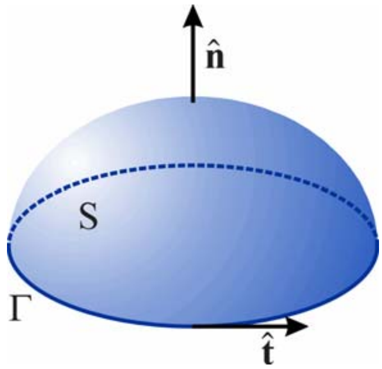
- Si valutano i flussi attraverso S del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se Γ, e quindi S, non varia)

$$\left.\begin{aligned}\int_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS\\ \int_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl\end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Legge di Faraday-Neumann

- **Forma integrale**

$$\underbrace{\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl}_{e} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{\Phi}$$



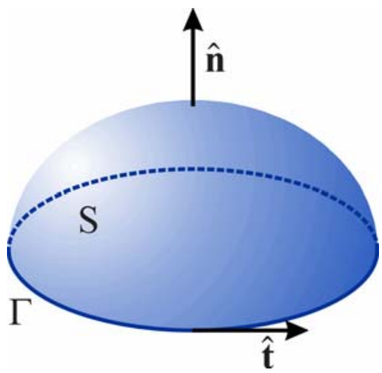
  - e = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
  - Φ = flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una superficie arbitraria avente Γ come contorno (**flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con Γ**)

- *La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa*

Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma locale**

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$



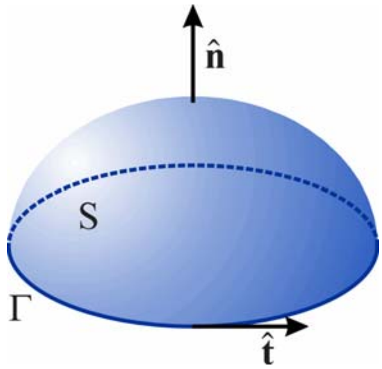
- Per ricavare la forma integrale si considerano una linea chiusa Γ e una generica superficie S avente Γ come contorno
- Si orientano il versore tangente a Γ e il versore normale a S secondo la regola della mano destra
- Si valutano i flussi attraverso S del primo e del secondo membro e si applica il teorema di Stokes (si possono scambiare l'integrale di superficie e la derivata rispetto al tempo se Γ, e quindi S, non varia)

$$\left.\begin{aligned} &\int_S \nabla\times\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS + \int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\ &\int_S \nabla\times\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl \end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS + \int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Legge di Ampere-Maxwell

- **Forma integrale**

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}}\,dl = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{i_c}$$



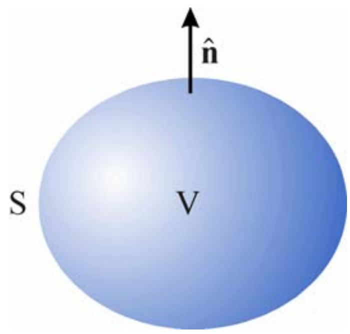
  - $i_c =$ **corrente di conduzione** che attraversa S
  - $i_s =$ **corrente di spostamento** che attraversa S
  - $i_T = i_s + i_c =$ **corrente totale** concatenata con Γ

- *La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa*

Corrente di conduzione e di spostamento

- La corrente totale i_T non dipende dalla superficie S, ma solo dalla linea di contorno Γ
- Attraverso superfici diverse aventi lo stesso contorno Γ i valori della corrente di conduzione i_c e della corrente di spostamento i_s possono risultare diversi, ma la loro somma i_T non varia
- ⇒ Di conseguenza, la somma dei flussi attraverso una superficie chiusa della corrente di conduzione e della corrente di spostamento è sempre nullo

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{i_c} + \underbrace{\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS}_{i_s} = 0$$



Corrente di conduzione e di spostamento

- Lo stesso risultato può esser ottenuto applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\right)$$

- Dato che la divergenza del rotore è sempre nulla si ha

$$\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{D}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$$

- Se si considera una superficie chiusa S e che delimita un volume V, applicando il teorema di Gauss si ricava

$$\int_V\left(\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{D}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}\right)dV=\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\right)dV=\oint_S\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=0$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\oint_S\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS+\oint_S\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=0$$

Esempio

- Si considera una linea Γ che circonda un terminale di un condensatore
- Attraverso S_1 si ha solo corrente di conduzione

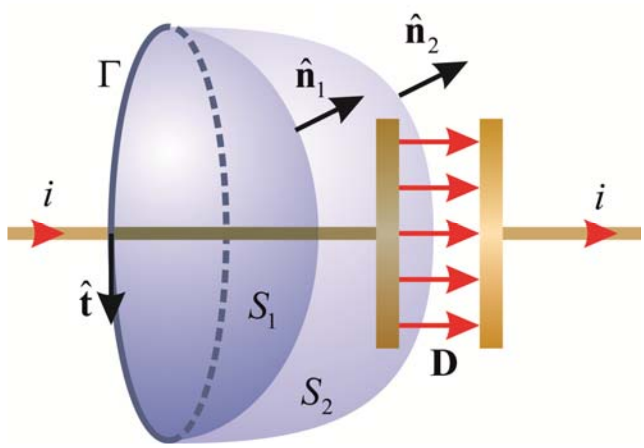
$$i_T=i_c=i=\int_{S_1}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS$$

- Attraverso S_2 si ha solo corrente di spostamento

$$i_T=i_s=\frac{d}{dt}\int_{S_2}\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\,dS$$

- Quindi risulta

$$\int_{S_1}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS=\frac{d}{dt}\int_{S_2}\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\,dS$$



Derivazione della legge di Gauss elettrica

- Come si è visto, applicando l'operatore divergenza al primo e al secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell si ottiene

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

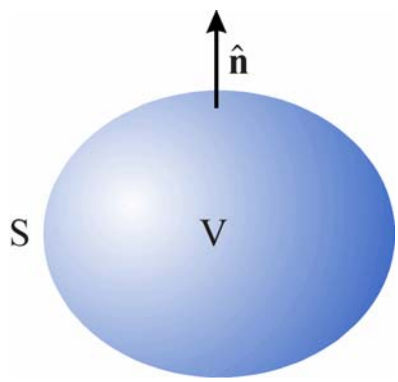
- Combinando questa relazione con l'equazione di continuità, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = cost$$

- L'esperienza mostra che in una generica regione dello spazio è possibile realizzare le condizioni $\mathbf{D} = 0$ e $\rho_c = 0$
- In tali condizioni risulta $\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_c = 0$
- ➡ Quindi la costante deve valere zero e, di conseguenza, vale la relazione

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

Legge di Gauss elettrica



- **Forma locale**

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

- **Forma integrale**

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \rho_c\, dV = Q$$

  - V = regione delimitata da una superficie chiusa S
  - Si orienta il versore normale a S verso l'esterno
  - La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss

- *Il flusso uscente da una superficie chiusa del vettore induzione elettrica è uguale alla carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa*

Derivazione della legge di Gauss magnetica

- Si applica l'operatore divergenza a primo e secondo membro dell'equazione di Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

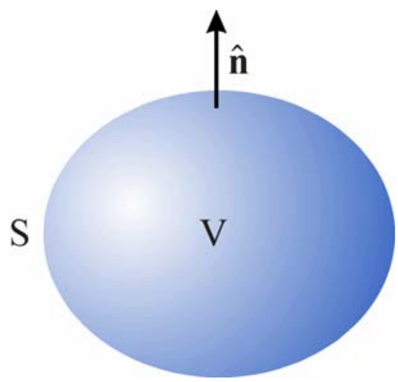
- Dato che la divergenza di un rotore è nulla si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = cost$$

- Se si ipotizza, come suggerisce l'esperienza, la possibilità di realizzare in una generica regione dello spazio la condizione $\mathbf{B} = 0$, si deduce che la costante deve essere nulla

➡ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Legge di Gauss magnetica



- Forma locale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Forma integrale

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

  - V = regione delimitata da una superficie chiusa S
  - Si orienta il versore normale a S verso l'esterno
  - La forma integrale si ottiene dalla forma locale applicando il teorema di Gauss

- *Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è nullo*

Equazioni di legame materiale

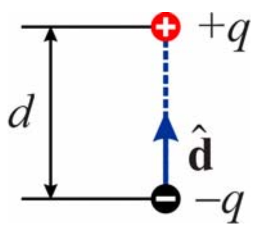
- Le equazioni fondamentali non dipendono dalle proprietà dei mezzi materiali in cui ha sede il campo elettromagnetico
- L'effetto dei mezzi materiali sui campi elettromagnetici viene espresso mediante un insieme di equazioni dette **equazioni di legame materiale** o **relazioni costitutive**
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico le relazioni costitutive hanno la forma
  - $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$
  - $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$
  - $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$
- Le relazioni costitutive possono dipendere, inoltre, da altre grandezze fisiche che definiscono lo stato del materiale (es. temperatura, pressione, ecc.)

Equazioni di legame materiale

- **Materiali omogenei**:
  Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dal punto considerato
- **Materiali isotropi**:
  Le relazioni costitutive $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ non dipendono dalle direzioni dei vettori
- **Materiali lineari**:
  Le relazioni costitutive sono espresse da equazioni lineari del tipo
  $$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = [\sigma]\mathbf{E}$$
  in cui $[\varepsilon]$, $[\mu]$ e $[\sigma]$ rappresentano delle matrici
- **Materiali lineari isotropi**:
  Le relazioni costitutive si riducono a relazioni di proporzionalità
  $$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$
  in cui ε, μ e σ sono costanti scalari

Dipolo elettrico

- Si considerano due cariche puntiformi uguali e opposte $\pm q$ poste a distanza d
- Si definisce **momento di dipolo elettrico** [C·m] la quantità



  $\mathbf{p} = p\,\hat{\mathbf{d}} = qd\,\hat{\mathbf{d}}$

  $\hat{\mathbf{d}}$ = versore diretto dalla carica negativa alla carica positiva
- A una distanza dalle cariche molto grande rispetto a d il campo elettrico dipende solo da $\mathbf{p}$ (non separatamente da d e q)
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $d \to 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $q \to \infty$ in modo tale che il prodotto qd tenda a un valore finito $p \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo elettrico**

Polarizzazione dei dielettrici

- Dal punto di vista macroscopico, si può ritenere che, in assenza di perturbazioni esterne, in un dielettrico siano presenti due distribuzioni continue di carica, una positiva (densità ρ_+) e una negativa (densità ρ_-), uguali e opposte in ogni punto

  $\rho_+ + \rho_- = 0$
- In un elemento di volume ΔV sono contenute due cariche uguali e opposte $\rho_+\Delta V$ e $\rho_-\Delta V$ i cui baricentri coincidono
  - ➡ carica totale e momento di dipolo nulli
- Un campo elettrico esterno può produrre *piccoli* spostamenti $\mathbf{l}_+$ e $\mathbf{l}_-$ delle cariche positive e delle cariche negative (➡ **polarizzazione del dielettrico**)

➡ All'interno dell'elemento di volume ΔV, lo spostamento relativo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-$ tra i baricentri delle cariche positive e negative dà origine a un momento di dipolo elettrico

$$\Delta\mathbf{p} = \rho_+\Delta V\left(\mathbf{l}_+ - \mathbf{l}_-\right) = \rho_+\mathbf{l}\Delta V$$

Polarizzazione per deformazione e orientamento

- Materiali **non polari**: le molecole non possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - In presenza di un campo elettrico esterno si ha una **polarizzazione per deformazione**
    - deformazione della distribuzione elettronica
    - spostamenti relativi degli atomi costituenti la molecola
- Materiali **polari**: le molecole possiedono un momento di dipolo elettrico proprio
  - In assenza di campi esterni, a causa dell'agitazione termica i dipoli sono orientati in modo aleatorio
    - ➨ i dipoli si compensano e l'effetto macroscopico è nullo
  - Un campo esterno, oltre a produrre una polarizzazione per deformazione, tende ad allineare i dipoli (➨ **polarizzazione per orientamento**)

Vettore polarizzazione elettrica

- Lo stato di un dielettrico polarizzato può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **polarizzazione elettrica** [C/m^2]

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \rho_+ \mathbf{l}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli elettrici equivale ad una distribuzione volumetrica di carica con densità

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$ **densità di carica di polarizzazione**

- Se il campo elettrico varia nel tempo si ha una variazione di $\mathbf{P}$ che equivale alla presenza di una **densità di corrente di polarizzazione elettrica**

$$\mathbf{J}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Induzione elettrica

- Legge di Gauss nel vuoto

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c$$

- In un dielettrico polarizzato, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche della carica di polarizzazione

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c + \rho_p$$

- Si esprime la carica di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_c - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

- Si definisce **induzione elettrica** o **spostamento elettrico** [C/m^2] il vettore

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

➡ Si ottiene un'espressione della legge di Gauss, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di carica libera ρ_c

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

Costante dielettrica

- In generale $\mathbf{P}$, e quindi $\mathbf{D}$, sono funzioni del campo elettrico $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

- In un materiale lineare isotropo $\mathbf{P}$ e $\mathbf{D}$ sono proporzionali a $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

χ_e = **suscettività elettrica** del mezzo

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ = **costante dielettrica relativa** del mezzo

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = **permittività** o **costante dielettrica** del mezzo [F/m]

Costanti dielettriche relative di alcuni materiali

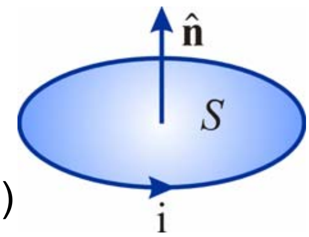
	ε_r		ε_r
Titanato di bario	$10^3 \div 10^4$	Nylon	$3.7 \div 5.5$
Ossido di titanio	$86 \div 173$	Quarzo	$4.3 \div 5$
Acqua distillata	80	Gomma	3
Alcool etilico	28	Polistirene	$2.4 \div 3$
Germanio	16	Ebanite	$2 \div 3$
Silicio	12	Porcellana	$2.7 \div 2.9$
Vetro	$4 \div 10$	Carta	$2 \div 2.5$
Allumina	9.5	Teflon	2.1
Bachelite	$5.7 \div 7$	Polietilene	$1.6 \div 2.4$
Mica	$5.7 \div 6.5$	Aria (1 atm)	1.0006

(Valori a 20 °C)

Dipolo magnetico

- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente i
- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [A·m²] la quantità

$$\mathbf{m} = m\,\hat{\mathbf{n}} = \mathrm{i}\,S\,\hat{\mathbf{n}}$$



S = area della superficie piana delimitata dalla spira
$\hat{\mathbf{n}}$ = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)

- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico dipende solo da $\mathbf{m}$
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $S \to 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $i \to \infty$ in modo tale che il prodotto Si tenda a un valore finito $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**

Vettore magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume ΔV diviene sede di un momento di dipolo magnetico $\Delta \mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [A/m]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

- Si può dimostrare che la distribuzione di dipoli magnetici equivale alla presenza nella materia di una **densità di corrente di polarizzazione magnetica**

$$\mathbf{J}_{pm} = \nabla \times \mathbf{M}$$

Campo magnetico

- Legge di Ampere - Maxwell nel vuoto

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial (\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J}$$

- Nella materia, si può utilizzare l'espressione valida nel vuoto se si tiene conto anche delle correnti di polarizzazione elettrica e magnetica

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial (\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}$$

- Si esprimono le correnti di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\partial (\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

Campo magnetico

- Nell'espressione precedente, a secondo membro, le somma delle derivate rispetto al tempo fornisce la derivata dell'induzione elettrica
- Si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

➡ Si ottiene un'espressione della legge di Ampere - Maxwell, valida anche in presenza di un mezzo materiale, in cui compare esplicitamente solo la densità di corrente $\mathbf{J}$ associata alle cariche libere

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Equazione di continuità nei mezzi materiali

- Tenendo conto delle cariche e delle correnti di polarizzazione, l'equazione di continuità assume la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{pe} + \mathbf{J}_{pm}) = -\frac{\partial(\rho_c + \rho_p)}{\partial t}$$

- Si esprimono le cariche e le correnti di polarizzazione in funzione di $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M})}_{=0} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{P})}{\partial t}$$

➡ Anche in presenza di cariche e correnti di polarizzazione si ottiene una relazione che coinvolge solo le cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

Permeabilità magnetica

- In generale $\mathbf{M}$, e quindi $\mathbf{B}$, sono funzioni del campo magnetico $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

- In un materiale lineare isotropo $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ sono proporzionali a $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

χ_m = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0 \mu_r$ = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
  - ➨ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)

➨ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato

- ➨ suscettività magnetica $\chi_m < 0$
  (valori tipici dell'ordine di -10^{-5})
- ➨ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1+\chi_m) < 1$
  (valori tipici leggermente inferiori a 1)

- χ_m e μ_R risultano indipendenti dalla temperatura

Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
  - atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
  - suscettività magnetica $\chi_m > 0$ (valori tipici dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$)
  - permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1+\chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
  - χ_m e μ_R diminuiscono all'aumentare della temperatura T

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$ (C = costante) **Legge di Curie**

Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

Materiali diamagnetici	χ_m	**Materiali paramagnetici**	χ_m
Bismuto	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	Uranio	$4 \cdot 10^{-4}$
Mercurio	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	Platino	$2.6 \cdot 10^{-4}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	Cesio	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	Alluminio	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Grafite	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	Litio	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di sodio	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	Sodio	$7.2 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	Ossigeno (1 atm)	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Azoto (1 atm)	$-5 \cdot 10^{-9}$	Aria (1 atm)	$4 \cdot 10^{-7}$

(Valori a 20 °C)

Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**
  - atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
  - si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico T_C della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$ (C = costante) **Legge di Curie-Weiss**

Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di 10^{-6}-10^{-3} m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno $\mathbf{H}$ i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di $\mathbf{H}$ si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di $\mathbf{H}$ produce un incremento di $\mathbf{B}$ uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto: $\Delta\mathbf{B} = \mu_0 \Delta\mathbf{H}$

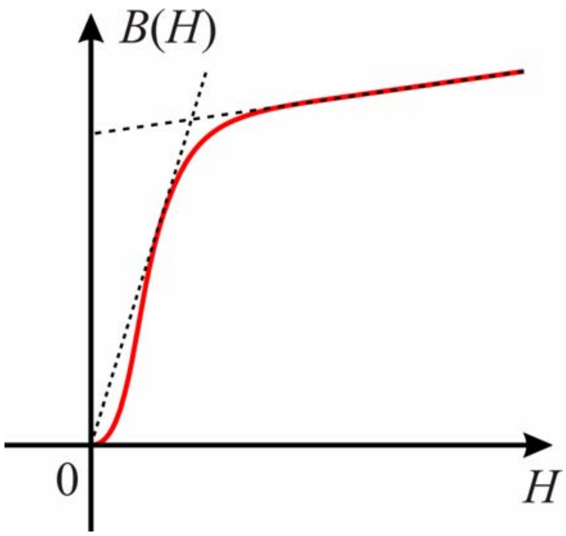
Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato $H = 0$, $B = 0$, inizialmente si ha un tratto con pendenza elevata
  - ➡ Valori elevati della permeabilità relativa differenziale

    $$\mu_{r(d)}(H) = \frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dH}$$

- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

  $$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



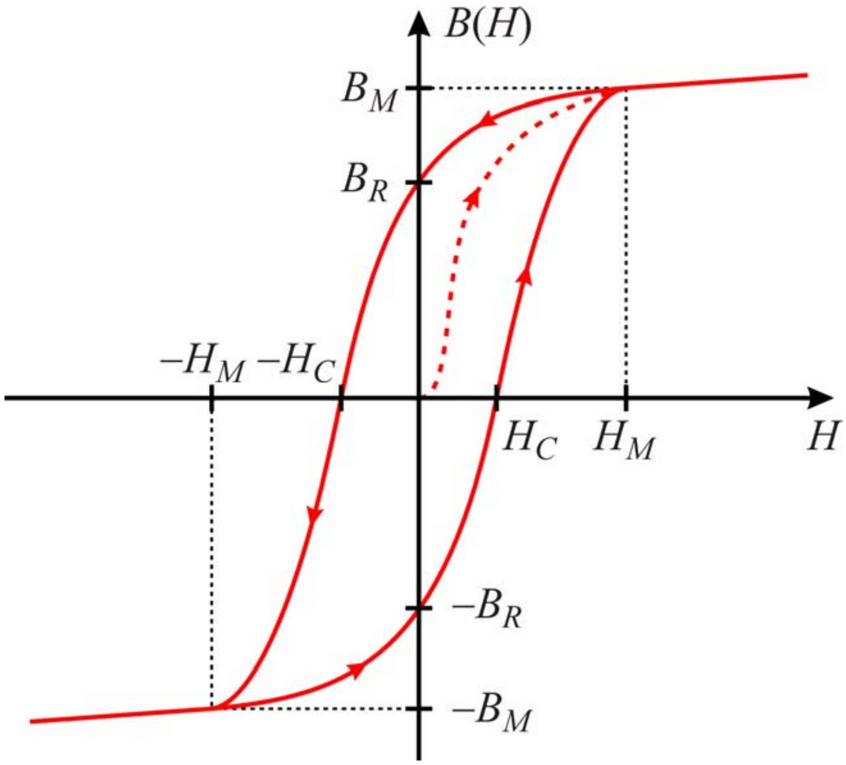
Isteresi magnetica

- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso

➡ Riportando H a zero B non si annulla ma si porta ad un valore B_R (**induzione residua**)

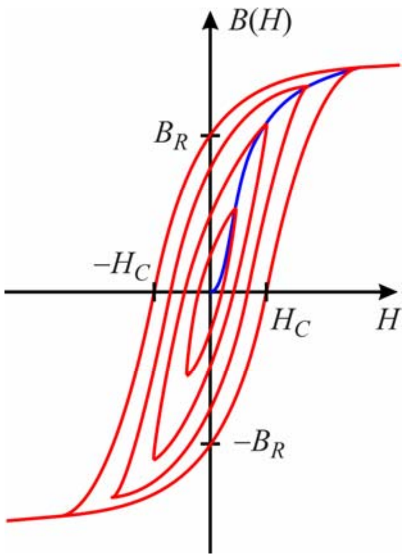
- Per annullare B occorre applicare un campo magnetico inverso $-H_C$ (**campo magnetico coercitivo**)
- Se H viene fatto variare ciclicamente tra due valori $\pm H_M$ l'andamento di B è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

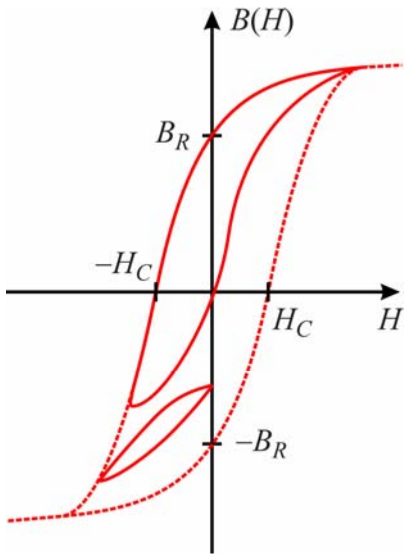
Ciclo di isteresi



Ciclo di isteresi

- Riducendo il valore di H_M si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici

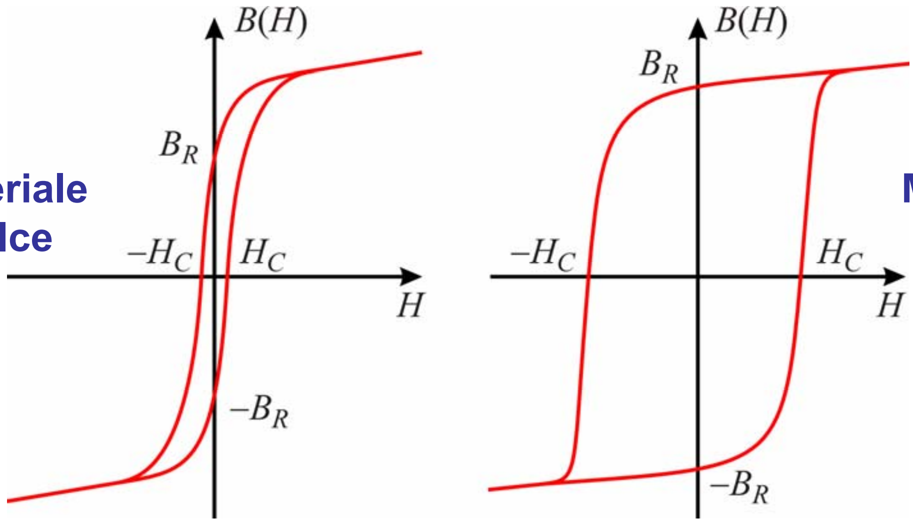




Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
  - **Materiali dolci** ➡ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
  - **Materiali duri** ➡ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo

Materiale dolce



Materiale duro

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali dolci	$\mu_{r(d)}$ iniziale	$\mu_{r(d)}$ massima	B_R [T]	H_C [A/m]
Cobalto	10	175	0.31	1000
Nichel	400	1100	0.33	130
Ferro puro	10^4	$2{\cdot}10^5$	1.2	4
Ferro commerciale	200	5000	1.2	80
Ghisa	70	600	1.4	500
Ferro-silicio 4%	500	7000	0.8	40
Permalloy (Ni, Fe 22%)	10^4	$5{\cdot}10^4$	0.6	4
Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%)	10^5	$3{\cdot}10^5$	0.6	0.4
Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)	$2.5{\cdot}10^4$	$1.5{\cdot}10^5$	0.6	1.2

(Valori a 20 °C)

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali duri	B_R [T]	H_C [kA/m]
Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)	1.05	5.6
Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)	1.28	51
Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)	1.05	120
Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)	0.54	44
Ferrite di bario ($BaFe_{12}O_{19}$)	0.43	170
Samario-cobalto ($SmCo_5$)	0.87	640
Neodimio-ferro-boro ($Nd_2Fe_{14}B$)	1.23	880

(Valori a 20 °C)

Legge di Ohm

- Per una vasta classe di materiali il legame tra la densità di corrente e il campo elettrico è lineare e isotropo ed è espresso dalla **legge di Ohm** (in forma locale)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

  - σ = **conducibilità** [siemens/metro, S/m]
  - $\rho = 1/\sigma$ = **resistività** [ohm·metro, Ω·m]

- Buoni conduttori ➡ ρ dell'ordine di $10^{-7} \div 10^{-8}$ Ω·m
- Conduttore ideale ➡ $\rho = 0$, $\sigma \to \infty$
- Isolanti ➡ ρ dell'ordine di $10^{7} \div 10^{18}$ Ω·m
- Isolante ideale ➡ $\rho \to \infty$, $\sigma = 0$

Dipendenza della resistività dalla temperatura

- La resistività e la conducibilità sono in generale funzioni della temperatura
- Per variazioni di temperatura di ampiezza limitata la dipendenza può essere considerata praticamente lineare

$$\rho(\theta) = \rho_0 (1 + \alpha\theta)$$

ρ_0 = resistività valutata alla temperatura di riferimento T_0 [$\Omega \cdot$m]

$\theta = T - T_0$ = variazione di temperatura rispetto a T_0 [°C]

α = coefficiente di temperatura [°C^{-1}]

Resistività di alcuni materiali

Conduttori	ρ [$\Omega \cdot$m]	α [°C^{-1}]
Argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1.73 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Oro	$2.36 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
Alluminio	$2.82 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Stagno	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
Piombo	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Costantana (Cu-Ni)	$4.9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$
Manganina (Cu-Ni-Mn)	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$9.6 \cdot 10^{-7}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$
Grafite	$3 \cdot 10^{-5} \div 6 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$

(Valori a 20 °C)

Resistività di alcuni materiali

Semiconduttori	ρ [Ω·m]	α [°C^{-1}]
Germanio	0.47	$-4.8\cdot10^{-2}$
Silicio	$6.4\cdot10^{2}$	$-7.5\cdot10^{-2}$
Isolanti	**ρ [Ω·m]**	
Carta	$10^{7} \div 10^{10}$	
Bachelite	$10^{9} \div 10^{10}$	
Porcellana	$10^{9} \div 10^{13}$	
Polietilene	10^{13}	
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
Mica	$10^{12} \div 10^{14}$	
Gomma	$10^{12} \div 10^{14}$	
Ebanite	10^{16}	
Quarzo fuso	10^{18}	

(Valori a 20 °C)

Campo elettrico impresso

- Oltre alle forze elettromagnetiche, sulle cariche possono agire anche forze di natura non elettrica (ad es. meccanica o chimica)
- In questo caso la forza per unità di carica viene detta **campo elettrico impresso**, $\mathbf{E}_i$
  - ➡ $\mathbf{E}_i$ è dimensionalmente omogeneo a un campo elettrico (forza per unità di carica), ma a rigore non è un campo elettrico
- In presenza di campi impressi la legge di Ohm assume la forma

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

da cui si ottiene anche

$$\mathbf{E} = \rho(\mathbf{J} + \mathbf{J}_i)$$

avendo posto: $\mathbf{J}_i = -\sigma\mathbf{E}_i$ (**densità di corrente impressa**)

Effetto Joule

- Si considera una densità di carica ρ_c in moto con velocità $\mathbf{v}$ in un mezzo di conducibilità σ
  - ➡ densità di corrente $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$
- In presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}$ e di un campo impresso $\mathbf{E}_i$, la forza per unità di volume che agisce sulla carica è

$$\mathbf{f} = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

- La legge di Ohm indica che se la forza dovuta a $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{E}_i$ è costante, la velocità delle cariche è costante
  - ➡ sulle cariche devono agire delle forze frenanti (analoghe a forze di attrito viscoso)
  - ➡ dissipazione di energia

Effetto Joule

- Il lavoro per unità di volume compiuto nell'intervallo dt dalle forze del campo elettrico e del campo impresso vale

$$\delta L = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \rho_c (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{v} dt = \underbrace{\rho_c \mathbf{v}}_{= \mathbf{J}} \cdot \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)}_{= \mathbf{J} / \sigma} dt = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

- Questo lavoro deve essere uguale all'energia dissipata per unità di volume
- In effetti l'esperienza mostra che in un conduttore di conducibilità σ, in presenza di una densità di corrente $\mathbf{J}$, nell'intervallo di tempo dt viene prodotta per unità di volume la quantità di calore

$$\delta Q = \frac{J^2}{\sigma} dt$$

Legge di Joule