Componenti resistivi

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 20-2-2019)

Bipoli resistivi

- **Bipolo resistivo**: componente a due terminali avente equazione caratteristica del tipo

  $$\mathrm{f}\,[v(t),\, i(t),\, t] = 0$$

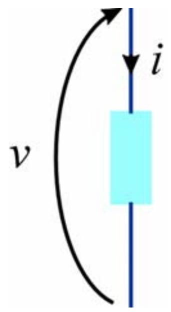
  (f = funzione generica)

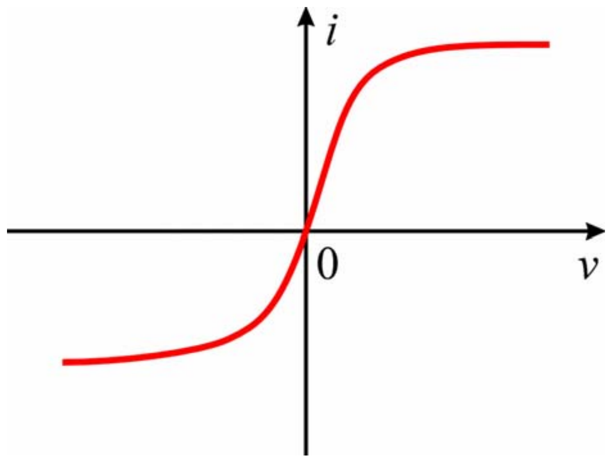
➡ L'equazione caratteristica mette in relazione i valori assunti dalla tensione e dalla corrente allo stesso istante t

- **Bipolo resistivo tempo-variante**:
  t compare esplicitamente come argomento di f
  $\mathrm{f}\,[v(t),\, i(t),\, t] = 0$
- **Bipolo resistivo tempo-invariante**:
  t non compare esplicitamente come argomento di f
  $\mathrm{f}\,[v(t),\, i(t)] = 0$

Curva caratteristica

- In ogni istante t, l'equazione di un bipolo resistivo definisce una curva nel piano v-i detta **curva caratteristica**
- I punti della curva caratteristica rappresentano tutte le possibili coppie di valori che possono assumere la tensione e la corrente del bipolo all'istante t
- Per un bipolo resistivo tempo-invariante la curva caratteristica non varia al variare di t

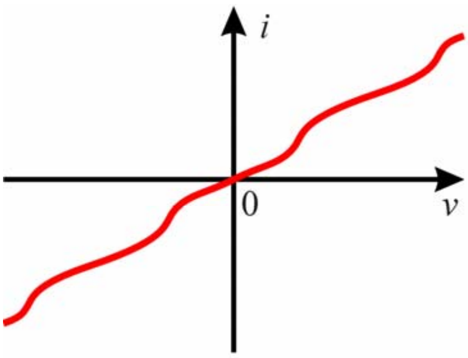




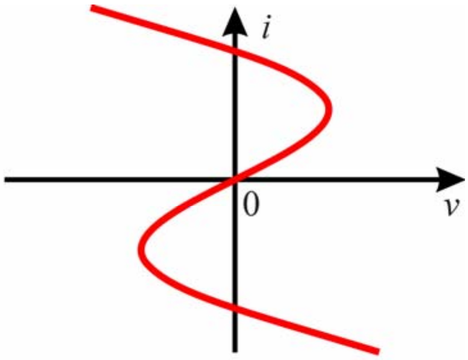
Bipoli resistivi

- **Bipolo comandato in tensione**:
  l'equazione può essere posta nella forma $i(t) = \mathrm{g}\,[v(t)]$
- **Bipolo comandato in corrente**:
  l'equazione può essere posta nella forma $v(\mathrm{t}) = \mathrm{h}\,[i(t)]$
- **Bipolo bilaterale**:
  $\mathrm{f}\,[v(t),\, i(t)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{f}\,[-v(t),\, -i(t)] = 0$
  - ➡ curva caratteristica simmetrica rispetto all'origine
  - ➡ scambiando i terminali il comportamento del componente non cambia
- **Bipolo inerte**:
  la curva caratteristica attraversa gli assi solo in corrispondenza dell'origine

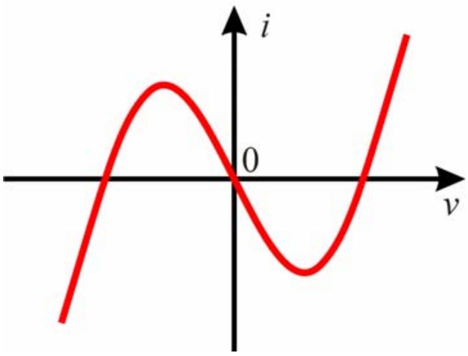
Esempi



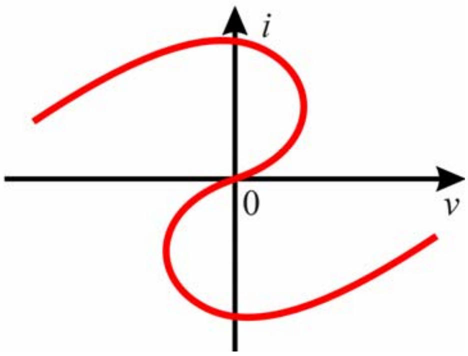
comandato in i e in v



comandato in i



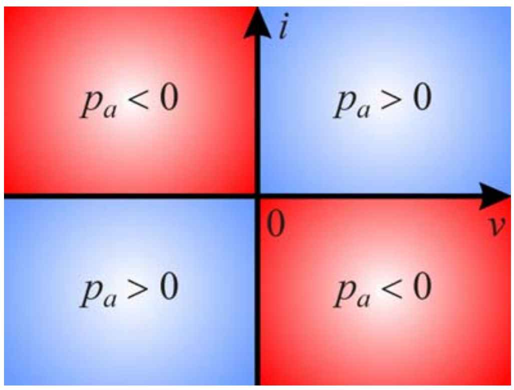
comandato in v



non comandato né in i né in v

Bipoli resistivi passivi

- Se la tensione e la corrente sono orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore
  - $p_a = vi > 0$ per i punti compresi nel 1° e nel 3° quadrante
  - $p_a = vi < 0$ per i punti compresi nel 2° e nel 4° quadrante

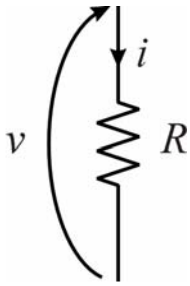


- Per un bipolo resistivo passivo in ogni condizione di funzionamento risulta $p_a \geq 0$
  - La curva caratteristica è interamente contenuta nel 1° e nel 3° quadrante (assi inclusi)
- Per un bipolo resistivo attivo esistono condizioni di funzionamento nelle quali $p_a < 0$
  - La curva caratteristica contiene punti del 2° o del 4° quadrante

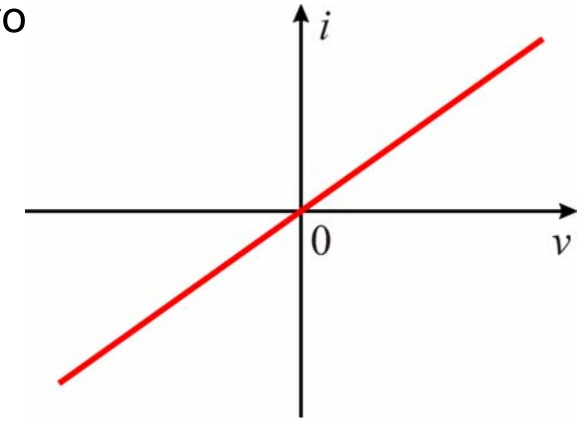
Resistore

- **Equazione:** $v = Ri$ $\quad R =$ *resistenza* (ohm, Ω)
  $i = Gv$ $\quad G =$ *conduttanza* (siemens, S) $\quad G = 1/R$
  (v e i orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore)
- ➡ v e i soddisfano la **legge di Ohm**
- ➡ Il resistore è un bipolo lineare, comandato sia in corrente che in tensione ed è bilaterale
- **Potenza assorbita:** $p_a = vi = Ri^2 = Gv^2$
- ➡ Se $R \geq 0$ ($G \geq 0$) il resistore è passivo

Simbolo

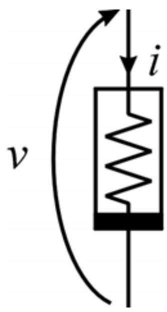


Curva caratteristica



Resistori non lineari

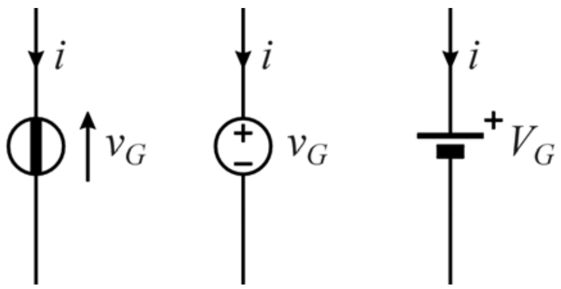
- I bipoli resistivi per i quali la tensione e la corrente non soddisfano la legge di Ohm, sono anche indicati genericamente col nome di **resistori non lineari**
- Per rappresentare un generico bipolo resistivo non lineare si utilizza il simbolo



Generatore indipendente di tensione

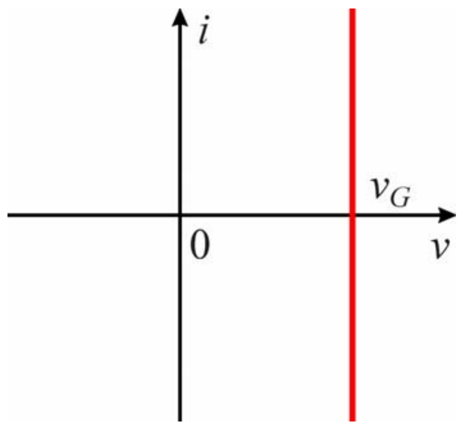
- **Equazione:** $v = v_G(t)$
- Il generatore indipendente di tensione è un bipolo comandato in corrente e non è bilaterale
- **Potenza assorbita:** può variare da $-\infty$ a $+\infty$
- Il generatore indipendente di tensione è un componente attivo

Simboli



(Generatore di tensione costante)

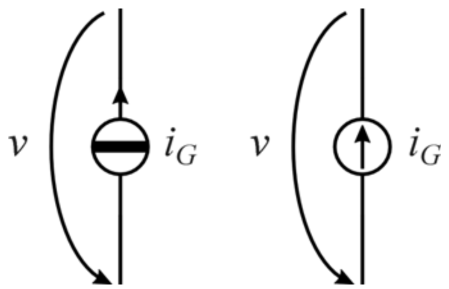
Curva caratteristica



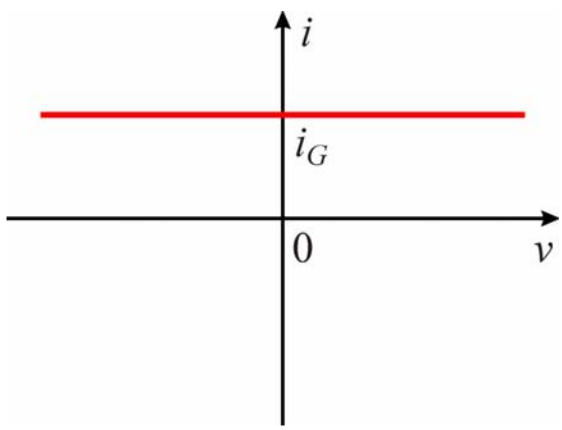
Generatore indipendente di corrente

- **Equazione:** $i = i_G(t)$
- Il generatore indipendente di corrente è un bipolo comandato in tensione e non è bilaterale
- **Potenza assorbita:** può variare da $-\infty$ a $+\infty$
- Il generatore indipendente di corrente è un componente attivo

Simboli



Curva caratteristica



Generatori indipendenti

- I generatori indipendenti sono casi particolari di bipoli resistivi non lineari
- Se le tensioni o le correnti impresse sono funzioni del tempo, i generatori indipendenti sono componenti tempo-varianti
- Le tensioni o le correnti impresse dei generatori indipendenti costituiscono i termini noti delle equazioni del circuito (➡ **ingressi del circuito**)
- Le altre tensioni e correnti del circuito sono funzioni degli ingressi (➡ **uscite** o **risposte del circuito**)

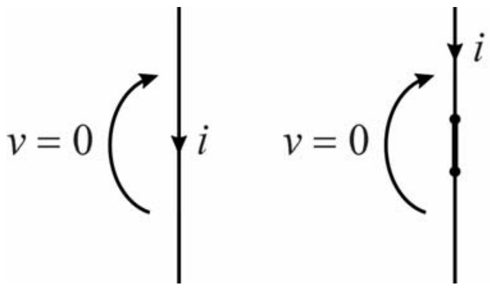
Circuiti lineari e tempo-invarianti

- **Circuito lineare** = circuito formato esclusivamente da componenti lineari e generatori indipendenti
  - in questo caso le equazioni del circuito costituiscono un sistema lineare nel quale le grandezze impresse dei generatori rappresentano i termini noti
- **Circuito non lineare** = circuito che contiene almeno un componente non lineare diverso da un generatore indipendente
- **Circuito tempo-invariante** = circuito formato esclusivamente da componenti tempo-invarianti e generatori indipendenti
- **Circuito tempo-variante** = circuito che contiene almeno un componente tempo-variante diverso da un generatore indipendente

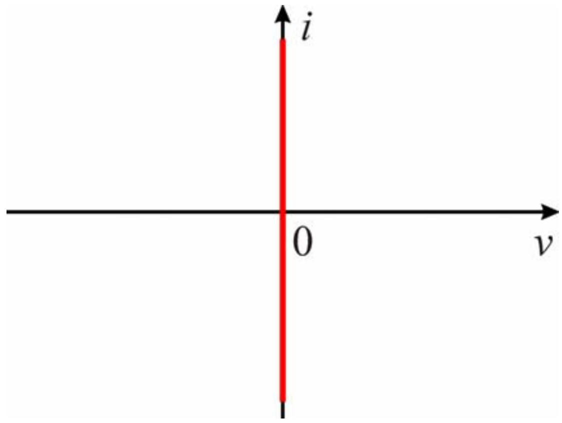
Cortocircuito

- **Equazione:** $v = 0$
- **Potenza assorbita:** $p_a = vi = 0$
- ➡ Il cortocircuito è un componente passivo
- Il cortocircuito può essere considerato un caso particolare
  - di generatore indipendente di tensione con $v_G = 0$
  - di resistore con $\mathrm{R} = 0$

Simboli



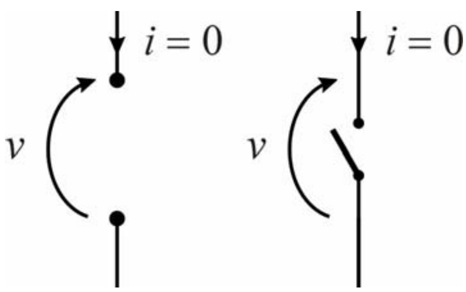
Curva caratteristica



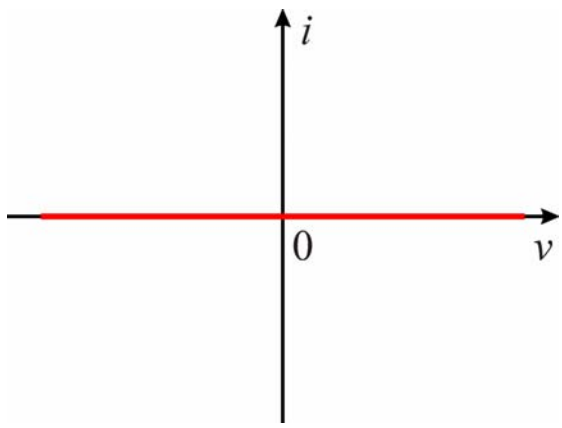
Circuito aperto

- **Equazione:** $i = 0$
- **Potenza assorbita:** $p_a = vi = 0$
- ➡ Il circuito aperto è un componente passivo
- Il circuito aperto può essere considerato un caso particolare
  - di generatore indipendente di corrente con $i_G = 0$
  - di resistore con $\mathrm{G} = 0$ $(\mathrm{R} = \infty)$

Simboli

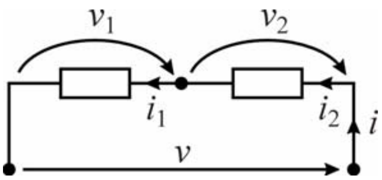


Curva caratteristica



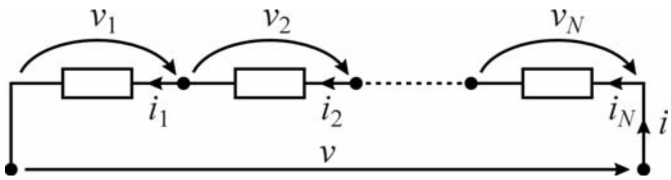
Bipoli in serie

- **Bipoli collegati in serie:** un terminale del primo bipolo e un terminale del secondo bipolo sono uniti in un nodo a cui non sono collegati altri componenti



LKV $v = v_1 + v_2$

LKI $i = i_1 = i_2$



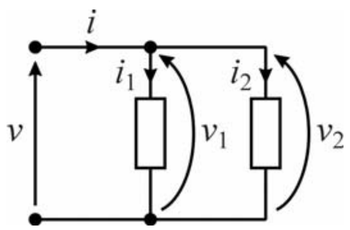
LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$

I bipoli collegati in serie sono percorsi dalla stessa corrente

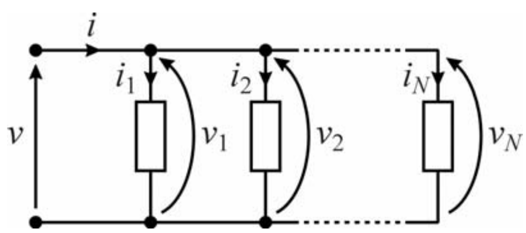
Bipoli in parallelo

- **Bipoli collegati in parallelo:** ciascuno dei terminali di un bipolo è collegato a uno dei terminali dell'altro



LKV $v = v_1 = v_2$

LKI $i = i_1 + i_2$



LKV $v = v_k \quad (k = 1, \ldots, N)$

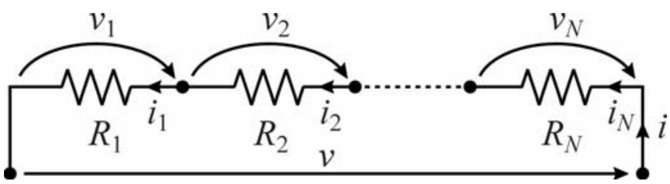
LKI $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

I bipoli collegati in parallelo sono sottoposti alla stessa tensione

Resistori in serie

LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$



Relazioni costitutive $v_k = R_k i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$

$$v = \sum_{k=1}^{N} R_k i_k = \left(\sum_{k=1}^{N} R_k \right) i = R_S i$$

- N resistori in serie equivalgono a un resistore con resistenza

$$R_S = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

R_S = **resistenza equivalente serie**

Resistori in serie

- In termini di conduttanze la relazione precedente diviene

$$G_S = \frac{1}{R_S} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{G_k}}$$

G_S = **conduttanza equivalente serie**

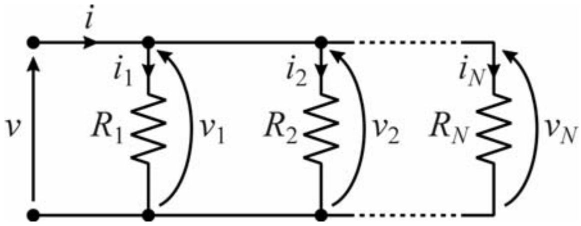
- Nel caso particolare di due resistori in serie, la conduttanza equivalente è

$$G_P = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

Resistori in parallelo

LKI $\quad i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

LKV $\quad v = v_k \quad (k = 1, \dots, N)$



Relazioni costitutive $\quad i_k = G_k v_k \quad (k = 1, \dots, N)$

$$\Rightarrow \quad i = \sum_{k=1}^{N} G_k v_k = \left(\sum_{k=1}^{N} G_k \right) v = G_P v$$

- N resistori in parallelo equivalgono a un resistore di conduttanza

$$G_P = \sum_{k=1}^{N} G_k$$

G_P = **conduttanza equivalente parallelo**

Resistori in parallelo

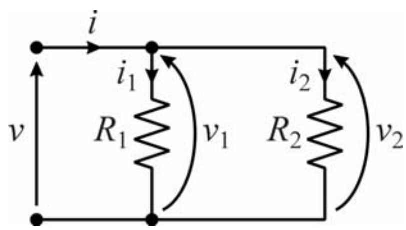
- In termini di resistenze si ha

$$R_P = \frac{1}{G_P} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$$

R_P = **resistenza equivalente parallelo**

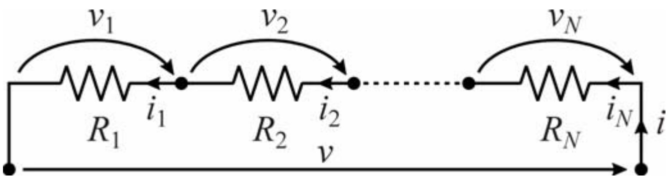
- Nel caso particolare di due resistori in parallelo, la resistenza equivalente è

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Partitore di tensione

- **Problema:** dati N resistori in serie, nota la tensione totale v e le resistenze R_k determinare le tensioni dei resistori



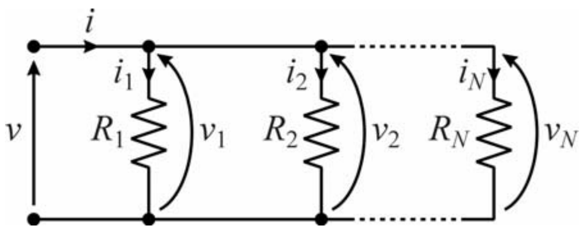
$$i = \frac{v}{R_S} = \frac{v}{\sum_{k=1}^{N} R_k} \quad \Rightarrow \quad v_j = R_j i = \frac{R_j}{\sum_{k=1}^{N} R_k} v \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

- La tensione v si suddivide in parti direttamente proporzionali alle resistenze

$$\frac{R_j}{\sum_{k=1}^{N} R_k}$$ **Fattore di partizione**

Partitore di corrente

- **Problema:** dati N resistori in parallelo, nota la corrente totale i e le resistenze R_k determinare le correnti dei resistori



$$v = \frac{i}{G_P} = \frac{i}{\sum_{k=1}^{N} G_k} \quad \Rightarrow \quad i_j = G_j v = \frac{G_j}{\sum_{k=1}^{N} G_k} i$$

$$(j = 1, \ldots, N)$$

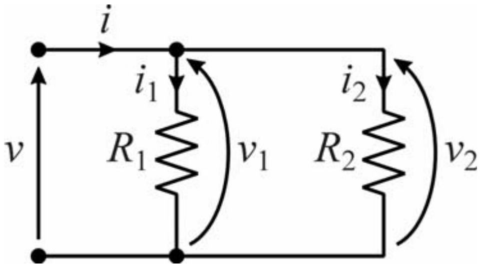
- La corrente i si suddivide in parti direttamente proporzionali alle conduttanze (inversamente proporzionali alle resistenze)

$$\frac{G_j}{\sum_{k=1}^{N} G_k}$$ **Fattore di partizione**

Partitore di corrente

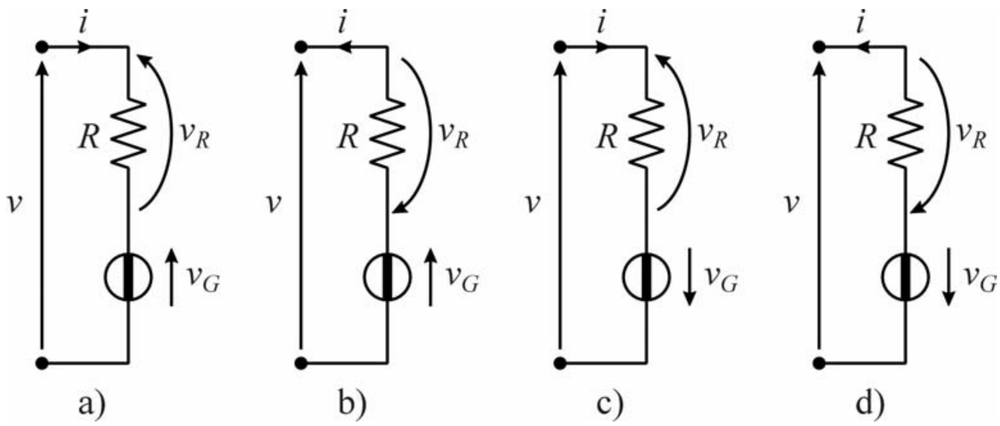
- Caso particolare di due resistori in parallelo

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$



$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Generatore di tensione e resistore in serie



Equazioni caratteristiche

a) $v = v_G + v_R = v_G + Ri$

b) $v = v_G - v_R = v_G - Ri$

c) $v = -v_G + v_R = -v_G + Ri$

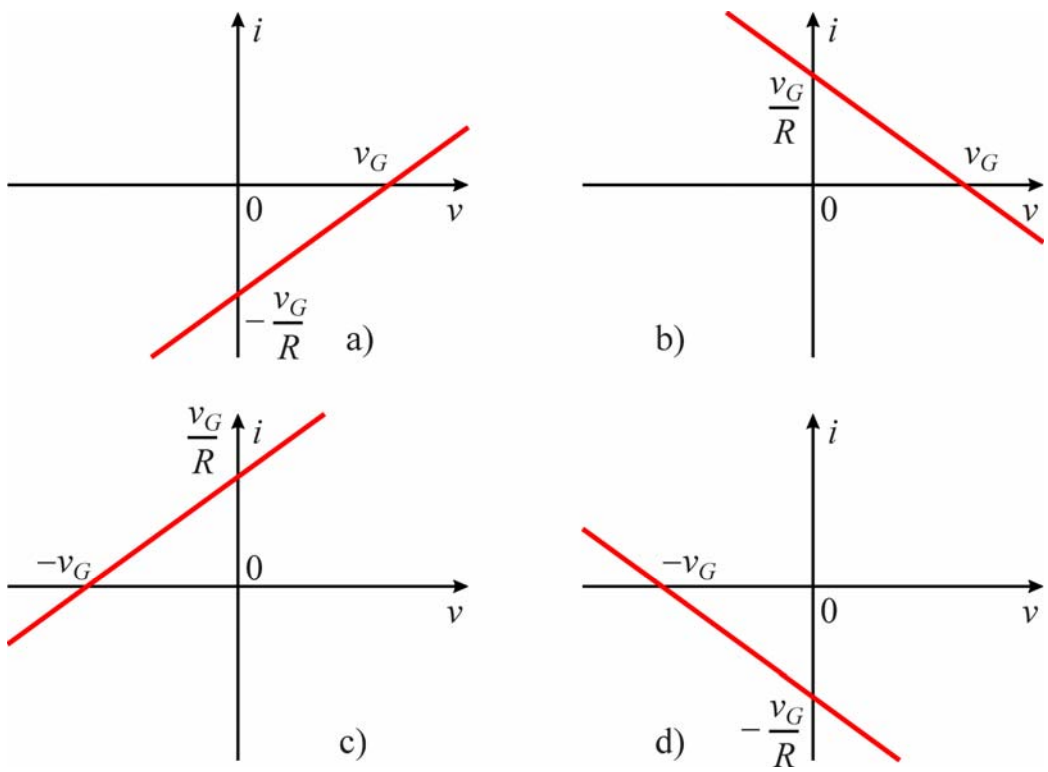
d) $v = -v_G - v_R = -v_G - Ri$

Generatore di tensione e resistore in serie

- Le curve caratteristiche sono delle rette non passanti per l'origine (se $v_G \neq 0$)
- Il valore di v per $i = 0$, corrispondente all'intersezione della retta con l'asse v, è detto **tensione a vuoto** e coincide, eventualmente a meno del segno, con la tensione del generatore
- Il valore di i per $v = 0$, corrispondente all'intersezione della retta con l'asse i, è detto **corrente di cortocircuito** e coincide, eventualmente a meno del segno, con il rapporto tra la tensione del generatore e la resistenza R

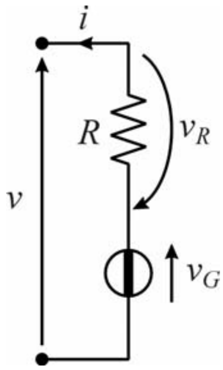
Generatore di tensione e resistore in serie

Curve caratteristiche

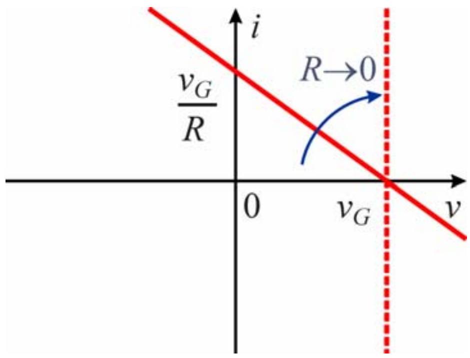


Modello di un generatore reale di tensione

- La tensione di un generatore ideale di tensione non dipende dalla corrente
- Per un generatore reale la tensione è praticamente costante solo se il valore assoluto della corrente è piccolo
- Per rappresentare un generatore reale si può utilizzare un circuito equivalente formato da un generatore ideale con un resistore in serie
- La caratteristica tende a quella di un generatore ideale al tendere a zero della resistenza



$$v = v_G - Ri$$

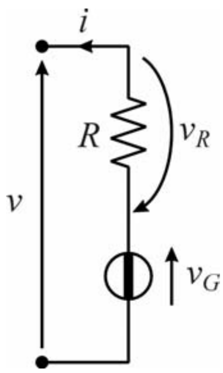


Potenza disponibile

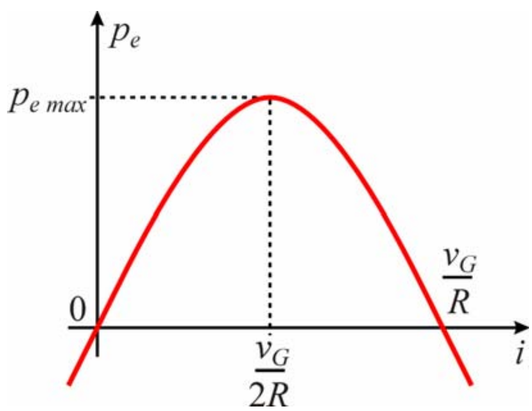
- Potenza erogata dal bipolo $p_e = vi = v_G i - Ri^2$
- Al variare di i la potenza è massima se

$$\frac{dp_e}{di} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_G - 2Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_G}{2R}$$

- In queste condizioni la tensione è $v = v_G - R\frac{v_G}{2R} = \frac{v_G}{2}$
- La massima potenza erogabile (**potenza disponibile**) è $p_{e\max} = \frac{v_G^2}{4R}$



$$v = v_G - Ri$$



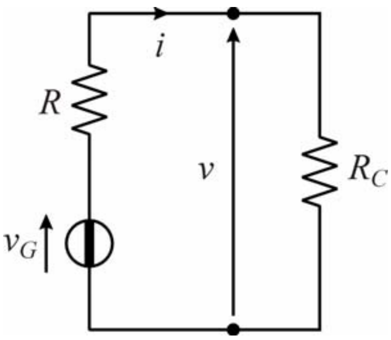
Massimo trasferimento di potenza

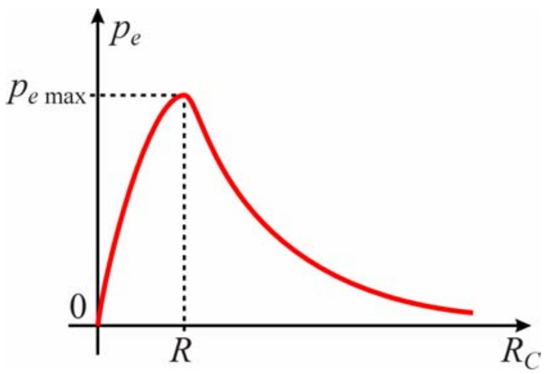
- Potenza erogata da un generatore reale collegato a un resistore di carico R_C

$$p_e = vi = v_G \frac{R_C}{R+R_C} \cdot \frac{v_G}{R+R_C} = v_G^2 \frac{R_C}{(R+R_C)^2}$$

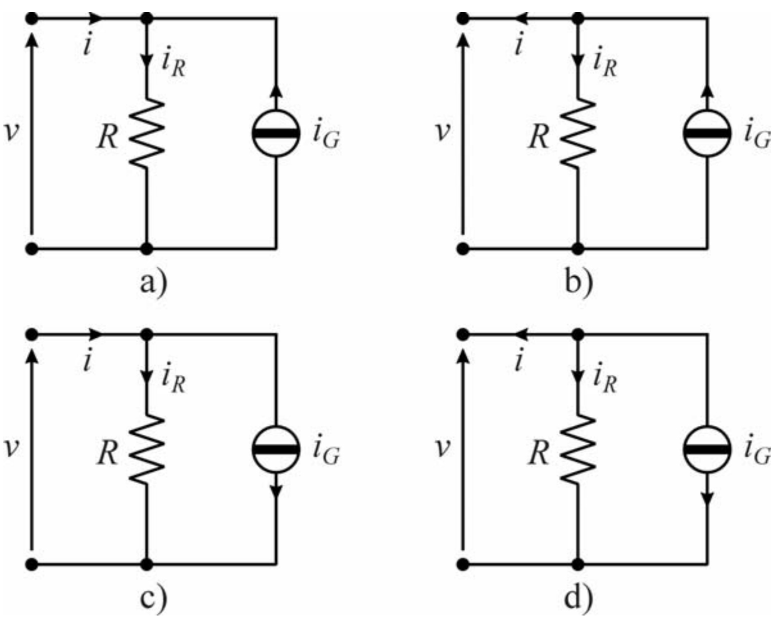
- La potenza è massima per $R_C = R$

$$p_e = p_{e\max} = \frac{v_G^2}{4R} \quad \Leftrightarrow \quad R_C = R$$





Generatore di corrente e resistore in parallelo



Equazioni caratteristiche

a) $i = -i_G + i_R = -i_G + Gv$

b) $i = i_G - i_R = i_G - Gv$

c) $i = i_G + i_R = i_G + Gv$

d) $i = -i_G - i_R = -i_G - Gv$

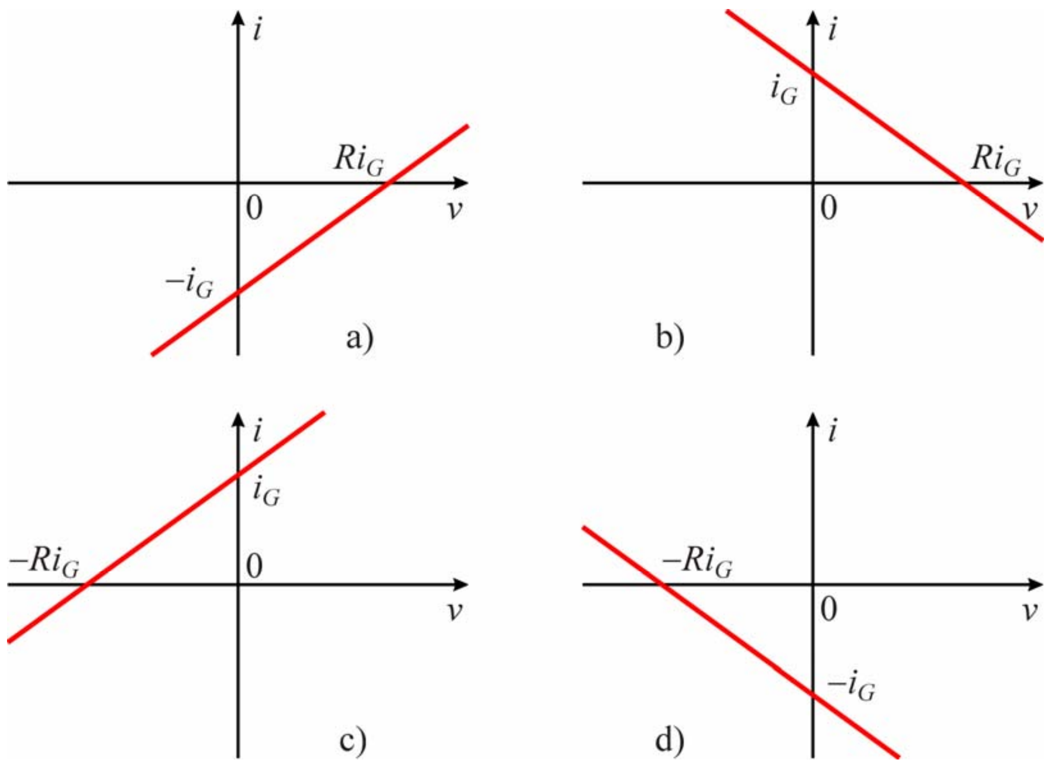
$$\left(G = \frac{1}{R} \right)$$

Generatore di corrente e resistore in parallelo

- Le curve caratteristiche sono delle rette non passanti per l'origine (se $i_G \neq 0$)
- La corrente di cortocircuito coincide, eventualmente a meno del segno, con la corrente del generatore
- La tensione a vuoto coincide, eventualmente a meno del segno, con il prodotto della corrente del generatore per la resistenza R

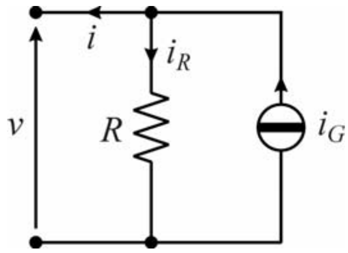
Generatore di corrente e resistore in parallelo

Curve caratteristiche

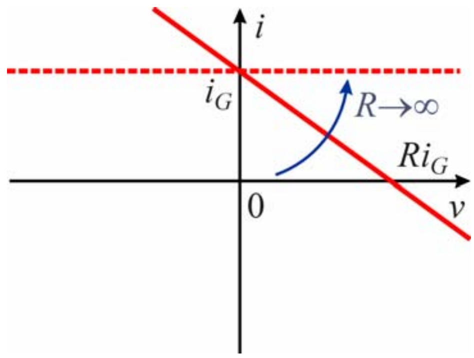


Modello di un generatore reale di corrente

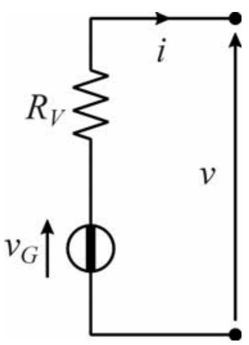
- La corrente di un generatore ideale di corrente non dipende dalla tensione
- Per un generatore reale la corrente è praticamente costante solo se il valore assoluto della tensione è piccolo
- Per rappresentare un generatore reale si può utilizzare un circuito equivalente formato da un generatore ideale con un resistore in parallelo
- La caratteristica tende a quella di un generatore ideale al tendere a infinito della resistenza

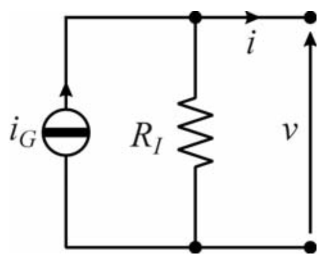


$$i = i_G - v/R$$



Trasformazione dei generatori





$$v = v_G - R_V i$$

$$i = i_G - \frac{v}{R_I} \Rightarrow v = R_I i_G - R_I i$$

- I due bipoli sono equivalenti se sono verificate le condizioni

$$R_V = R_I = R$$

$$v_G = R i_G$$

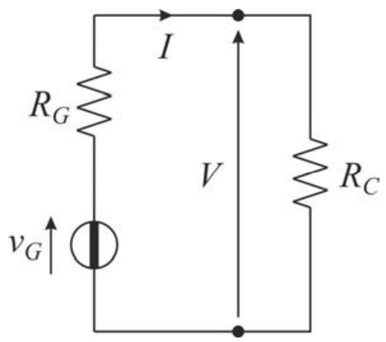
(Questa relazione vale se i versi di v_G e i_G sono orientati come indicato nella figura)

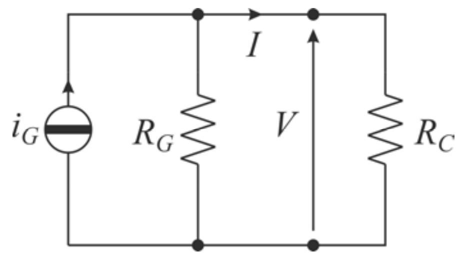
Nota

- L'equivalenza vale solo per il comportamento ai terminali esterni

➡ A parità di v e i
  - le potenze erogate dai due bipoli sono uguali
  - le potenze erogate dai generatori v_G e i_G e le potenze assorbite dai resistori in generale sono diverse

Esempio





$$V = v_G \frac{R_C}{R_G + R_C}$$

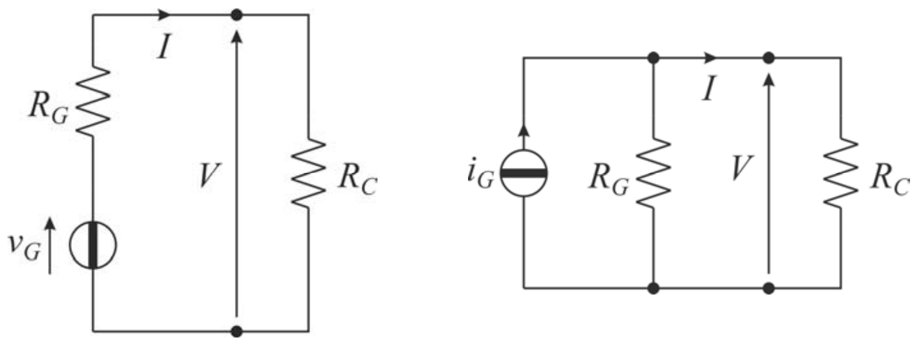
$$V = i_G \frac{R_G R_C}{R_G + R_C}$$

$$I = \frac{v_G}{R_G + R_C}$$

$$I = i_G \frac{R_G}{R_G + R_C}$$

- Se $v_G = R_G i_G$ nei due circuiti V e I sono uguali

Esempio

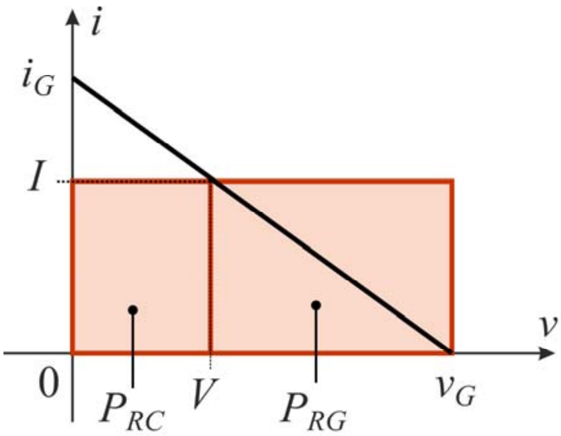


Potenza erogata dal generatore	$P_G = v_G I$	$P_G = V i_G$
Potenza assorbita da R_G	$P_{RG} = (v_G - V) I$	$P_{RG} = V(i_G - I)$
Potenza assorbita da R_C	$P_{RC} = VI = P_G - P_{RG}$	$P_{RC} = VI = P_G - P_{RG}$

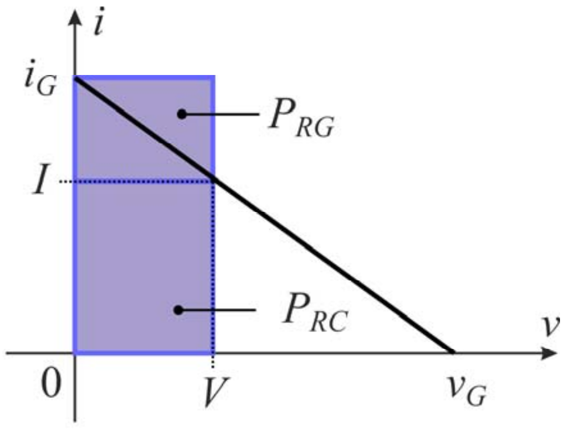
- In generale P_G e P_{RG} nei due circuiti sono diverse

Esempio

Generatore di tensione



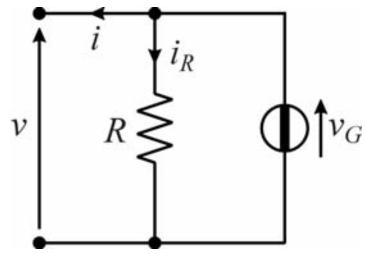
Generatore di corrente



potenza erogata dal generatore di tensione

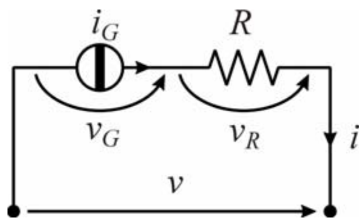
potenza erogata dal generatore di corrente

Altri collegamenti tra generatori e resistori



$$v = v_G$$

Il bipolo equivale al solo generatore di tensione v_G



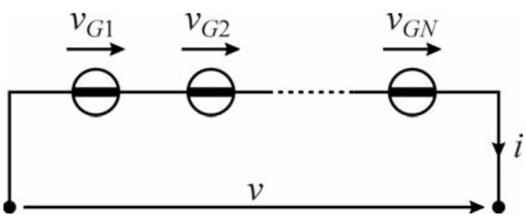
$$i = i_G$$

Il bipolo equivale al solo generatore di corrente i_G

Collegamenti tra generatori

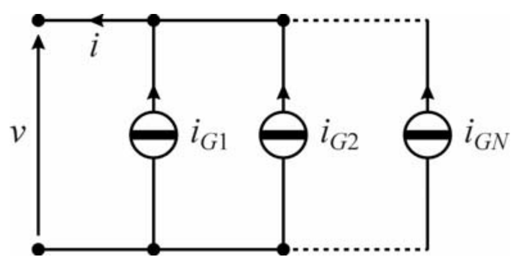
- N generatori indipendenti di tensione in serie equivalgono a un unico generatore di tensione

$$v_{GS} = v = \sum_{k=1}^{N} v_{Gk}$$

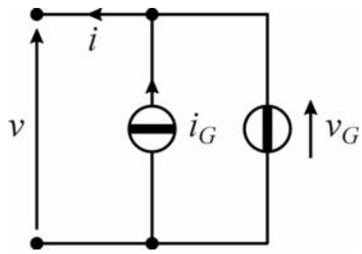


- N generatori indipendenti di corrente in parallelo equivalgono ad un unico generatore di corrente

$$i_{GP} = i = \sum_{k=1}^{N} i_{Gk}$$

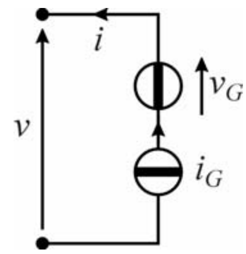


Collegamenti tra generatori



$$v = v_G$$

Il bipolo equivale al solo generatore di tensione v_G

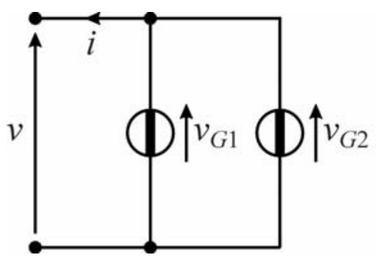


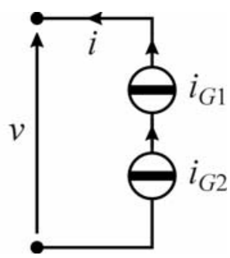
$$i = i_G$$

Il bipolo equivale al solo generatore di corrente i_G

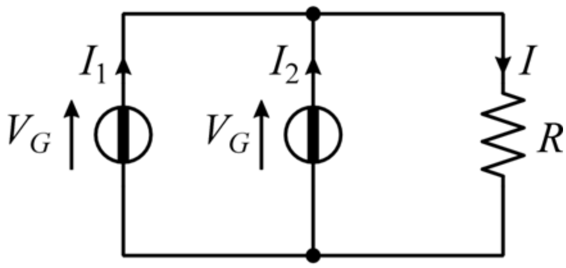
Collegamenti non ammessi

- **Generatori ideali di tensione in parallelo**
  - se le tensioni sono diverse il collegamento viola la LKV
  - se le tensioni sono uguali le correnti dei generatori sono indeterminate
- **Generatori ideali di corrente in serie**
  - se le correnti sono diverse il collegamento viola la LKI
  - se le correnti sono uguali le tensioni dei generatori sono indeterminate





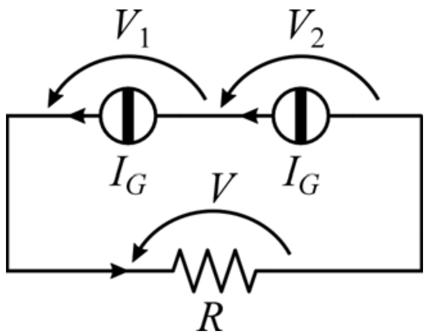
Esempi di circuiti indeterminati



- Tutte le coppie di valori di I_1 e I_2 tali che

$$I_1 + I_2 = I = \frac{V_G}{R}$$

sono compatibili con il circuito



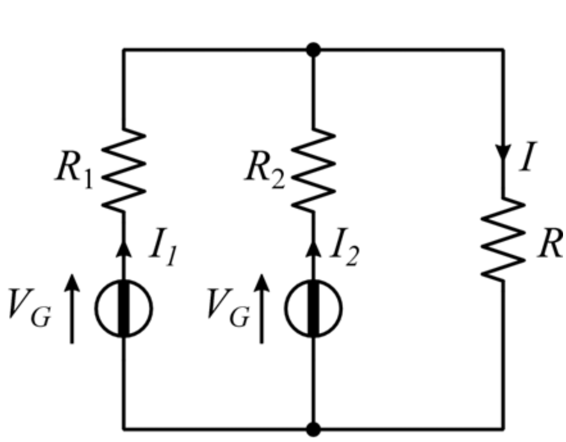
- Tutte le coppie di valori di V_1 e V_2 tali che

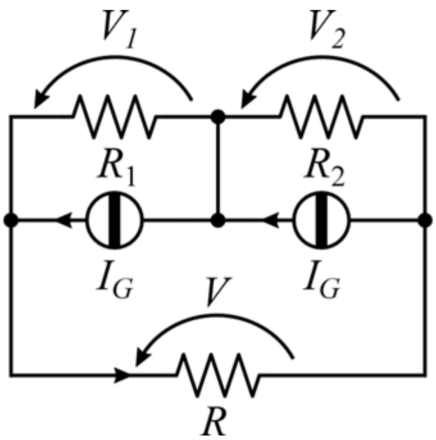
$$V_1 + V_2 = V = RI_G$$

sono compatibili con il circuito

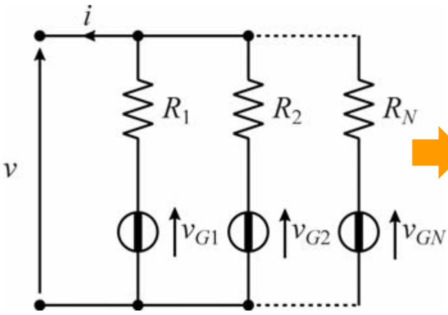
Esempi di circuiti indeterminati

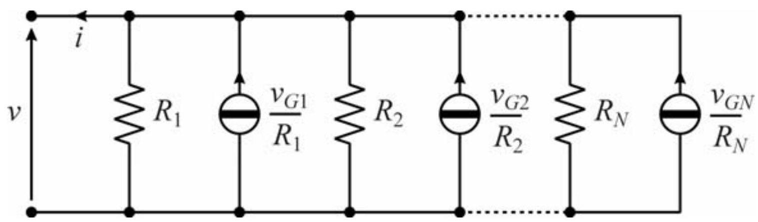
- L'indeterminazione può essere eliminata se si tiene conto del fatto che
  - ogni generatore reale di tensione ha in serie una resistenza non nulla
  - ogni generatore reale di corrente ha in parallelo una resistenza di valore finito

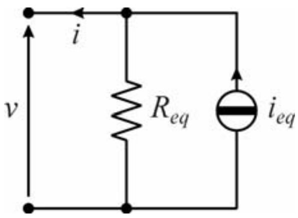




Prima formula di Millman

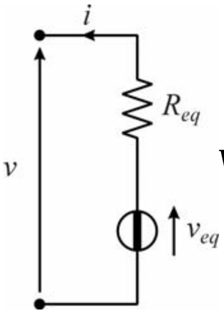






$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} G_k}$$

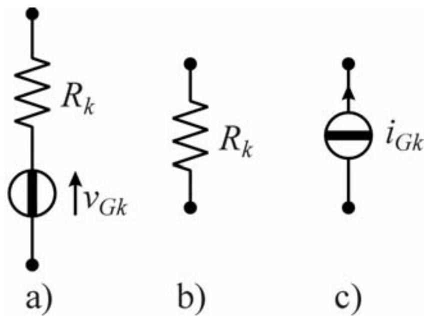
$$i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k v_{Gk}$$



$$v_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^{N} G_k v_{Gk}}{\sum_{k=1}^{N} G_k}$$

Prima formula di Millman

- Più in generale, per un bipolo formato da bipoli dei tipi a, b e c collegati in parallelo, procedendo come nel caso precedente si ottiene



$$v_{eq} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}} G_k v_{Gk} + \sum_{k \in \mathcal{C}} i_{Gk}}{\sum_{k \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} G_k} \qquad R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} G_k}$$

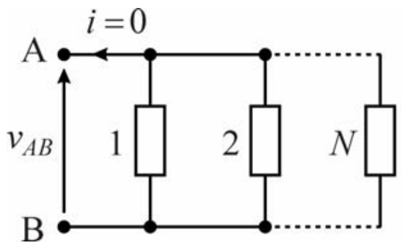
$\mathcal{A}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo a

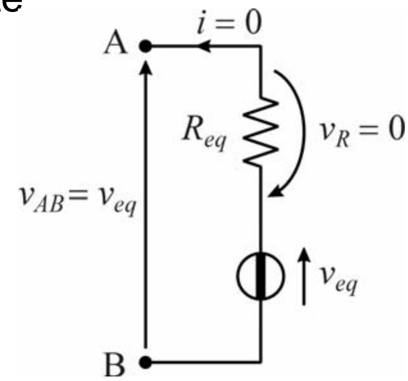
$\mathcal{B}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo b

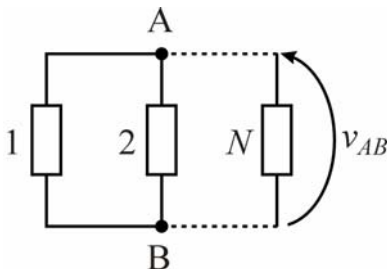
$\mathcal{C}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo c

Prima formula di Millman

- Se i terminali A e B sono lasciati aperti ($i = 0$), la tensione v_{AB} coincide con la tensione del generatore equivalente

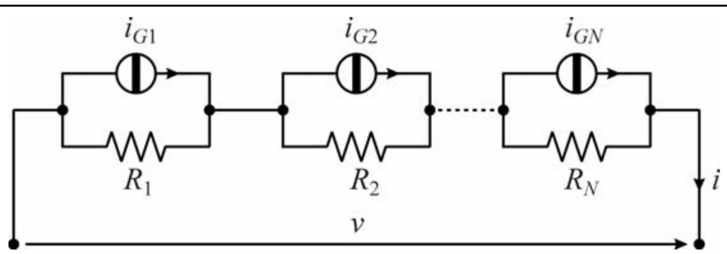


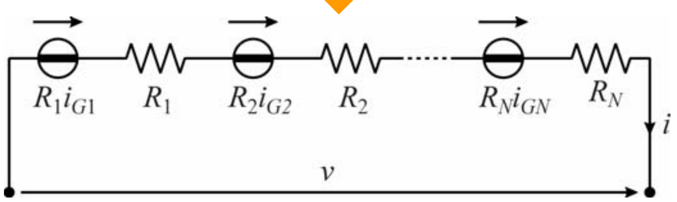


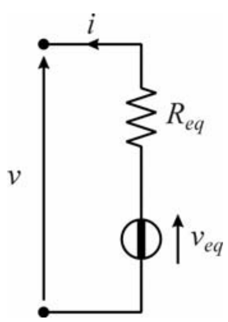


La tensione tra i due nodi di un circuito formato da bipoli dei tipi a b e c collegati in parallelo può essere determinata per mezzo della prima formula di Millman

Seconda formula di Millman

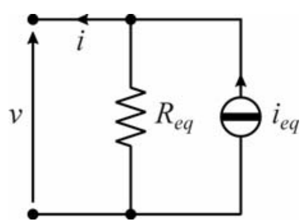






$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

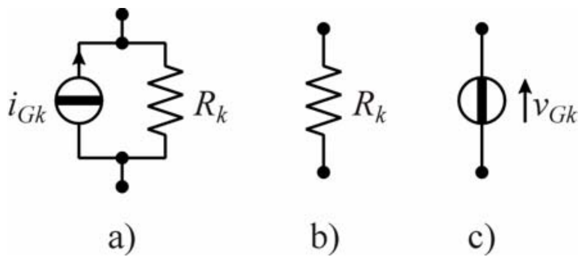
$$v_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k i_{Gk}$$



$$i_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^{N} R_k i_{Gk}}{\sum_{k=1}^{N} R_k}$$

Seconda formula di Millman

- Più in generale, per un bipolo formato da bipoli dei tipi a, b e c collegati in serie, procedendo come nel caso precedente si ottiene

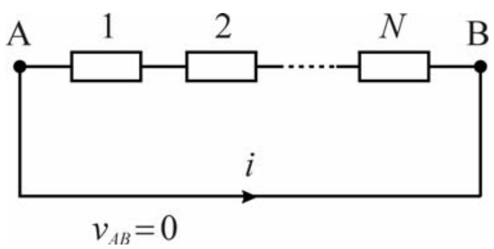


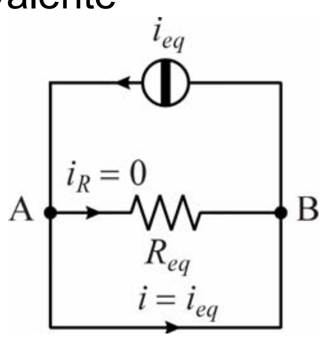
$$i_{eq} = \frac{\sum\limits_{k\in\mathcal{A}} R_k i_{Gk} + \sum\limits_{k\in\mathcal{C}} v_{Gk}}{\sum\limits_{k\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} R_k} \qquad R_{eq} = \sum_{k\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} R_k$$

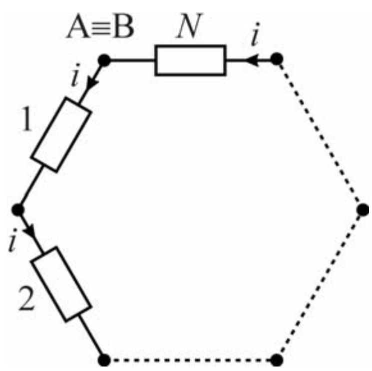
$\mathcal{A}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo a
$\mathcal{B}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo b
$\mathcal{C}$ = insieme dei valori di k per cui il bipolo k è di tipo c

Seconda formula di Millman

- Se i terminali A e B sono collegati in cortocircuito ($v_{AB} = 0$), la corrente i coincide con la corrente del generatore equivalente

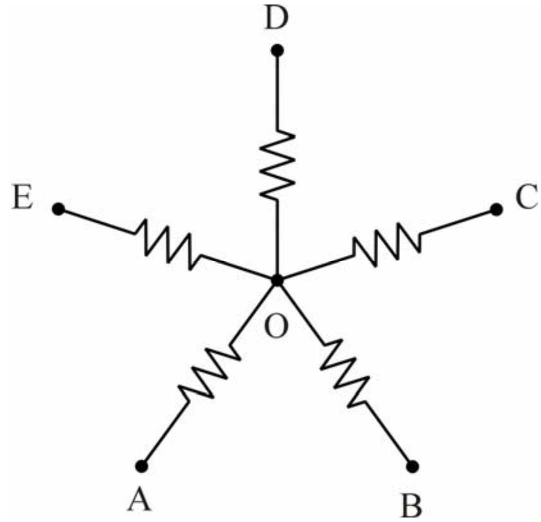


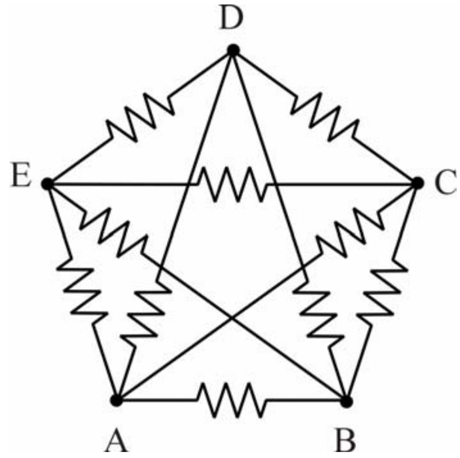




- In un circuito costituito da una sola maglia formata da bipoli dei tipi a b e c la corrente comune a tutti i bipoli può essere determinata per mezzo della seconda formula di Millman

Stelle e poligoni di resistori





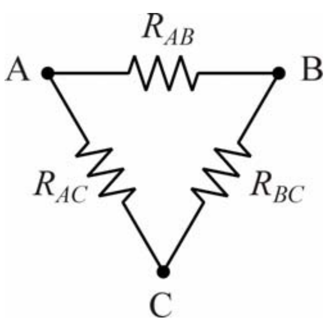
Stella ad N vertici

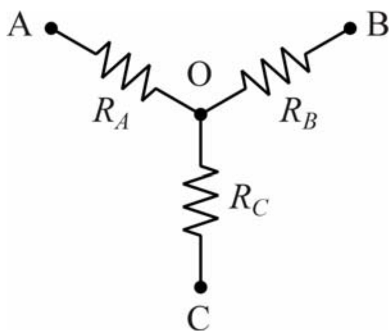
N resistori collegati ad un nodo comune a cui non sono collegati altri componenti

Poligono ad N vertici

$N(N-1)/2$ resistori che collegano tutte le coppie di vertici

Trasformazione triangolo-stella





$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}$$

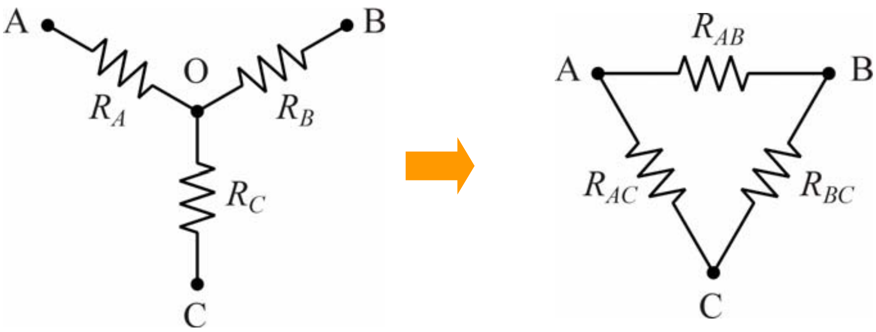
Caso particolare:

$$R_{AB} = R_{AC} = R_{BC} = R$$

$$\Downarrow$$

$$R_A = R_B = R_C = \frac{R}{3}$$

Trasformazione stella-triangolo



$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

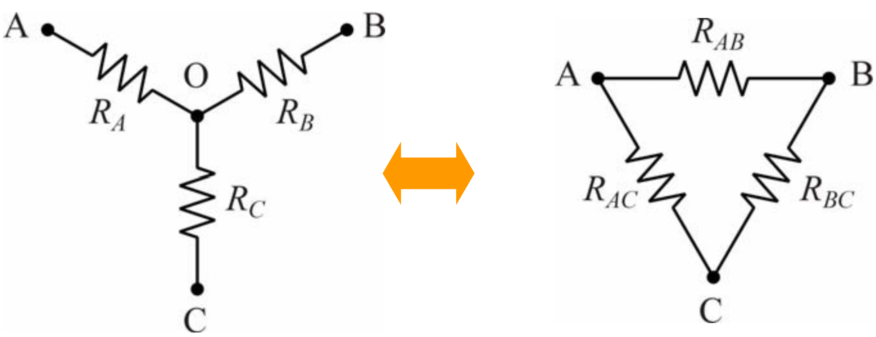
Caso particolare:

$$R_A = R_B = R_C = R$$

$$\Downarrow$$

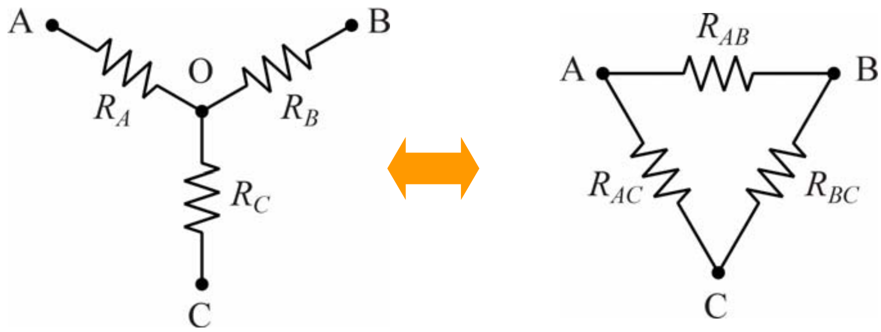
$$R_{AB} = R_{AC} = R_{BC} = 3R$$

Equivalenza stella-triangolo - dimostrazione



- Per ricavare le condizioni di equivalenza si impone che le resistenze equivalenti valutate tra ciascuna coppia di terminali omologhi della stella e del triangolo siano uguali
  - Per la stella ciascuna resistenza equivalente corrisponde alla serie delle due resistenze che collegano la coppia di terminali
  - Per il triangolo ciascuna resistenza equivalente corrisponde al parallelo della resistenza che collega la coppia di terminali con la serie delle altre due resistenze

Equivalenza stella-triangolo - dimostrazione



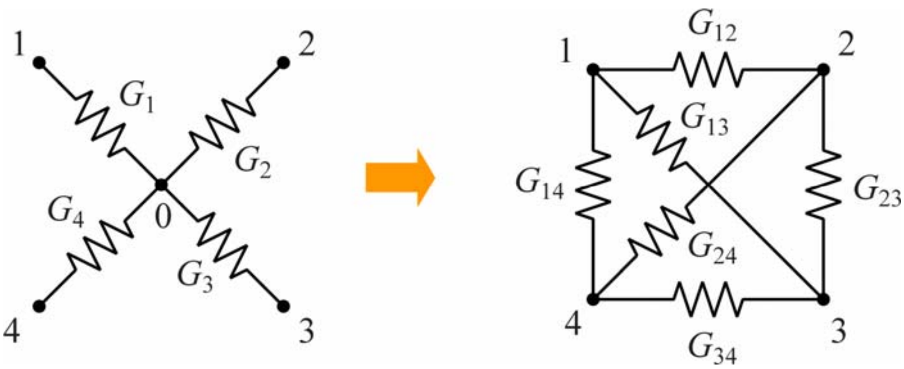
- Imponendo che le tre resistenze equivalenti siano uguali si ottiene

$$R_A + R_B = \frac{R_{AB}(R_{AC}+R_{BC})}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_\Sigma} + \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_\Sigma}$$

$$R_A + R_C = \frac{R_{AC}(R_{AB}+R_{BC})}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_\Sigma} + \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_\Sigma}$$

$$R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB}+R_{AC})}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_\Sigma} + \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_\Sigma} \qquad (R_\Sigma = R_{AB}+R_{AC}+R_{BC})$$

Trasformazione stella-poligono



- Si può dimostrare che le conduttanze dei resistori di un poligono equivalente ad una stella di N resistori sono data dalla relazione

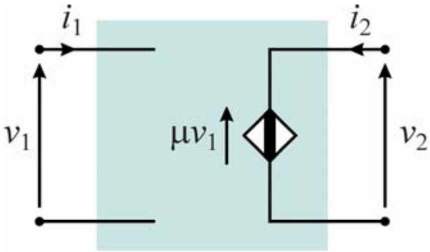
$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\sum_{k=1}^{N} G_k}$$

- Se il numero di vertici è maggiore di 3, il numero di resistori del poligono è maggiore del numero di resistori della stella
- ➡ E' sempre possibile trasformare una stella in un poligono, ma non è possibile trasformare un generico poligono in una stella

Generatori dipendenti

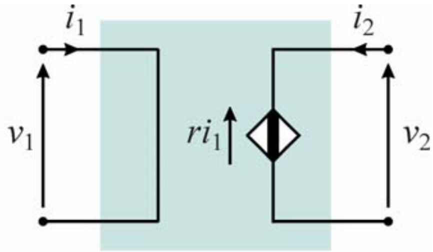
Generatore di tensione controllato in tensione

$$i_1 = 0$$
$$v_2 = \mu v_1$$



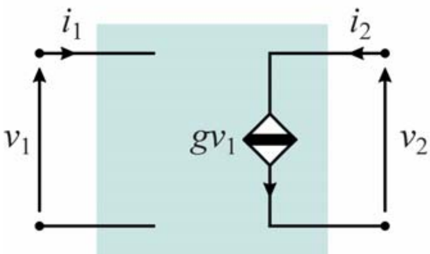
Generatore di tensione controllato in corrente

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = r i_1$$



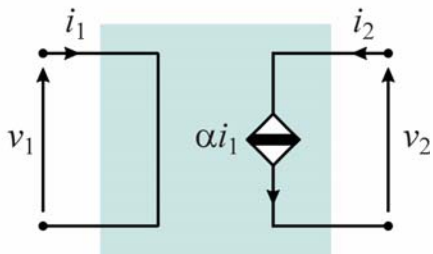
Generatore di corrente controllato in tensione

$$i_1 = 0$$
$$i_2 = g v_1$$



Generatore di corrente controllato in corrente

$$v_1 = 0$$
$$i_2 = \alpha i_1$$



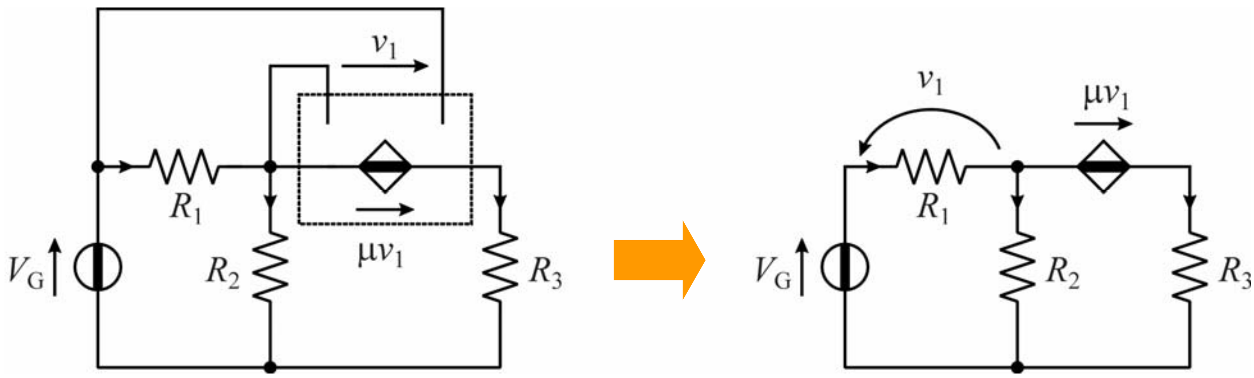
Generatori dipendenti

- I generatori dipendenti sono componenti a due porte (doppi bipoli) ideali utilizzati prevalentemente come elementi di circuiti equivalenti di componenti multipolari
- Le costanti μ r g α sono dette **parametri di trasferimento**
  - μ e α sono adimensionali
  - r ha le dimensioni di una resistenza (**resistenza di trasferimento** o **transresistenza**)
  - g ha le dimensioni di una conduttanza (**conduttanza di trasferimento** o **transconduttanza**)
- **Potenza assorbita**:

$$p_a = \underbrace{v_1 i_1}_{=0} + v_2 i_2 = v_2 i_2$$

  - una delle grandezze relative alla porta 2 può assumere valori arbitrari (dipendenti solo dal circuito in cui il componente è inserito)
  - ➡ la potenza assorbita può variare da $-\infty$ a $+\infty$
  - ➡ i generatori dipendenti sono componenti attivi

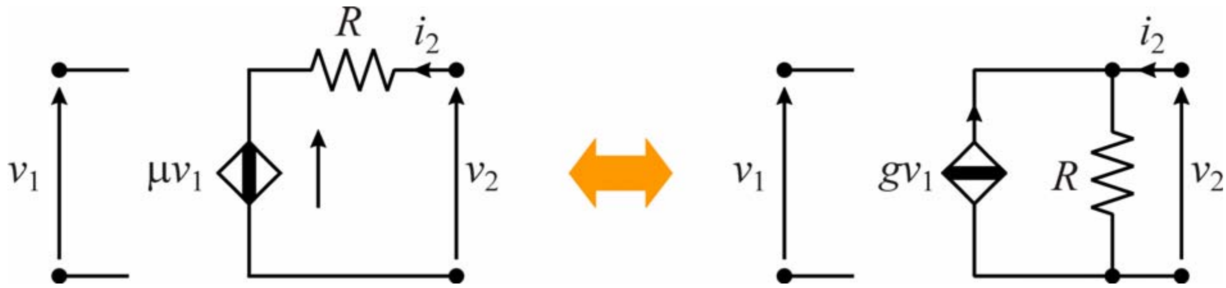
Esempio



Normalmente la porta 1 di un generatore dipendente non viene rappresentata esplicitamente negli schemi

Trasformazione dei generatori dipendenti

- Relazioni analoghe alle formule di trasformazione dei generatori indipendenti valgono anche nel caso dei generatori dipendenti



$$i_1 = 0$$
$$v_2 = \mu v_1 + R i_2$$

$$i_1 = 0$$
$$v_2 = gRv_1 + Ri_2$$

➡ I due doppi bipoli sono equivalenti se $\mu = gR$

Trasformazione dei generatori dipendenti

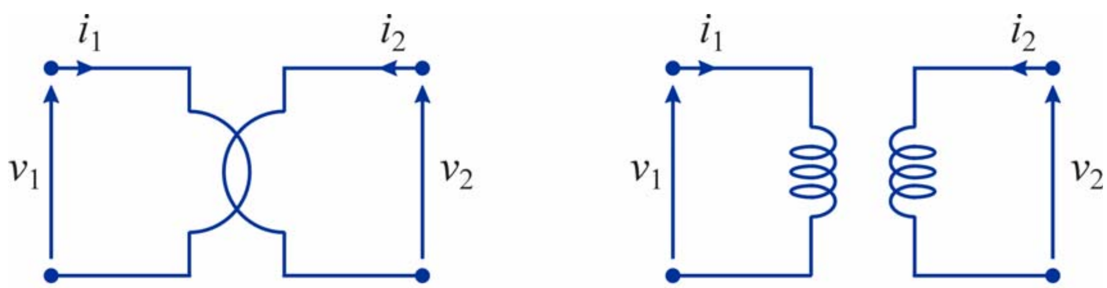
$$v_1 = 0$$
$$v_2 = ri_1 + Ri_2$$

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = \alpha Ri_1 + Ri_2$$

➡ I due doppi bipoli sono equivalenti se $r = \alpha R$

Trasformatore ideale

Simboli



Equazioni

$$v_1 = Kv_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{K} i_2$$

K = **rapporto di trasformazione** o **rapporto spire** (adimensionale)

Le porte 1 e 2 sono anche dette **primario** e **secondario** del trasformatore

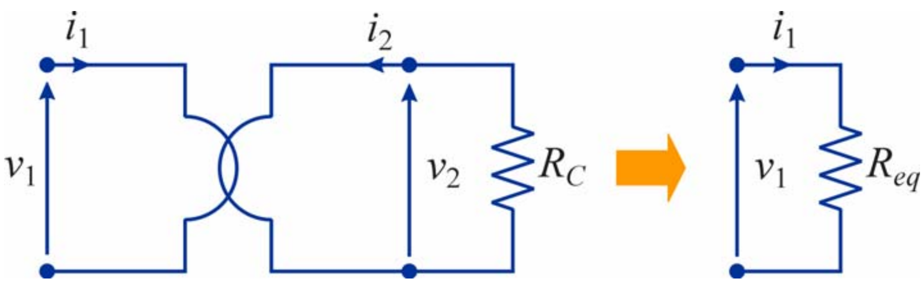
Trasformatore ideale

- La **potenza assorbita** è

$$p_a = v_1 i_1 + v_2 i_2 = K v_2 \left[-\frac{1}{K} i_2 \right] + v_2 i_2 = 0$$

  - Il trasformatore ideale è un componente passivo
  - La potenza assorbita ad una delle due porte è sempre uguale a quella ceduta all’altra porta
  - Il trasformatore ideale consente di trasferire energia da una porta all’altra cambiando i livelli di tensione e corrente

Trasformazione della resistenza di carico



$$v_1 = K v_2$$
$$i_2 = -K i_1$$
$$v_2 = -R_C i_2$$

$$v_1 = -K R_C i_2 = K^2 R_C i_1$$

$$R_{eq} = \frac{v_1}{i_1} = K^2 R_C$$

- Un trasformatore con il secondario chiuso su una resistenza di carico R_C equivale ad un resistore con resistenza data da R_C per il quadrato del rapporto spire