Componenti dinamici

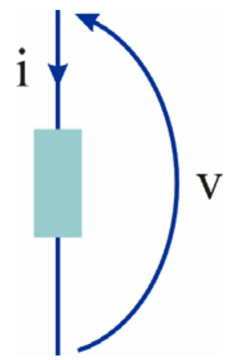
www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 31-3-2019)

Carica e flusso

- Si considera un bipolo e si indicano con $v(t)$ e $i(t)$ la sua tensione e la sua corrente
- Definizione: **carica associata alla corrente $i(t)$**

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

  - Unità di misura: coulomb (C)



- Definizione: **flusso associato alla tensione $v(t)$**

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

  - Unità di misura: weber (Wb)

Carica e flusso - Note

- L'estremo inferiore degli integrali è posto a $-\infty$ per indicare che si deve tenere conto dell'andamento della corrente o della tensione per tutti gli istanti che precedono t
- In pratica questo significa che l'integrazione deve iniziare dal primo istante in cui la corrente o la tensione assume valore diverso da zero
- Formalmente è possibile associare una carica e un flusso alla corrente e alla tensione di un generico bipolo
- Solo in alcuni casi particolari a queste grandezze può essere attribuita una semplice interpretazione fisica (es. carica su un conduttore o flusso concatenato con un avvolgimento)

Bipoli resistivi, capacitivi e induttivi

- **Bipolo resistivo**
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $v(t)$ e $i(t)$
    $$\mathrm{f_R}\left[v(t), i(t), t\right] = 0$$
- **Bipolo capacitivo** (**condensatore**)
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $v(t)$ e $q(t)$
    $$\mathrm{f_C}\left[v(t), q(t), t\right] = 0$$
- **Bipolo induttivo** (**induttore**)
  - l'equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei di $i(t)$ e $\varphi(t)$
    $$\mathrm{f_L}\left[i(t), \varphi(t), t\right] = 0$$

Condensatori

- **Condensatore**: bipolo la cui equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei della tensione e della carica

$$\mathrm{f}_C[v(t), q(t), t] = 0$$

- **Condensatore tempo invariante**

$$\mathrm{f}_C[v(t), q(t)] = 0$$

  - **Comandato in tensione**

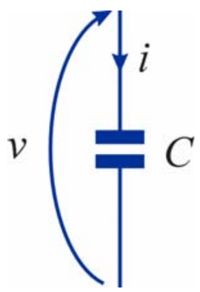
$$q(t) = \mathrm{Q}[v(t)] \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d\,\mathrm{Q}(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = C(v) \cdot \frac{dv}{dt}$$

  - **Comandato in carica**

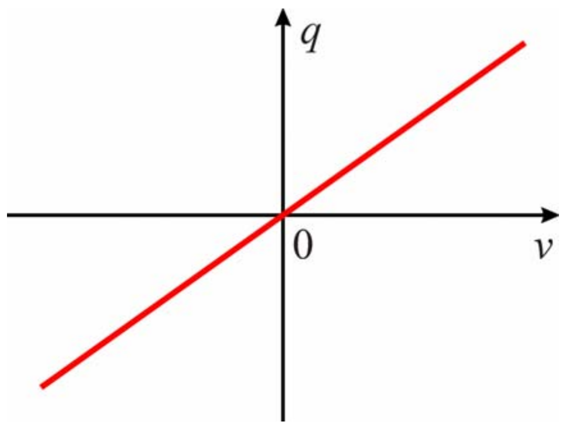
$$v(t) = \mathrm{V}[q(t)] \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d\,\mathrm{V}(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = S(q) \cdot i(t)$$

Condensatore (lineare tempo-invariante)

Simbolo



Curva caratteristica



- **Equazioni**: $q(t) = Cv(t)$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

(*v* e *i* orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore)

- $C =$ **capacità** (unità di misura farad, F)

Condensatore – Proprietà di memoria (1)

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

- La tensione di un condensatore all'istante t dipende dall'andamento della corrente in tutti gli istanti precedenti
  - ➡ il condensatore è un componente **dotato di memoria**
- Si considera il comportamento di un condensatore a partire da un istante iniziale t_0
  - Tensione all'istante t_0

    $$V_0 = v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau$$
  - Carica all'istante t_0

    $$Q_0 = q(t_0) = CV_0$$

Condensatore – Proprietà di memoria (2)

- Tensione per $t > t_0$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = V_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$$

➡ Per determinare la tensione per $t > t_0$ occorre conoscere
- la tensione (o la carica) per $t = t_0$
- l'andamento della corrente per $t \geq t_0$

➡ Il valore della tensione (o della carica) all'istante t_0 riassume il comportamento del componente per $t \leq t_0$

Condensatore – Comportamento energetico (1)

- **Potenza assorbita**:

$$\mathrm{p}_a(t) = v(t)i(t) = v(t)\cdot C\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2(t)\right]$$

- **Energia assorbita** fino all'istante t

$$\mathrm{w}_a(t) = \int_{-\infty}^{t}\mathrm{p}_a(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}Cv^2(\tau)\right]d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

➡ L'energia assorbita fino all'istante t è determinata se è noto il valore all'istante t della tensione o della carica

➡ Se $C > 0$ l'energia assorbita fino all'istante t è $\geq 0 \quad \forall\ t$

➡ Se $C > 0$ il condensatore è un componente passivo

Condensatore – Comportamento energetico (2)

- Energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$

$$\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{p}_a(t)dt = \frac{1}{2}C\left[v^2(t_2) - v^2(t_1)\right] = \frac{1}{2C}\left[q^2(t_2) - q^2(t_1)\right]$$

  - Non dipende dall'andamento di $i(t)$ e $v(t)$ nell'intervallo $[t_1\ t_2]$
  - Dipende solo dai valori di v (o di q) agli istanti t_1 e t_2

- Per un condensatore passivo ($C > 0$)
  - L'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è negativa se $|v(t_2)| < |v(t_1)|$
  - L'energia erogata nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ non può superare l'energia assorbita fino a t_1

$$\mathrm{w}_e(t_1,t_2) = -\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \frac{1}{2}C\left[v^2(t_1) - v^2(t_2)\right] \leq \frac{1}{2}Cv^2(t_1) = \mathrm{w}_a(t_1)$$

Condensatore – Comportamento energetico (3)

- Se $v(t_1) = v(t_2)$ l'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è nulla
- Se $v(t)$ non è costante, all'interno dell'intervallo si possono individuare sottointervalli in cui il $|v(t)|$ aumenta e altri in cui diminuisce
- L'energia assorbita quando $|v(t)|$ aumenta è uguale all'energia erogata quando $|v(t)|$ diminuisce
- ➡ Il condensatore accumula energia ed è in grado di restituirla integralmente
- ➡ La quantità

$$w_a(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

rappresenta l'**energia accumulata** nel condensatore all'istante t

- All'interno del condensatore non avvengono fenomeni dissipativi
- ➡ Il condensatore è un componente **privo di perdite**

Condensatore – Proprietà di continuità

- In un condensatore, se la corrente $i(t)$ è limitata, la tensione $v(t)$ è una funzione continua del tempo
- **Dimostrazione**: Dato che

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$$

la proprietà deriva direttamente dalla proprietà di continuità della funzione integrale:

  - $i(t)$ limitata ➡ $\exists M > 0 : \ |i(t)| \leq M \ \forall t$
  - $\forall t$ e $\forall \Delta t$ risulta

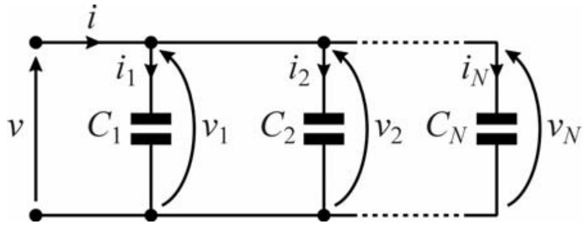
$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau) d\tau \leq \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} |i(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{C} \int_{t}^{t+\Delta t} M d\tau = \frac{1}{C} M \Delta t$$

  - di conseguenza

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[v(t+\Delta t) - v(t) \right] = 0$$

  - quindi $v(t)$ e continua

Condensatori in parallelo



LKI $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

LKV $v = v_k \quad (k = 1, \dots, N)$

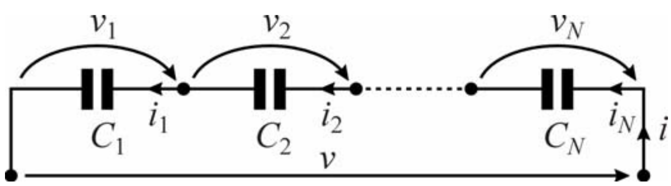
Relazioni costitutive $i_k = C_k \dfrac{dv_k}{dt} \quad (k = 1, \dots, N)$

$$i = \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{dv_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_P \frac{dv}{dt}$$

- N condensatori in parallelo equivalgono a un condensatore con capacità

$$C_P = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

Condensatori in serie



LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \dots, N)$

Relazioni costitutive $v_k = \dfrac{1}{C_k} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \dots, N)$

$$v = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^{t} i_k(\tau) d\tau = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k} \right) \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C_S} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau$$

- N condensatori in serie equivalgono a un condensatore con capacità

$$C_S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}}$$

Induttori

- **Induttore**: bipolo la cui equazione caratteristica mette in relazione i valori istantanei della corrente e del flusso

$$\mathrm{f_L}\left[i(t),\varphi(t),t\right]=0$$

- **Induttore tempo invariante**

$$\mathrm{f_L}\left[i(t),\varphi(t)\right]=0$$

  - **Comandato in corrente**

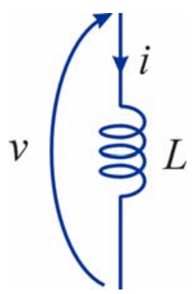
$$\varphi(t)=\Phi\left[i(t)\right] \quad \Rightarrow \quad v(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\Phi(i)}{di}\cdot\frac{di}{dt}=L(i)\frac{di}{dt}$$

  - **Comandato in flusso**

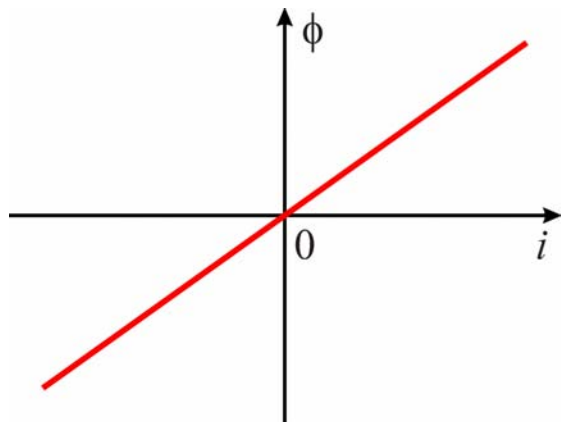
$$i(t)=\mathrm{I}\left[\varphi(t)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}=\frac{d\,\mathrm{I}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\Gamma(\varphi)\cdot v(t)$$

Induttore (lineare tempo-invariante)

Simbolo



Curva caratteristica



- **Equazioni**: $\varphi(t)=Li(t)$

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt} \qquad i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$$

(*v* e *i* orientate secondo la convenzione dell'utilizzatore)

- L = **induttanza** (unità di misura henry, H)

Induttore – Proprietà di memoria (1)

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

- La corrente di un induttore all'istante t dipende dall'andamento della tensione in tutti gli istanti precedenti
  - ➡ l'induttore è un componente **dotato di memoria**
- Si considera il comportamento di un induttore a partire da un istante iniziale t_0
  - Corrente all'istante t_0

    $$I_0 = i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau$$
  - Flusso all'istante t_0

    $$\Phi_0 = \varphi(t_0) = LI_0$$

Induttore – Proprietà di memoria (2)

- Corrente per $t > t_0$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau = I_0 + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\Phi_0}{L} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau$$

➡ Per determinare la corrente per $t > t_0$ occorre conoscere
  - la corrente (o il flusso) per $t = t_0$
  - l'andamento della tensione per $t \geq t_0$

➡ Il valore della corrente (o del flusso) all'istante t_0 riassume il comportamento del componente per $t \leq t_0$

Induttore – Comportamento energetico (1)

- **Potenza assorbita**:

$$\mathrm{p}_a(t) = v(t)i(t) = L\frac{di}{dt}\cdot i(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]$$

- **Energia assorbita** fino all'istante t

$$\mathrm{w}_a(t) = \int_{-\infty}^{t}\mathrm{p}_a(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}Li^2(\tau)\right]d\tau = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2(t)}{L}$$

➡ L'energia assorbita fino all'istante t è determinata se è noto il valore all'istante t della corrente o del flusso

➡ Se $L > 0$ l'energia assorbita fino all'istante t è $\geq 0 \;\; \forall\, t$

➡ Se $L > 0$ l'induttore è un componente passivo

Induttore – Comportamento energetico (2)

- Energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$

$$\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{p}_a(t)dt = \frac{1}{2}L\left[i^2(t_2) - i^2(t_1)\right] = \frac{1}{2L}\left[\varphi^2(t_2) - \varphi^2(t_1)\right]$$

  - Non dipende dall'andamento di $i(t)$ e $v(t)$ nell'intervallo $[t_1\ t_2]$
  - Dipende solo dai valori di i (o di φ) agli istanti t_1 e t_2

- Per un induttore passivo ($L > 0$)
  - L'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è negativa se $|i(t_2)| < |i(t_1)|$
  - L'energia erogata nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ non può superare l'energia assorbita fino a t_1

$$\mathrm{w}_e(t_1,t_2) = -\mathrm{w}_a(t_1,t_2) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t_1) - i^2(t_2)\right] \leq \frac{1}{2}Li^2(t_1) = \mathrm{w}_a(t_1)$$

Induttore – Comportamento energetico (3)

- Se $i(t_1) = i(t_2)$ l'energia assorbita nell'intervallo $[t_1\ t_2]$ è nulla
- Se $i(t)$ non è costante, all'interno dell'intervallo si possono individuare sottointervalli in cui il $|i(t)|$ aumenta e altri in cui diminuisce
- L'energia assorbita quando $|i(t)|$ aumenta è uguale all'energia erogata quando $|i(t)|$ diminuisce
- ➡ L'induttore accumula energia ed è in grado di restituirla integralmente
- ➡ La quantità

$$w_a(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

rappresenta l'**energia accumulata** nell'induttore all'istante t

- All'interno dell'induttore non avvengono fenomeni dissipativi
- ➡ L'induttore è un componente **privo di perdite**

Induttore – Proprietà di continuità

- In un induttore, se la tensione $v(t)$ è limitata, la corrente $i(t)$ è una funzione continua del tempo
- **Dimostrazione**: Dato che

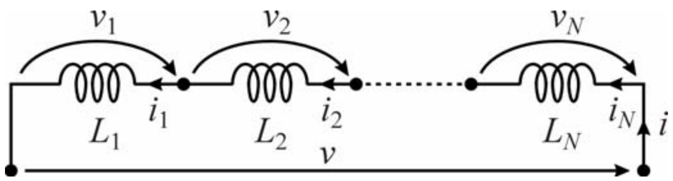
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

la proprietà deriva direttamente dalla proprietà di continuità della funzione integrale

Induttori in serie

LKV $v = \sum_{k=1}^{N} v_k$

LKI $i = i_k \quad (k = 1, \ldots, N)$



Relazioni costitutive $\mathrm{v}_k = L_k \dfrac{d\,\mathrm{i}_k}{dt} \quad (k = 1, \ldots, N)$

$$v = \sum_{k=1}^{N} L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} L_k \right) \frac{di}{dt} = L_S \frac{di}{dt}$$

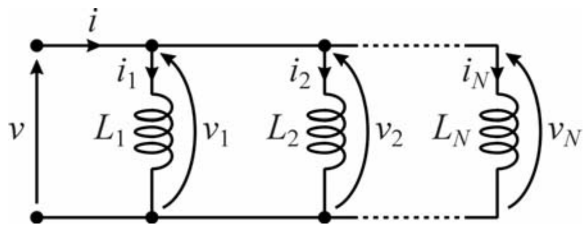
N induttori in serie equivalgono a un induttore con induttanza

$$L_S = \sum_{k=1}^{N} L_k$$

Induttori in parallelo

LKI $i = \sum_{k=1}^{N} i_k$

LKV $v = v_k \quad (k = 1, \ldots, N)$



Relazioni costitutive $i_k = \dfrac{1}{L_k} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} v_k(\tau) d\tau \quad (k = 1, \ldots, N)$

$$i = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k} \int_{-\infty}^{t} v_k(\tau) d\tau = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k} \right) \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau = \frac{1}{L_P} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

N induttori in parallelo equivalgono a un induttore con induttanza

$$L_P = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}}$$