

Circuiti magnetici

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 24-5-2019)

Induzione magnetica

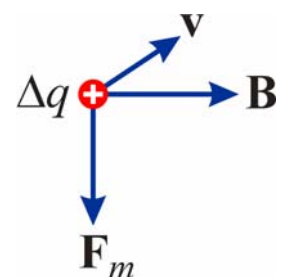
- Si dice che una regione dello spazio è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova Δq puntiforme in moto con velocità istantanea \mathbf{v} in tale regione è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Il vettore \mathbf{B} è detto **induzione magnetica** \mathbf{B} (unità di misura Tesla [T]) ed ha
 - ◆ direzione coincidente con la direzione della velocità per cui $\mathbf{F}_m = 0$
 - ◆ verso tale che \mathbf{v} , \mathbf{B} e \mathbf{F}_m formino una terna destra
 - ◆ modulo dato da

$$B = \frac{F_{m\max}}{\Delta q v}$$

dove $F_{m\max}$ indica il valore massimo del modulo di \mathbf{F}_m
(che si ottiene quando \mathbf{v} è ortogonale a \mathbf{B})



Campo magnetico

- Nello studio dei fenomeni magnetici in presenza di mezzi materiali è conveniente introdurre, oltre al vettore induzione magnetica, il vettore **campo magnetico** \mathbf{H} [A/m]
- Nel vuoto i vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} sono legati dalla relazione

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
- La costante μ_0 ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \cong 1.257 \cdot 10^{-6}$ H/m) è detta **permeabilità magnetica** del vuoto
- In generale i vettori sono legati da una relazione del tipo $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ (**relazione costitutiva** del mezzo) dipendente dal mezzo materiale in cui ha sede il campo
- In un mezzo lineare isotropo la relazione è

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$
dove μ rappresenta la permeabilità del mezzo

3

Solenoidalità dell'induzione magnetica

- Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è nullo

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

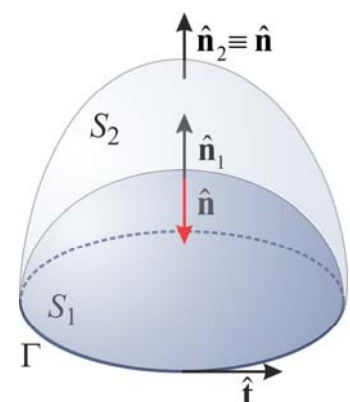
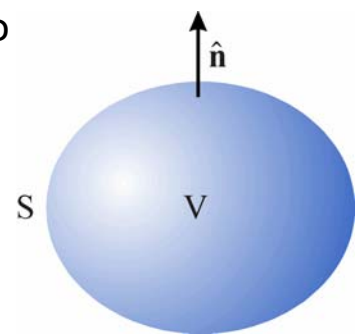
- Data una linea Γ , per ogni superficie avente Γ come contorno il flusso di \mathbf{B} ha lo stesso valore (→ **flusso concatenato con Γ**)

- ◆ I flussi di \mathbf{B} attraverso S_1 e S_2 sono

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

- ◆ L'unione di S_1 e S_2 forma una superficie chiusa attraverso la quale si ha

$$\oint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

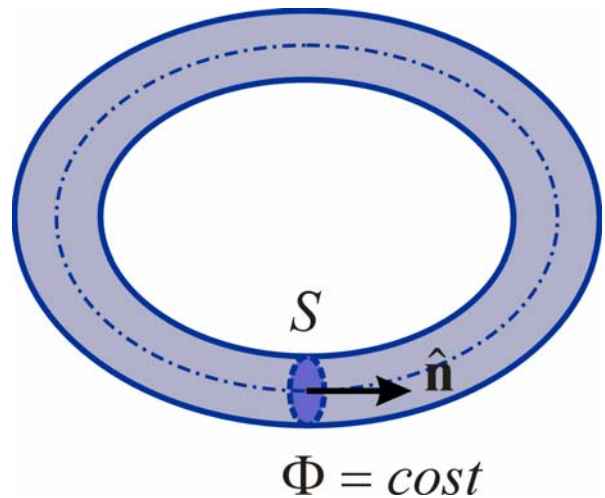


4

Tubi di flusso di induzione magnetica

- Dato che il vettore \mathbf{B} è solenoidale
- ➔ i tubi di flusso di \mathbf{B} non possono avere sezioni terminali, quindi devono chiusi (eventualmente all'infinito)
- ➔ il flusso di \mathbf{B} attraverso ogni sezione trasversale di un tubo di flusso assume lo stesso valore

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



5

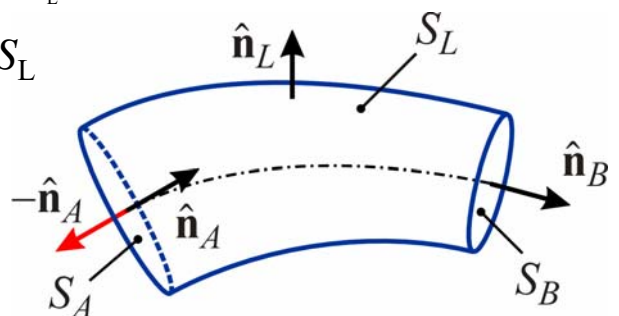
Costanza del flusso - dimostrazione

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B
- \mathbf{B} è solenoidale ➔ è nullo il suo flusso attraverso la superficie chiusa S_T formata da S_A , S_B e dalla superficie laterale S_L

$$\oint_{S_T} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_A} \mathbf{B} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_A) dS + \int_{S_B} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS + \int_{S_L} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dS = 0$$

- Le linee di flusso di \mathbf{B} sono tangenti a S_L
 - ➔ Il flusso di \mathbf{B} attraverso S_L è nullo
- ➔ I flussi attraverso S_A e S_B sono uguali

$$\int_{S_A} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_A dS = \int_{S_B} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_B dS = \Phi$$



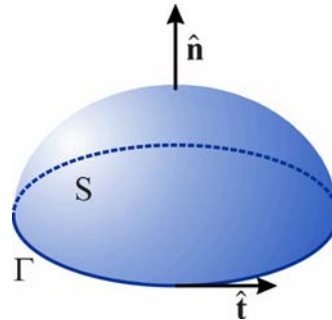
- ➔ Data l'arbitrarietà della scelta delle superfici S_A e S_B si può affermare che il flusso ha lo stesso valore su tutte le superfici trasversali

6

Legge di Faraday-Neumann

- La forza elettromotrice indotta in una linea chiusa è uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica concatenato con la linea stessa

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}_e = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{\Phi}$$



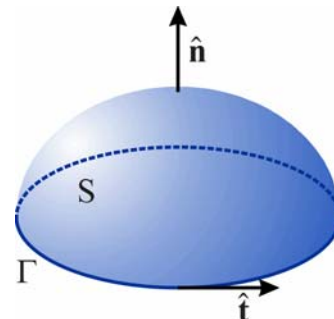
- e = **forza elettromotrice (f.e.m.) indotta**
- Φ = flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie arbitraria avente Γ come contorno (flusso di \mathbf{B} concatenato con Γ)
- A causa del segno del termine a secondo membro, la f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che la ha generata (**legge di Lenz**)

7

Legge di Ampere-Maxwell

- La circuitazione del vettore campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla corrente totale concatenata con la linea stessa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} + \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c}$$



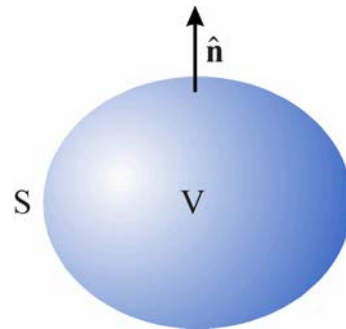
- i_c = **corrente di conduzione** che attraversa S
- i_s = **corrente di spostamento** che attraversa S
- $i_T = i_s + i_c$ = **corrente totale** concatenata con Γ

8

Corrente di conduzione e di spostamento

- La corrente totale i_T non dipende dalla superficie S , ma solo dalla linea di contorno Γ
- Attraverso superfici aventi lo stesso contorno Γ i valori della corrente di conduzione i_c e della corrente di spostamento i_s possono risultare diversi, ma la loro somma i_T non varia
- ➔ Di conseguenza, la somma dei flussi attraverso una superficie chiusa della corrente di conduzione e della corrente di spostamento è sempre nullo

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_c} + \frac{d}{dt} \underbrace{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{i_s} = 0$$



9

Esempio

- Si considera una linea Γ che circonda un terminale di un condensatore
- Attraverso S_1 si ha solo corrente di conduzione

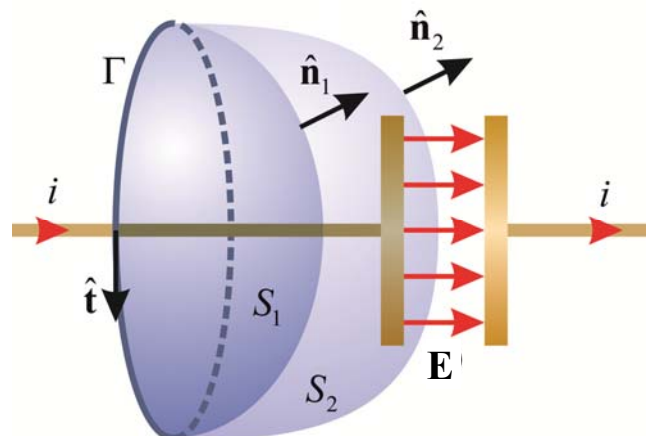
$$i_T = i_c = i = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS$$

- Attraverso S_2 si ha solo corrente di spostamento

$$i_T = i_s = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

- Quindi risulta

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$



10

Dipolo magnetico

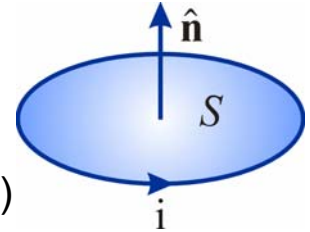
- Si considera una spira piana di forma arbitraria percorsa da una corrente i

- Si definisce **momento di dipolo magnetico** [$A \cdot m^2$] la quantità

$$\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{n}} = i S \hat{\mathbf{n}}$$

S = area della superficie piana delimitata dalla spira

$\hat{\mathbf{n}}$ = versore normale alla superficie (correlato al verso della corrente secondo la regola della mano destra)



- A una distanza grande rispetto alle dimensioni lineari della spira il campo magnetico prodotto dalla corrente dipende solo da \mathbf{m}
- Questa situazione può essere rappresentata considerando il caso limite in cui $S \rightarrow 0$ (sistema praticamente puntiforme) e $i \rightarrow \infty$ in modo tale che il prodotto Si tenda a un valore finito $m \neq 0$
- Il sistema ottenuto mediante questo passaggio al limite è detto **dipolo magnetico**

11

Vettore magnetizzazione

- A livello macroscopico, l'effetto di un campo magnetico sulla materia può essere descritto affermando che ogni elemento di volume ΔV diviene sede di un momento di dipolo magnetico $\Delta \mathbf{m}$
- Lo stato della materia magnetizzata può essere descritto, punto per punto, mediante il vettore **magnetizzazione** [A/m], che rappresenta il momento di dipolo magnetico per unità di volume

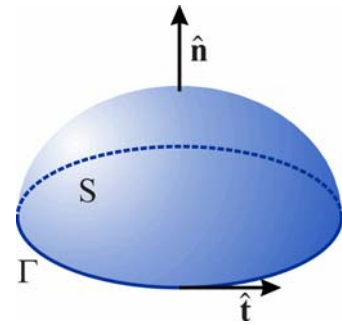
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

12

Definizione del vettore campo magnetico

- Nel vuoto, considerando, per semplicità, il caso in cui non sono presenti correnti di spostamento, vale la relazione (legge di Ampere)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



- In presenza di un materiale magnetizzato alla corrente concatenata con la linea Γ si deve aggiungere un contributo dovuto ai dipoli magnetici
 - I dipoli magnetici possono essere rappresentati come spire infinitesime
 - Alla corrente totale attraverso S occorre di devono aggiungere le correnti delle spire concatenate con la linea Γ
 - Si può dimostrare che il contributo di queste correnti è $\oint_{\Gamma} \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$

13

Definizione del vettore campo magnetico

- Quindi la legge di Ampere in un mezzo materiale può essere scritta, in termini del vettore \mathbf{B} come

$$\oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

- Se si definisce **campo magnetico** [A/m] il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

da cui risulta anche

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

l'equazione può essere scritta come

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \Rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

14

Definizione del vettore campo magnetico

- Mediante l'introduzione del vettore campo magnetico è possibile esprimere la legge di Ampere in una forma che vale sia nel vuoto che in presenza di mezzi materiali

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

- In questa equazione compaiono esplicitamente solo le sorgenti *macroscopiche* del campo magnetico (correnti di conduzione), mentre le sorgenti *microscopiche* (dipoli magnetici) sono messe in conto implicitamente mediante la relazione costitutiva del mezzo

15

Permeabilità magnetica

- In generale \mathbf{M} , e quindi \mathbf{B} , sono funzioni del campo magnetico \mathbf{H} che dipendono dalle proprietà del mezzo in cui ha sede il campo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

- In un materiale lineare isotropo \mathbf{M} e \mathbf{B} sono proporzionali a \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

↓

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

χ_m = **suscettività magnetica** del mezzo

$\mu_r = 1 + \chi_m$ = **permeabilità magnetica relativa** del mezzo

$\mu = \mu_0 \mu_r$ = **permeabilità magnetica** del mezzo [H/m]

16

Diamagnetismo

- **Materiali diamagnetici:** in ogni atomo i momenti magnetici degli elettroni si compensano
 - ➔ gli atomi non hanno momento magnetico proprio
- In presenza di un campo magnetico, al moto degli elettroni si sovrappone un moto di rotazione intorno alla direzione del campo (*precessione di Larmor*)
- ➔ Si ha un momento di dipolo magnetico indotto che tende ad opporsi al campo che lo ha generato
 - ➔ suscettività magnetica $\chi_m < 0$
(valori tipici dell'ordine di -10^{-5})
 - ➔ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1 + \chi_m) < 1$
(valori tipici leggermente inferiori a 1)
- χ_m e μ_R risultano indipendenti dalla temperatura

17

Paramagnetismo

- **Materiali paramagnetici:**
 - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
 - ◆ non si hanno interazioni significative tra i dipoli magnetici
- Un campo magnetico esterno, oltre all'effetto diamagnetico, produce un allineamento parziale dei dipoli magnetici
- Quest'ultimo effetto è prevalente e dà origine ad una magnetizzazione proporzionale al campo esterno
 - ➔ suscettività magnetica $\chi_m > 0$ (valori tipici dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$)
 - ➔ permeabilità magnetica relativa $\mu_R = (1 + \chi_m) > 1$
- Lo stato di magnetizzazione è il risultato dell'equilibrio tra l'azione del campo che tende ad orientare i dipoli magnetici e l'azione contraria dell'agitazione termica
 - ➔ χ_m e μ_R diminuiscono all'aumentare della temperatura T

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (C = \text{costante})$$

Legge di Curie

18

Ferromagnetismo

- **Materiali ferromagnetici:**
 - ◆ atomi e molecole possiedono un momento magnetico proprio
 - ◆ si hanno forti interazioni interne tra i dipoli magnetici
- Si ottengono forti livelli di magnetizzazione anche con campi magnetici relativamente deboli
- La relazione tra **B** e **H** è non lineare e non biunivoca (lo stato di magnetizzazione non dipende solo dal campo magnetico applicato, ma anche dagli stati di magnetizzazione precedenti)
- E' possibile avere una magnetizzazione non nulla anche in assenza di campi esterni
- Il comportamento dipende dalla temperatura. Esiste un valore critico T_C della temperatura (*temperatura di Curie*) oltre il quale il comportamento del materiale è di tipo paramagnetico e la suscettività decresce con la temperatura secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (C = \text{costante})$$

Legge di Curie-Weiss

19

Esempi di materiali diamagnetici e paramagnetici

Materiali diamagnetici	χ_m	Materiali paramagnetici	χ_m
Bismuto	$-1.7 \cdot 10^{-4}$	Uranio	$4 \cdot 10^{-4}$
Mercurio	$-2.9 \cdot 10^{-5}$	Platino	$2.6 \cdot 10^{-4}$
Argento	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	Tungsteno	$6.8 \cdot 10^{-5}$
Diamante	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	Cesio	$5.1 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	Alluminio	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Grafite	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	Litio	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Cloruro di sodio	$-1.4 \cdot 10^{-5}$	Magnesio	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-1.0 \cdot 10^{-5}$	Sodio	$7.2 \cdot 10^{-6}$
Acqua	$-9.1 \cdot 10^{-6}$	Ossigeno (1 atm)	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Azoto (1 atm)	$-5 \cdot 10^{-9}$	Aria (1 atm)	$4 \cdot 10^{-7}$

(Valori a 20 °C)

20

Ferromagnetismo

- In un materiale ferromagnetico, per un effetto di tipo quantistico, i momenti di dipolo magnetico tendono ad allinearsi spontaneamente
- Un cristallo di materiale ferromagnetico risulta costituito di regioni (**domini di Weiss**) di dimensioni dell'ordine di 10^{-6} - 10^{-3} m, all'interno delle quali gli atomi hanno i momenti di dipolo magnetico allineati tra loro
- In un materiale allo stato nativo i momenti dei domini sono disposti in modo aleatorio (quindi a livello macroscopico la magnetizzazione è nulla)
- In presenza di un campo magnetico esterno \mathbf{H} i domini si allineano con il campo dando origine ad un'intensa magnetizzazione
- All'aumentare di \mathbf{H} si raggiunge una condizione di saturazione quando tutti i domini sono allineati
- Un ulteriore incremento di \mathbf{H} produce un incremento di \mathbf{B} uguale a quello che si otterrebbe nel vuoto: $\Delta\mathbf{B} = \mu_0\Delta\mathbf{H}$

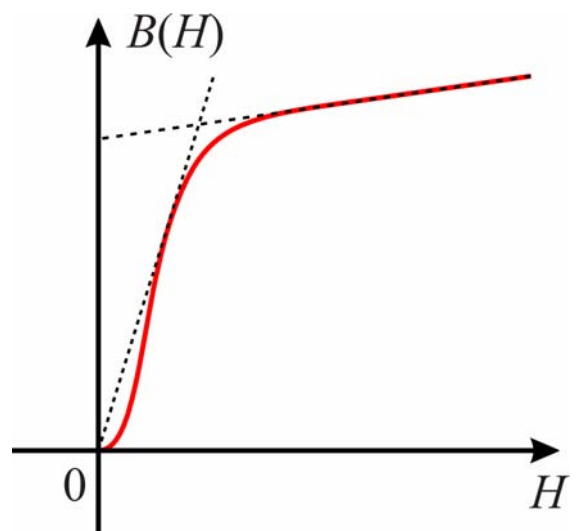
21

Curva di prima magnetizzazione

- A partire dallo stato $H = 0, B = 0$, inizialmente si ha un tratto con pendenza elevata
 - ➔ Valori elevati della permeabilità relativa differenziale
- Quindi si raggiunge la saturazione e l'andamento diviene rettilineo con pendenza

$$\mu_{r(d)}(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0$$



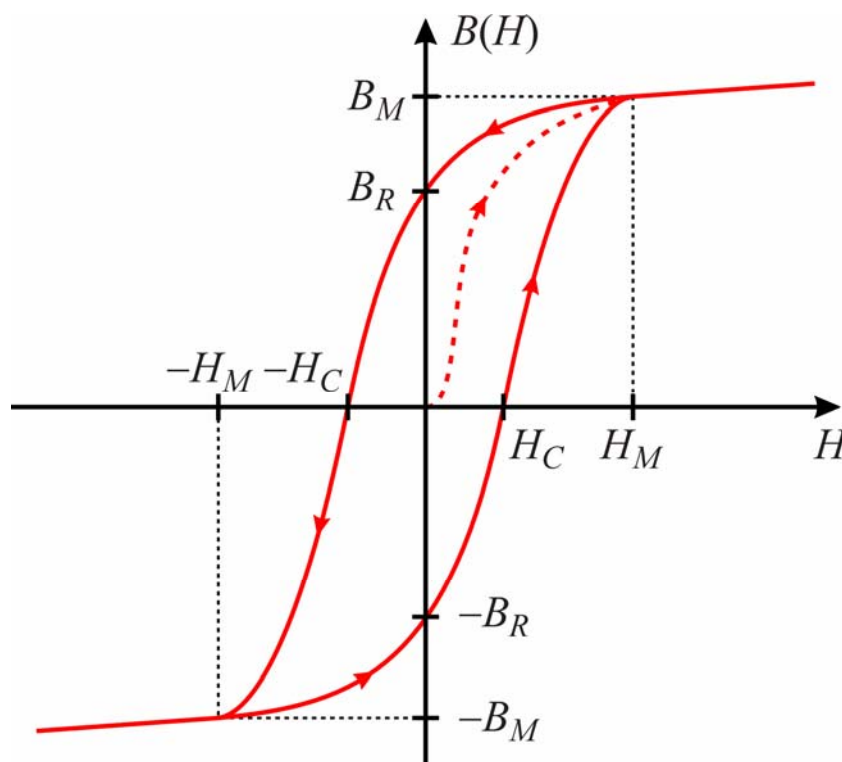
22

Isteresi magnetica

- I domini di Weiss tendono a rimanere allineati anche se il campo esterno viene rimosso
- ➔ Riportando H a zero B non si annulla ma si porta ad un valore B_R (**induzione residua**)
- Per annullare B occorre applicare un campo magnetico inverso $-H_C$ (**campo magnetico coercitivo**)
- Se H viene fatto variare ciclicamente tra due valori $\pm H_M$ l'andamento di B è rappresentato da una curva chiusa detta **ciclo di isteresi**

23

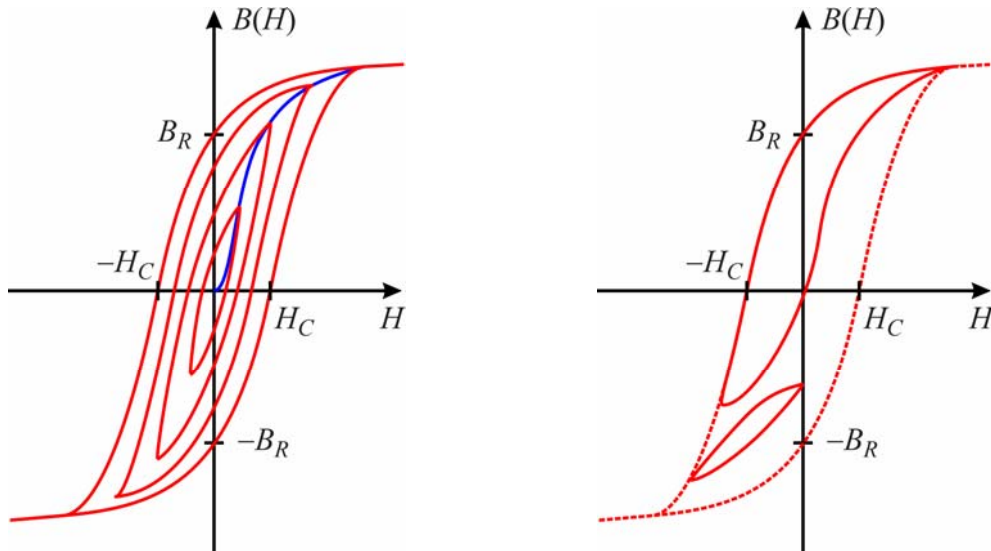
Ciclo di isteresi



24

Ciclo di isteresi

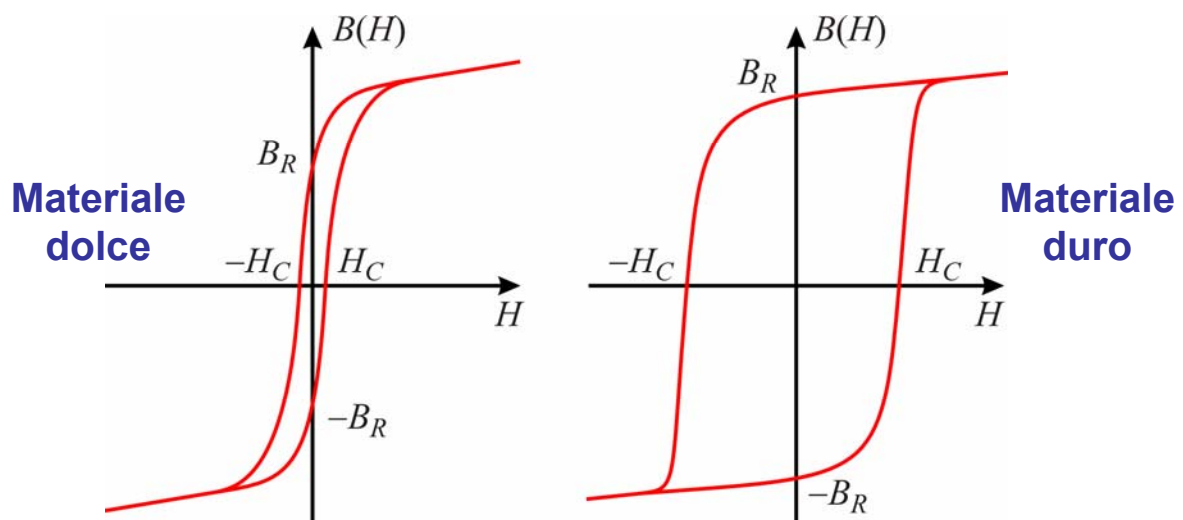
- Riducendo il valore di H_M si ottengono cicli minori simmetrici i cui vertici sono disposti su una curva poco discosta dalla curva di prima magnetizzazione
- Se il campo varia tra due valori estremi non uguali e opposti, si ottengono cicli minori di isteresi asimmetrici



25

Materiali ferromagnetici

- I materiali ferromagnetici si distinguono in
 - ◆ **Materiali dolci** ➔ elevati valori di permeabilità e basso valore del campo coercitivo
 - ◆ **Materiali duri** ➔ elevati valori di induzione residua e campo coercitivo



26

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

Materiali dolci	$\mu_{r(d)}$ iniziale	$\mu_{r(d)}$ massima	B_R [T]	H_C [A/m]
Cobalto	10	175	0.31	1000
Nichel	400	1100	0.33	130
Ferro puro	10^4	$2 \cdot 10^5$	1.2	4
Ferro commerciale	200	5000	1.2	80
Ghisa	70	600	1.4	500
Ferro-silicio 4%	500	7000	0.8	40
Permalloy (Ni, Fe 22%)	10^4	$5 \cdot 10^4$	0.6	4
Supermalloy (Ni, Fe 15%, Mo 5%, Mn 0.5%)	10^5	$3 \cdot 10^5$	0.6	0.4
Mumetal (Fe, Ni 77%, Cu 5%, Cr 2%)	$2.5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^5$	0.6	1.2

(Valori a 20 °C)

27

Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici

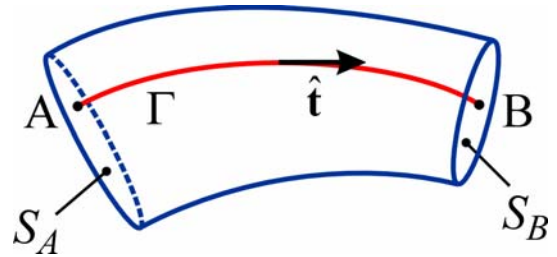
Materiali duri	B_R [T]	H_C [kA/m]
Acciaio al tungsteno (Fe, C 0.7%, W 5%)	1.05	5.6
Alnico 5 (Fe, Al 8%, Ni 14%, Co 24%, Cu 3%)	1.28	51
Alnico 9 (Fe, Al 7%, Ni 15%, Co 35%, Cu 4%, Ti 5%)	1.05	120
Cunife (Cu, Ni 20%, Fe 20%)	0.54	44
Ferrite di bario ($BaFe_{12}O_{19}$)	0.43	170
Samario-cobalto ($SmCo_5$)	0.87	640
Neodimio-ferro-boro ($Nd_2Fe_{14}B$)	1.23	880

(Valori a 20 °C)

28

Tensione magnetica

- Si considera un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} delimitato da due superfici trasversali S_A e S_B ortogonali alle linee di flusso
- Si assume che all'interno del tubo di flusso
 - ◆ il mezzo sia lineare isotropo
 - ◆ la densità di corrente di conduzione \mathbf{J} sia ovunque nulla
 - ◆ la densità di corrente di spostamento $d\mathbf{D}/dt$ sia ovunque nulla o comunque ovunque trascurabile
- L'ultima condizione è sempre verificata rigorosamente se tutte le grandezze elettromagnetiche sono costanti nel tempo (**condizioni stazionarie**)
- Può essere verificata in modo approssimato se le variazioni nel tempo delle grandezze elettromagnetiche sono molto lente (**condizioni quasi stazionarie**)



29

Tensione magnetica

- Nella regione interna al tronco di tubo di flusso è possibile definire un **potenziale scalare magnetico** ψ [unità di misura A]

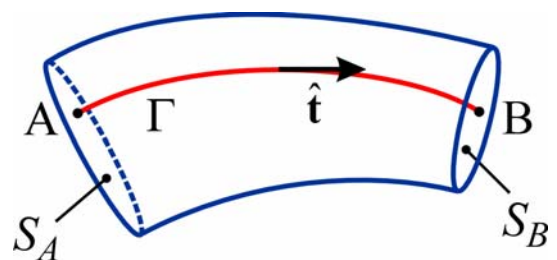
$$\mathbf{H} = -\nabla\psi$$

- S_A e S_B sono ortogonali anche alle linee di campo di \mathbf{H}
 - ➔ sono due superfici equipotenziali

- ➔ Si può definire la **tensione magnetica** [A] tra le due superfici terminali del tronco di tubo di flusso come

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$

dove A e B sono due generici punti, rispettivamente, di S_A e S_B e l'integrale è valutato su una qualunque linea Γ , interamente contenuta nel tronco di tubo di flusso, che collega i punti A e B



30

Riluttanza e permeanza

- Si definisce **riluttanza** [unità di misura $\text{henry}^{-1} = \text{H}^{-1}$] del tronco di tubo di flusso compreso tra le superfici equipotenziali S_A e S_B il rapporto tra la tensione magnetica Ψ_{AB} e il flusso di induzione magnetica attraverso la generica sezione del tubo di flusso Φ

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto **permeanza** [unità di misura henry, H]

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{\mathcal{R}_{AB}} = \frac{\Phi}{\Psi_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl}$$

- La riluttanza e la permeanza non dipendono da \mathbf{B} e da \mathbf{H} , ma solo dalla geometria del tubo di flusso e dalla permeabilità del materiale*

31

Legge di Hopkinson

- La tensione magnetica tra le sezioni terminali di un tronco di tubo di flusso di \mathbf{B} e il flusso magnetico attraverso la sezione del tubo di flusso sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\Psi_{AB} = \mathcal{R}_{AB} \Phi \quad \text{Legge di Hopkinson}$$

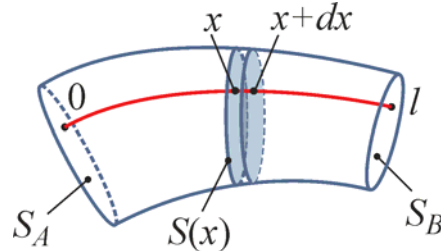
e quindi

$$\Phi = \mathcal{P}_{AB} \Psi_{AB} \quad (\mathcal{P}_{AB} = 1/\mathcal{R}_{AB})$$

32

Riluttanza di un tubo di flusso filiforme

- Se la sezione trasversale del tubo di flusso è molto piccola, si può ritenere che \mathbf{B} e μ siano costanti nella sezione, e quindi che siano funzioni solo di una coordinata curvilinea x lungo l'asse del tubo di flusso



- La riluttanza di un tratto infinitesimo del tubo di flusso può essere espressa come

$$d\mathcal{R} = \frac{H(x)dx}{\Phi} = \frac{H(x)dx}{B(x)S(x)} = \frac{dx}{\mu(x)S(x)}$$

dove $S(x)$ rappresenta l'area della sezione del tubo di flusso in corrispondenza della coordinata x

33

Riluttanza di un tubo di flusso filiforme

- Quindi la riluttanza del tronco di tubo di flusso è

$$\int_A^B d\mathcal{R} = \int_0^l \frac{dx}{\mu(x)S(x)}$$

dove l rappresenta la lunghezza del tubo di flusso

- L'espressione mostra che la riluttanza dipende solo dalle proprietà geometriche del tubo di flusso e dalla permeabilità del mezzo
- Se la permeabilità e l'area della sezione hanno valore costante in tutto il tronco di tubo di flusso, si ottiene

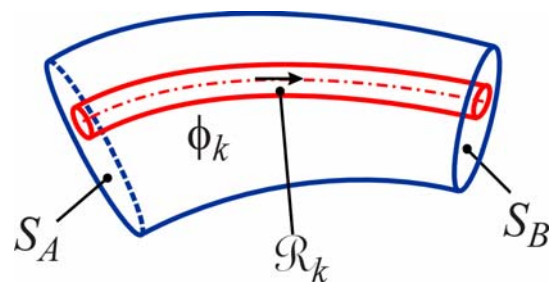
$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{l}{\mu S}$$

34

Riluttanza di un tubo di flusso generico

- Un tubo di flusso non filiforme può essere suddiviso in un insieme di tubi di flusso filiformi elementari, le cui sezioni terminali sono contenute nelle superfici S_A e S_B
- Al k -esimo tubo di flusso elementare è associato il flusso ϕ_k
- Per tutti i tubi di flusso la tensione magnetica è pari alla differenza di potenziale Ψ_{AB} tra le superfici S_A e S_B
- Per ciascun tubo elementare, applicando il procedimento precedente, si può definire la riluttanza \mathcal{R}_k , data da

$$\mathcal{R}_k = \frac{\Psi_{AB}}{\phi_k}$$



35

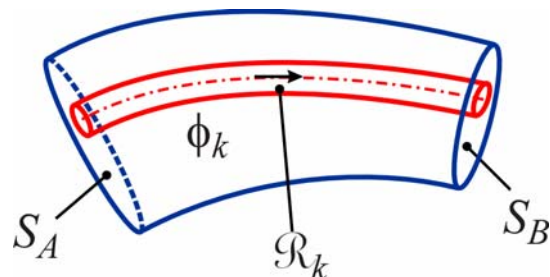
Riluttanza di un tubo di flusso generico

- Il flusso magnetico totale è dato dalla somma dei flussi dei tubi elementari

$$\Phi = \sum_k \phi_k = \sum_k \frac{\Psi_{AB}}{\mathcal{R}_k}$$

- Quindi la riluttanza totale è

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\Psi_{AB}}{\sum_k \frac{\Psi_{AB}}{\mathcal{R}_k}} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{\mathcal{R}_k}}$$



- Dato che le \mathcal{R}_k dipendono solo dalla configurazione geometrica e dalla permeabilità, lo stesso vale anche per \mathcal{R}_{AB}

36

Tubi di flusso chiusi

- Un tubo di flusso chiuso di \mathbf{B} costituisce un **circuito magnetico elementare**
 - ◆ Più in generale i circuiti magnetici possono avere strutture più complesse (ramificate)
- Per ogni tubo di flusso chiuso deve necessariamente essere diversa da zero la corrente concatenata
- Infatti, in assenza di corrente concatenata, per ogni linea di campo Γ di \mathbf{H} contenuta nel tubo di flusso si avrebbe

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$$

- Dato che il verso di \mathbf{H} lungo una sua linea di campo è costante, questo richiederebbe $\mathbf{H} = 0$ e quindi anche $\mathbf{B} = 0$

37

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico

- In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ottiene

$$\mathcal{R} = \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dS} = \frac{i_c}{\Phi}$$

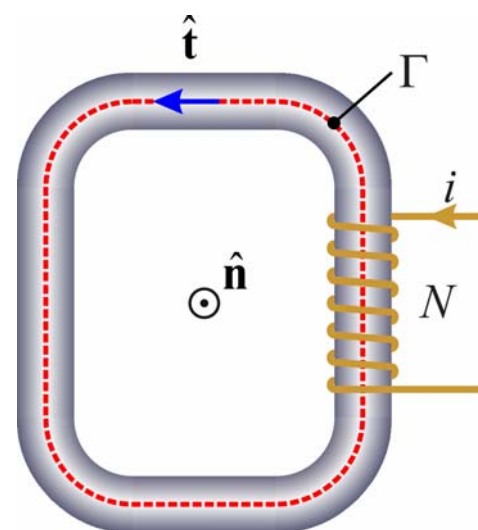
- ➔ Per un tubo di flusso chiuso la legge di Hopkinson assume la forma

$$\mathcal{R}\Phi = i_c$$

- In particolare, se il tubo di flusso è concatenato con un avvolgimento formato da N spire e percorso da una corrente i , si ha

$$\mathcal{R}\Phi = Ni$$

- La corrente concatenata i_c è detta **forza magnetomotrice** (f.m.m.) (ha un ruolo analogo a quello della f.e.m. in un circuito elettrico)



38

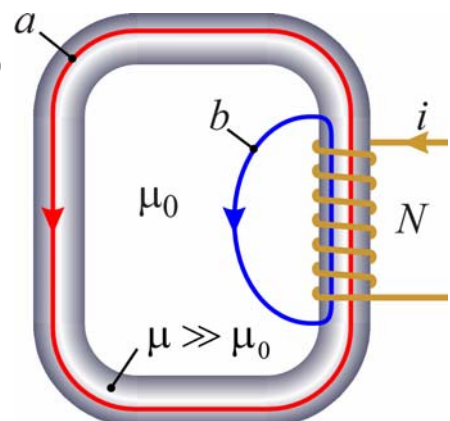
Circuiti magnetici

- Per il campo magnetico stazionario è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici
- A partire dalle equazioni fondamentali è possibile derivare leggi analoghe alle leggi di Kirchhoff per i circuiti elettrici
- Sfruttando le analogie tra le equazioni dei circuiti elettrici e dei circuiti magnetici è possibile ricondurre lo studio di un circuito magnetico all'analisi di un circuito elettrico "equivalente"
- Il modello circuitale è utilizzabile solo nei casi in cui l'andamento dei tubi di flusso di \mathbf{B} è noto a priori
 - ◆ sistemi dotati di particolari simmetrie
 - ◆ circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti

39

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Dal punto di vista del comportamento magnetico non esistono materiali analoghi agli isolanti (Tutti i mezzi, vuoto compreso, sono magneticamente permeabili)
- Mentre le conducibilità dei buoni conduttori e quelle degli isolanti possono differire di 18-24 ordini di grandezza, le permeabilità magnetiche possono differire, al più, di 5-6 ordini di grandezza
- **Esempio:**
Circuito magnetico costituito da un materiale ad elevata permeabilità ($\mu \gg \mu_0$) circondato da un mezzo con permeabilità relativamente bassa ($\mu \cong \mu_0$)
- Sono possibili due tipi di linee di flusso
 - ◆ *a*) linee che si sviluppano interamente nel mezzo ad elevata permeabilità
 - ◆ *b*) linee che in parte si sviluppano nel mezzo a bassa permeabilità



40

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

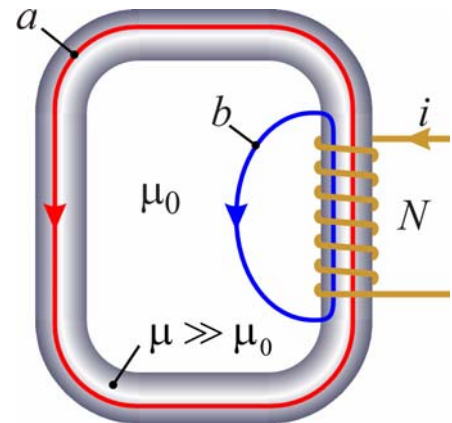
- Si considerano due tubi di flusso filiformi aventi assi coincidenti con le linee a e b
- Dalla legge di Hopkinson si ottiene

$$\Phi_a = \frac{Ni}{\mathcal{R}_a} \quad \Phi_b = \frac{Ni}{\mathcal{R}_b}$$

- Dato che il tubo di flusso b comprende un tratto a bassa permeabilità risulta

$$\mathcal{R}_b \gg \mathcal{R}_a \quad \Rightarrow \quad \Phi_b \ll \Phi_a$$

- ➔ E' possibile trascurare il flusso dovuto a linee del tipo b e considerare l'anello di materiale ad elevata permeabilità come un tubo di flusso di \mathbf{B}

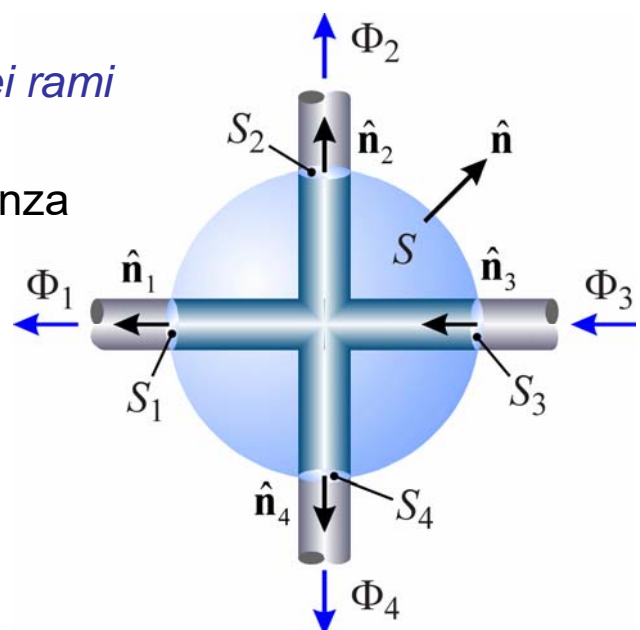


41

Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- *La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla*
- ➔ In particolare si ha che:
La somma algebrica dei flussi dei rami afferenti ad un nodo è nulla
- Questa legge è diretta conseguenza del fatto che \mathbf{B} è solenoidale

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \sum_k \pm \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS = \\ &= \sum_k \pm \Phi_k = 0 \end{aligned}$$



$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

42

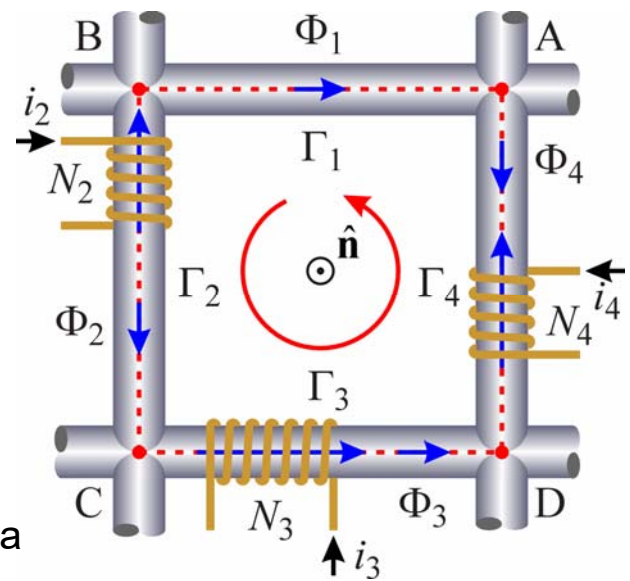
Legge di Kirchhoff per le tensioni magnetiche

- La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa
- Questa legge si ottiene direttamente dalla legge di Ampere

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = i_C$$

- Se la forza magnetomotrice è prodotta da un insieme di avvolgimenti concatenati con la maglia

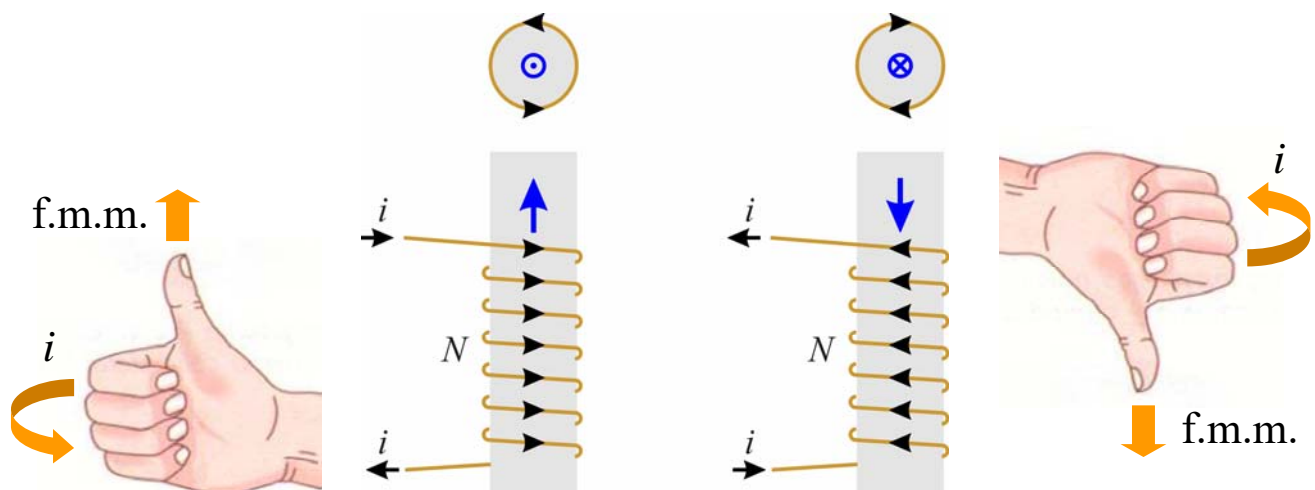
$$\sum_k \pm \psi_k = \sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$\begin{aligned} -\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4 &= \\ &= -N_2 i_2 + N_3 i_3 + N_4 i_4 \end{aligned}$$

43

Versi di riferimento delle f.m.m.



- Alle f.m.m. degli avvolgimenti si associano versi di riferimento orientati relativamente ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra
- A secondo membro dell'equazione di una maglia, alla f.m.m. di un avvolgimento si attribuisce segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, segno - se è discorde

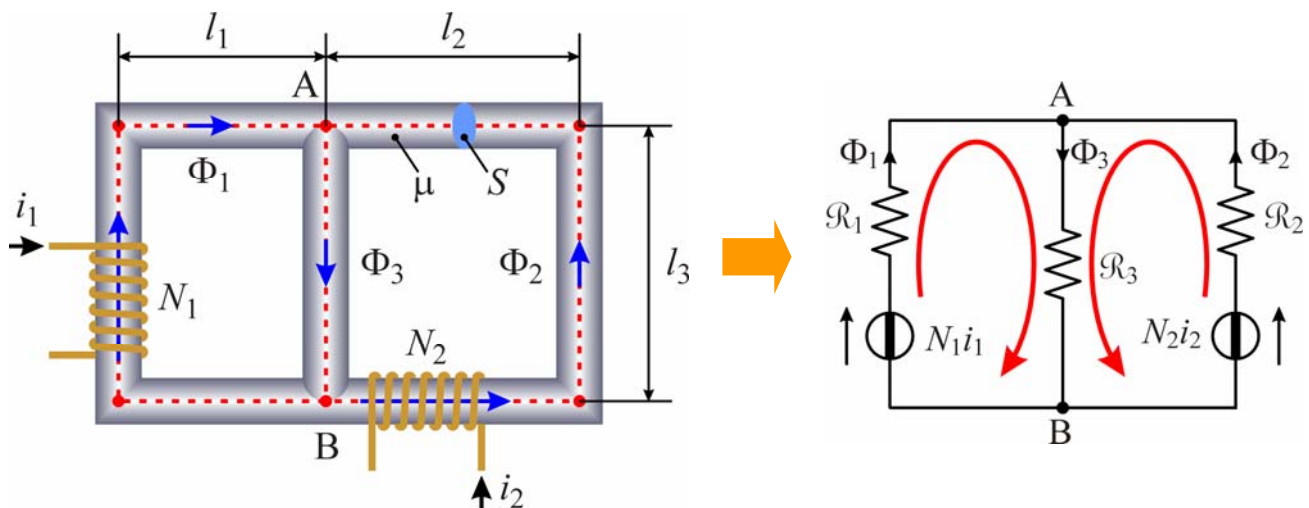
44

Analogie tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
R	\mathcal{R}
i	Φ
v	Ψ
(f.e.m.) e	(f.m.m.) Ni
$v_k = R_k i_k$	$\Psi_k = \mathcal{R}_k \Phi_k$
$\sum_k \pm i_k = 0$	$\sum_k \pm \Phi_k = 0$
$\sum_k \pm R_k i_k = \sum_k \pm e_k$	$\sum_k \pm \mathcal{R}_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$

45

Esempio



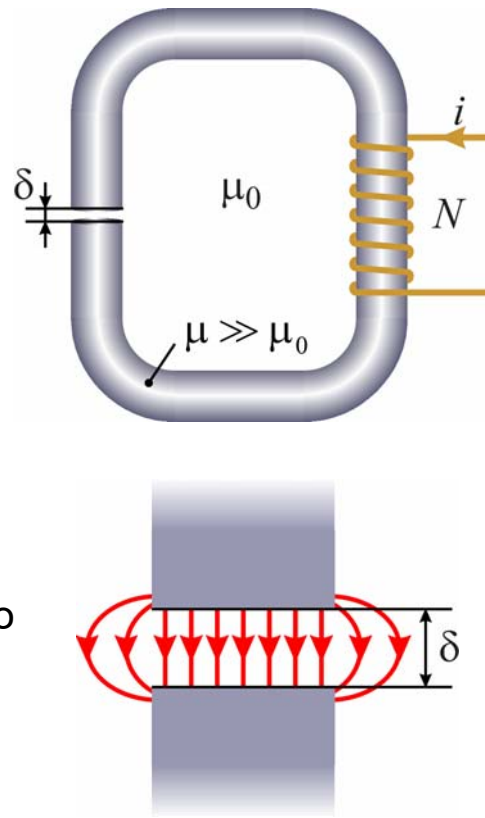
$$\mathcal{R}_1 = \frac{2l_1 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2l_2 + l_3}{\mu S} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S}$$

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_1 i_1 \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$

46

Circuiti magnetici con traferri

- In alcuni casi, in un circuito magnetico si possono avere delle interruzioni del materiale ad elevata permeabilità (**traferri**)
- La presenza di traferri di piccolo spessore non altera in modo significativo l'andamento delle linee di flusso di \mathbf{B} (si hanno degli *effetti di bordo*, spesso trascurabili)



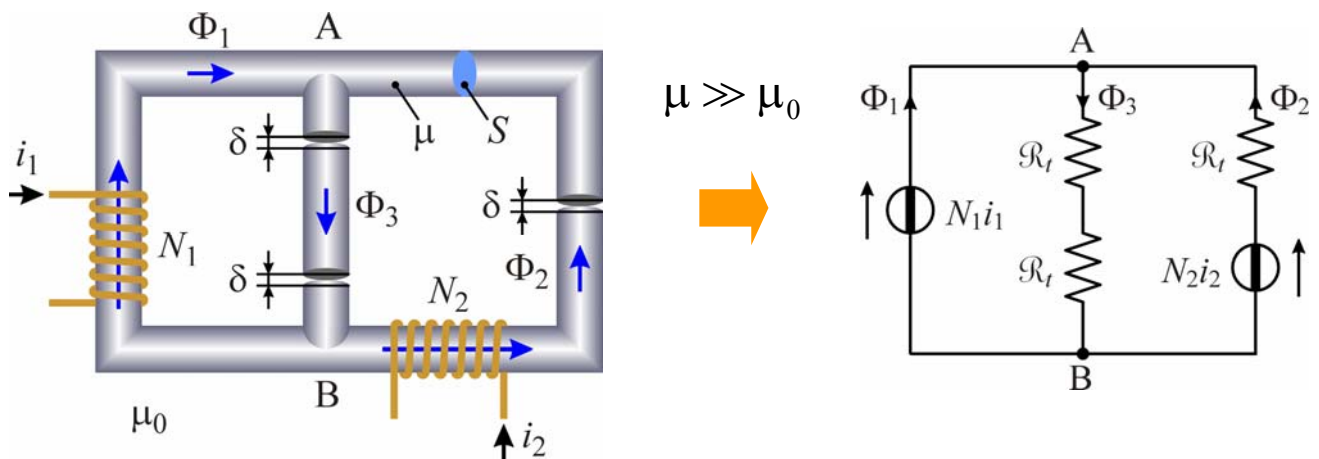
47

Circuiti magnetici con traferri

- Qualora sia necessario tenere conto degli effetti di bordo, si può valutare la riluttanza dei traferri assumendo un'area efficace $S' > S$ (S = sezione del nucleo in corrispondenza del traferro)
 - ◆ Un metodo empirico per definire l'area efficace consiste nell'aggiungere un bordo di larghezza pari allo spessore del traferro
- I traferri possono alterare notevolmente l'entità dei flussi magnetici, dato che le loro riluttanze possono essere molto elevate anche per valori modesti dello spessore δ
 - ➔ Spesso le riluttanze dei tratti di materiale ad elevata permeabilità risultano trascurabili rispetto alle riluttanze dei traferri
 - ➔ Nel circuito elettrico "equivalente" i tratti ad elevata permeabilità corrispondono a conduttori ideali e i traferri a corrispondono a resistori

48

Esempio



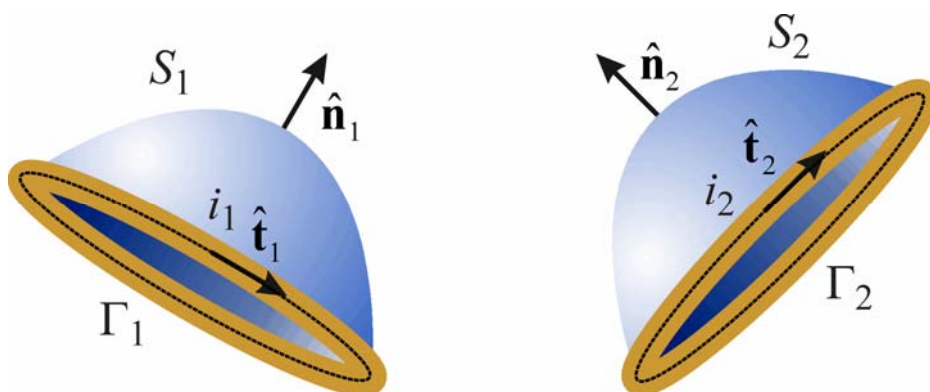
Traferri di uguale spessore δ

$$\text{Riluttanza di un traferro: } \mathcal{R}_t = \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

49

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Si considerano due circuiti elettrici Γ_1 e Γ_2 percorsi dalle correnti i_1 e i_2 e immersi in un mezzo lineare isotropo



- ➔ In questa ipotesi le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle correnti sono lineari
- ➔ I flussi di induzione magnetica concatenati con i due avvolgimenti sono funzioni lineari delle correnti i_1 e i_2

50

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

- I coefficienti L_1 e L_2 sono detti **coefficienti di autoinduzione** o **(auto)induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti **coefficienti di mutua induzione** o **mutue induttanze** dei circuiti Γ_1 e Γ_2 (unità di misura henry, H)
- Si può dimostrare che risulta sempre verificata l'uguaglianza $M_{12} = M_{21} = M$ quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti

51

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Il coefficiente di autoinduzione L_k rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente i_k , quando la corrente nell'altro circuito è nulla

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

- Il coefficiente di mutua induzione rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con il circuito k e la corrente nell'altro circuito valutato quando la corrente i_k è nulla

$$M = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

52

Coefficienti di auto e mutua induzione

- Le definizioni di coefficienti di auto e mutua induzione possono essere generalizzate al caso di N circuiti

- In questo caso risulta

$$\Phi_{c1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N$$

$$\Phi_{c2} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \dots + M_{2N} i_N$$

⋮

$$\Phi_{cN} = M_{N1} i_1 + M_{N2} i_2 + \dots + L_N i_N$$

dove

$$L_k = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_k} \right|_{i_h=0 \forall h \neq k}$$

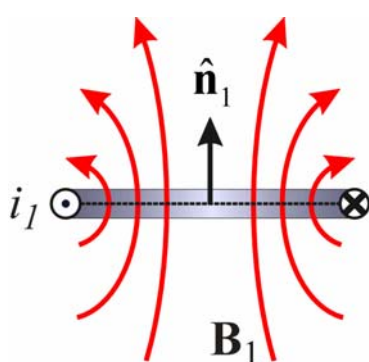
$$M_{kj} = \left. \frac{\Phi_{ck}}{i_j} \right|_{i_h=0 \forall h \neq j}$$

- Inoltre si ha

$$M_{hk} = M_{kh}$$

53

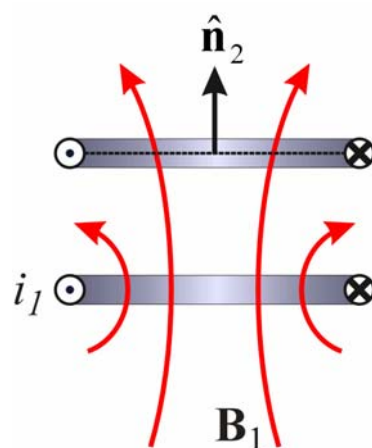
Segni dei coefficienti di auto e mutua induzione



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0$$

$$\Rightarrow L_1 > 0$$

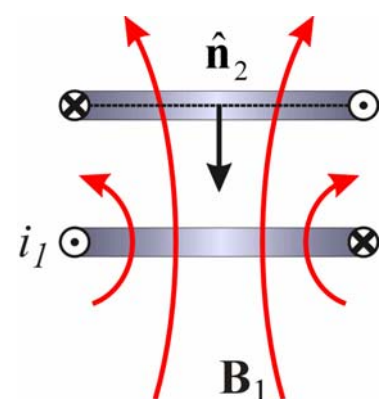
Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} > 0$$

$$\Rightarrow M > 0$$

Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento



$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{21} < 0$$

$$\Rightarrow M < 0$$

54

Esempio 1

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

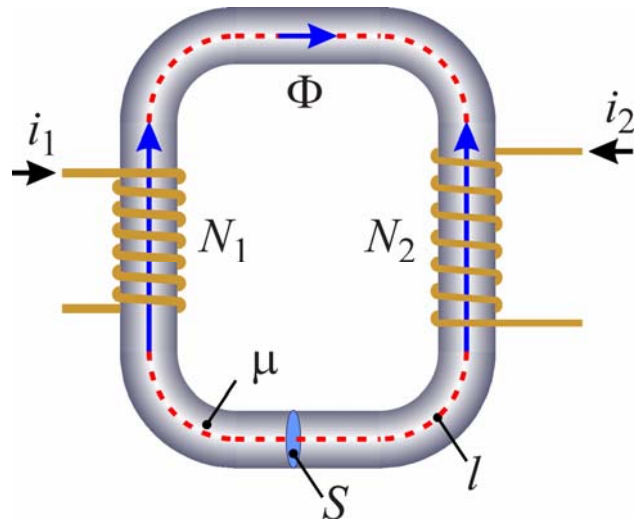
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$



55

Esempio 2

- Flusso nel nucleo

$$\Phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \right)$$

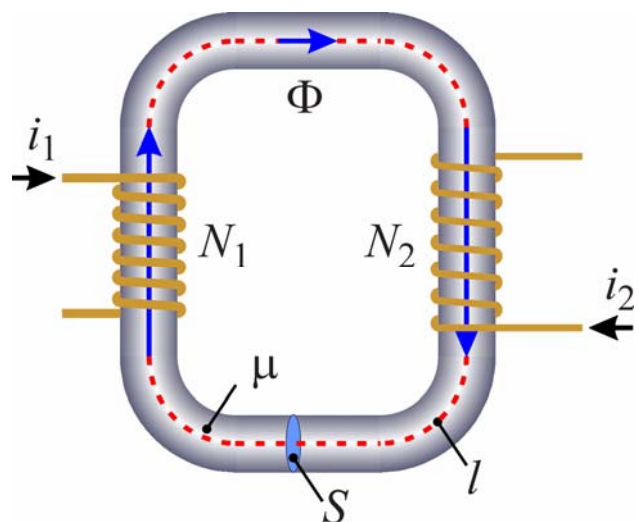
- Flussi concatenati con gli avvolgimenti

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_{c2} = N_2 \Phi = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

- Coefficienti di auto e mutua induzione

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

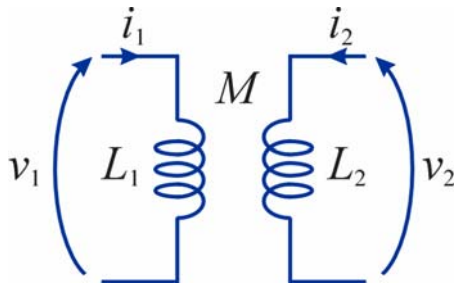


56

Induttori accoppiati

Equazioni

Simbolo



$$\Phi_{c1}(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$

$$\Phi_{c2}(t) = M i_1(t) + L_2 i_2(t)$$



$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

- **Coefficiente di accoppiamento:** $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$

57

Induttori accoppiati

- Per un dispositivo fisicamente realizzabile valgono le condizioni

$$L_1 > 0 \quad L_2 > 0 \quad |M| < \sqrt{L_1 L_2} \quad (\Rightarrow 0 \leq k < 1)$$

- ➔ E' possibile esprimere le correnti in funzione dei flussi

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \Gamma_1 \Phi_{c1}(t) + \Gamma_M \Phi_{c2}(t) \\ i_2(t) &= \Gamma_M \Phi_{c1}(t) + \Gamma_2 \Phi_{c2}(t) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_M \\ \Gamma_M & \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

- ➔ Espressioni delle correnti in funzione delle tensioni

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \Gamma_1 \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau + \Gamma_M \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau \\ i_2(t) &= \Gamma_M \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau + \Gamma_2 \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

58

Induttori perfettamente accoppiati

- Due induttori si dicono **perfettamente accoppiati** se vale la relazione

$$|M| = \sqrt{L_1 L_2} \rightarrow k = 1$$

- Si può verificare che $k = 1$ indica che il flusso generato da ciascun induttore si concatena interamente con l'altro induttore
- Questa è una condizione ideale che nei casi pratici può essere realizzata solo in modo approssimato, quindi si ha sempre $k < 1$

- Per $k = 1$ la matrice $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ diventa singolare

- ➔ Non è possibile esprimere le correnti in funzione dei flussi (o delle tensioni)

59

Energia di un induttore

- La potenza assorbita da un induttore può essere espressa come

$$p = vi = i \frac{d\varphi}{dt}$$

- Si assume che per $t = 0$ i e φ siano nulli
- Nell'intervallo $[0 t_0]$ si fa variare i da 0 a un valore finale I
 - ➔ Il flusso varia da 0 a un valore finale Φ
- L'energia assorbita dall'induttore nell'intervallo $[0 t_0]$ è

$$W_M = \int_0^{t_0} i \frac{d\varphi}{dt} dt = \int_0^{\Phi} i d\varphi$$

60

Energia di un induttore

- Se la relazione tra i e φ è biunivoca (cioè se non si ha isteresi) il valore di W_M non dipende dall'andamento di i e φ durante l'intervallo $[0, t_0]$, ma solo dal valore finale del flusso Φ
- Se la corrente (e quindi il flusso) vengono riportati a 0, l'energia W_M viene restituita integralmente
- ➔ W_M rappresenta un'energia di tipo conservativo
 - ➔ **energia accumulata nel campo magnetico dell'induttore**
- Per un induttore lineare (➔ $\varphi = Li$) l'energia magnetica può essere espressa nelle forme

$$W_M = \int_0^{\Phi} \frac{\varphi}{L} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2$$

61

Energia degli induttori accoppiati

- Procedendo in modo simile, si può dimostrare che nel caso di un sistema costituito da N induttori accoppiati l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \sum_{k=1}^N \int_0^{\Phi_k} i d\varphi$$

- Se gli induttori sono lineari si ha

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N M_{kj} i_k i_j$$

- Nel caso di due soli induttori accoppiati l'espressione dell'energia è

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

62

Energia del campo magnetico

- L'energia magnetica di un circuito filiforme può essere espressa anche in funzione dei campi \mathbf{B} e \mathbf{H}

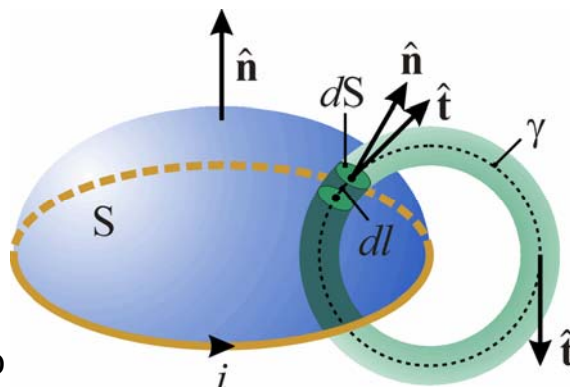
$$W_M = \int_0^\Phi i d\phi$$

- Il flusso concatenato con il circuito è

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S B \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

- L'elemento di area dS individua un tubo di flusso di \mathbf{B} concatenato con il circuito
- Si può esprimere la corrente i in funzione di \mathbf{H} applicando la legge di Ampere ad una linea di campo γ di \mathbf{B} coincidente con l'asse del tubo di flusso

$$i = \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl$$



63

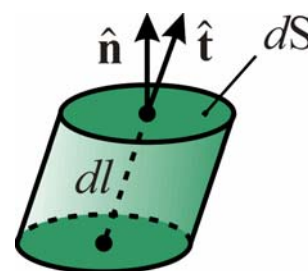
Energia del campo magnetico

- Utilizzando le espressioni di i e Φ e tenendo conto del fatto che il volume di un tratto infinitesimo di tubo di flusso è $d\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS$ si ha

$$\begin{aligned} i d\phi &= \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \int_S dB \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_S \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot dB \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl dS = \int_{\tau_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \end{aligned}$$

- Quindi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \int_0^\Phi i d\phi = \int_{\tau_c}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\tau \quad (\tau_c = \text{regione in cui } \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{H} \text{ sono diversi da zero})$$



- Questa espressione vale anche per mezzi non lineari, purché la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} sia biunivoca (mezzi privi di isteresi)
- Si può dimostrare che queste espressioni, ottenute per un circuito filiforme, valgono anche per distribuzioni di corrente più generali

64

Densità di energia del campo magnetico

- ➔ Si può interpretare come **densità di energia del campo magnetico** la quantità

$$w_M = \frac{dW_M}{d\tau} = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

- Per un mezzo isotropo si ha

$$w_M = \int_0^B H dB$$

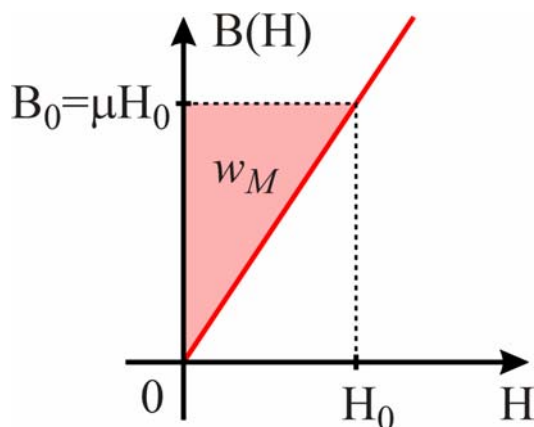
- Se il mezzo è anche lineare ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) la densità di energia può essere espressa come

$$w_M = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

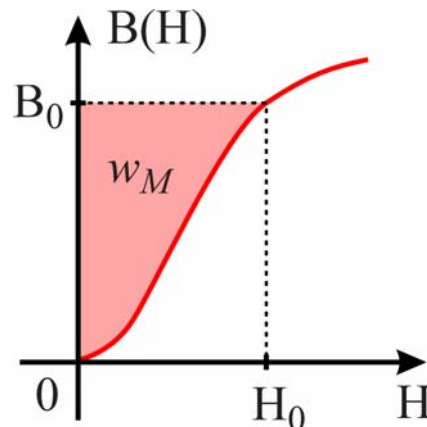
65

Densità di energia del campo magnetico

- w_M corrisponde all'area compresa tra la curva $B(H)$ e l'asse delle ordinate



Mezzo lineare



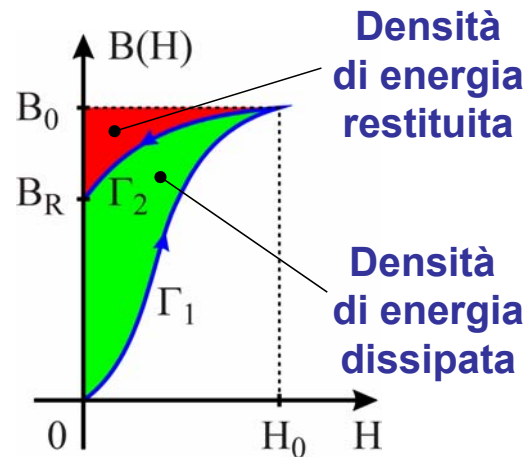
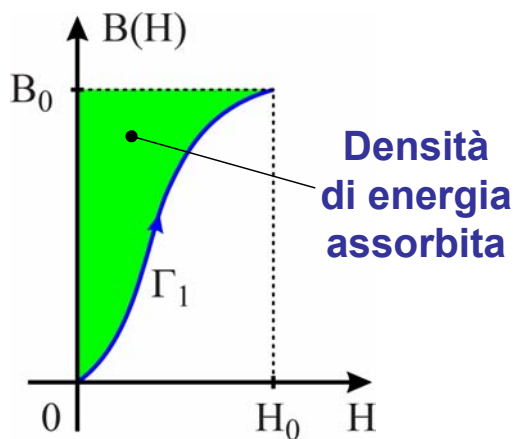
Mezzo non lineare

66

Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Nel caso di un mezzo con isteresi, l'energia spesa per creare il campo (partendo da i e \mathbf{H} nulli) è maggiore di quella che viene restituita se la corrente i , e quindi \mathbf{H} , sono riportati a zero
- ➔ Viene assorbita in modo irreversibile, e quindi dissipata, l'energia per unità di volume

$$w_D = \int_0^{B_0} H dB + \int_{B_0}^{B_R} H dB$$



67

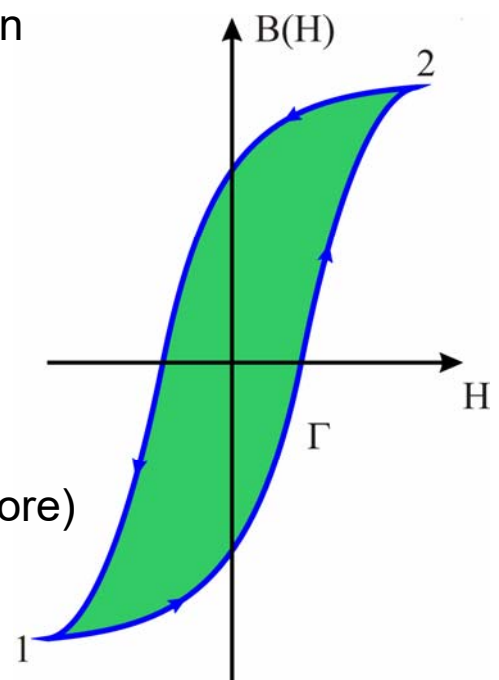
Energia dissipata in un ciclo di isteresi

- Si fa variare periodicamente la corrente in modo che il materiale ferromagnetico sia soggetto a cicli di isteresi
- Complessivamente in ogni ciclo viene assorbita, per unità di volume, l'energia

$$w_D = \oint_{\Gamma} H dB$$

- ➔ Dissipazione di energia (convertita in calore)

- *L'energia per unità di volume dissipata in un ciclo corrisponde all'area delimitata dal ciclo di isteresi*



68

Energia dissipata in un ciclo di isteresi

