Introduzione

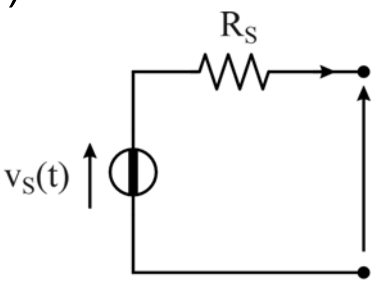
www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 27-2-2012)

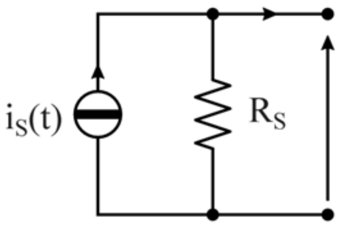
Segnali

- Per segnale si intende una grandezza fisica $s(t)$ variabile nel tempo utilizzata per rappresentare informazioni
  - la variazione nel tempo è fondamentale: il contenuto informativo è rappresentato dal modo in cui $s(t)$ varia nel tempo
  - una grandezza costante o il cui andamento ha caratteristiche note a priori che non cambiano nel tempo (es. andamento sinusoidale) non è in grado di rappresentare informazioni
- L'elettronica si occupa principalmente di sistemi utilizzati per trasmettere ed elaborare segnali elettrici
  - in questo caso le grandezze utilizzate come supporto per le informazioni sono tensioni o (meno frequentemente) correnti

Trasduttori

- I segnali elettrici spesso sono prodotti a partire da segnali di altra natura o sono utilizzati, dopo essere stati elaborati, per generare segnali di natura diversa
- I dispositivi utilizzati per trasformare la natura fisica di un segnale sono detti **trasduttori**
- I trasduttori che producono segnali elettrici possono essere rappresentati mediante circuiti equivalenti di tipo Thévenin (di solito preferiti se R_S è piccola) o di tipo Norton (di solito preferiti se R_S è grande)



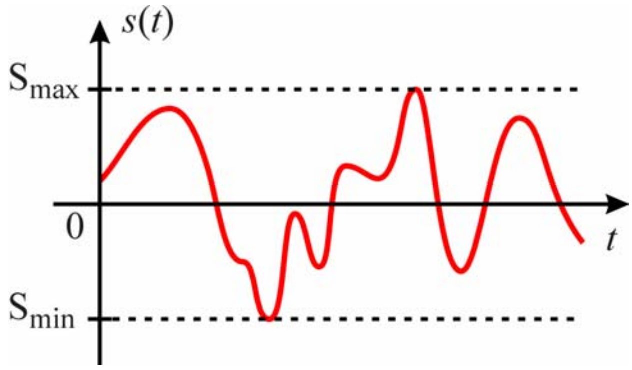


Segnali analogici e digitali

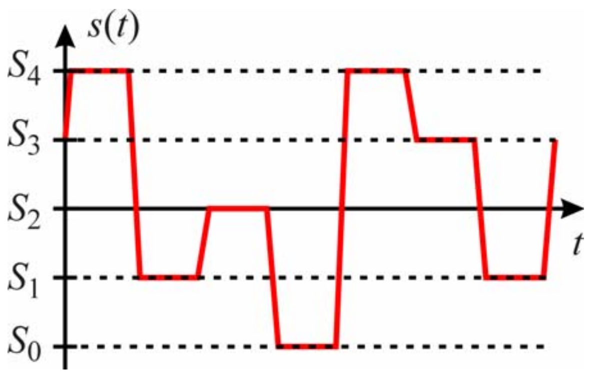
- $s(t)$ = grandezza fisica funzione del tempo che costituisce un segnale
- **Segnale analogico**:
  - $s(t)$ può assumere tutti i valori compresi in un intervallo $[S_{min}\ S_{max}]$ (detto **dinamica del segnale**)
- **Segnale digitale** (o **numerico**):
  - $s(t)$ può assumere solo valori discreti appartenenti ad un insieme finito $\{S_0, S_1, ..., S_{N-1}\}$
  - un caso frequente è costituito dai **segnali binari** che possono assumere solo due valori $\{S_0, S_1\}$

Segnali analogici e digitali

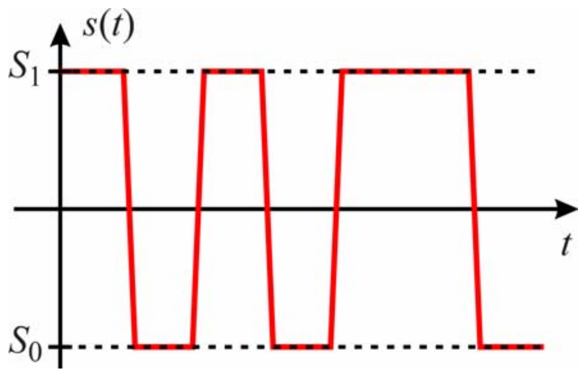
Segnale analogico



Segnale digitale



Segnale digitale binario



Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

- **Segnali a tempo continuo**:
  - sono significativi i valori assunti da $s(t)$ in ogni istante t
- **Segnali a tempo discreto**:
  - sono significativi i valori assunti in un insieme discreto di istanti
  - di solito si considerano istanti equispaziati, separati da un intervallo di tempo T_c (tempo di campionamento)
- I segnali analogici a tempo discreto sono detti segnali campionati
- I segnali digitali sono generalmente a tempo discreto

Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

- La grandezza fisica $s(t)$ che fa da supporto ad un segnale digitale varia nel tempo in modo continuo
- Per convenzione viene attribuito un significato solo ad un numero limitato dei valori che la grandezza $s(t)$ può assumere
- Per facilitare il riconoscimento di questi valori
  - si fa in modo che le transizioni tra i livelli significativi avvengano in tempi molto brevi rispetto ai tempi di permanenza nei vari livelli
  - il segnale $s(t)$ viene osservato in istanti discreti, lontano dalle transizioni

Distorsione e disturbi

- L'andamento del segnale all'uscita di un sistema di trasmissione o elaborazione normalmente non corrisponde esattamente a quello desiderato a causa di fenomeni non eliminabili costituiti da
  - deformazioni del segnale dovute al comportamento non ideale del sistema (➡ **distorsione**)
  - segnali indesiderati che si sovrappongono al segnale utile dovuti a interferenze prodotte dal altri sistemi (➡ **disturbi**) o generati all'interno del sistema stesso (➡ **rumore**)
- In queste condizioni il segnale in uscita può essere rappresentato nella forma

$$s(t) = s_0(t) + d(t)$$

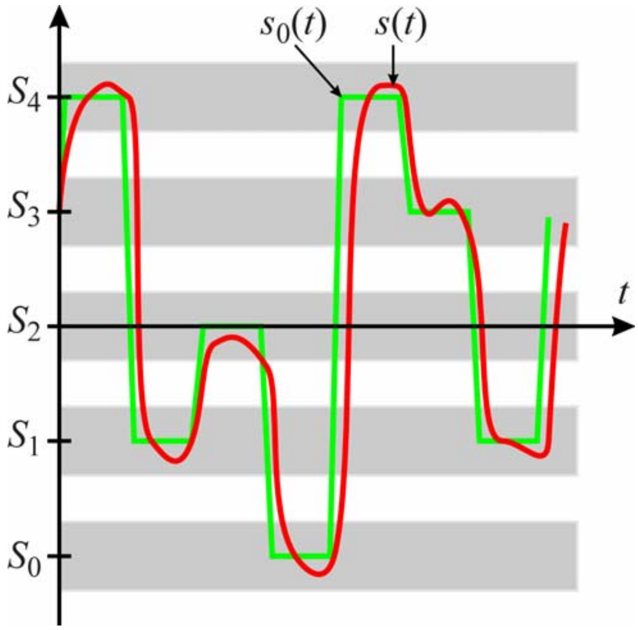
$s_0(t)$ = segnale in uscita in condizioni ideali
$d(t)$ = contributo degli effetti indesiderati

Vantaggi dei segnali digitali

- Nel caso di segnali analogici affinché l'informazione contenuta nel segnale sia riconoscibile, occorre fare in modo che $d(t)$ sia molto piccolo rispetto al segnale

- Nel caso di segnali digitali è possibile riconoscere i livelli significativi e rigenerare il segnale anche in presenza di distorsioni e disturbi di entità maggiore

- In pratica ciò può essere realizzato interpretando come corrispondenti al valore S_i tutti i valori di $s(t)$ compresi in un intervallo centrato su S_i



Elaborazione dei segnali

- **Elaborazione statica**: in ogni istante t l'uscita dipende unicamente dal valore all'istante t dell'ingresso
  - ➡ il circuito è di tipo resistivo

- **Elaborazione dinamica**: l'uscita ad un istante t dipende dal valore dell'ingresso in istanti precedenti t
  - ➡ il circuito è di tipo dinamico

Elaborazione dei segnali

- **Elaborazione lineare**:
  - l'uscita è una funzione lineare dell'ingresso:
    - $s_{\mathrm{out1}}(t)$ = uscita corrispondente all'ingresso $s_{\mathrm{in1}}(t)$
    - $s_{\mathrm{out2}}(t)$ = uscita corrispondente all'ingresso $s_{\mathrm{in2}}(t)$
    - a_1, a_2 = costanti reali
    - ➡ l'uscita corrispondente a $s_{\mathrm{in}}(t) = a_1 s_{\mathrm{in1}}(t)+a_2 s_{\mathrm{in2}}(t)$ è $s_{\mathrm{out}}(t) = a_1 s_{\mathrm{out1}}(t)+a_2 s_{\mathrm{out2}}(t)$
  - ➡ vale il principio di sovrapposizione degli effetti
- **Elaborazione non lineare**:
  - l'uscita è una funzione non lineare dell'ingresso
  - ➡ non vale il principio di sovrapposizione

Circuiti in regime sinusoidale

- La risposta a regime di un circuito dinamico lineare con ingressi sinusoidali isofrequenziali può essere determinata mediante il metodo simbolico
- Le trasformate di Steinmetz delle risposte possono essere espresse come combinazioni lineari delle trasformate degli ingressi
- I coefficienti delle combinazioni sono funzioni complesse della frequenza e sono detti **funzioni di rete**

$$\mathbf{V}_{\mathrm{out}\,i} = \sum_{k=1}^{N_V} \boldsymbol{\alpha}_{ik}(\omega)\mathbf{V}_{\mathrm{in}\,k} + \sum_{k=1}^{N_I} \mathbf{z}_{ik}(\omega)\mathbf{I}_{\mathrm{in}\,k}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\mathbf{I}_{\mathrm{out}\,i} = \sum_{k=1}^{N_V} \mathbf{y}_{ik}(\omega)\mathbf{V}_{\mathrm{in}\,k} + \sum_{k=1}^{N_I} \boldsymbol{\beta}_{ik}(\omega)\mathbf{I}_{\mathrm{in}\,k}$$

Funzioni di rete

- Ciascuna funzione di rete rappresenta il rapporto tra la trasformata di una risposta e la trasformata di un ingresso valutato con tutti gli altri ingressi azzerati

$$\boldsymbol{\alpha}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_{\text{out}\,i}}{\mathbf{V}_{\text{in}\,k}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h}} \qquad \mathbf{z}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{V}_{\text{out}\,i}}{\mathbf{I}_{\text{in}\,k}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h\neq k}}$$

$$\mathbf{y}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_{\text{out}\,i}}{\mathbf{V}_{\text{in}\,k}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h\neq k \\ \mathbf{I}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h}} \qquad \boldsymbol{\beta}_{ik}(\omega) = \left.\frac{\mathbf{I}_{\text{out}\,i}}{\mathbf{I}_{\text{in}\,k}}\right|_{\substack{\mathbf{V}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h \\ \mathbf{I}_{\text{in}\,h}=0\ \forall h\neq k}}$$

Funzioni di rete

- Il modulo della funzione di rete rappresenta il rapporto tra le ampiezze della risposta e dell'ingresso
- L'argomento della funzione di rete rappresenta la differenza tra la fase della risposta e la fase dell'ingresso (sfasamento della risposta rispetto all'ingresso)

Ingresso $s_{\text{in}}(t) = S_{\text{inM}}\cos(\omega t + \varphi_{\text{in}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\text{in}} = \mathfrak{S}[s_{\text{in}}(t)] = S_{\text{inM}} e^{j\varphi_{\text{in}}}$

Uscita $s_{\text{out}}(t) = S_{\text{outM}}\cos(\omega t + \varphi_{\text{out}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\text{out}} = \mathfrak{S}[s_{\text{out}}(t)] = S_{\text{outM}} e^{j\varphi_{\text{out}}}$

Funzione di rete

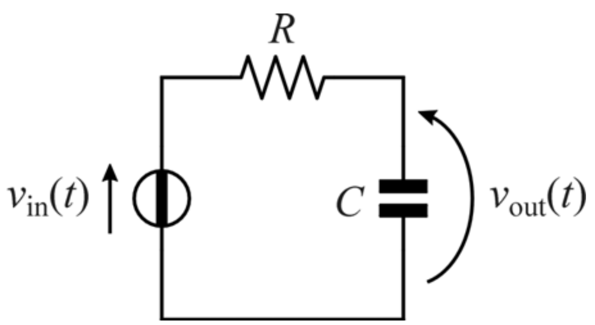
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{S}_{\text{out}}}{\mathbf{S}_{\text{in}}} \qquad |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{|\mathbf{S}_{\text{out}}|}{|\mathbf{S}_{\text{in}}|} = \frac{S_{\text{outM}}}{S_{\text{inM}}}$$

$$\arg[\mathbf{H}(\omega)] = \arg[\mathbf{S}_{\text{out}}] - \arg[\mathbf{S}_{\text{in}}] = \varphi_{\text{out}} - \varphi_{\text{in}}$$

Funzioni di immettenza e funzioni di trasferimento

- Le impedenze e le ammettenze sono casi particolari di funzioni di rete (**funzioni di immettenza**) che mettono in relazione le trasformate della tensione e della corrente di un bipolo
- Le altre funzioni di rete, che mettono in relazione tensioni o correnti relative a lati diversi del circuito, sono dette **funzioni di trasferimento**

Esempio



$$R = 1000\ \Omega$$
$$C = 100\ \text{nF}$$
$$v_{in}(t) = V_{inM}\cos(\omega t + \varphi_{in})$$

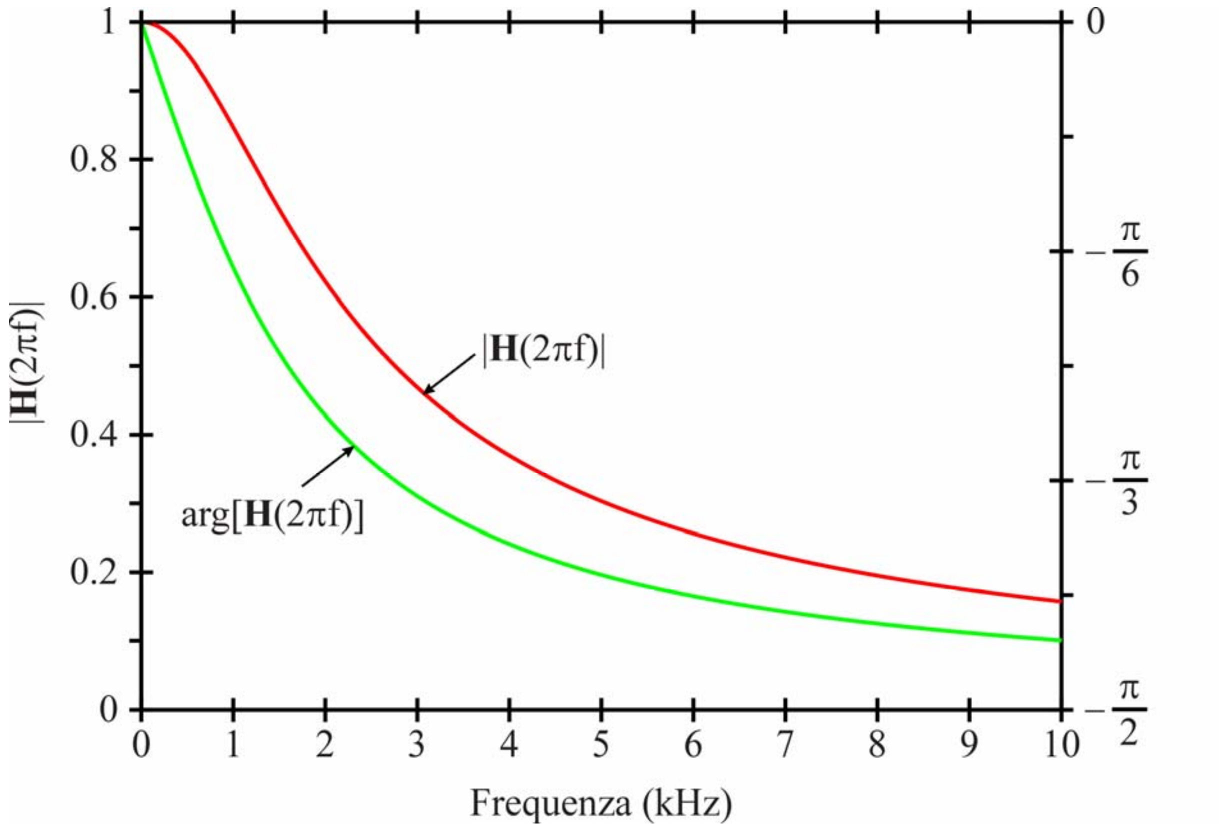
$$\mathbf{V}_{out} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\mathbf{V}_{in} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\mathbf{V}_{in} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}\mathbf{V}_{in} \qquad \tau = RC = 10^{-4}\ \text{s}$$

- La funzione di rete che mette in relazione i fasori di v_{in} e v_{out} è

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\arg[\mathbf{H}(\omega)] = -\text{arctg}(\omega\tau)$$

Esempio



Risposta in frequenza

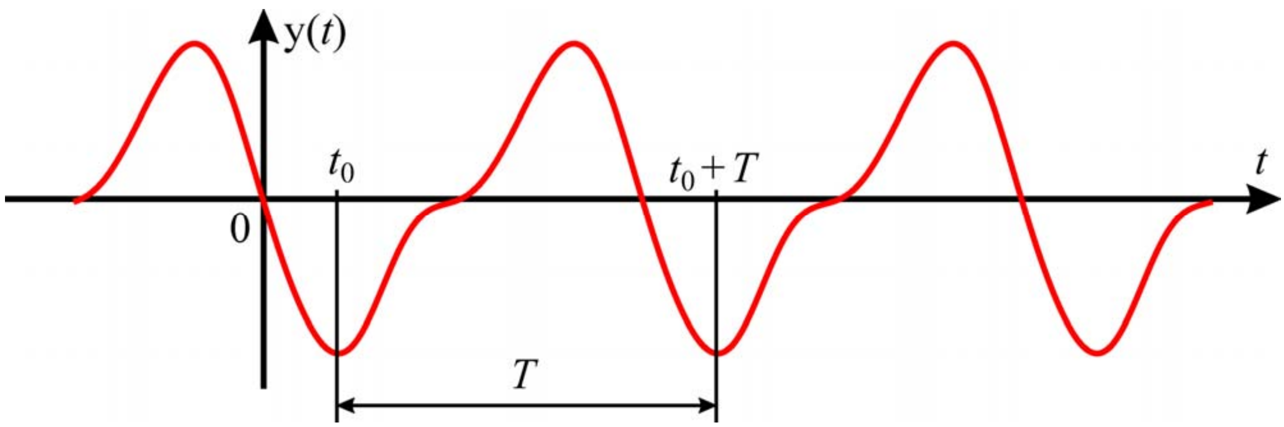
- L'andamento delle funzioni di rete di un circuito al variare di ω (o di f) definisce la **risposta in frequenza** del circuito
- Dalla conoscenza della risposta in frequenza di un circuito lineare dinamico (valutata in condizioni di regime sinusoidale) è possibile ricavare informazioni sul comportamento del circuito in presenza di ingressi di tipo più generale

Funzioni periodiche

- Si dice che una funzione $y(t)$ è periodica se esiste un $T > 0$ tale che per ogni t e per ogni k intero

  $$y(t + kT) = y(t)$$

- Il più piccolo valore di T per cui è soddisfatta la relazione precedente è detto **periodo** di $y(t)$



Serie di Fourier

- Si considera una funzione $y(t)$ periodica di periodo T che soddisfa le seguenti **condizioni di Dirichlet**
  - $y(t)$ ha un numero finito di discontinuità all'interno di un periodo
  - $y(t)$ ha un numero finito di massimi e di minimi all'interno di un periodo
  - l'integrale sul periodo del modulo di $y(t)$ è finito

➨ $y(t)$ può essere rappresentata dalla **serie di Fourier**

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)$$

- $\omega_0 = 2\pi / \mathrm{T}$ è detta **pulsazione fondamentale**

(*le condizioni di Dirichlet sono sufficienti a garantire l'esistenza della serie di Fourier e normalmente sono soddisfatte dalle funzioni che si incontrano nelle applicazioni pratiche*)

Serie di Fourier

- I coefficienti a_0, a_k e b_k sono

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{y}(t)dt$$ (= valore medio sul periodo)

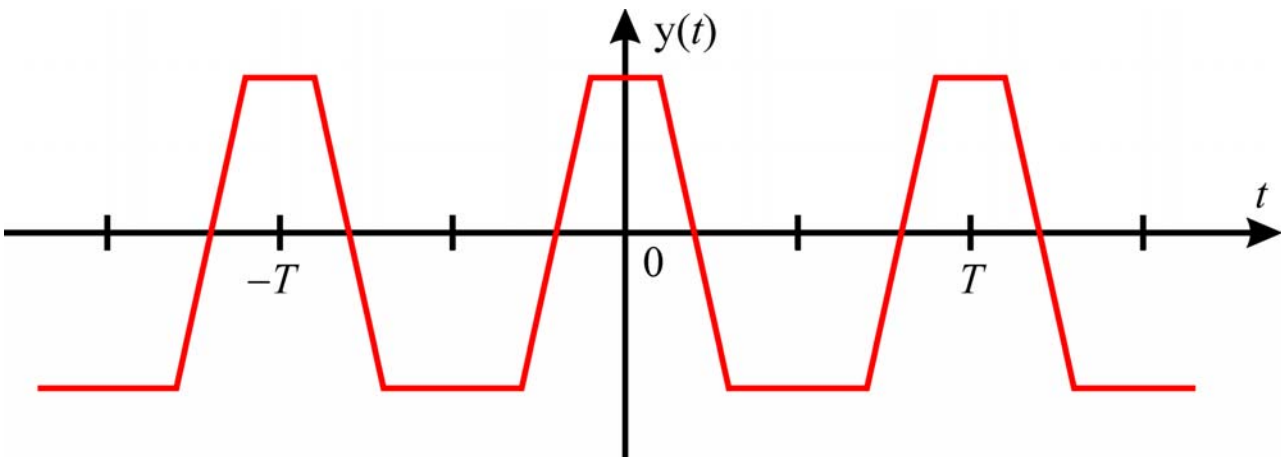
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{y}(t)\cos(k\omega_0 t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{y}(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

- Le funzioni con valore medio sul periodo nullo, per cui si annulla il coefficiente a_0, sono dette **alternate**
- Altri coefficienti della serie di Fourier si annullano per funzioni dotate di particolari simmetrie

Casi particolari

- Se $\mathrm{y}(t)$ è **pari**: $\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(-t)$
  - ➡ $b_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini coseno

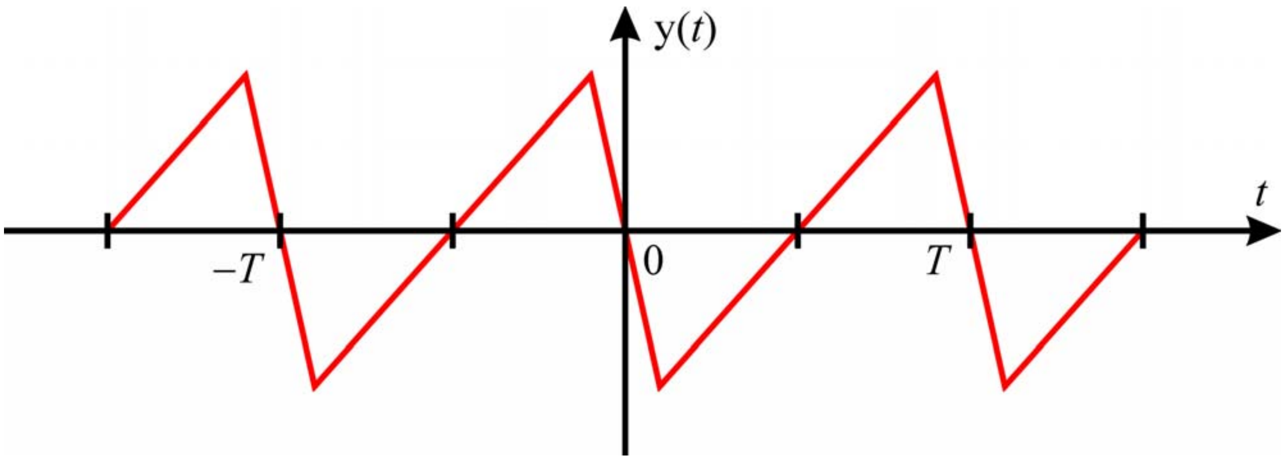
Funzione pari



Casi particolari

- Se y(t) è **dispari**: $y(t) = -y(-t)$
  - ➡ $a_0 = 0$, $a_k = 0$ per ogni k
  - la serie di Fourier contiene solo i termini seno
  - una funzione dispari è sempre alternata

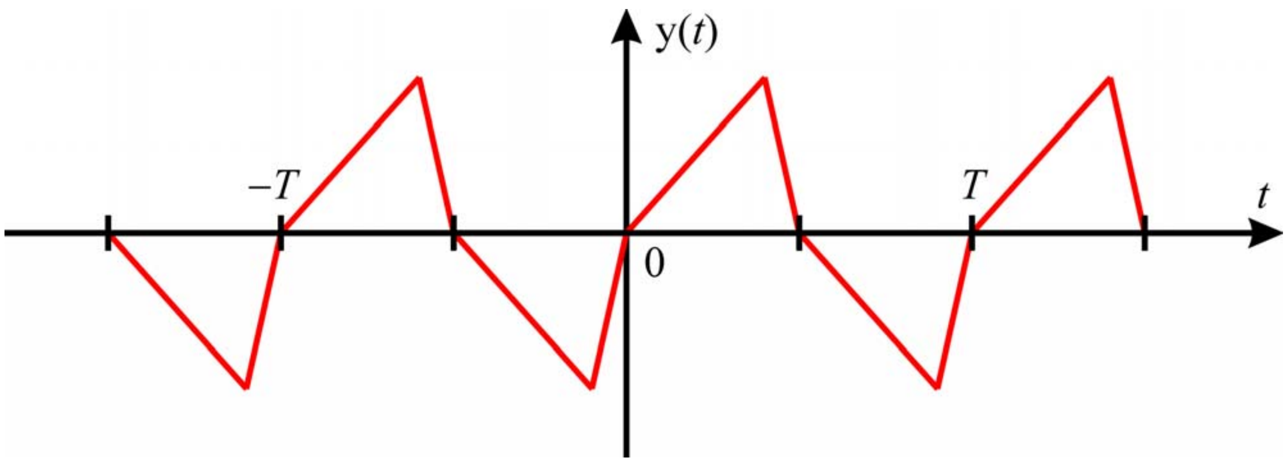
Funzione dispari



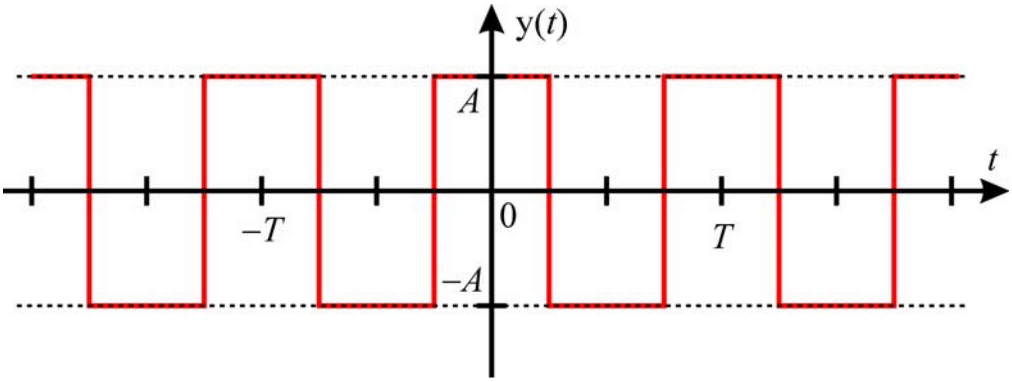
Casi particolari

- Se y(t) ha **simmetria di semionda**: $y(t) = -y(t+T/2)$
  - ➡ $a_0 = 0$, $a_k = b_k = 0$ per k pari
  - la serie di Fourier contiene solo i termini di ordine dispari
  - una funzione con simmetria di semionda è sempre alternata

Funzione con simmetria di semionda

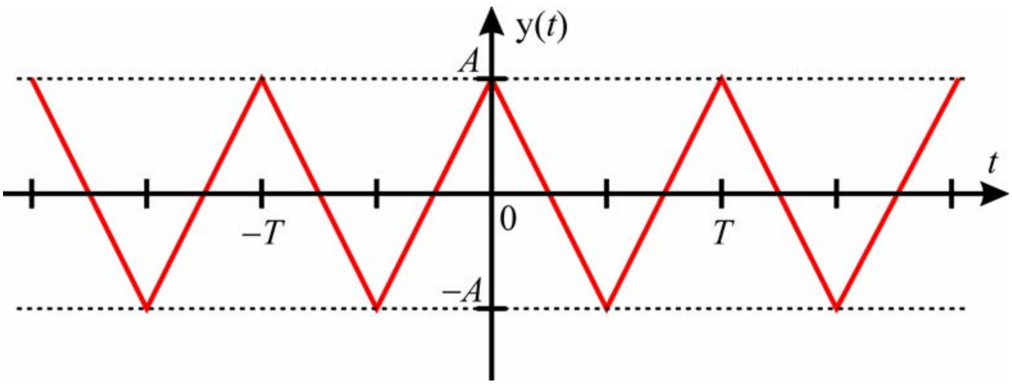


Esempio: onda quadra



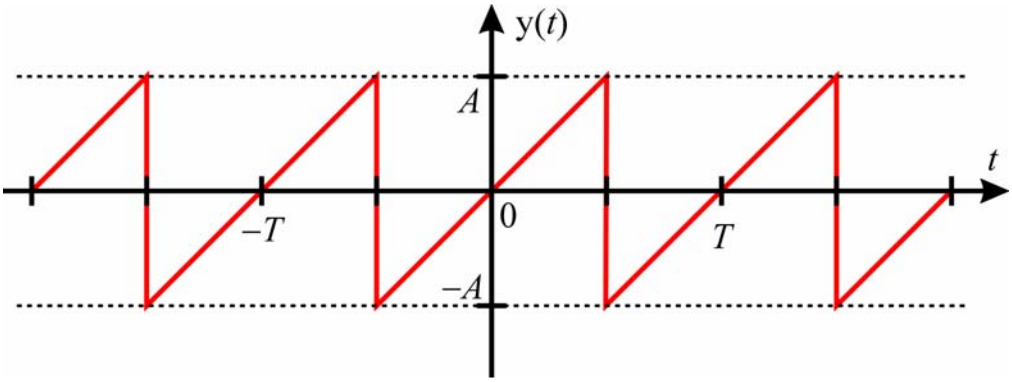
$$y(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos[(2k-1)\omega_0 t]}{2k-1}$$

Esempio: onda triangolare



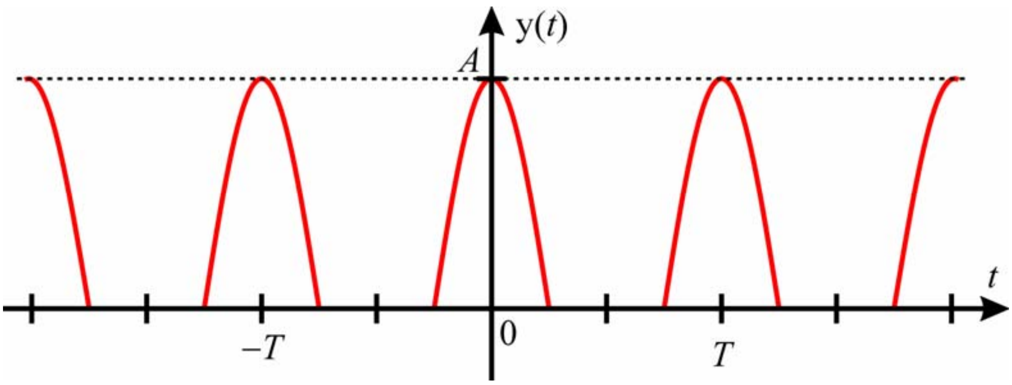
$$y(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)\omega_0 t]}{(2k-1)^2}$$

Esempio: onda a dente di sega



$$y(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

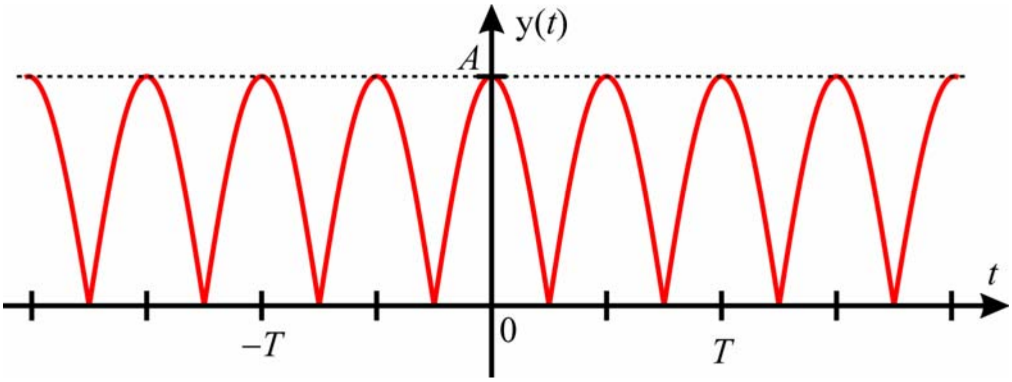
Esempio: sinusoide raddrizzata a semionda



$$y(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t) & \text{per } -\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{\omega_0} < \omega_0 t < \frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(2k\omega_0 t)}{4k^2-1}$$

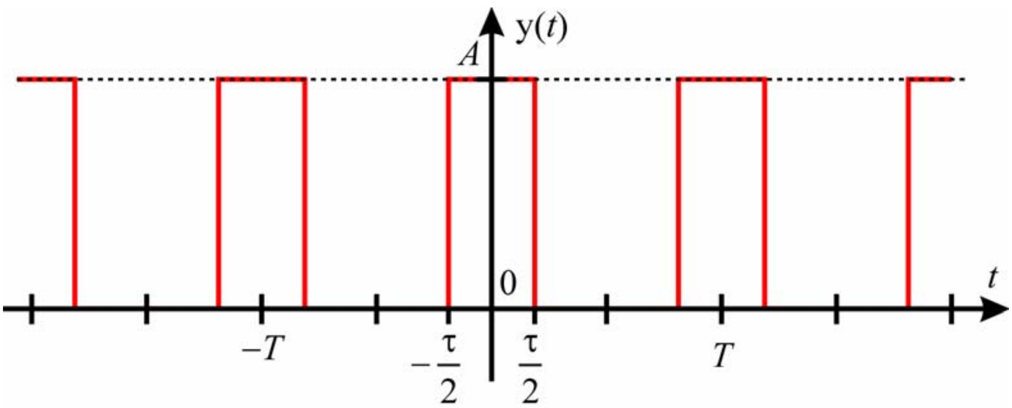
Esempio: sinusoide raddrizzata a onda intera



$$y(t) = \left|A\cos(\omega t)\right|$$

$$y(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(k\omega_0 t)}{4k^2 - 1}$$

Esempio: treno di impulsi rettangolari



$$y(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)\cos(k\omega_0 t)$$

Seconda forma della serie di Fourier

- Utilizzando l'identità

$$A_k \cos\varphi_k \cos(k\omega_0 t) - A_k \operatorname{sen}\varphi_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

è possibile esprimere la serie di Fourier nella forma

$$\mathrm{y}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

dove

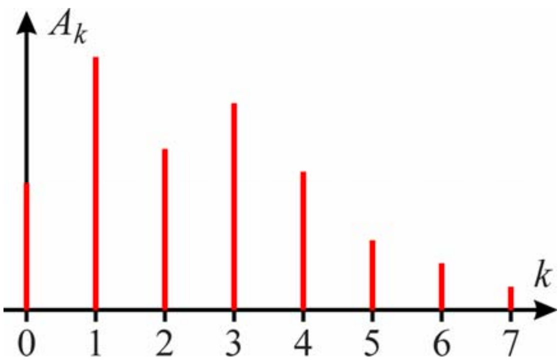
$$A_0 = a_0$$

$$A_k \cos\varphi_k = a_k \qquad A_k \operatorname{sen}\varphi_k = -b_k$$

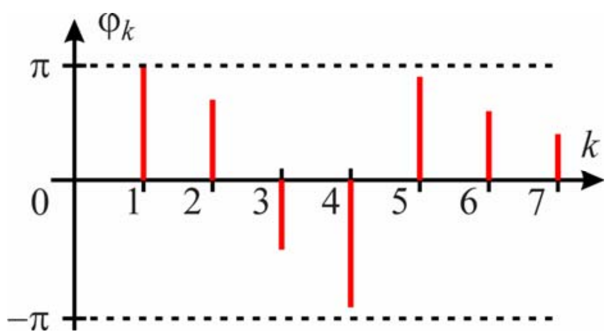
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \operatorname{tg}(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

Spettro di ampiezza e spettro di fase

- La costante A_0 è detta **componente continua** di $\mathrm{y}(t)$
- La funzione sinusoidale $A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ è detta **componente fondamentale** o **prima armonica** di $\mathrm{y}(t)$
- La funzione $A_k\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ è detta ***k*-esima armonica** di $\mathrm{y}(t)$
- Gli andamenti di A_k e φ_k in funzione di k definiscono, rispettivamente lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase** di $\mathrm{y}(t)$



spettro di ampiezza



spettro di fase

Forma esponenziale della serie di Fourier

- Una terza forma (esponenziale) della serie di Fourier può essere ottenuta a partire dalla precedente esprimendo la funzione coseno come combinazione di esponenziali complesse

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}}{2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

- I coefficienti della serie sono

$$C_0 = A_0$$

$$C_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} \qquad \text{per } k > 0$$

$$C_k = C_{-k}^{*} \qquad \text{per } k < 0$$

Forma esponenziale della serie di Fourier

- Facendo uso della formula di Eulero e delle espressioni dei coefficienti a_k e b_k è possibile determinare le espressioni dei coefficienti C_k

$$C_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{A_k}{2}(\cos\varphi_k + j \operatorname{sen}\varphi_k) = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos(k\omega_0 t)dt - j\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)dt\right] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

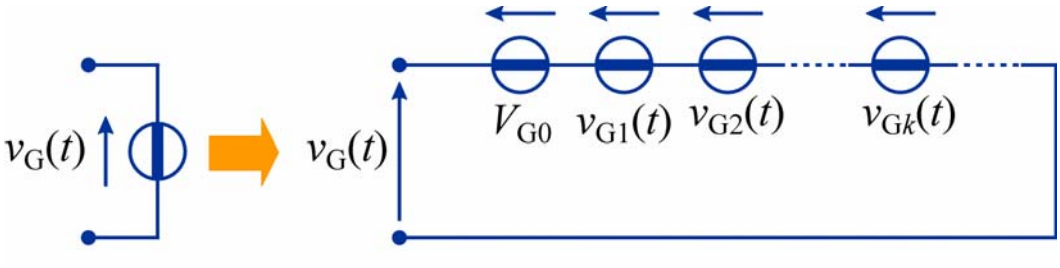
- Si può notare che anche l'espressione di C_0 costituisce un caso particolare dell'espressione precedente

$$C_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-j0\cdot\omega_0 t}dt$$

Generatori periodici

- Un generatore di tensione $v_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in serie
  - un generatore di tensione costante V_{G0} pari al valore medio di $v_G(t)$
  - infiniti generatori di tensione sinusoidale, $v_{Gk}(t)$ $(k = 1,\ldots,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

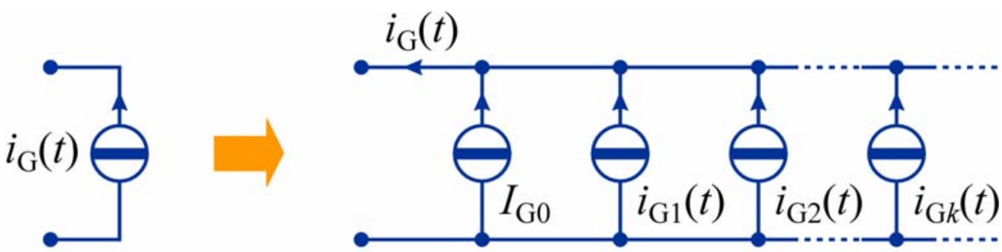
$$v_G(t) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{Gk}\cos(k\omega t + \alpha_k) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{Gk}(t)$$



Generatori periodici

- Un generatore di corrente $i_G(t)$, periodica con periodo T, può essere rappresentato collegando in parallelo
  - un generatore di tensione costante I_{G0} pari al valore medio di $i_G(t)$
  - infiniti generatori di corrente sinusoidale, $i_{Gk}(t)$ $(k = 1,\ldots,\infty)$, con pulsazione $k\omega = 2k\pi/T$

$$i_G(t) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} I_{Gk}\cos(k\omega t + \beta_k) = I_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} i_{Gk}(t)$$

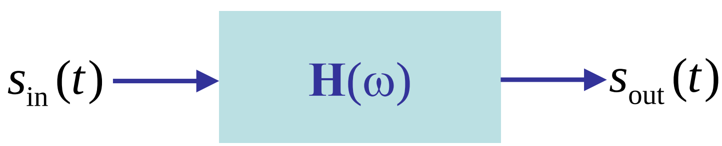


Circuiti lineari in regime periodico

- Si considera un circuito lineare alimentato da generatori periodici con periodo T
- Se il circuito è asintoticamente stabile, in condizioni di regime tutte le tensioni e le correnti sono periodiche con periodo T
(➡ **regime periodico**)
- Se si rappresentano nel modo appena visto i generatori, è possibile determinare la risposta a regime mediante il principio di sovrapposizione
  - ➡ Si valutano separatamente i contributi dovuti ai generatori che hanno la stessa pulsazione
- Normalmente è possibile approssimare le funzioni periodiche utilizzando un numero finito N di componenti armoniche
  - ➡ La determinazione della riposta periodica richiede
    - un'analisi in continua
    - N analisi di risposte in regime sinusoidale

Funzioni di trasferimento

- Si considera un circuito lineare con un solo ingresso e una sola uscita in condizioni di regime periodico



$$s_{\text{in}}(t) = S_{\text{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{\text{in}\,k} \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_{\text{in}\,k}\right)$$

$$s_{\text{out}}(t) = S_{\text{out}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{\text{out}\,k} \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_{\text{out}\,k}\right)$$

- I fasori delle k-esime armoniche dell'ingresso e dell'uscita sono

$$\mathbf{S}_{\text{in}\,k} = S_{\text{in}\,k} e^{j\varphi_{\text{in}\,k}} \qquad \mathbf{S}_{\text{out}\,k} = S_{\text{out}\,k} e^{j\varphi_{\text{out}\,k}}$$

Funzioni di trasferimento

- La relazione tra $\mathbf{S}_{\mathrm{in}k}$ e $\mathbf{S}_{\mathrm{out}k}$ può essere espressa nella forma

$$\mathbf{S}_{\mathrm{out}\,k} = \mathbf{H}(k\omega_0)\mathbf{S}_{\mathrm{in}\,k}$$

$\mathbf{H}(\omega)$ = funzione di trasferimento

- Quindi si ha

$$S_{\mathrm{out}\,k} = \left|\mathbf{S}_{\mathrm{out}\,k}\right| = \left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| \cdot \left|\mathbf{S}_{\mathrm{in}\,k}\right| = \left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| S_{\mathrm{in}\,k}$$

$$\varphi_{\mathrm{out}\,k} = \arg(\mathbf{S}_{\mathrm{out}\,k}) = \arg(\mathbf{S}_{\mathrm{in}\,k}) + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)] = \varphi_{\mathrm{in}\,k} + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)]$$

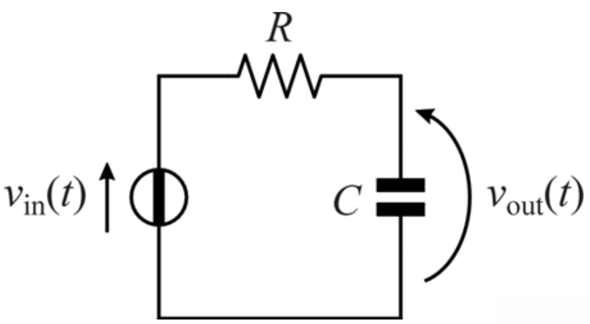
- Inoltre, per le componenti continue vale la relazione

$$S_{\mathrm{out}\,k} = \mathrm{H}(0) S_{\mathrm{in}\,k}$$

➡ La serie di Fourier dell'uscita si ottiene sovrapponendo i contributi dovuti alle singole armoniche dell'ingresso

$$s_{\mathrm{out}}(t) = \mathrm{H}(0) S_{\mathrm{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| S_{\mathrm{in}\,k} \cos\{k\omega_0 t + \varphi_{\mathrm{in}\,k} + \arg[\mathbf{H}(k\omega_0)]\}$$

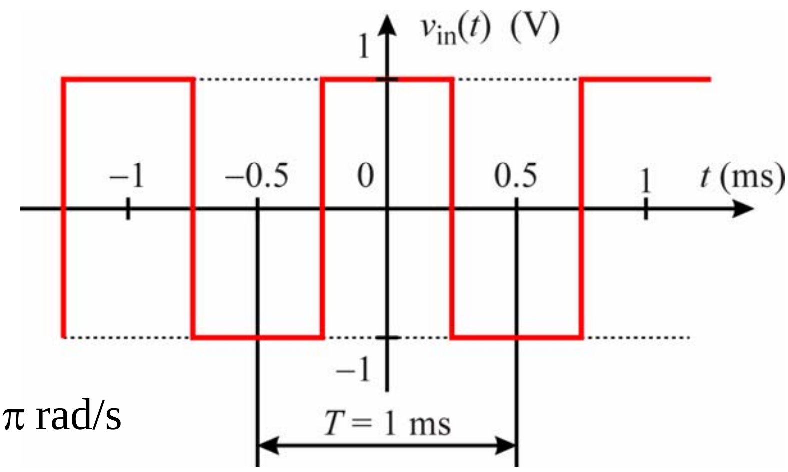
Esempio



$R = 1000\ \Omega$

$C = 100\ \mathrm{nF}$

Si vuole determinare la risposta del circuito a un ingresso avente questo andamento



$T = 1\ \mathrm{ms} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2000\,\pi\ \mathrm{rad/s}$

$\mathrm{f}_0 = 1\ \mathrm{kHz}$

Esempio

- Lo sviluppo in serie di Fourier dell'ingresso è

$$v_{\text{in}}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos[(2k-1)\omega_0 t]}{2k-1}$$

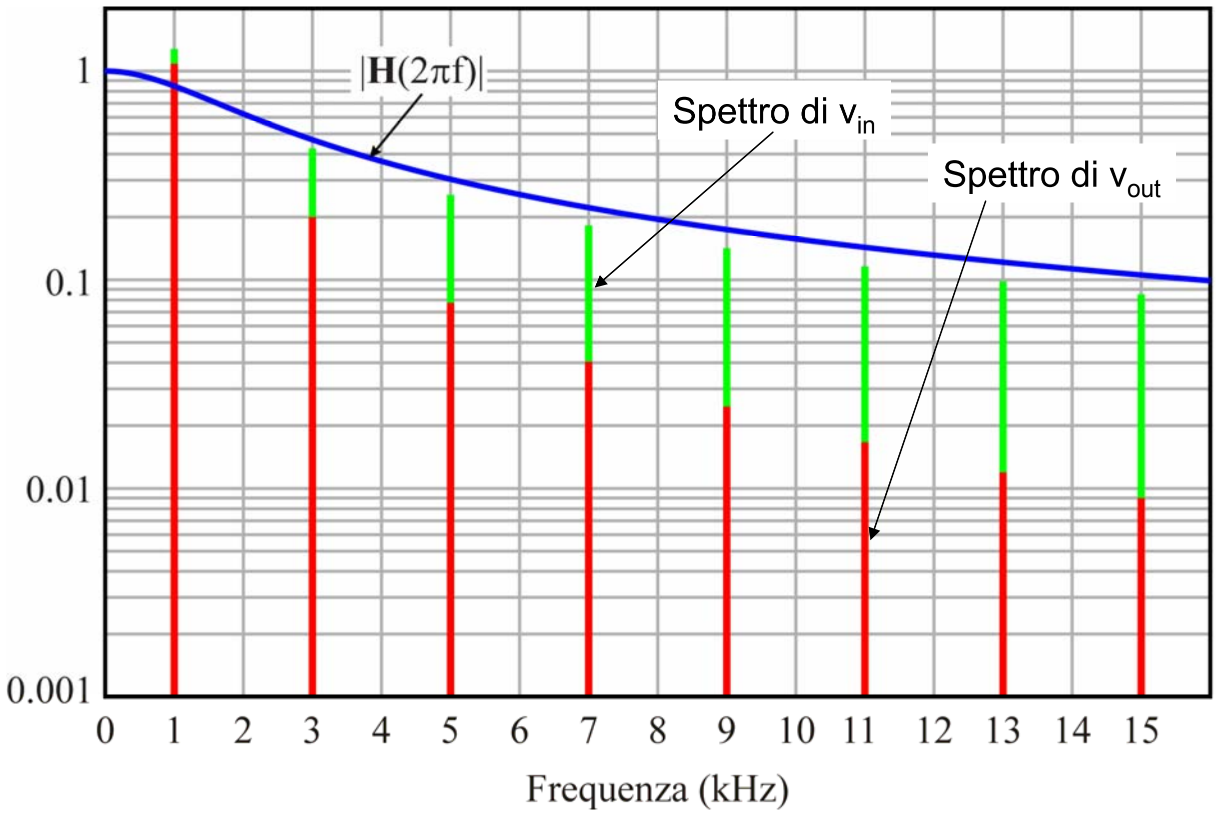
- Il modulo e l'argomento della funzione di trasferimento sono

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \qquad \arg[\mathbf{H}(\omega)] = -\operatorname{arctg}(\omega\tau) \qquad (\tau = RC = 0.1\,\text{ms})$$

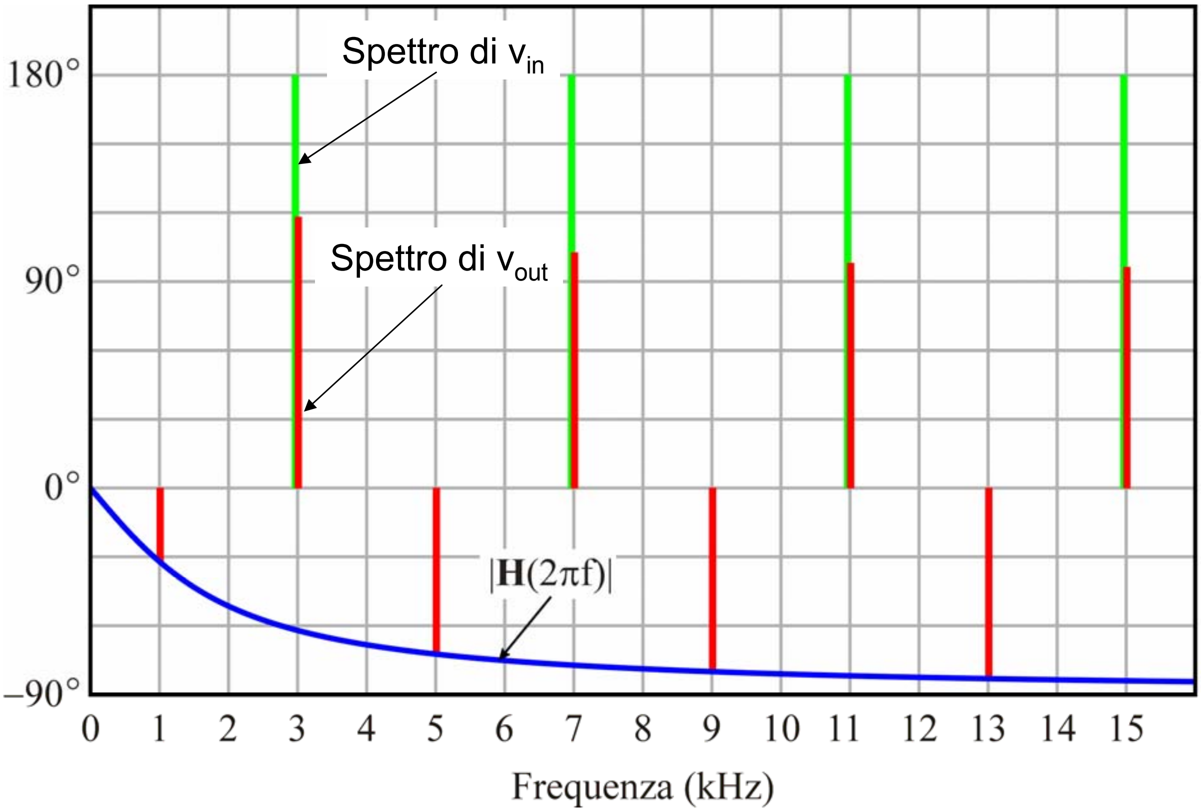
➡ Quindi lo sviluppo in serie di Fourier della risposta è

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos\{(2k-1)\omega_0 t - \operatorname{arctg}[(2k-1)\omega_0\tau]\}}{\sqrt{1+[(2k-1)\omega_0\tau]^2}\,(2k-1)}$$

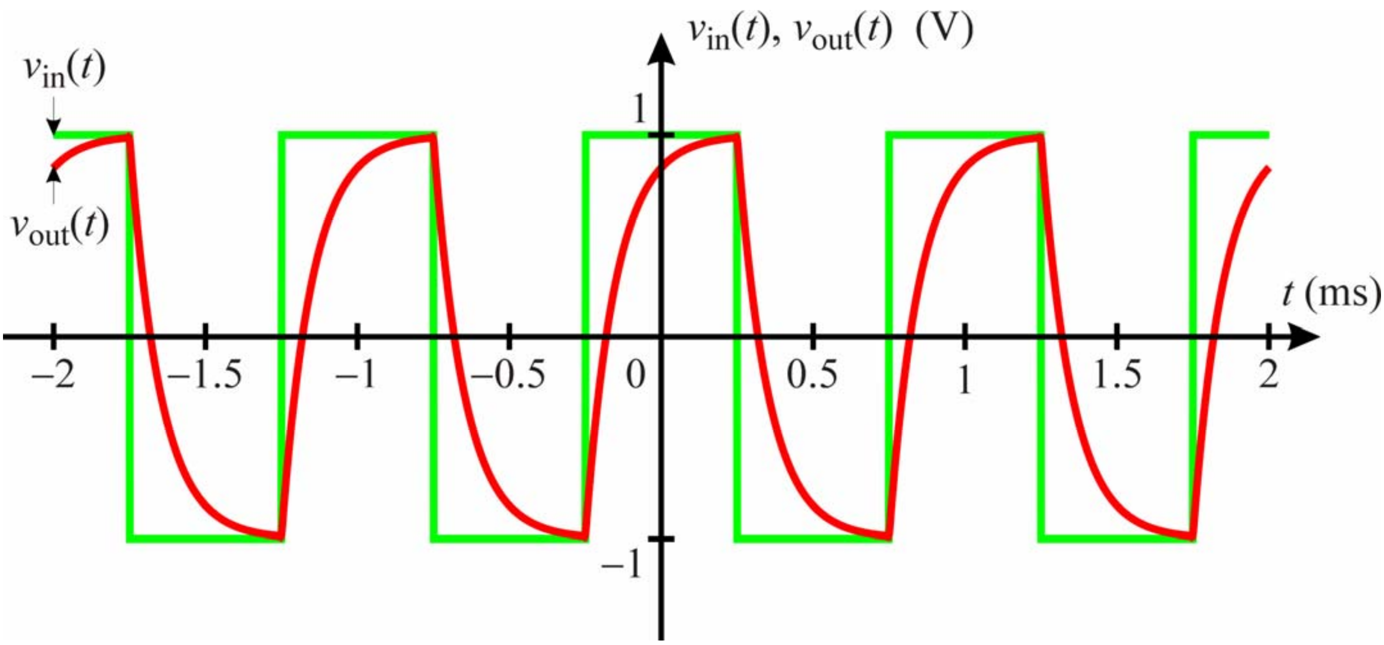
Esempio – spettro di ampiezza



Esempio – spettro di fase



Esempio – tensioni in ingresso e in uscita

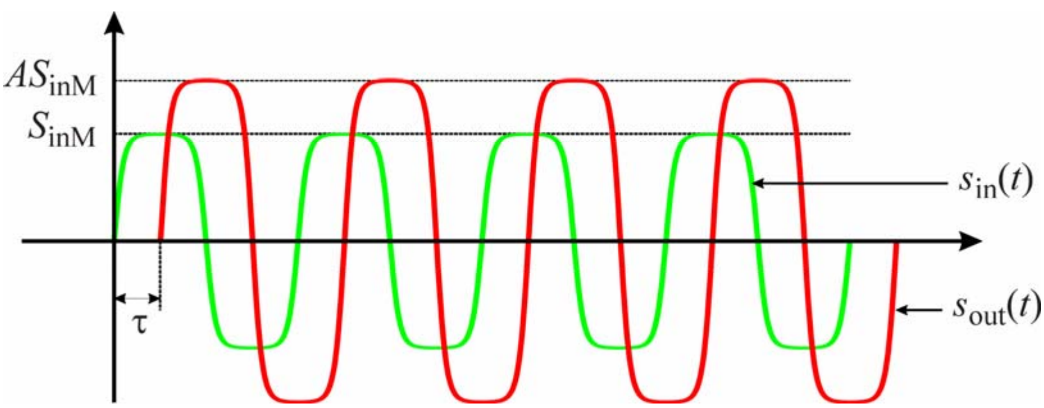


Condizioni di non distorsione

- In un circuito lineare resistivo la risposta è proporzionale all'ingresso
- ➨ L'ingresso e la risposta hanno la stessa "forma"
- Nel caso di un circuito lineare dinamico la forma d'onda della risposta può essere diversa da quella dell'ingresso
- Questa distorsione in alcuni casi può rappresentare un effetto desiderato, cioè una particolare elaborazione che si vuole compiere sul segnale
- In altri casi la distorsione rappresenta un effetto indesiderato
  - in particolare i circuiti resistivi costituiscono un caso ideale
  - in tutti i circuiti sono presenti effetti dinamici (reattivi) che in molti casi possono essere resi trascurabili, ma non possono essere completamente eliminati

Condizioni di non distorsione

- La forma d'onda dell'ingresso è ancora riconoscibile in uscita se i segnali differiscono al più per
  - un fattore di proporzionalità A
  - una traslazione nel tempo (ritardo) τ



$$s_{out}(t) = As_{in}(t-\tau)$$

Condizioni di non distorsione

- Se l'ingresso è rappresentato mediante la serie di Fourier

$$s_{\text{in}}(t) = S_{\text{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{\text{in}\,k} \cos\left[k\omega_0 t + \varphi_{\text{in}\,k}\right]$$

affinché la risposta non sia distorta deve essere

$$s_{\text{out}}(t) = AS_{\text{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} AS_{\text{in}\,k} \cos\left[k\omega_0 (t-\tau) + \varphi_{\text{in}\,k}\right]$$

- Ingresso e uscita sono legati dalla relazione

$$s_{\text{out}}(t) = \mathrm{H}(0) S_{\text{in}\,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| S_{\text{in}\,k} \cos\left\{k\omega_0 t + \varphi_{\text{in}\,k} + \arg\left[\mathbf{H}(k\omega_0)\right]\right\}$$

➡ La funzione di rete deve soddisfare le condizioni

$$\left|\mathbf{H}(k\omega_0)\right| = \frac{S_{\text{out}\,k}}{S_{\text{in}\,k}} = |A|$$

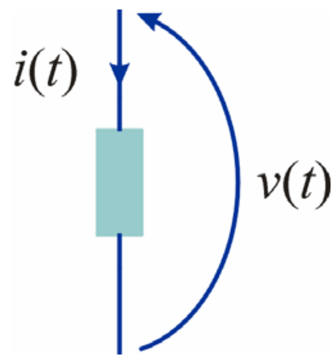
$$\arg\left[\mathbf{H}(k\omega_0)\right] = \varphi_{\text{out}\,k} - \varphi_{\text{in}\,k} = \begin{cases} -k\omega_0\tau & A > 0 \\ -k\omega_0\tau + \pi & A < 0 \end{cases}$$

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- Condizioni di regime periodico con pulsazione fondamentale ω_0

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_{\mathrm{V}k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_{\mathrm{I}k})$$



- Si indica con

$$\varphi_k = \varphi_{\mathrm{V}k} - \varphi_{\mathrm{I}k}$$

lo sfasamento tra le *k*-esime componenti armoniche della tensione e della corrente

Potenza assorbita da un bipolo in regime periodico

- La potenza istantanea assorbita dal bipolo è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_{Vk})\cos(k\omega_0 t + \varphi_{Ik}) +$$
$$+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_{Ik}) + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_{Vk}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{\infty} V_k I_h \cos(k\omega_0 t + \varphi_{Vk})\cos(h\omega_0 t + \varphi_{Ih})$$

- Il secondo addendo può essere posto anche nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_{Vk} - \varphi_{Ik}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(2k\omega_0 t + \varphi_{Vk} + \varphi_{Ik})$$

➡ La potenza istantanea è costituita da un termine costante pari a

$$V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos\varphi_k$$

e da termini oscillanti aventi valore medio sul periodo uguale a zero

Potenza attiva in regime periodico

- La **potenza attiva** è definita come valore medio nel periodo della potenza istantanea (e quindi coincide con il termine costante)

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)i(t)dt = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos\varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

- Nell'espressione compaiono solo prodotti tra armoniche della tensione e della corrente dello stesso ordine k

➡ *La potenza attiva è pari alla somma delle potenze attive associate alle singole componenti armoniche*

Valore efficace

- Il valore efficace o valore r.m.s. (*root mean square*) di una grandezza periodica $s(t)$ di periodo T è definito come

$$S_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt}$$

- Nel caso di una funzione sinusoidale con ampiezza S_{M} il valore efficace è

$$S_{\mathrm{rms}} = \frac{S_{\mathrm{M}}}{\sqrt{2}}$$

- Nel caso di una funzione periodica il valore efficace può essere determinato a partire dai valori efficaci delle componenti armoniche

Valore efficace della serie di Fourier

- Per determinare il valore efficace occorre, in primo luogo, valutare il quadrato della serie di Fourier

$$s^2(t) = \left[S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \right]^2 =$$

$$= S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k^2 \cos^2(k\omega_0 t + \varphi_k) + 2S_0 \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq k}}^{\infty} S_k S_h \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)\cos(h\omega_0 t + \varphi_h)$$

- Il secondo addendo della somma precedente può essere posto nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k^2}{2} \cos(2k\omega_0 t + 2\varphi_k)$$

Valore efficace della serie di Fourier

- Nell'espressione precedente tutti i termini oscillanti hanno valore medio nullo
- ➡ Il valore efficace è determinato dai termini costanti presenti nei primi due addendi, quindi si ha

$$S_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k^2}{2}\right]dt} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} S_{k\,\mathrm{rms}}^2}$$

dove

$$S_{k\,\mathrm{rms}} = \frac{S_k}{\sqrt{2}}$$

- ➡ *Il valore efficace di una grandezza periodica è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle sue componenti armoniche* (**teorema di Parseval**)

Spettro di potenza

- Se in segnale periodico $s(t)$ viene applicato a una resistenza R, la potenza dissipata è

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{s^2(t)}{R} & \text{se } s(t) \text{ è una tensione} \\ s^2(t)R & \text{se } s(t) \text{ è una corrente} \end{cases}$$

- Le due espressioni coincidono se $R = 1\ \Omega$

$$p(t) = s^2(t)$$

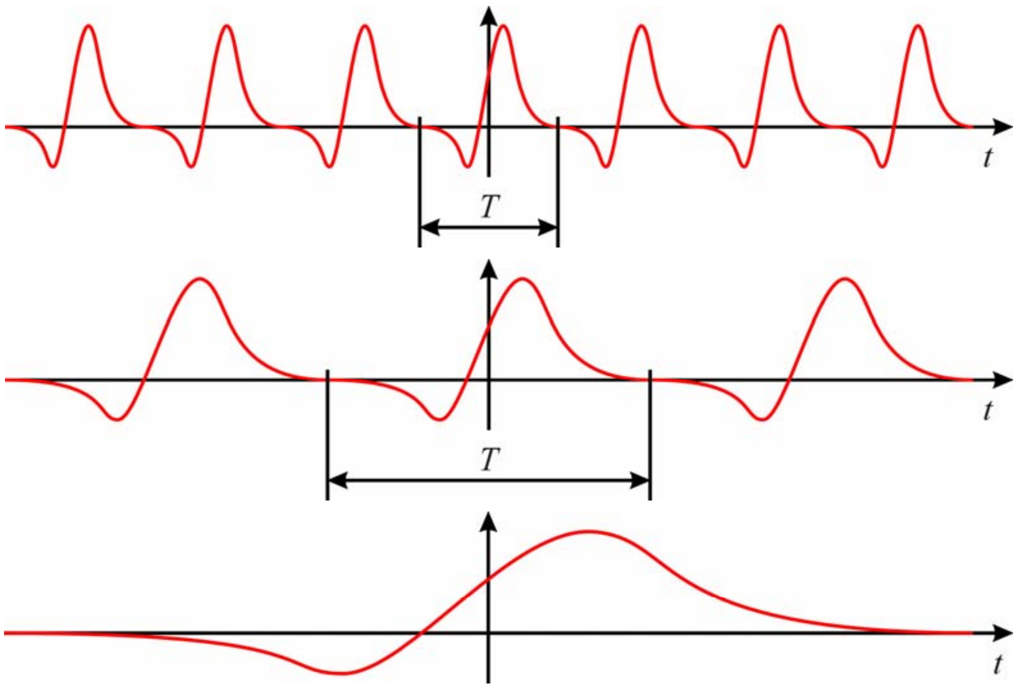
- Per questo $s^2(t)$ viene indicato convenzionalmente come **potenza del segnale**
- La corrispondente potenza attiva è

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k^2}{2}\right]dt = S_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} S_{k\,\mathrm{rms}}^2 = S_{\mathrm{rms}}^2$$

- ➡ I quadrati dei valori efficaci delle componenti armoniche del segnale ne definiscono lo **spettro di potenza**

Funzioni non periodiche

- Una funzione $\mathrm{f}(t)$ non periodica si può immaginare ottenuta da a partire da una funzione periodica $\mathrm{f_p}(t)$ facendo tendere a infinito il periodo T



Trasformata di Fourier - introduzione

- Si rappresenta $\mathrm{f_p}(t)$ mediante la serie di Fourier in forma esponenziale

$$\mathrm{f_p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \qquad C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{f_p}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- La pulsazione fondamentale ω_0 rappresenta anche la distanza $\Delta\omega$ tra due linee dello spettro di $\mathrm{f_p}(t)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = k\omega_0 - (k-1)\omega_0 = \Delta\omega$$

- Inserendo nella serie le espressioni dei coefficienti C_k ed esprimendo $1/T$ come $\Delta\omega$ / 2π si ottiene la relazione

$$\mathrm{f_p}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{f_p}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \, \Delta\omega \right\}$$

Trasformata di Fourier - introduzione

- L'espressione precedente di $\mathrm{f_p}(t)$ ha la forma di una somma integrale estesa su tutto l'asse ω
- Facendo tendere T all'infinito si ha

$$T \to \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \sum_{k=-\infty}^{\infty} & \to & \int_{-\infty}^{\infty} \\ \Delta\omega & \to & d\omega \\ k\omega_0 & \to & \omega \\ \mathrm{f_p}(t) & \to & \mathrm{f}(t) \end{array}$$

➡ Quindi, ammettendo che questo passaggio al limite sia lecito, si ottiene

$$\mathrm{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t) e^{-j\omega t} dt \right] \mathrm{e}^{j\omega t} \, d\omega$$

Il termine tra parentesi quadre è detto **trasformata di Fourier** di $\mathrm{f}(t)$

Trasformata di Fourier - definizione

- La **trasformata di Fourier** è una trasformazione cha associa ad una funzione $\mathrm{f}(t)$ definita nel *dominio del tempo* la funzione

$$\mathbf{F}(j\omega) = \mathfrak{F}[\mathrm{f}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t) e^{-j\omega t} dt$$

definita nel *domino della frequenza*

  - Non tutte le funzioni del tempo sono trasformabili secondo Fourier
  - Si può dimostrare che una condizione sufficiente per l'esistenza è che sia convergente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{f}(t)| dt$$

- L'**antitrasformata di Fourier**, cioè l'operazione che permette di risalire da $\mathbf{F}(j\omega)$ a $\mathrm{f}(t)$ è espressa dalla relazione

$$\mathrm{f}(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) \, \mathrm{e}^{j\omega t} \, d\omega$$

Spettri di ampiezza e fase

- L'espressione di $f(t)$ in funzione della sua trasformata di Fourier può essere riscritta nella forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty \mathbf{F}(-j\omega)\,e^{-j\omega t}\,d\omega + \int_0^\infty \mathbf{F}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathbf{F}(j\omega)\,e^{j\omega t} + \mathbf{F}(-j\omega)\,e^{-j\omega t}}{2}\,d\omega$$

- Dato che $\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)^*$, si ottiene

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]\,d\omega$$

con

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\left|\mathbf{F}(j\omega)\right| \qquad \varphi(\omega) = \arg[\mathbf{F}(j\omega)] \qquad \mathbf{F}(j\omega) = \pi\,A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

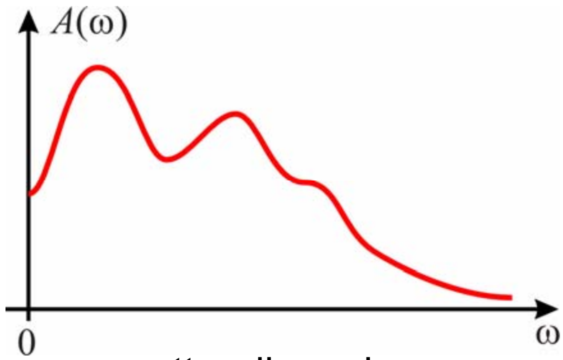
Spettri di ampiezza e fase

- La relazione

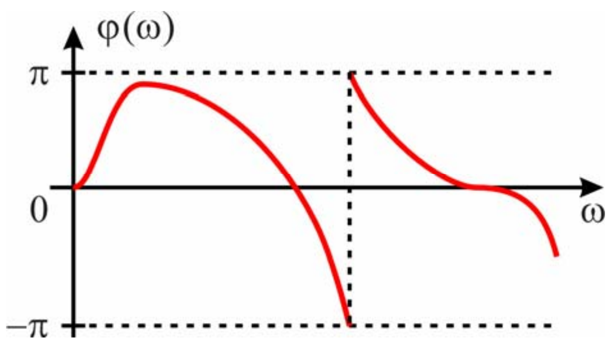
$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega)\cos[\omega t - \varphi(\omega)]\,d\omega$$

mostra che $f(t)$ risulta dalla somma di infiniti termini sinusoidali, ciascuno dei quali ha ampiezza infinitesima $A(\omega)d\omega$ e fase $\varphi(\omega)$

  - $A(\omega)$ rappresenta lo **spettro di ampiezza** di $f(t)$
  - $\varphi(\omega)$ rappresenta lo **spettro di fase**



spettro di ampiezza



spettro di fase

Nota

- A differenza di quanto avviene per le funzioni periodiche, che hanno spettri di ampiezza e di fase discreti, le funzioni aperiodiche hanno spettri di ampiezza e di fase continui
- E' importante notare che
  - nello sviluppo di una funzione periodica i coefficienti A_k rappresentano delle *ampiezze* (es. tensioni o correnti)
  - nel caso di una funzione aperiodica $\mathrm{A}(\omega)$ è una *densità di ampiezza* (es. tensione o corrente per unità di tempo, che equivale a tensione o corrente diviso unità di frequenza)

Risposta di un circuito lineare a un ingresso aperiodico

- La possibilità di esprimere una funzione aperiodica come "somma" di funzioni sinusoidali permette di utilizzare le funzioni di trasferimento per determinare la risposta di un circuito dinamico lineare ad un ingresso aperiodico

$$s_{\text{in}}(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H}(\omega)} \longrightarrow s_{\text{out}}(t)$$

$$s_{\text{in}}(t) = \int_0^\infty \mathrm{S}_{\text{in}}(\omega)\cos[\omega t + \varphi_{\text{in}}(\omega)]d\omega \qquad s_{\text{out}}(t) = \int_0^\infty \mathrm{S}_{\text{out}}(\omega)\cos[\omega t + \varphi_{\text{out}}(\omega)]d\omega$$

- Per la generica componente sinusoidale si ha

$$\mathrm{S}_{\text{out}}(\omega)\cos[\omega t + \varphi_{\text{out}}(\omega)]d\omega = |\mathbf{H}(\omega)|\mathrm{S}_{\text{in}}(\omega)\cos\{\omega t + \varphi_{\text{in}}(\omega) + \arg[\mathbf{H}(\omega)]\}d\omega$$

➡ Quindi, sovrapponendo gli effetti, si ottiene che la risposta è

$$s_{\text{out}}(t) = \int_0^\infty |\mathbf{H}(\omega)|\mathrm{S}_{\text{in}}(\omega)\cos\{\omega t + \varphi_{\text{in}\,k}(\omega) + \arg[\mathbf{H}(\omega)]\}d\omega$$

Risposta di un circuito lineare a un ingresso aperiodico

- La trasformata di Fourier dell'ingresso è

$$\mathbf{S}_{\text{in}}(j\omega) = \mathcal{F}[s_{\text{in}}(t)] = \pi S_{\text{in}}(\omega) e^{j\varphi_{\text{in}}(\omega)}$$

- Dall'espressione ricavata per la risposta si riconosce che la sua trasformata di Fourier è

$$\mathbf{S}_{\text{out}}(j\omega) = \mathcal{F}[s_{\text{out}}(t)] = \pi |\mathbf{H}(\omega)| S_{\text{in}}(\omega) e^{j\{\varphi_{in}(\omega) + \arg[\mathbf{H}(\omega)]\}} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{S}_{\text{in}}(j\omega)$$

➡ *La trasformata di Fourier della risposta si ottiene moltiplicando la trasformata di Fourier dell'ingresso per la funzione di trasferimento*

- Inoltre, procedendo come nel caso periodico, si ottiene che la risposta non è distorta, cioè

$$s_{\text{out}}(t) = A s_{\text{in}}(t - \tau)$$

se sono verificate le **condizioni di non distorsione**

$$|\mathbf{H}(\omega)| = |A| \qquad \arg[\mathbf{H}(\omega)] = \begin{cases} -\omega\tau & A > 0 \\ -\omega\tau + \pi & A < 0 \end{cases}$$

Spettro di energia

- Come nel caso periodico si definisce potenza di un segnale $s(t)$ la potenza dissipata su un resistore da $1\ \Omega$

$$p(t) = s^2(t)$$

- L'integrale della potenza da $t = -\infty$ a $t = +\infty$ rappresenta l'energia totale assorbita da un resistore a cui è applicato il segnale (**energia del segnale**)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

- Si può dimostrare che vale la relazione (**teorema di Parseval**)

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{S}(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{S}(j2\pi \mathrm{f})|^2 d\,\mathrm{f} \qquad (\mathbf{S}(j\omega) = \mathcal{F}[s(t)])$$

➡ Il quadrato del modulo della trasformata di Fourier di rappresenta la densità di energia del segnale, cioè l'energia per unità di frequenza (**spettro di energia**)

Spettro di energia

- Traccia della dimostrazione

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{S}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt =$$

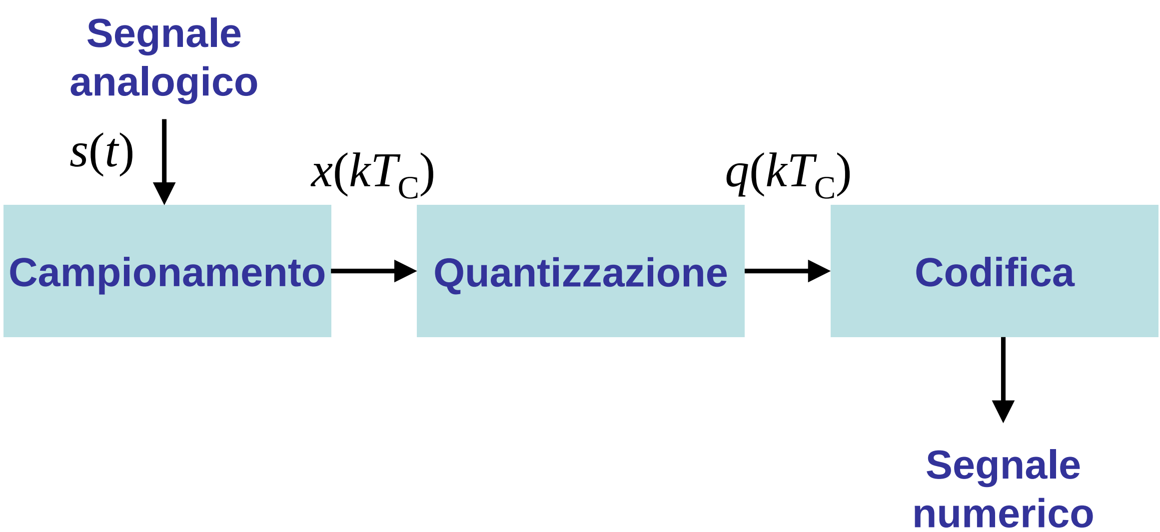
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{S}(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{S}(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} \left|\mathbf{S}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

(si scambia l'ordine di integrazione)

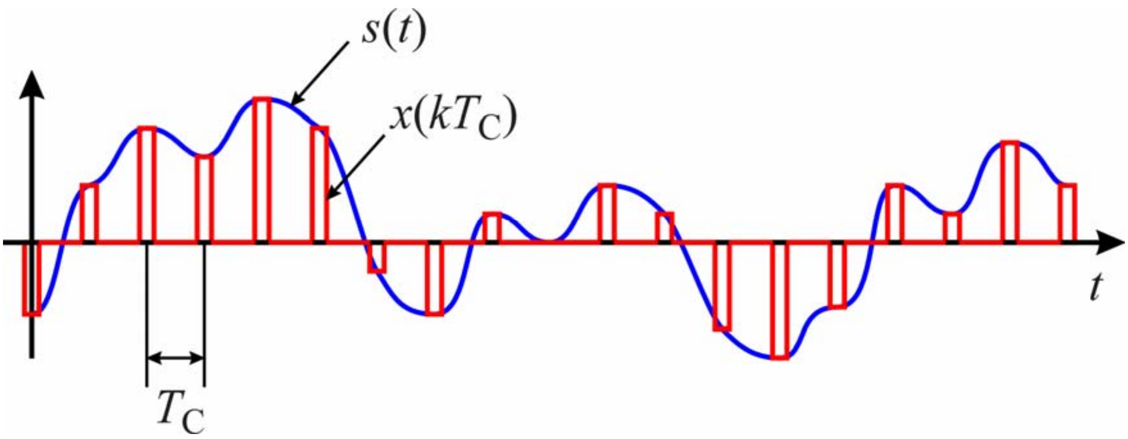
Conversione analogico/digitale

- I segnali digitale spesso sono ottenuti dalla conversione di segnali analogici
- La conversione analogico/digitale avviene attraverso tre fasi



Campionamento

- Nella fase di campionamento, il segnale in ingresso $s(t)$ (a tempo continuo) viene convertito in un segnale a tempo discreto $x(kT_C)$
- All'uscita del campionatore si ha una sequenza di impulsi disposti negli istanti kT_C aventi ampiezza $s(kT_C)$



Teorema di Nyquist-Shannon

- Si assume che il segnale in ingresso abbia banda limitata, cioè componenti spettrali diverse da zero solo nell'intervallo $[0\ f_M]$
- Si può dimostrare che il segnale può essere ricostruito a partire dai valori campionati se il tempo di campionamento T_C soddisfa la condizione

$$T_C \leq \frac{1}{2\,f_M}$$

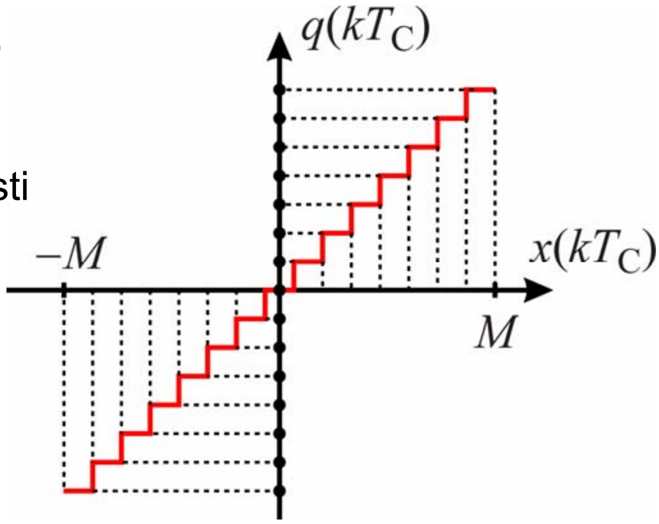
cioè, in termini di frequenza di campionamento,

$$f_C = \frac{1}{T_C} \geq 2\,f_M$$

- Sotto queste condizioni l'operazione di campionamento non dà luogo a perdite di informazione

Quantizzazione

- L'ampiezza degli impulsi all'uscita del campionatore può assumere qualunque valore reale nell'intervallo $[S_{\min}\ S_{\max}]$ che rappresenta dinamica del segnale $s_{in}(t)$
(Per semplicità si assume $S_{\min} = -M$ e $S_{\max} = M$)
- L'intervallo $[-M\ M]$ viene suddiviso in N intervalli
- Tutti i valori compresi in uno di questi intervalli vengono identificati con lo stesso valore
(*livello di quantizzazione*)



Quantizzazione

- A differenza dell'operazione di campionamento, l'operazione di quantizzazione è irreversibile (cioè causa perdita di informazione)
- In pratica equivale a sommare al segnale un segnale indesiderato (rumore di quantizzazione)
- Il rumore di quantizzazione può essere reso trascurabile facendo uso di un numero adeguato di livelli
- D'altra parte si deve tenere conto del fatto che ogni segnale analogico è inevitabilmente affetto da rumore e di conseguenza il numero di livelli effettivamente distinguibili è comunque finito

Codifica

- Normalmente si fa uso di codifiche di tipo binario
- I livelli di quantizzazione vengono rappresentati mediante cifre binarie
- Se N è il numero di livelli, il numero n di cifre binarie necessarie per rappresentarli è il più piccolo intero che soddisfa la relazione

$$2^n \geq N \quad \Rightarrow \quad n \geq \log_2 N$$

- Le n cifre vengono rappresentate mediante n segnali binari