# Diagrammi di Bode

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm (versione del 5-12-2012)

# Funzioni di trasferimento

 Le funzioni di trasferimento (f.d.t) dei circuiti lineari tempo invarianti sono funzioni razionali (cioè rapporti tra due polinomi) a coefficienti reali della variabile jω

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{N}(j\omega)}{\mathbf{D}(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

 Per evitare di trattare esplicitamente quantità immaginarie, si introduce una variabile s = jω detta frequenza complessa

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

I valori di s per cui si annulla il polinomio N(s) sono detti zeri della f.d.t

I valori di s per cui si annulla il polinomio D(s) sono detti poli della f.d.t

### Funzioni di trasferimento

- Si indicano con
  - $m_0 \in n_0$  i numeri di zeri e di poli nulli della f.d.t.
  - *m*<sub>1</sub> e *n*<sub>1</sub> i numeri di zeri (*z*<sub>1</sub>,..., *z*<sub>m1</sub>) e di poli (*p*<sub>1</sub>,..., *p*<sub>n1</sub>) reali diversi da zero della f.d.t.
  - *m*<sub>2</sub> e *n*<sub>2</sub> i numeri di coppie di zeri (*z*<sub>1</sub>,..., *z*<sub>cm1</sub>) e di poli (*p*<sub>1</sub>,..., *p*<sub>cn1</sub>) complessi coniugati della f.d.t.
- La f.d.t può essere posta nella forma

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot s^{(m_0 - n_0)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_i) \prod_{i=1}^{m_2} (s - z_{ci}) (s - z_{ci}^*)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i) \prod_{i=1}^{n_2} (s - p_{ci}) (s - p_{ci}^*)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot s^{(m_0 - n_0)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left[s^2 - 2\operatorname{Re}(z_{ci})s + |z_{ci}|^2\right]}{\prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left[s^2 - 2\operatorname{Re}(p_{ci})s + |p_{ci}|^2\right]}$$

#### Funzioni di trasferimento

• Dall'espressione precedente si può ottenere la forma canonica  $H(s) = Ks^{(m_0 - n_0)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + s\tau'_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left( 1 + \frac{2\zeta'_i}{\omega'_{0i}} s + \frac{s^2}{\omega'_{0i}^2} \right)}{\prod_{i=1}^{n_1} (1 + s\tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left( 1 + \frac{2\zeta_i}{\omega_{0i}} s + \frac{s^2}{\omega_{0i}^2} \right)}$ dove  $\tau_i = -\frac{1}{p_i} \qquad \tau'_i = -\frac{1}{z_i} \qquad K = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\tau'_i} \prod_{i=1}^{m_2} \omega_{0i}'^2}{\prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\tau_i} \prod_{i=1}^{m_2} \omega_{0i}'^2}$   $\zeta_i = -\frac{\text{Re}[p_{ci}]}{|p_{ci}|} \qquad \zeta'_i = -\frac{\text{Re}[z_{ci}]}{|z_{ci}|}$ 

# Note

- Se  $m_0 n_0 = 0$ , *K* rappresenta il valore di H(*s*) per *s* = 0 (e quindi per  $\omega = 0$ ) cioè è il valore in continua delle funzione di trasferimento
- Si può notare che, affinché un termine quadratico del tipo

$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

corrisponda a una coppia di poli o zeri complessi coniugati, occorre che sia negativo il discriminante

$$\frac{\zeta^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} < 0$$

→ Quindi deve essere soddisfatta la condizione  $|\zeta| < 1$ 

# **Risposta in frequenza**

• La risposta in frequenza può essere riottenuta sostituendo s con  $j\omega$ 

$$\mathbf{H}(j\omega) = K(j\omega)^{(m_0 - n_0)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (1 + j\omega\tau'_i) \prod_{k=1}^{m_2} \left( 1 + 2\zeta'_i \frac{j\omega}{\omega'_{0i}} - \frac{\omega^2}{\omega'_{0i}^2} \right)}{\prod_{k=1}^{n_1} (1 + j\omega\tau_i) \prod_{k=1}^{n_2} \left( 1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{0i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2} \right)}$$

- L'andamento di H(jω) viene rappresentato mediante due grafici (diagrammi di Bode) che riportano
  - il modulo (in dB) 
     risposta in ampiezza
  - ◆ l'argomento (in gradi o radianti) ⇒ risposta in fase

in funzione della pulsazione o della frequenza (in scala logaritmica)

# Note

- Nella rappresentazione della frequenza (o della pulsazione) in scala logaritmica si mettono in evidenza intervalli di frequenza caratterizzati da un rapporto costante tra la frequenza superiore  $f_2$  e la frequenza inferiore  $f_1$
- In particolare
  - si chiama decade un intervallo per cui  $f_2 = 10f_1$
  - si chiama ottava un intervallo per cui  $f_2 = 2f_1$
- Normalmente le fasi vengono rappresentate nell'intervallo [ $-180^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ] oppure [ $-\pi$ ,  $\pi$ ]

# Funzioni elementari

- La forma fattorizzata della funzione di trasferimento rende agevole la costruzione dei diagrammi di Bode, infatti
  - Il valore in dB del modulo di H è dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore (incluso K) e dei fattori del denominatore
  - L'argomento H è dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore (incluso K) e dei fattori del denominatore
- I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle funzioni elementari

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \qquad \mathbf{H}(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1} \\ \mathbf{H}(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \qquad \mathbf{H}(j\omega) = \left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\pm 1}$$





ω

10

1

-20 + 0.1 -180 <del>|</del> 0.1

10 10

1

ω

# Polo nell'origine



#### Zero reale - ampiezza

 $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ 

$$\mathbf{H}(j\omega)\big|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

• Posto  $\omega_0 = 1/|\tau|$ , si possono individuare due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \implies |\mathbf{H}(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0$$

🔶 retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega >> \omega_0 \implies |\mathbf{H}(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 20 (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

→ retta con pendenza +20 dB/decade (= +6 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per  $\omega = \omega_0$ 

### Zero reale - ampiezza

- L'andamento del modulo di **H** può essere approssimato con un diagramma formato da due semirette che si incontrano per  $\omega = \omega_0$  (approssimazione asintotica)
- Per  $\omega = \omega_0$  il modulo di **H** vale

 $\left|\mathbf{H}(j\omega_0)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\sqrt{2} \approx 3\,\mathrm{dB}$ 

 Questo valore rappresenta anche il massimo errore introdotto dalla rappresentazione asintotica





#### Zero reale - fase

 $-90^{\circ}$ 

$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \arctan(\omega\tau)$	
Se $\tau > 0$ si ha	Se $\tau < 0$ si ha
$\lim_{\omega\to 0} \arctan(\omega\tau) = 0^{\circ}$	$\lim_{\omega \to 0} \arctan(\omega \tau) = 0^{\circ}$
$\lim_{\omega\to\infty} \arctan(\omega\tau) = 90^{\circ}$	$\lim_{\omega\to\infty} \arctan(\omega\tau) = -9$
$\operatorname{arctg}(\omega_0 \tau) = 45^{\circ}$	$\operatorname{arctg}(\omega_0 \tau) = -45^{\circ}$

- In questo caso si hanno due asintoti orizzontali
- L'andamento della fase può essere approssimato mediante una spezzata formata da due semirette orizzontali, corrispondenti agli asintoti, e da un segmento obliquo
- Il diagramma per  $\tau < 0$  si può ottenere ribaltando attorno all'asse delle ascisse quello tracciato per  $\tau > 0$

#### Zero reale - fase

Per tracciare il segmento obliquo si possono utilizzare vari criteri

#### • Approssimazione 1:

- Si collegano i due asintoti mediante la retta tangente alla curva nel punto  $\omega = \omega_0$
- Si può dimostrare che le intersezioni di questa retta con gli asintoti si trovano in corrispondenza delle pulsazioni

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.2\omega_0 \qquad \qquad \omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}} \approx 5\omega_0$$

#### • Approssimazione 2:

- Si collegano gli asintoti mediante la retta che li interseca per  $\omega_1 = 0.1\omega_0$   $\omega_2 = 10\omega_0$
- In questo modo il massimo scostamento risulta di circa 5.8° ed è inferiore al massimo errore che si ottiene con l'approssimazione 1







#### **Polo reale**

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

Dato che

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{|1+j\omega\tau|}\right) = -20\log_{10}\left(|1+j\omega\tau|\right)$$
$$\arg\left(\frac{1}{1+j\omega\tau}\right) = -\arg(1+j\omega\tau)$$

i diagrammi del modulo e dell'argomento di questa funzione si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse i diagrammi corrispondenti alla funzione  $1 + j\omega\tau$ 



# Polo reale - fase



21

# Zeri complessi coniugati - ampiezza

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\left|\mathbf{H}(j\omega)\right|_{\rm dB} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Si individuano due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \implies |\mathbf{H}(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0$$
  
 $\Rightarrow$  retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega \gg \omega_0 \implies |\mathbf{H}(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}} = 40 (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

→ retta con pendenza +40 dB/decade (+12 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per  $\omega = \omega_0$ 

# Zeri complessi coniugati - ampiezza

- In questo caso, in prossimità della pulsazione  $\varpi_0$  l'andamento del modulo di  ${\bf H}$  può discostarsi sensibilmente dal diagramma asintotico
- In particolare la curva può presentare un minimo se esiste un valore reale  $\omega_R$  della pulsazione per cui si annulla la derivata di  $|{\bf H}|$

$$\frac{d}{d\omega}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\rm R}=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Questo avviene se

$$\left|\zeta\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

in questo caso si ha anche

$$\left|\mathbf{H}(j\omega_{\rm R})\right| = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

- In queste condizioni la risposta è detta risonante o sottosmorzata
- Altrimenti la risposta è detta non risonante o sovrasmorzata

Zeri complessi coniugati - ampiezza



# Zeri complessi coniugati - fase

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \begin{cases} \arctan\left[\frac{2\zeta\omega_{0}\omega}{(\omega_{0}^{2}-\omega^{2})}\right] & \text{per } \omega < \omega_{0} \\ 90^{\circ} \cdot \operatorname{sgn}(\zeta) & \text{per } \omega = \omega_{0} \\ \arctan\left[\frac{2\zeta\omega_{0}\omega}{(\omega_{0}^{2}-\omega^{2})}\right] + 180^{\circ} \cdot \operatorname{sgn}(\zeta) & \text{per } \omega > \omega_{0} \end{cases}$$
  
• Se  $\zeta > 0$  si ha  $\operatorname{Se} \zeta < 0$  si ha  $\lim_{\omega \to 0} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 0^{\circ} \\ \lim_{\omega \to 0} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 180^{\circ} \\ \lim_{\omega \to \infty} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = -180^{\circ} \\ \arg[\mathbf{H}(j\omega_{0})] = 90^{\circ} \\ \arg[\mathbf{H}(j\omega_{0})] = -90^{\circ} \end{cases}$ 

### Zeri complessi coniugati - fase

- Anche in questo caso si può approssimare l'andamento della fase mediante una spezzata formata collegando i due asintoti con un segmento obliquo, che può essere tracciato in più modi
- Per esempio si può utilizzare la retta tangente alla curva per  $\omega = \omega_0$
- Si può dimostrare che questa retta interseca gli asintoti per

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 5^{-\zeta} \omega_0 \qquad \qquad \omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 5^{\zeta} \omega_0$$

• Il diagramma della fase per  $\zeta < 0$  si ottiene ribaltando attorno all'asse delle ascisse il diagramma ottenuto per  $\zeta > 0$ 

# Zeri complessi coniugati - fase



# Poli complessi coniugati

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$

 I diagrammi del modulo e della fase di H(jω) possono essere ottenuti ribaltando attorno all'asse delle ascisse i grafici ottenuti per la funzione precedente

# Poli complessi coniugati - ampiezza





## **Esempio 1**

• Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

 $\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2s^2 + 2.04 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^6}$ 

• La f.d.t. ha uno zero nell'origine e due poli

$$p_1, p_2 = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm \sqrt{1.0404 \cdot 10^8 - 8 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm 0.98 \cdot 10^4}{2} = \begin{pmatrix} -200 \\ -10^4 \end{pmatrix}$$

Si riscrive la funzione in forma canonica

$$\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2(s+200)(s+10^4)} = \frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 200 \cdot 10^4} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right)\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)} = \frac{1}{50} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right)\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

• Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni  $1/50, j\omega, 1/(1+j\omega/200), 1/(1+j\omega/10^4)$  e si sommano i loro contributi



# Esempio 1 – diagramma della fase



Esempio 1 – confronto con i diagrammi esatti



# Esempio 2

Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$\mathbf{H}(s) = 2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{20}\right)}{\left(1 + \frac{s}{500}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

- La f.d.t ha uno zero per s = -20, un polo semplice per  $s = -10^4$  e un polo doppio per s = -500
- Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni 2,  $1+j\omega/20$ ,  $1/(1+j\omega/500)^2$ ,  $1/(1+j\omega/10^4)$  e si sommano i contributi
- I grafici di  $1/(1+j\omega/500)^2$  si ottengono moltiplicando per 2 il modulo e l'argomento di  $1/(1+j\omega/500)$





# Esempio 2 – diagramma della fase



# Esempio 2 – confronto con i diagrammi esatti

