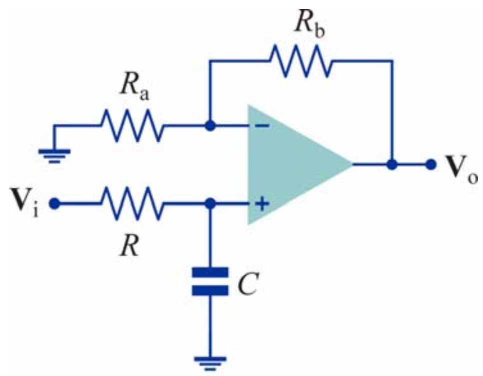
Filtri attivi

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 31-5-2016)

Filtri attivi

- Un filtro passivo è un filtro composto solo da componenti passivi
- I filtri attivi fanno uso anche di componenti attivi (di solito amplificatori operazionali)
  - A differenza dei filtri passivi possono avere guadagno > 1
  - Possono avere fattori di merito elevati (e quindi risposte di tipo risonante) anche senza impiegare induttori
  - La loro funzione di trasferimento non dipende dall'impedenza di carico
    - Nel caso si collegamento in cascata la funzione di trasferimento complessiva si ottiene come prodotto di quelle dei singoli stadi
  - Possono essere utilizzati solo a frequenze relativamente basse a causa della limitazione di banda degli amplificatori operazionali

Filtro passa-basso non invertente del 1° ordine



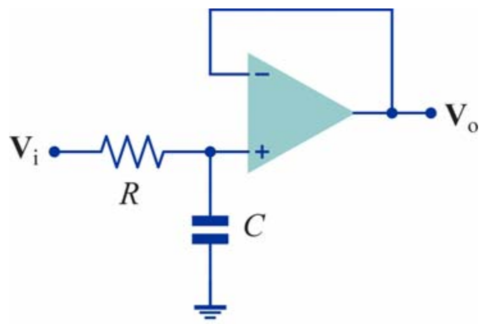
- La funzione di trasferimento è

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right)\frac{1}{1 + RCs} = H_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

- Quindi il guadagno in continua e la pulsazione di taglio sono

$$H_0 = 1 + \frac{R_b}{R_a} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Filtro passa-basso non invertente del 1° ordine a guadagno unitario



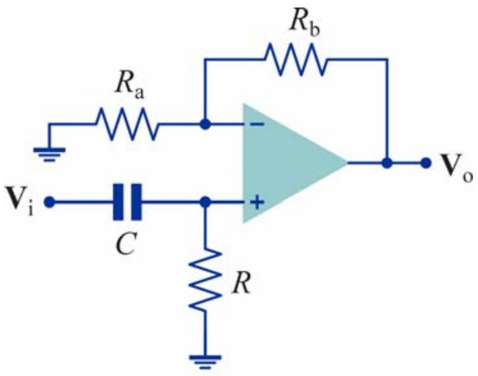
- L'amplificatore operazionale è utilizzato come inseguitore di tensione
- In questo caso la funzione di trasferimento è

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$

- Quindi si ha

$$H_0 = 1 \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Filtro passa-alto non invertente del 1° ordine



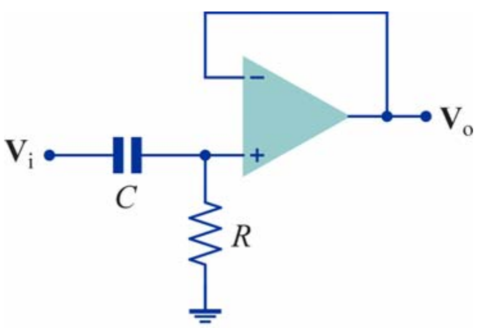
- Funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) \frac{RCs}{1 + RCs} = H_0 \frac{\dfrac{s}{\omega_0}}{1 + \dfrac{s}{\omega_0}}$$

- Guadagno ad alta frequenza a pulsazione di taglio

$$H_0 = 1 + \frac{R_b}{R_a} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Filtro passa-basso non invertente del 1° ordine a guadagno unitario



- Funzione di trasferimento

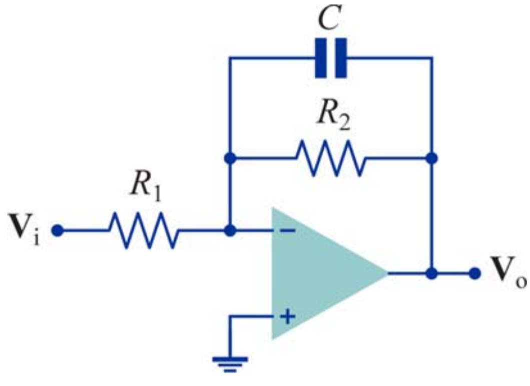
$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{\dfrac{s}{\omega_0}}{1 + \dfrac{s}{\omega_0}}$$

- Guadagno ad alta frequenza a pulsazione di taglio

$$H_0 = 1 + \frac{R_b}{R_a} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Filtro passa-basso invertente del 1° ordine

- E’ possibile realizzare un filtro passa-basso anche mediante questo circuito che corrisponde a un integratore con limitazione del guadagno a bassa frequenza
- La funzione di trasferimento è



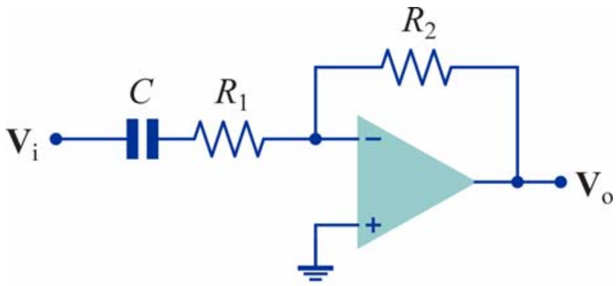
$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+R_2 Cs} = -H_0 \frac{1}{1+\dfrac{s}{\omega_0}}$$

- Il circuito ha comportamento invertente
- Il valore assoluto del guadagno in continua e la pulsazione di taglio sono

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C}$$

Filtro passa-alto invertente del 1° ordine

- E’ possibile realizzare un filtro passa-alto anche mediante questo circuito che corrisponde a un derivatore con limitazione del guadagno ad alta frequenza
- La funzione di trasferimento è



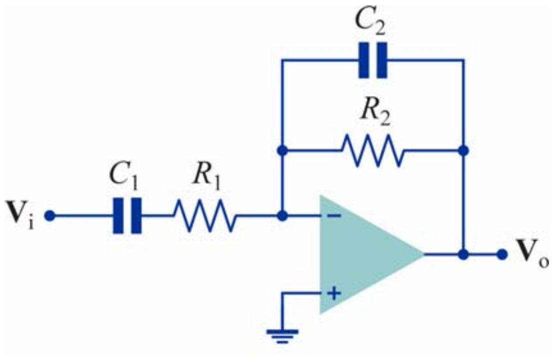
$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1 Cs}{1+R_1 Cs} = -H_0 \frac{\dfrac{s}{\omega_0}}{1+\dfrac{s}{\omega_0}}$$

- Il circuito ha comportamento invertente
- Il valore assoluto del guadagno ad alta frequenza e la pulsazione di taglio sono

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C}$$

Filtro passa-banda a banda larga

- Combinando i due circuiti precedenti è possibile ottenere un filtro passa-banda



- In questo caso la funzione di trasferimento è

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s}{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)} = -H_0\frac{\dfrac{s}{\omega_1}}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\dfrac{s}{\omega_2}\right)}$$

Filtro passa-banda a banda larga

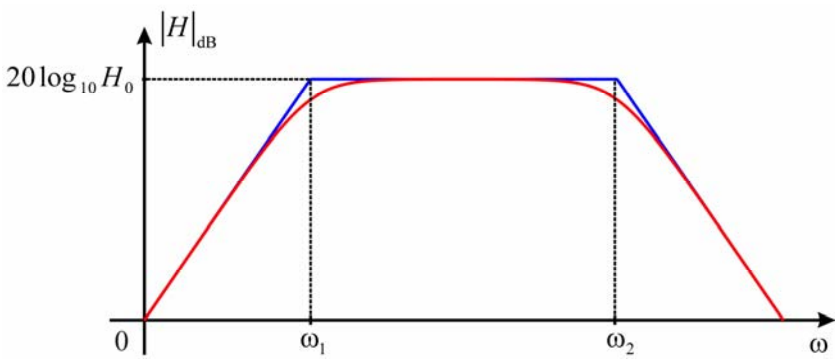
- Nell'ipotesi che le due pulsazioni di taglio soddisfino la condizione

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} < \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

per ω compreso tra ω_1 e ω_2 il guadagno vale

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1}$$ (guadagno di centro banda)

- Al di fuori della banda passante il guadagno diminuisce con pendenza 20 dB/decade



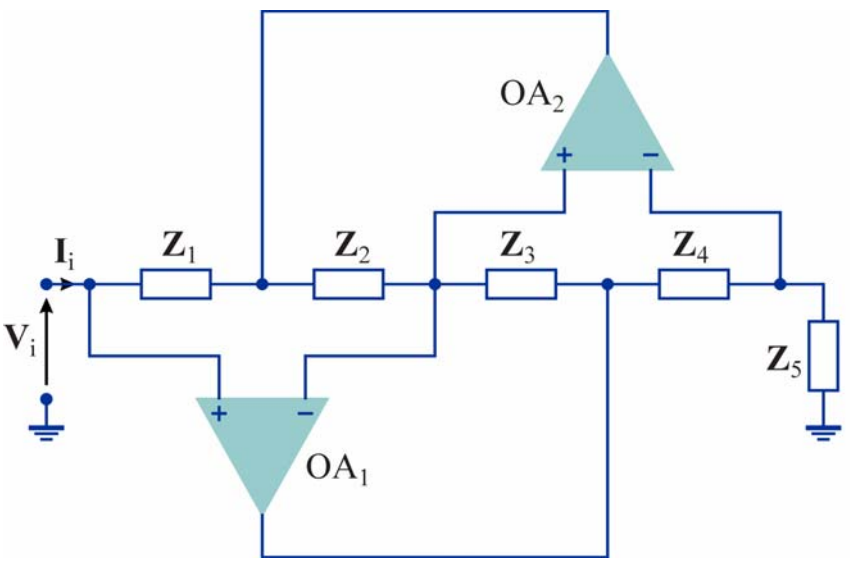
Filtri risonanti senza induttori

- Un filtro passivo realizzato con soli componenti RC non può avere una funzione di trasferimento con poli complessi coniugati
- Lo stesso avviene collegando in cascata filtri attivi del primo ordine
- Per ottenere poli complessi coniugati si possono utilizzare circuiti RLC
- Nei circuiti a bassa frequenza, però, di solito si preferisce evitare l'uso di induttori perché i valori di induttanza necessari sono elevati
  - di conseguenza gli induttori sono ingombranti e la loro realizzazione in genere richiede l'uso di nuclei ferromagnetici (che possono causare un comportamento non lineare e dare luogo a perdite)
- Per evitare di usare induttori si possono utilizzare particolari circuiti che permettono di ottenere un'impedenza equivalente di tipo induttivo a partire da componenti RC
- In alternativa si possono ottenere funzioni di trasferimento con poli complessi coniugati mediante circuiti RC retroazionati

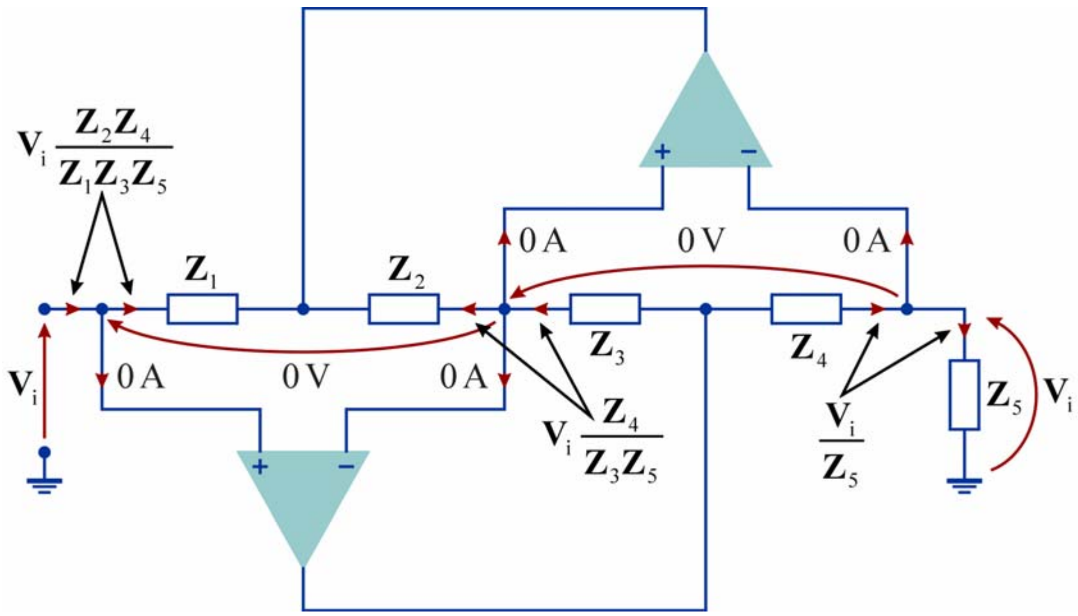
Convertitore di impedenza di Antoniou

- E' possibile realizzare un bipolo equivalente a un induttore utilizzando solo componenti RC mediante questo circuito (**convertitore di impedenza generalizzato**)

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_i} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5}{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4}$$



Convertitore di impedenza di Antoniou
Calcolo dell'impedenza di ingresso



$$\mathbf{V}_5 = \mathbf{V}_i \qquad \mathbf{I}_5 = \mathbf{I}_4 = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{Z}_5}$$

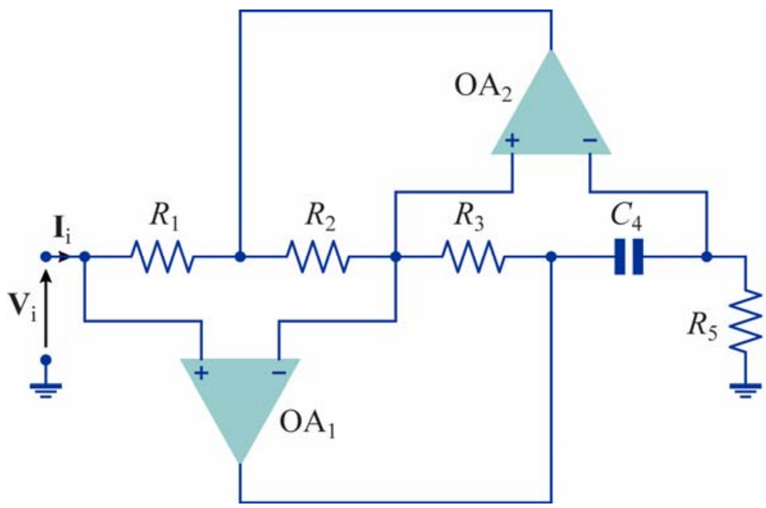
$$\Rightarrow \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_4 = \mathbf{Z}_4\mathbf{I}_4 \qquad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_3}{\mathbf{Z}_3} = \frac{\mathbf{V}_i\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{I}_i = \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{V}_i\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_i} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5}{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4}$$

Simulatore di induttanza

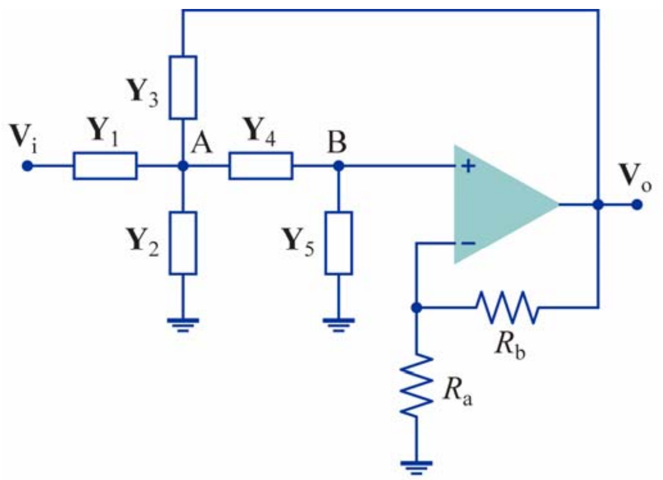
- Utilizzando resistori per le impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_5$ e un condensatore per $\mathbf{Z}_4$ si ottiene un impedenza di ingresso puramente induttiva



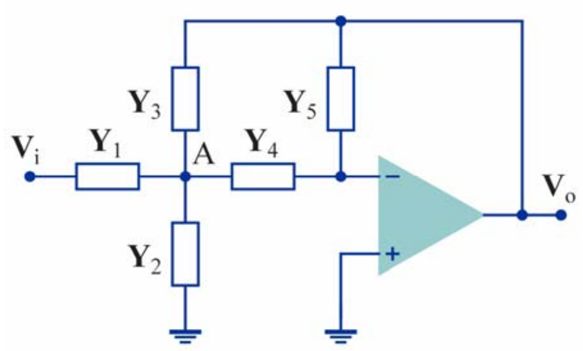
$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5}{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4} = j\omega\frac{C_4R_1R_3R_5}{R_2} \qquad\qquad L_{eq} = \frac{C_4R_1R_3R_5}{R_2}$$

Filtri attivi del secondo ordine

- I circuiti utilizzati più comunemente per realizzare filtri attivi risonanti del secondo ordine sono i seguenti
- Sostituendo le impedenze con resistori o condensatori è possibile ottenere risposte di tipo passa-basso, passa-alto e passa-banda



Filtro di Sallen e Key

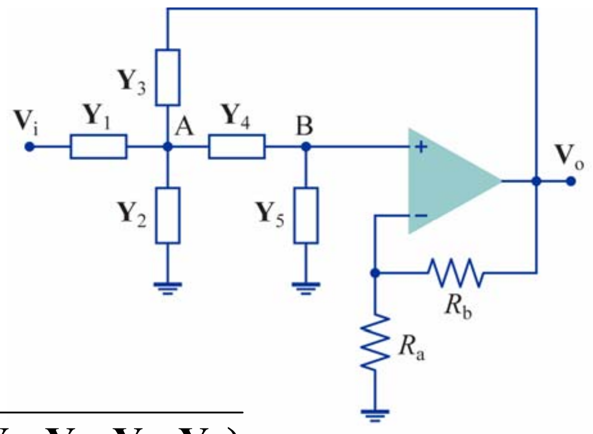


Filtro a retroazioni multiple (MFB, *multiple feed-back*)

Filtri attivi del secondo ordine

- Di seguito verranno analizzate le varie configurazioni e fornite alcune indicazioni per il progetto dei filtri
- Dato che le specifiche di progetto normalmente riguardano la frequenza di taglio e il fattore di merito (più eventualmente il guadagno) il numero di parametri del circuito è solitamente maggiore del numero di specifiche, quindi il filtro può essere realizzato in più modi
- Spesso, dato che i valori normalizzati delle capacità dei condensatori sono in numero minore rispetto ai valori disponibili per le resistenze si sfruttano i gradi di libertà in più per scegliere valori convenienti per le capacità
- Inoltre, per semplificare il progetto, spesso si cerca di utilizzare per i condensatori o per i resistori dei valori uguali
- Nel caso dei filtri Sallen e Key, in cui l'operazionale svolge la funzione di amplificatore non invertente, è possibile semplificare il circuito ponendo il guadagno uguale a 1 (e quindi usando un inseguitore di tensione) o uguale 2 (che comporta $R_a = R_b$)

Filtri di Sallen e Key (VCVS)



- I filtri di questo tipo sono detti anche filtri VCVS (*voltage controlled voltage source*) perché l'amplificatore operazionale svolge la funzione di un generatore dipendente
- La funzione di trasferimento è

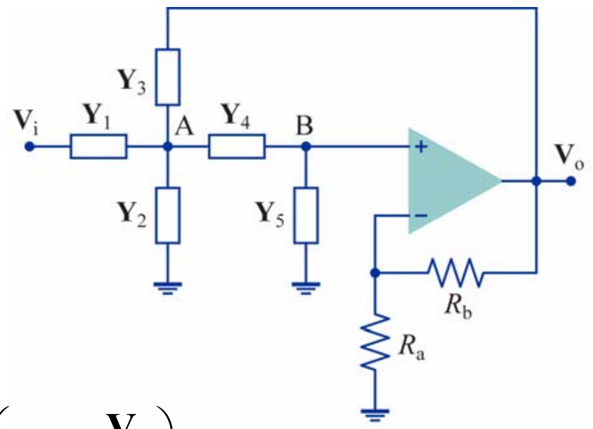
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4 G}{\mathbf{Y}_4\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3(1-G)\right]+\mathbf{Y}_5(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3+\mathbf{Y}_4)}$$

dove

$$G = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

è il guadagno dell'amplificatore operazionale in configurazione non invertente

Filtri di Sallen e Key (VCVS)



- Le tensioni dei nodi A e B possono essere espresse come

$$\mathbf{V}_B = \frac{\mathbf{V}_o}{G}$$

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_B\frac{\mathbf{Y}_5}{\mathbf{Y}_4} = \frac{\mathbf{V}_0}{G}\left(1+\frac{\mathbf{Y}_5}{\mathbf{Y}_4}\right)$$

- Applicando la LKI al nodo A si ottiene

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}_A-\mathbf{V}_i)+\mathbf{Y}_2\mathbf{V}_A+\mathbf{Y}_3(\mathbf{V}_A-\mathbf{V}_o)+\mathbf{Y}_4\left(\mathbf{V}_A-\frac{\mathbf{V}_o}{G}\right)=0$$

- Quindi, sostituendo nell'equazione del nodo l'espressione di $\mathbf{V}_A$, si ricava la funzione di trasferimento

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4 G}{\mathbf{Y}_4\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3(1-G)\right]+\mathbf{Y}_5(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3+\mathbf{Y}_4)}$$

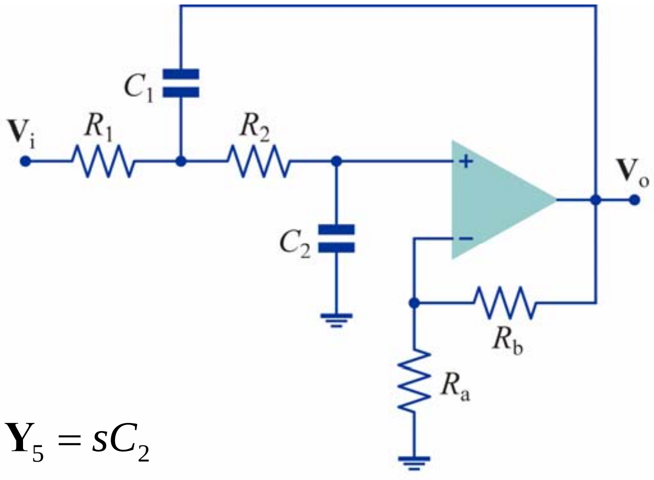
Filtro Sallen-Key passa-basso

- Per ottenere una risposta di tipo passa-basso

$$\mathbf{H}(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2}+\frac{s}{Q\omega_0}+1}$$

si pone

$$\mathbf{Y}_1=\frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_2=0,\ \mathbf{Y}_3=sC_1,\ \mathbf{Y}_4=\frac{1}{R_2},\ \mathbf{Y}_5=sC_2$$



- In questo modo si ha

$$\mathbf{H}(s)=\frac{G}{R_1R_2C_1C_2s^2+\left[R_1C_1(1-G)+(R_1+R_2)C_2\right]s+1}$$

Filtro Sallen-Key passa-basso

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-basso del 2° ordine si ricava

$$K=G$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$Q=\frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1C_1(1-G)+(R_1+R_2)C_2}$$

- Il guadagno in continua del filtro è

$$H_0=K=G$$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-basso

- Scelte le capacità C_1 e C_2 in modo che

  $$C_2 = nC_1$$

  dall'espressione di ω_0 si ottiene

  $$\omega_0 = \frac{1}{C_1\sqrt{nR_1R_2}} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{1}{n\omega_0^2 C_1^2 R_2}$$

- Sostituendo nell'espressione di Q si ha

  $$Q = \frac{n\omega_0 R_2 C_1}{(n\omega_0 R_2 C_1)^2 - (G-1-n)}$$

- Da questa relazione si ricava R_2

  $$R_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4Q^2(G-1-n)}}{2n\omega_0 C_1 Q}$$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-basso

- Affinché R_2 sia reale deve essere soddisfatta la condizione

  $$1+4Q^2(G-1-n) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n \leq G-1+\frac{1}{4Q^2}$$

- Si può osservare che è possibile scegliere $n = 1$, cioè utilizzare due capacità uguali se

  $$G \geq 2 - \frac{1}{4Q^2}$$

- Se le condizioni precedenti sono soddisfatte, delle due soluzioni ottenute per R_2, quella con il segno $+$ è sempre positiva, mentre quella con il segno – è positiva se $n \geq G - 1$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-basso

Riepilogo

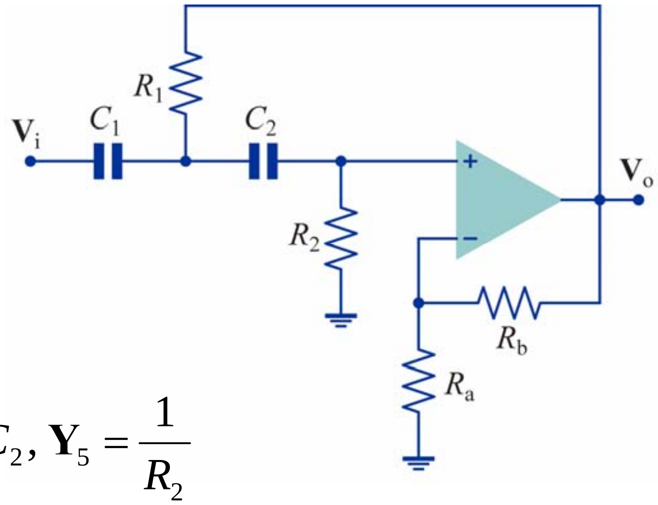
- Dati ω_0 Q e H_0, i valori dei componenti si possono determinare nel modo seguente:
  - Si scelgono le resistenze R_a e R_b in modo che
    $$G = H_0 = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$
  - Si scelgono le capacità C_1 e C_2 in modo che
    $$\frac{C_2}{C_1} \le G - 1 + \frac{1}{4Q^2}$$
  - Si calcolano le resistenze R_1 e R_2 mediante le relazioni
    $$R_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2\left(G - 1 - \frac{C_2}{C_1}\right)}}{2\omega_0 C_2 Q} \qquad R_1 = \frac{1}{\omega_o^2 C_1 C_2 R_2}$$

Filtro Sallen-Key passa-basso a componenti uguali

- Per semplificare il progetto del filtro si può imporre che i valori delle resistenze R_1 R_2 e delle capacità C_1 C_2 siano uguali
  $$R_1 = R_2 = R \qquad C_1 = C_2 = C$$
- In queste condizioni si ottiene
  $$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad Q = \frac{1}{3 - G} \quad \Rightarrow \quad H_0 = G = 3 - \frac{1}{Q}$$
- In questo caso il guadagno risulta dipendente dal fattore di merito
- Le resistenze R_a e R_b devono soddisfare la condizione
  $$\frac{R_b}{R_a} = 2 - \frac{1}{Q}$$

Filtro Sallen-Key passa-alto

- Per ottenere una risposta di tipo passa-alto



$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks^2}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

si pone

$$\mathbf{Y}_1 = sC_1,\ \mathbf{Y}_2 = 0,\ \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_4 = sC_2,\ \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_2}$$

- In questo modo si ha

$$\mathbf{H}(s) = \frac{R_1R_2C_1C_2Gs^2}{R_1R_2C_1C_2s^2 + [R_1(C_1 + C_2) + R_2C_2(1-G)]s + 1}$$

Filtro Sallen-Key passa-alto

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-alto del 2° ordine si ricava

$$K = R_1R_2C_1C_2G$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_1(C_1 + C_2) + R_2C_2(1-G)}$$

- Il guadagno ad alta frequenza del filtro è

$$H_0 = K\omega_0^2 = G$$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-alto

- Scelte le capacità C_1 e C_2 in modo che

  $$C_2 = nC_1$$

  dall'espressione di ω_0 si ottiene

  $$\omega_0 = \frac{1}{C_1\sqrt{nR_1R_2}} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{1}{n\omega_0^2 C_1^2 R_1}$$

- Sostituendo nell'espressione di Q si ha

  $$Q = \frac{\omega_0 R_1 C_1}{(n+1)(\omega_0 R_2 C_1)^2 - (G-1)}$$

- Da questa relazione si ricava R_1

  $$R_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2(G-1)(n+1)}}{2(n+1)\omega_0 C_1 Q}$$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-alto

- Dato che $G \geq 1$ i valori di R_1 sono sempre reali
- In questo caso, quindi, è sempre possibile scegliere $n = 1$, cioè utilizzare due capacità uguali
- Inoltre l'argomento della radice quadrata è sempre maggiore di 1, quindi l'unica soluzione positiva è quella con il segno $+$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-alto

Riepilogo

- Dati ω_0 Q e H_0, i valori dei componenti si possono determinare nel modo seguente:
  - Si scelgono le resistenze R_a e R_b in modo che
    $$G = H_0 = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$
  - Si scelgono arbitrariamente le capacità C_1 e C_2 (per semplicità si può porre $C_1 = C_2$)
  - Si calcolano le resistenze R_1 e R_2 mediante le relazioni

$$R_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2(G-1)\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)}}{2\omega_0(C_1 + C_2)Q} \qquad R_2 = \frac{1}{\omega_0^2 R_1 C_1 C_2}$$

Filtro Sallen-Key passa-alto a componenti uguali

- Per semplificare il progetto del filtro si può imporre che i valori delle resistenze R_1 R_2 e delle capacità C_1 C_2 siano uguali

$$R_1 = R_2 = R \qquad C_1 = C_2 = C$$

- In queste condizioni si ottengono risultati identici a quelli ottenuti per il filtro passa-basso

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad Q = \frac{1}{3-G} \quad \Rightarrow \quad H_0 = G = 3 - \frac{1}{Q}$$

- Il guadagno risulta dipendente dal fattore di merito
- Le resistenze R_a e R_b devono soddisfare la condizione

$$\frac{R_b}{R_a} = 2 - \frac{1}{Q}$$

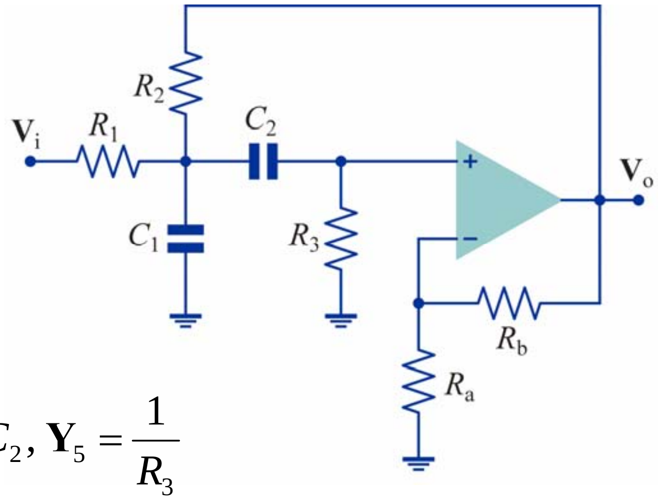
Filtro Sallen-Key passa-banda

- Per ottenere una risposta di tipo passa-banda

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

si pone

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_2 = sC_1,\ \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{R_2},\ \mathbf{Y}_4 = sC_2,\ \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_3}$$



- In questo modo si ha

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2} C_2 G s^2}{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2} C_1 C_2 s^2 + \frac{R_1 R_2 C_1 + [R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1-G)] C_2}{R_1 + R_2} s + 1}$$

Filtro Sallen-Key passa-banda

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-banda del 2° ordine si ricava

$$K = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2} C_2 G$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 R_3 (R_1 + R_2) C_1 C_2}}{R_1 R_2 C_1 + [R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1-G)] C_2}$$

- Il guadagno a centro banda del filtro è

$$H_0 = KQ\omega_0 = \frac{R_2 R_3 C_2 G}{R_1 R_2 C_1 + [R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 (1-G)] C_2}$$

Dimensionamento del filtro Sallen-Key passa-banda

- Una scelta conveniente dei parametri che consente di semplificare i calcoli, è la seguente (filtro a componenti uguali)

$$R_1 = R_2 = R \qquad R_2 = 2R \qquad C_1 = C_2 = C$$

- In queste condizioni si ottiene

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad Q = \frac{1}{3-G} \qquad H_0 = \frac{G}{3-G} = 3Q - 1$$

- I risultati mostrano che non è possibile fissare il valore del guadagno di centro-banda indipendentemente dal fattore di merito
- I valori dei parametri si ottengono dalle relazioni

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad G = 1 + \frac{R_\mathrm{b}}{R_\mathrm{a}} = 3 - \frac{1}{Q} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{b} = \left(2 - \frac{1}{Q}\right) R_\mathrm{a}$$

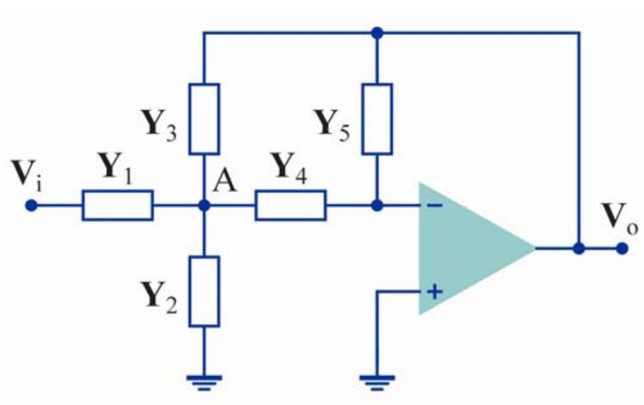
Filtri a retroazioni multiple (MFB)

- La tensione del nodo A può essere espressa in funzione della tensione di uscita come

$$\mathbf{V}_\mathrm{A} = -\frac{\mathbf{Y}_5}{\mathbf{Y}_4}\mathbf{V}_\mathrm{o}$$

- Inoltre, applicando la formula di Millman si ha

$$\mathbf{V}_\mathrm{A} = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{V}_\mathrm{i} + \mathbf{Y}_3\mathbf{V}_\mathrm{o}}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4}$$

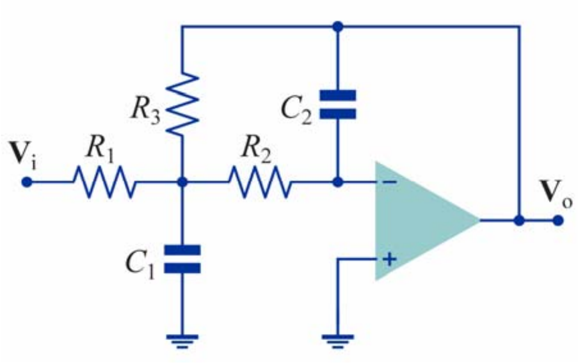


- Imponendo che le due espressioni di $\mathbf{V}_\mathrm{A}$ siano uguali si può ricavare la funzione di trasferimento

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_\mathrm{o}}{\mathbf{V}_\mathrm{i}} = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4}{\mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4)}$$

Filtro MFB passa-basso

- Per ottenere una risposta di tipo passa-basso



$$\mathbf{H}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

si pone

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_2 = sC_1,\ \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{R_3},\ \mathbf{Y}_4 = \frac{1}{R_3},\ \mathbf{Y}_5 = sC_2$$

- In questo modo si ha

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{-\frac{R_3}{R_1}}{C_1C_2R_2R_3s^2 + C_2R_2R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)s + 1}$$

Filtro MFB passa-basso

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-basso del 2° ordine si ricava

$$K = -\frac{R_3}{R_1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2R_3C_1C_2}}$$

$$Q = \frac{C_1}{\sqrt{R_2R_3C_1C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$$

- Il filtro ha un comportamento di tipo invertente e il suo guadagno in continua (in valore assoluto) è

$$H_0 = |K| = \frac{R_3}{R_1}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-basso

- Scelte le capacità in modo che

  $$C_2 = nC_1$$

  e tenendo conto del fatto che il guadagno in continua è determinato dal rapporto tra R_3 e R_1

  $$H_0 = \frac{R_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_3}{H_0}$$

  si ottiene

  $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{1}{n\omega_0^2 R_3 C_1^2}$$

  $$Q = \frac{\omega_0 R_3 C_1}{n(\omega_0 R_3 C_1)^2 + H_0 + 1}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-basso

- Dall'espressione di Q si può ricavare R_3

  $$R_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4nQ^2(H_0 + 1)}}{2n\omega_0 C_1 Q}$$

- Affinché il risultato sia reale occorre che il rapporto tra le capacità soddisfi la condizione

  $$n \le \frac{1}{4Q^2(H_0 + 1)}$$

- Si può notare che, dovendo essere $Q > 0.5$ (altrimenti non si hanno poli complessi coniugati) non si può scegliere $n = 1$, cioè non si possono avere due condensatori uguali

Dimensionamento del filtro MFB passa-basso

Riepilogo

- Dati ω_0 Q e H_0, i valori dei componenti si possono determinare nel modo seguente:
  - Si scelgono le capacità C_1 e C_2 in modo che
    $$\frac{C_1}{C_2} \geq 4Q^2(H_0+1)$$
  - Si calcolano le resistenze mediante le relazioni
    $$R_3 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4Q^2(H_0+1)\frac{C_2}{C_1}}}{2\omega_0 C_2 Q}$$
    $$R_1 = \frac{R_3}{H_0}$$
    $$R_2 = \frac{1}{\omega_0^2 R_3 C_1 C_2}$$

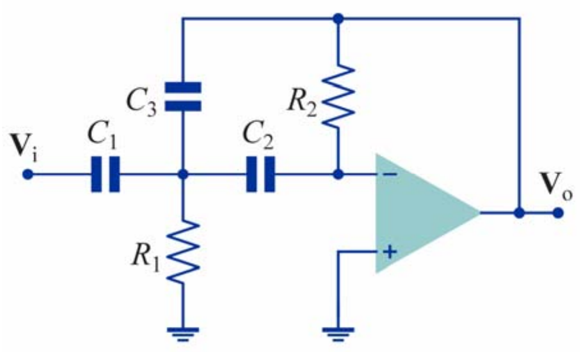
Filtro MFB passa-alto

- Per ottenere una risposta di tipo passa-alto

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks^2}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

si pone

$$\mathbf{Y}_1 = sC_1,\ \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_3 = sC_3,\ \mathbf{Y}_4 = sC_2,\ \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_2}$$



- In questo modo si ha

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-R_1R_2C_1C_2s^2}{R_1R_2C_2C_3s^2 + R_1(C_1+C_2+C_3)s+1}$$

Filtro MFB passa-alto

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-alto del 2° ordine si ricava

$$K = -R_1 R_2 C_1 C_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}}{R_1 (C_1 + C_2 + C_3)}$$

- Il filtro ha un comportamento di tipo invertente e il suo guadagno ad alta frequenza (in valore assoluto) è

$$H_0 = |K|\omega_0^2 = \frac{C_1}{C_3}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-alto

- Scelte le capacità C_1 e C_2 in modo che

$$C_2 = nC_1$$

e tenendo conto del fatto che il guadagno ad alta frequenza è determinato dal rapporto tra C_1 e C_3

$$H_0 = \frac{C_1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{C_1}{H_0}$$

si ottiene

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{H_0}{n\omega_0^2 R_2 C_1^2}$$

$$Q = \frac{n\omega_0 R_2 C_1}{H_0(n+1)+1}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-alto

- Dall'espressione di Q si può ricavare R_2

$$R_2 = \frac{Q[H_0(n+1)+1]}{n\omega_0 C_1}$$

- Quindi, sostituendo il valore nell'espressione di R_1 si ottiene

$$R_1 = \frac{H_0}{\omega_0 C_1 Q[H_0(n+1)+1]}$$

- In questo caso non si hanno vincoli sul valore di n, quindi si può scegliere $C_1 = C_2$

Dimensionamento del filtro MFB passa-alto

Riepilogo

- Dati ω_0 Q e H_0, i valori dei componenti si possono determinare nel modo seguente:
  - Si scelgono arbitrariamente le capacità C_1 e C_2 (spesso, per semplicità, si pone $C_1 = C_2$)
  - Si calcola la capacità C_3

$$C_3 = \frac{C_1}{H_0}$$

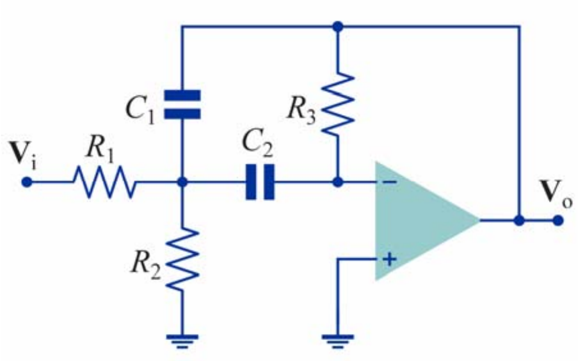
  - Si calcolano le resistenze

$$R_1 = \frac{H_0}{\omega_0 C_1 Q\left[H_0\left(\frac{C_1}{C_2}+1\right)+1\right]} \qquad R_2 = \frac{Q}{\omega_0 C_2}\left[H_0\left(\frac{C_1}{C_2}+1\right)+1\right]$$

Filtro MFB passa-banda

- Per ottenere una risposta di tipo passa-banda

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$



si pone

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{R_1},\ \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_2},\ \mathbf{Y}_3 = sC_1,\ \mathbf{Y}_4 = sC_2,\ \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_3}$$

- In questo modo si ha

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-\frac{R_2R_3}{R_1+R_2}C_2s^2}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_1C_2s^2 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)s + 1}$$

Filtro MFB passa-banda

- Dal confronto con la generica f.d.t. passa-banda del 2° ordine si ricava

$$K = -\frac{R_2R_3}{R_1+R_2}C_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}R_3C_1C_2}} \qquad Q = \frac{\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}R_3C_1C_2}}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)}$$

- Il filtro ha un comportamento invertente e il suo guadagno a centro banda (in valore assoluto) è

$$H_0 = |K|Q\omega_0 = \frac{R_3C_2}{R_1(C_1+C_2)}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-banda

- Scelte le capacità in modo che

$$C_2 = nC_1$$

e posto

$$R_2 = mR_1$$

si ottiene

$$H_0 = \frac{nR_3}{R_1(n+1)} \quad \Rightarrow \quad R_3 = H_0 R_1 \frac{n+1}{2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m+1}{mnC_1R_1R_3}} = \frac{1}{C_1R_1}\sqrt{\frac{m+1}{m(n+1)H_0}}$$

$$Q = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{n(m+1)R_3}{mR_1}} = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{H_0(m+1)(n+1)}{m}}$$

Dimensionamento del filtro MFB passa-banda

- Dall'espressione di Q si ricava m

$$m = \frac{H_0}{Q^2(1+n) - H_0}$$

- Si può notare che, affinché m sia positivo deve essere verificata la condizione

$$n > \frac{H_0}{Q^2} - 1$$

- Sostituendo l'espressione di m in quella di ω_0 si ricava R_1

$$\omega_0 = \frac{1}{C_1R_1}\frac{Q}{H_0} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{Q}{\omega_0 C_1 H_0}$$

- Di conseguenza si ha

$$R_2 = \frac{Q}{\omega_0 C_1\left[Q^2(1+n) - H_0\right]} \qquad R_3 = \frac{Q(n+1)}{n\omega_0 C_1}$$

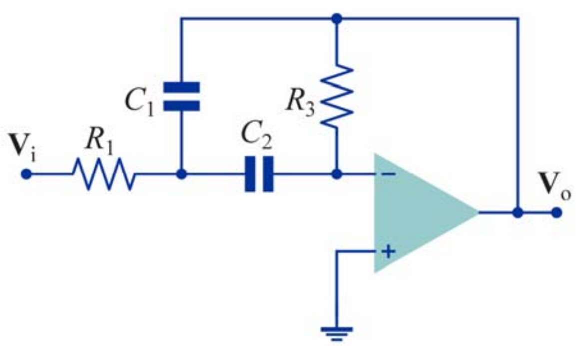
Dimensionamento del filtro MFB passa-banda

Riepilogo

- Dati ω_0 Q e H_0, i valori dei componenti si possono determinare nel modo seguente:
  - Si scelgono le capacità C_1 e C_2 in modo che
    $$\frac{C_2}{C_1} > \frac{H_0}{Q^2} - 1$$
  - Si calcolano le resistenze mediante le relazioni
    $$R_1 = \frac{Q}{\omega_0 C_1 H_0}$$
    $$R_2 = \frac{Q}{\omega_0 C_1 \left[Q^2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) - H_0 \right]}$$
    $$R_3 = \frac{Q}{\omega_0 C_2} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right)$$

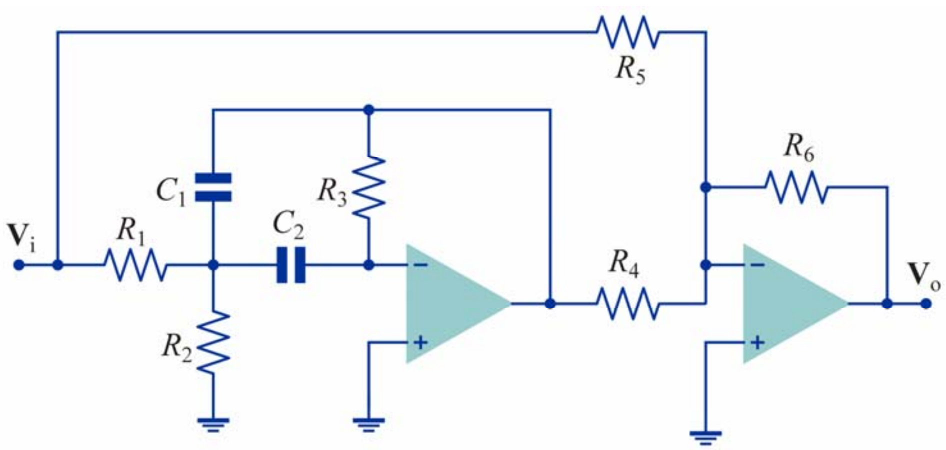
Dimensionamento del filtro MFB passa-banda

- Dalle relazioni precedenti si può notare che
  - Se $H_0 \leq 2Q^2$ si può porre $C_1 = C_2$
  - Se $H_0 \geq Q^2$ si può porre
    $$\frac{C_2}{C_1} = \frac{H_0}{Q^2} - 1$$
    con cui risulta $R_2 = \infty$ e quindi si può semplificare il circuito nel modo seguente



Filtro elimina-banda

- Collegando l'ingresso e l'uscita di un filtro MFB passa-banda a un sommatore invertente si può realizzare un filtro elimina-banda



Filtro elimina-banda

- Per il circuito risultante si ha

$$\mathbf{V}_o = \left(-\mathbf{V}_i \frac{\mathbf{H}_{bp}(s)}{R_4} - \mathbf{V}_i \frac{1}{R_5} \right) R_6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{R_6}{R_5} \left(\mathbf{H}_{bp}(s) + \frac{R_4}{R_5} \right)$$

dove H_{bp} è la funzione di trasferimento del filtro passa-banda

$$\mathbf{H}_{bp}(s) = \frac{K_{bp} s}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

- Quindi si ottiene

$$\mathbf{H}(s) = -\frac{R_6}{R_5} \frac{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \left(\dfrac{1}{Q\omega_0} + K_{bp} \dfrac{R_5}{R_4} \right) s + 1}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

Filtro elimina-banda

- Per ottenere una risposta di tipo elimina-banda si deve annullare il termine in s a numeratore di $H(s)$

$$\mathbf{H}_{\text{sb}}(s) = -\frac{R_6}{R_5}\frac{\dfrac{s^2}{\omega_0^2}+1}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2}+\dfrac{s}{Q\omega_0}+1}$$

- Questo richiede che il rapporto R_4/R_5 coincida con il guadagno a centro banda del filtro passa-banda

$$\frac{1}{Q\omega_0}+K_{\text{bp}}\frac{R_5}{R_4}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{R_4}{R_5}=-K_{\text{bp}}Q\omega_0=H_{0\text{bp}}=\frac{R_3C_2}{R_1(C_1+C_2)}$$

- Complessivamente il filtro ha un comportamento invertente e il suo guadagno (in valore assoluto) è

$$H_{0\text{sb}}=\frac{R_6}{R_5}$$

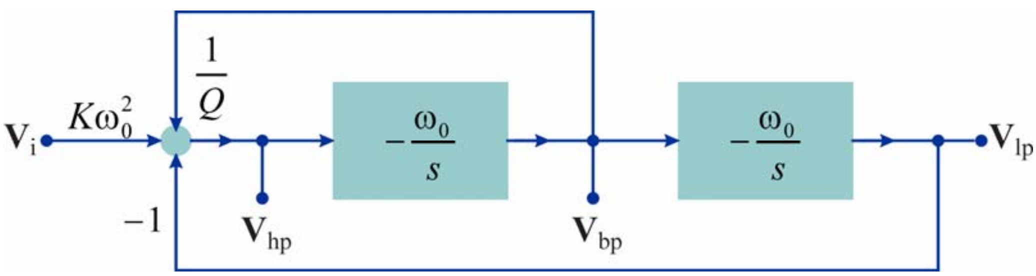
Filtro a variabile di stato

- La relazione ingresso-uscita di un filtro passa-alto può essere riscritta nel modo seguente

$$\frac{\mathbf{V}_{\text{hp}}}{\mathbf{V}_{\text{i}}}=\frac{Ks^2}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2}+\dfrac{s}{\omega_0 Q}+1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{V}_{\text{hp}}=\frac{K\omega_0^2}{1+\dfrac{\omega_0}{Qs}+\dfrac{\omega_0^2}{s^2}}\mathbf{V}_{\text{i}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_{\text{hp}}=K\omega_0^2\mathbf{V}_{\text{i}}-\frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{s}\mathbf{V}_{\text{hp}}-\frac{\omega_0^2}{s^2}\mathbf{V}_{\text{hp}}$$

- L'ultima relazione può essere rappresentata mediante questo schema a blocchi, in cui compaiono due integratori con costante si tempo $1/\omega_0$



Filtro a variabile di stato

- La tensione di uscita è ottenuta combinando la tensione di ingresso con le tensioni di uscita dei due integratori
- Si può notare che queste tensioni sono legate alla tensione di ingresso dalle relazioni

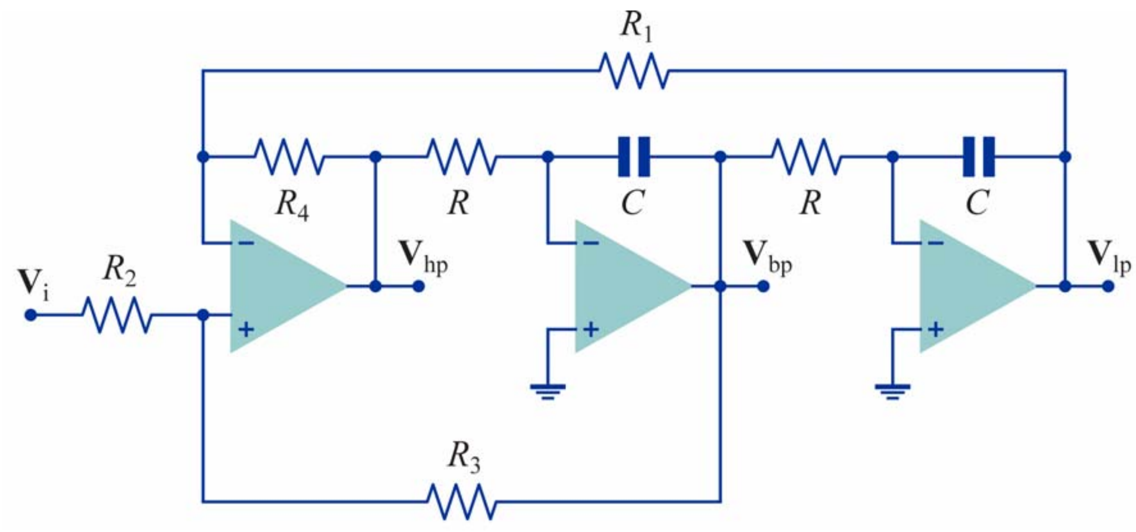
$$\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{bp}}}{\mathbf{V}_{\mathrm{i}}} = -\frac{K\omega_0 s}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{s}{\omega_0 Q} + 1} \qquad \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{lp}}}{\mathbf{V}_{\mathrm{i}}} = \frac{K\omega_0^2}{\dfrac{s^2}{\omega_0^2} + \dfrac{s}{\omega_0 Q} + 1}$$

  che corrispondono, rispettivamente, alle funzioni di trasferimento di un filtro passa-banda e di un filtro passa-basso
- Quindi si possono ottenere con lo stesso circuito tutte e tre le risposte
- Le uscite passa-basso e passa alto sono non invertenti, mentre quella passa banda è invertente
- I guadagni corrispondenti (in modulo) sono

$$H_{0\mathrm{hp}} = H_{0\mathrm{lp}} = K\omega_0^2 \qquad H_{0\mathrm{bp}} = KQ\omega_0^2$$

Filtro a variabile di stato

- Una possibile realizzazione circuitale è la seguente



$$\mathbf{V}_{\mathrm{hp}} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)\mathbf{V}_{\mathrm{i}} + \frac{R_2}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{sRC}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}}\right) - \frac{R_4}{R_1}\frac{1}{(sRC)^2}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}}$$

Filtro a variabile di stato

- Confrontando le equazioni

$$\mathbf{V}_{\mathrm{hp}} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)\mathbf{V}_{\mathrm{i}} + \frac{R_2}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_4}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{sRC}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}}\right) - \frac{R_4}{R_1}\frac{1}{(sRC)^2}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}}$$

e

$$\mathbf{V}_{\mathrm{hp}} = H_{0\mathrm{hp}}\mathbf{V}_{\mathrm{i}} - \frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{s}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}} - \frac{\omega_0^2}{s^2}\mathbf{V}_{\mathrm{hp}}$$

si riconosce che

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \qquad \frac{R_3}{R_2} = 2Q-1 \qquad \frac{R_4}{R_1} = 1$$

e quindi

$$H_{0\mathrm{hp}} = H_{0\mathrm{lp}} = \frac{2R_3}{R_2+R_3} = 2-\frac{1}{Q} \qquad H_{0\mathrm{bp}} = \frac{R_3}{R_2} = 2Q-1$$

Filtro a variabile di stato

- Si può notare che rispetto ai filtri di Sallen e Key si ha un'espressione del fattore di merito più semplice (Q dipende solo da R_2 e R_3)
- Q e ω_0 possono essere fissati indipendentemente l'uno dall'altro, il che rende più semplice la regolazione del filtro
- Inoltre Q risulta meno dipendente dalle tolleranze dei componenti, e questo rende possibile realizzare fattori di merito più elevati rispetto a quelli che possono essere ottenuti con i filtri precedenti
- Con questa configurazione, però, il guadagno non può essere fissato indipendentemente da Q

Approssimazione della f.d.t di un filtro ideale

- La funzione di trasferimento di un filtro ideale non è fisicamente realizzabile, quindi vengono utilizzate opportune funzioni approssimanti che ne riproducono l'andamento entro tolleranze prefissate
- Esistono vari tipi di funzioni approssimanti che danno origine a varie classi di filtri (Butterworth, Chebyshev, Bessel, Cauer, ecc)
- In seguito, a titolo di esempio, verrà fatto qualche cenno sulle approssimazioni di Butterworth e di Chebyshev

Filtri di Butterworth

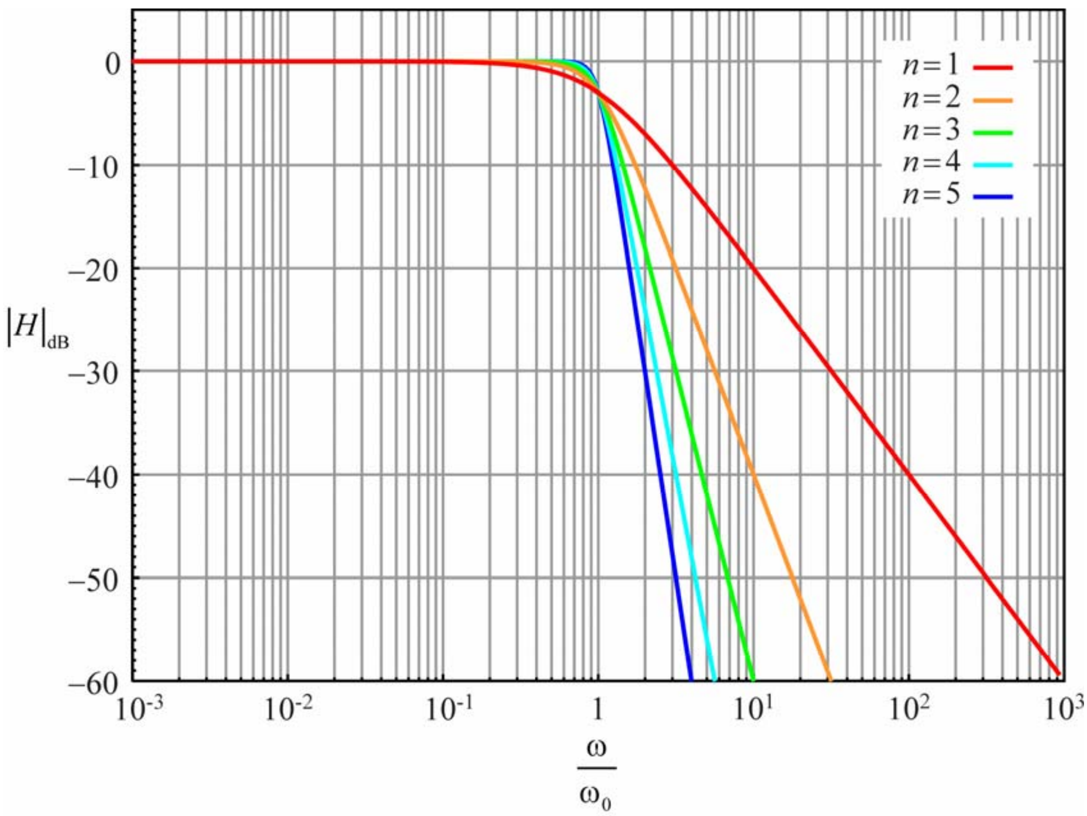
- Nel caso di un filtro passa-basso l'approssimazione di Butterworth del modulo del guadagno è

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

dove n rappresenta l'ordine del filtro

- Questa funzione ha la caratteristica che per $\omega = 0$ le sue derivate fino all'ordine $n-1$ sono nulle, per questo è la risposta di tipo Butterworth è dette *massimamente piatta*
- Si può notare che, indipendentemente da n, per $\omega = \omega_0$ il modulo di H vale $\sqrt{2}/2$, che corrisponde a -3 dB
- Per $\omega > \omega_0$ il guadagno decresce con pendenza $-n \cdot 20$ dB/decade

Risposta di un filtro passa-basso di Butterworth



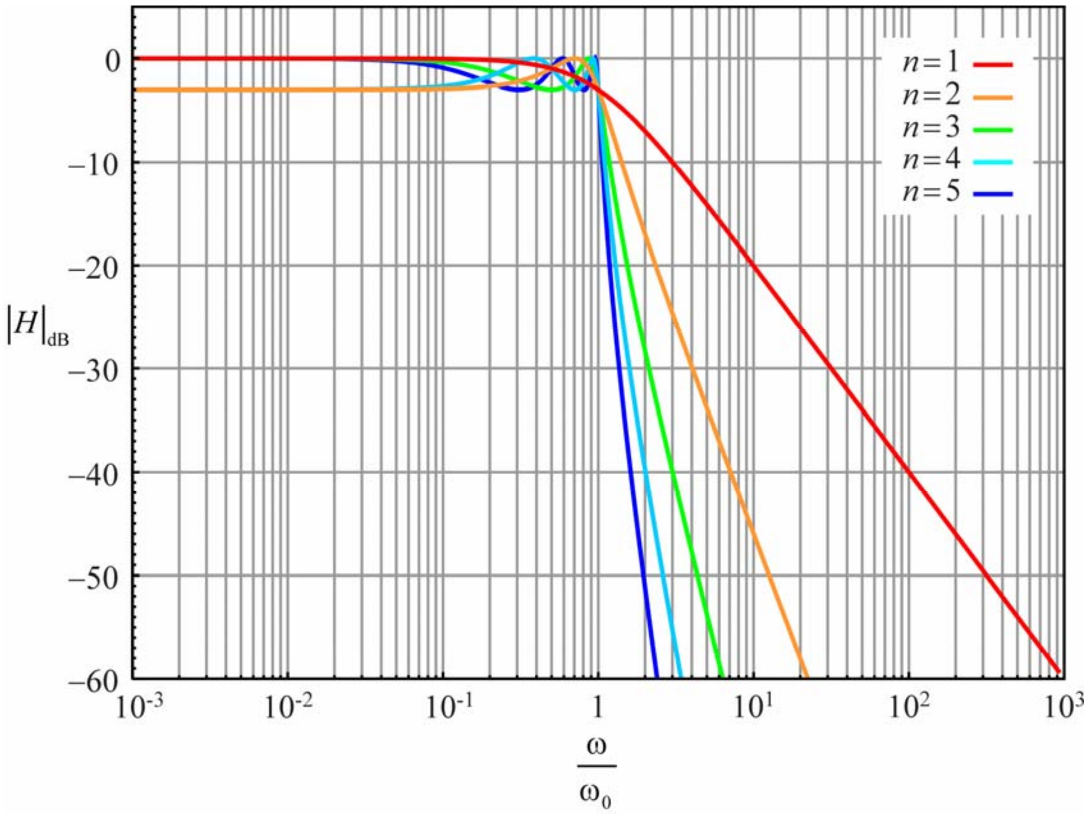
Filtri di Chebyshev

- Il modulo del guadagno di un filtro bassa-basso di Chebyshev è

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

  dove C_n è il polinomio di Chebyshev di grado n
- Nella banda passante il modulo ha dei massimi, di valore 1 e dei minimi di valore $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, quindi ε definisce il valore del *ripple* nella banda passante
- Il numero complessivo di minimi e massimi (incluso quello nell'origine) è pari a n
- Per $\omega > \omega_0$ il guadagno inizialmente decresce in modo più rapido rispetto al caso del filtro di Butterworth
- Per ω la pendenza si riduce e tende a $-n{\cdot}20$ dB/decade

Risposta di un filtro passa-basso di Chebyshev (ripple = 3 dB)



Sintesi in cascata

- Per $n > 2$ la funzione di trasferimento di un filtro, essendo una funzione razionale, può essere scomposta nel prodotto di termini del primo e del secondo ordine
- Quindi un filtro di ordine n può essere ottenuto collegando in cascata
  - $n/2$ filtri di del secondo ordine per n pari
  - $(n–1)/2$ filtri del secondo ordine più un filtro del primo ordine per n dispari
- Per i vari tipi di filtro sono disponibili tabelle che riportano i valori normalizzati (rispetto a ω_0) delle pulsazioni di taglio relative ai vari termini e i valori dei fattori di merito, o dei coefficienti di smorzamento $\delta = 1/(2Q)$, dei termini del secondo ordine

Sintesi di filtri passa-basso e passa-alto

- Di seguito sono riportate, a titolo di esempio, delle tabelle normalizzate relative a filtri passa-basso di Butterworth e di Chebyshev
- Per realizzare un filtro passa-basso i valori delle frequenze normalizzate ricavati dalle tabelle devono essere moltiplicati per la pulsazione di taglio ω_0 del filtro
- Dato che una risposta di tipo passa-alto può essere ottenuta da una passa-basso sostituendo s/ω_0 con ω_0/s, le stesse tabelle possono essere utilizzate anche per il progetto di filtri passa-alto
- In questo caso i valori delle pulsazioni relative ai singoli fattori si ottengono dividendo la pulsazione di taglio ω_0 del filtro per la frequenza indicata in tabella
- Si può osservare che nel caso dei filtri di Butterworth tutti gli stadi in cascata hanno pulsazione di taglio coincidente con quella del filtro, mentre questo non vale nel caso dei filtri di Chebyshev

Esempio di tabella normalizzata

Filtro passa-basso di Butterworth

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5
2	1	0.707								
3	1	1.000	1							
4	1	0.541	1	1.306						
5	1	0.618	1	1.620	1					
6	1	0.518	1	0.707	1	1.932				
7	1	0.555	1	0.802	1	2.247	1			
8	1	0.510	1	0.601	1	0.900	1	2.563		
9	1	0.532	1	0.653	1	1.000	1	2.879	1	
10	1	0.506	1	0.561	1	0.707	1	1.101	1	3.196

Esempio di tabella normalizzata

Filtro passa-basso di Chebyshev (ripple = 0.1 dB)

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5
2	1.820	0.767								
3	1.300	1.341	0.969							
4	1.153	2.183	0.789	0.619						
5	1.093	3.282	0.797	0.915	0.539					
6	1.063	4.633	0.834	1.332	0.513	0.599				
7	1.045	6.233	0.868	1.847	0.575	0.846	0.377			
8	1.034	8.082	0.894	2.453	0.645	1.183	0.382	0.593		
9	1.027	10.178	0.913	3.145	0.705	1.585	0.449	0.822	0.290	
10	1.022	12.522	0.928	3.921	0.754	2.044	0.524	1.127	0.304	0.590

Esempio di tabella normalizzata

Filtro passa-basso di Chebyshev (ripple = 1 dB)

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5
2	1.050	0.957								
3	0.997	2.018	0.494							
4	0.993	3.559	0.529	0.785						
5	0.994	5.556	0.655	1.399	0.289					
6	0.995	8.004	0.747	2.198	0.353	0.761				
7	0.996	10.899	0.808	3.156	0.480	1.297	0.205			
8	0.997	14.240	0.851	4.266	0.584	1.956	0.265	0.753		
9	0.998	18.029	0.881	5.527	0.662	2.713	0.377	1.260	0.159	
10	0.998	22.263	0.902	6.937	0.721	3.561	0.476	1.864	0.212	0.749