

# Risposta in frequenza e filtri

[www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm](http://www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm)  
(versione del 7-5-2017)

## Diagrammi di Bode

- Le **funzioni di trasferimento** (f.d.t) dei circuiti lineari tempo invarianti sono funzioni razionali (cioè rapporti tra due polinomi) a coefficienti reali della variabile  $j\omega$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{N}(j\omega)}{\mathbf{D}(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$$

- Si può dimostrare che per un sistema fisicamente realizzabile  $m \leq n$
- L'andamento di  $\mathbf{H}(j\omega)$  viene rappresentato mediante due grafici (**diagrammi di Bode**) che riportano
  - il modulo (in dB) ➔ **risposta in ampiezza**
  - l'argomento (in gradi o radianti) ➔ **risposta in fase**in funzione della pulsazione o della frequenza (in scala logaritmica)

## Note

- Nella rappresentazione della frequenza (o della pulsazione) in scala logaritmica si mettono in evidenza intervalli di frequenza caratterizzati da un rapporto costante tra la frequenza superiore  $f_2$  e la frequenza inferiore  $f_1$
- In particolare
  - ◆ si chiama **decade** un intervallo per cui  $f_2 = 10f_1$
  - ◆ si chiama **ottava** un intervallo per cui  $f_2 = 2f_1$
- Normalmente le fasi vengono rappresentate nell'intervallo  $[-180^\circ, 180^\circ]$  oppure  $[-\pi, \pi]$

3

## Poli e zeri

- Per studiare le proprietà delle funzione di trasferimento è conveniente scrivere i polinomi in forma fattorizzata
- A tale fine, conviene sostituire la variabile  $j\omega$  con una variabile complessa  $s$  (**frequenza complessa**)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

- I valori di  $s$  per cui si annulla il polinomio  $\mathbf{N}(s)$  sono detti **zeri** della f.d.t.
- I valori di  $s$  per cui si annulla il polinomio  $\mathbf{D}(s)$  sono detti **poli** della f.d.t.
- Se si indicano con  $z_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) gli zeri e con  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) i poli, è possibile scrivere la f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

4

## Ordine della funzione di trasferimento

- L'**ordine di una funzione** di trasferimento corrisponde al numero dei poli, quindi al grado  $n$  del denominatore
- L'ordine corrisponde al numero di componenti dinamici indipendenti (che è uguale al numero di condensatori le cui tensioni sono indipendenti, cioè non legate tra loro dalle equazioni del circuito, più il numero di induttori le cui correnti sono indipendenti)
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico l'ordine corrisponde al numero totale dei componenti dinamici, ma in alcuni casi particolari (**circuiti degeneri**) può risultare inferiore

5

## Poli e zeri reali

- Dato che  $\mathbf{N}(s)$  e  $\mathbf{D}(s)$  sono polinomi a coefficienti reali, si possono avere poli e zeri reali e coppie di poli e di zeri complessi coniugati
- Se  $z_i$  o  $p_i = 0$  i fattori corrispondenti si riducono a  $s$
- Per  $z_i$  o  $p_i$  reale  $\neq 0$  i fattori corrispondenti possono essere posti nella forma

$$(s - z_i) = \omega_{0zi} \left( 1 + \frac{s}{\omega_{0zi}} \right)$$

$$(s - p_i) = \omega_{0pi} \left( 1 + \frac{s}{\omega_{0pi}} \right)$$

dove

$$\omega_{0zi} = -z_i \quad \omega_{0pi} = -p_i \quad (\text{pulsazioni di taglio})$$

6

## Poli e zeri complessi coniugati

- I termini corrispondenti a due zeri complessi coniugati,  $z_i = \alpha_i + j\beta_i$ ,  $z_{i+1} = z_i^* = \alpha_i - j\beta_i$ , possono essere posti nella forma

$$(s - z_i)(s - z_i^*) = (s - \alpha_i - j\beta_i)(s - \alpha_i + j\beta_i) = s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2 = \\ = \omega_{0zi}^2 \left( 1 + \frac{s}{Q_{zi}\omega_{0zi}} + \frac{s^2}{\omega_{0zi}^2} \right)$$

dove

$$\omega_{0zi} = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} = |z_i| \quad \text{(pulsazione naturale)}$$

$$Q_{zi} = -\frac{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}{2\alpha_i} = -\frac{|z_i|}{2\operatorname{Re}[z_i]} \quad \text{(fattore di merito)}$$

- Analogamente i termini corrispondenti a due poli complessi coniugati possono essere posti nella forma

$$(s - p_i)(s - p_i^*) = \omega_{0pi}^2 \left( 1 + \frac{s}{Q_{pi}\omega_{0pi}} + \frac{s^2}{\omega_{0pi}^2} \right)$$

7

## Nota

- Si può notare che, affinché un termine quadratico del tipo

$$1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

corrisponda a una coppia di poli o zeri complessi coniugati, occorre che sia negativo il discriminante

$$\Delta = \frac{1}{Q^2\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} < 0$$

- ➔ Quindi deve essere soddisfatta la condizione  $Q > \frac{1}{2}$

8

# Fattorizzazione della funzione di trasferimento

- Complessivamente la f.d.t. può essere posta nella forma

$$\mathbf{H}(s) = K \cdot \frac{\prod_{\text{zeri nulli}} s \cdot \prod_{\text{zeri reali} \neq 0} \left(1 + \frac{s}{\omega_{0zi}}\right) \cdot \prod_{\text{zeri complessi}} \left(1 + \frac{s}{Q_{zi}\omega_{0zi}} + \frac{s^2}{\omega_{0zi}^2}\right)}{\prod_{\text{poli nulli}} s \cdot \prod_{\text{poli reali} \neq 0} \left(1 + \frac{s}{\omega_{0pi}}\right) \cdot \prod_{\text{poli complessi}} \left(1 + \frac{s}{Q_{pi}\omega_{0pi}} + \frac{s^2}{\omega_{0pi}^2}\right)}$$

- La risposta in frequenza può essere ottenuta sostituendo  $s$  con  $j\omega$

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{\text{zeri nulli}} j\omega \cdot \prod_{\text{zeri reali} \neq 0} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{0zi}}\right) \cdot \prod_{\text{zeri complessi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0zi}^2} + j \frac{\omega}{Q_{zi}\omega_{0zi}}\right)}{\prod_{\text{poli nulli}} j\omega \cdot \prod_{\text{poli reali} \neq 0} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{0pi}}\right) \cdot \prod_{\text{poli complessi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0pi}^2} + j \frac{\omega}{Q_{pi}\omega_{0pi}}\right)}$$

9

## Funzioni elementari

- La forma fattorizzata della funzione di trasferimento rende agevole la costruzione dei diagrammi di Bode, infatti
  - ◆ Il valore in dB del modulo di  $\mathbf{H}$  è dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore (incluso  $K$ ) e dei fattori del denominatore
  - ◆ L'argomento  $\mathbf{H}$  è dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore (incluso  $K$ ) e dei fattori del denominatore
- ➔ I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle **funzioni elementari**

$$\mathbf{H}(j\omega) = K$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\pm 1}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^{\pm 1}$$

10

## Nota

- Per semplicità in seguito si assumerà sia i poli che gli zeri abbiano parte reale non positiva e, quindi, che le costanti  $\omega_{0i}$  e  $Q_i$  siano tutte positive
  - ◆ per quanto riguarda i poli questa condizione è sempre verificata se il circuito è stabile
  - ◆ per gli zeri la condizione è verificata nella maggior parte dei casi di interesse pratico
- Nel caso di zeri (o poli) con parte reale positiva
  - ◆ i diagrammi delle ampiezze sono identici a quelli per gli zeri (o poli) con parte reale positiva, a parte la sostituzione di  $\omega_0$  con  $|\omega_0|$  e di  $Q$  con  $|Q|$
  - ◆ i diagrammi delle fasi si possono ottenere ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli corrispondenti a  $\omega_0$  o  $Q$  positivo

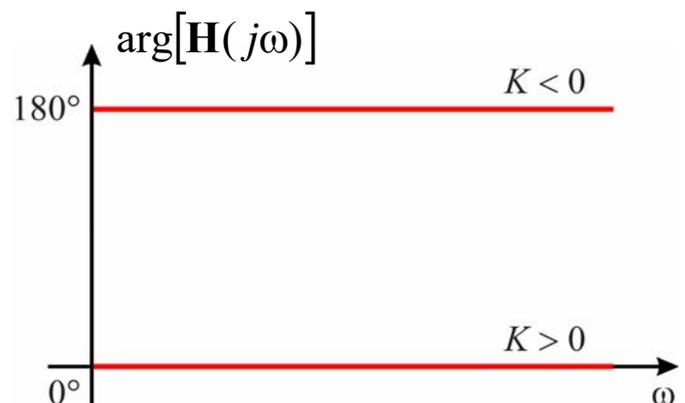
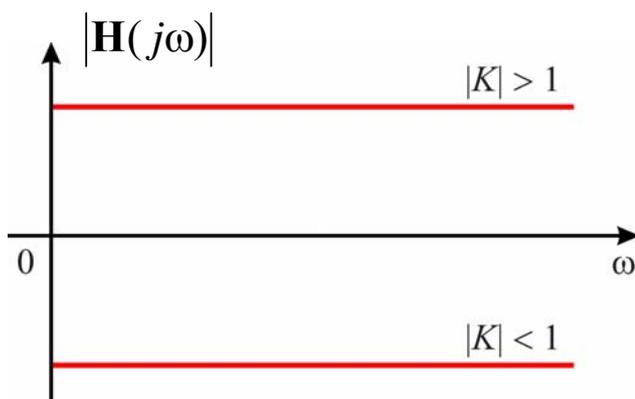
11

## Fattore costante

$$\mathbf{H}(j\omega) = K$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(K)$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \begin{cases} 0 & \text{per } K > 0 \\ 180^\circ & \text{per } K < 0 \end{cases}$$



12

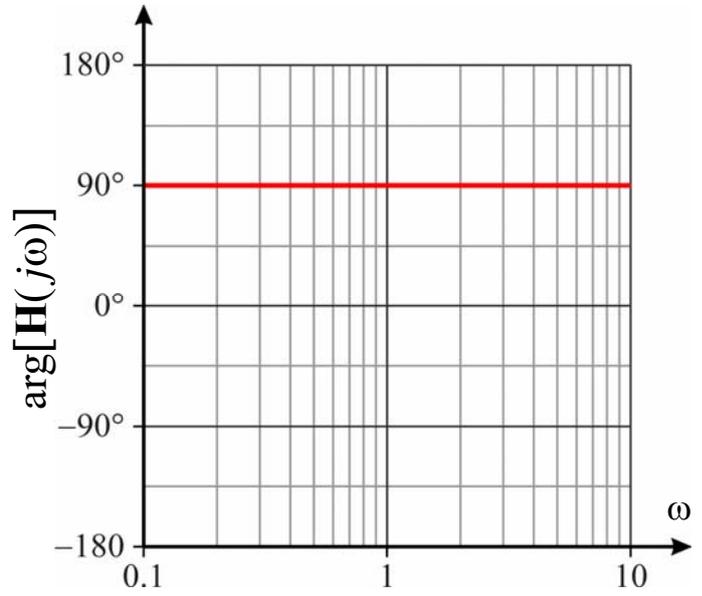
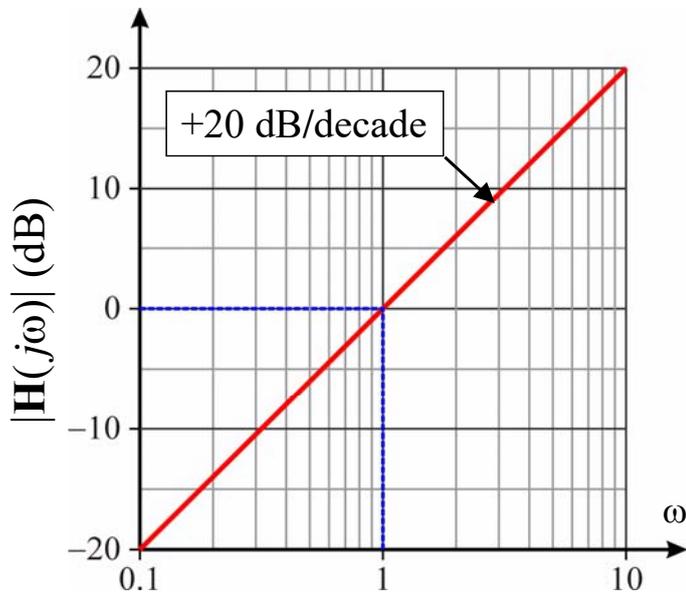
## Zero nell'origine

$$\mathbf{H}(j\omega) = j\omega$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(\omega)$$

$$\omega = 1 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 90^\circ$$



13

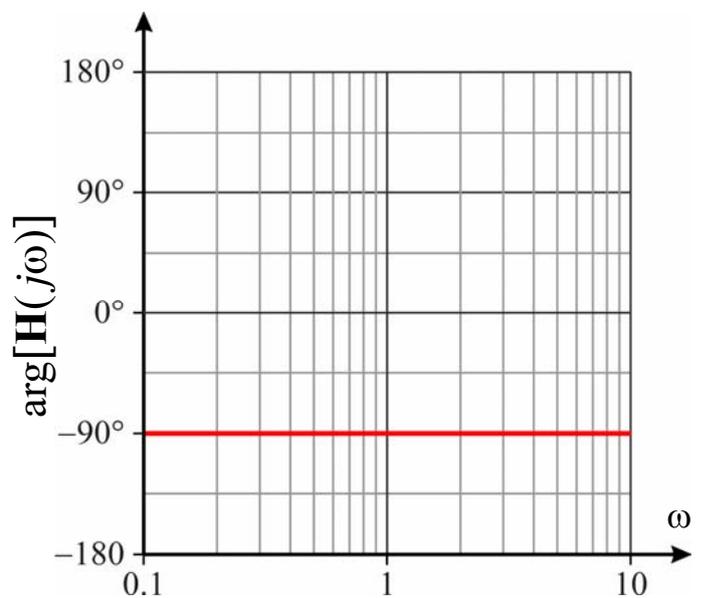
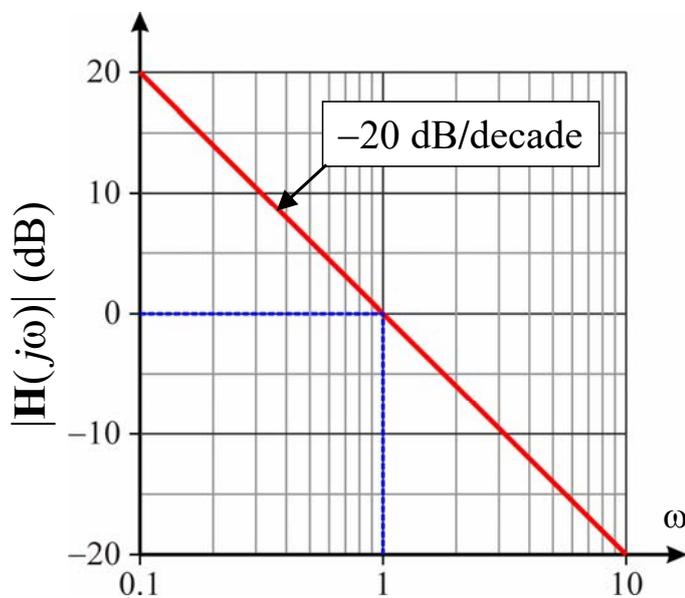
## Polo nell'origine

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10}(\omega)$$

$$\omega = 1 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = -90^\circ$$



14

## Nota

- Le rette che rappresentano il modulo del termine relativo a uno zero o un polo nell'origine intersecano l'asse delle ascisse per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$
- Se sull'asse delle ascisse viene riportata la frequenza  $f = \omega/(2\pi)$ , l'attraversamento avviene per  $f = 1/(2\pi) \approx 0.159 \text{ Hz}$
- Quindi per  $f = 1 \text{ Hz}$  il valore del modulo è
  - ◆ nel caso dello zero nell'origine  
 $20 \log_{10}(2\pi) \approx 16 \text{ dB}$
  - ◆ nel caso del polo nell'origine  
 $-20 \log_{10}(2\pi) \approx -16 \text{ dB}$

15

## Zero reale - ampiezza

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

- Si possono individuare due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0$$

➔ retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 20(\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

➔ retta con pendenza +20 dB/decade (= +6 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per  $\omega = \omega_0$

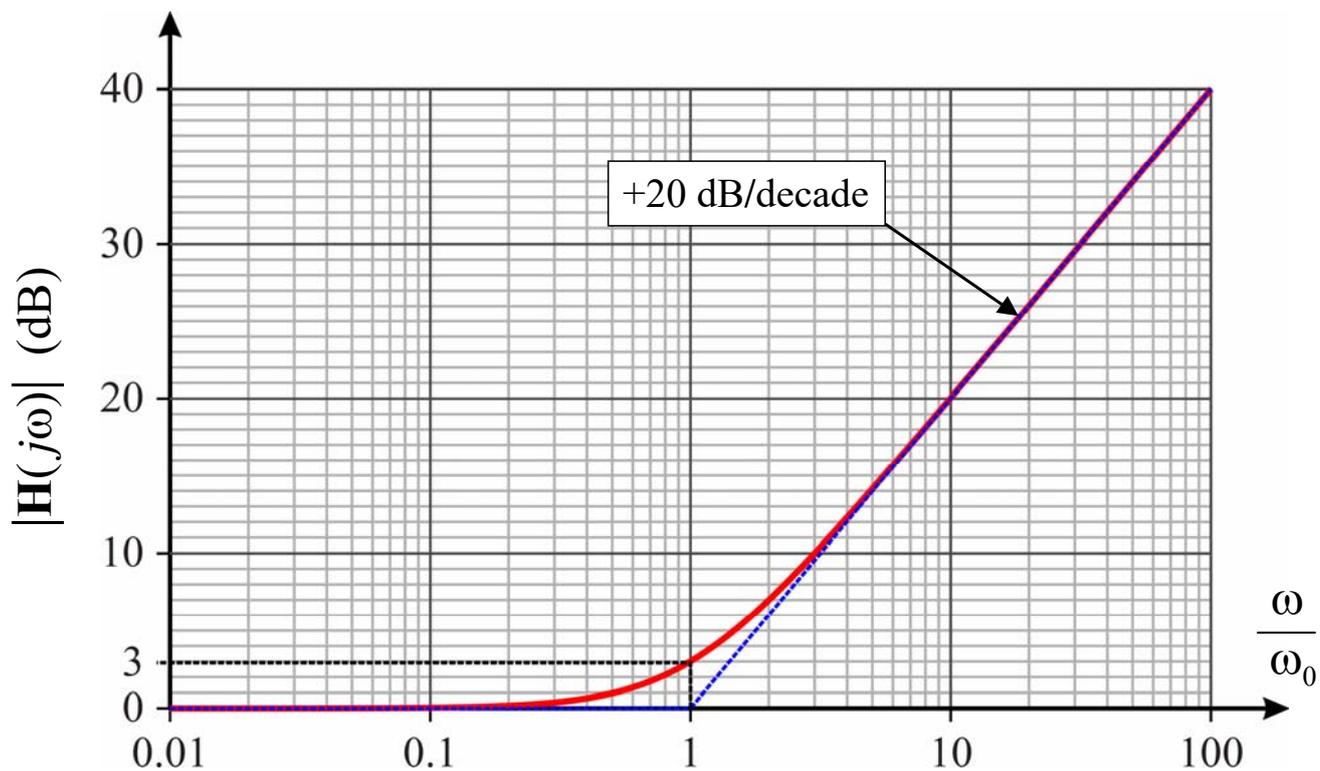
16

## Zero reale - ampiezza

- L'andamento del modulo di  $\mathbf{H}$  può essere approssimato con un diagramma formato da due semirette che si incontrano per  $\omega = \omega_0$  (**approssimazione asintotica**)
- Per  $\omega = \omega_0$  il modulo di  $\mathbf{H}$  vale
$$|\mathbf{H}(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$
- Questo valore rappresenta anche il massimo errore introdotto dalla rappresentazione asintotica

17

## Zero reale - ampiezza



18

## Zero reale - fase

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

➔ Quindi risulta

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 90^\circ$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = 45^\circ$$

- In questo caso si hanno due asintoti orizzontali
- L'andamento della fase può essere approssimato mediante una spezzata formata da due semirette orizzontali, corrispondenti agli asintoti, e da un segmento obliquo

19

## Zero reale - fase

- Per tracciare il segmento obliquo si possono utilizzare vari criteri
- **Approssimazione 1:**
  - ◆ Si collegano i due asintoti mediante la retta tangente alla curva nel punto  $\omega = \omega_0$
  - ◆ Si può verificare che le intersezioni di questa retta con gli asintoti si trovano in corrispondenza delle pulsazioni

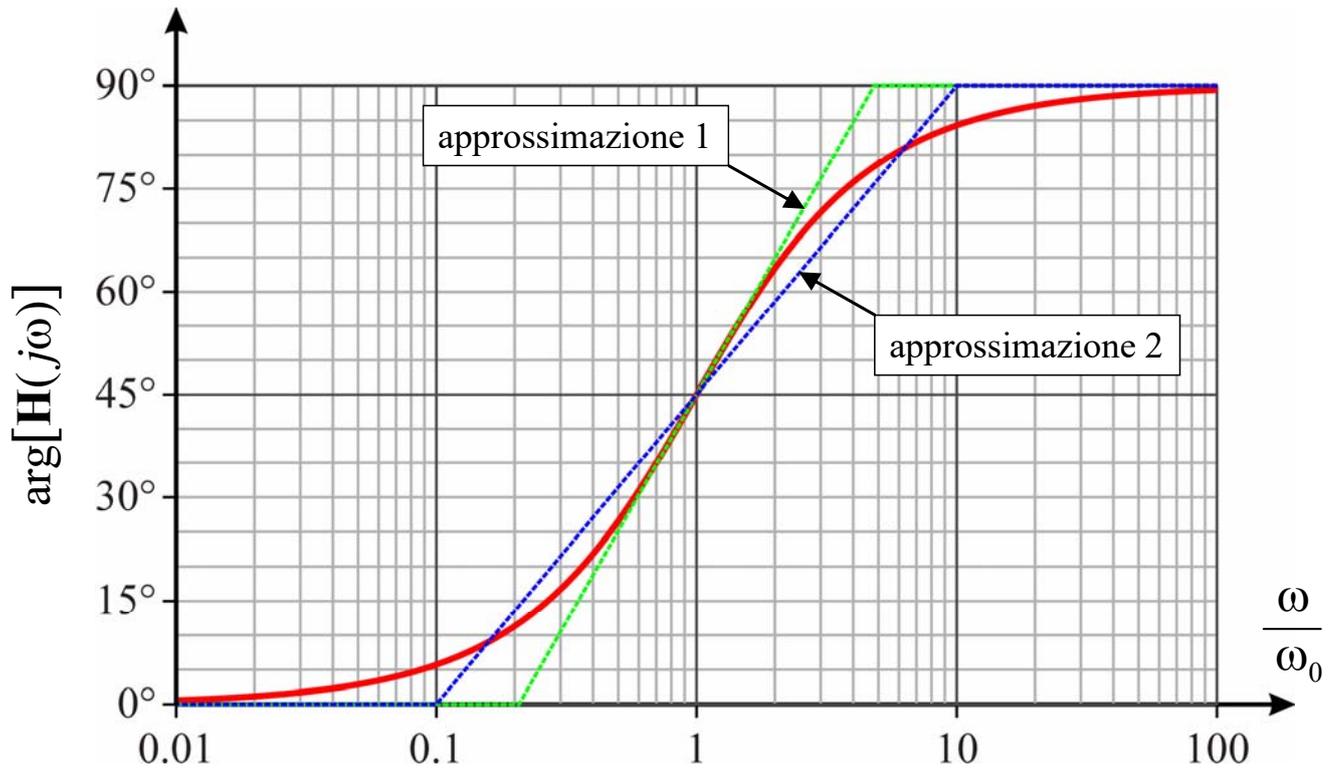
$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}} \approx \frac{\omega_0}{4.81}$$

$$\omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.81 \omega_0$$

- **Approssimazione 2:**
  - ◆ Si collegano gli asintoti mediante la retta che li interseca per  $\omega_1 = 0.1\omega_0$        $\omega_2 = 10\omega_0$
  - ◆ In questo modo il massimo scostamento risulta di circa  $5.8^\circ$  ed è inferiore al massimo errore che si ottiene con l'approssimazione 1

20

## Zero reale - fase



21

## Polo reale

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

- Dato che

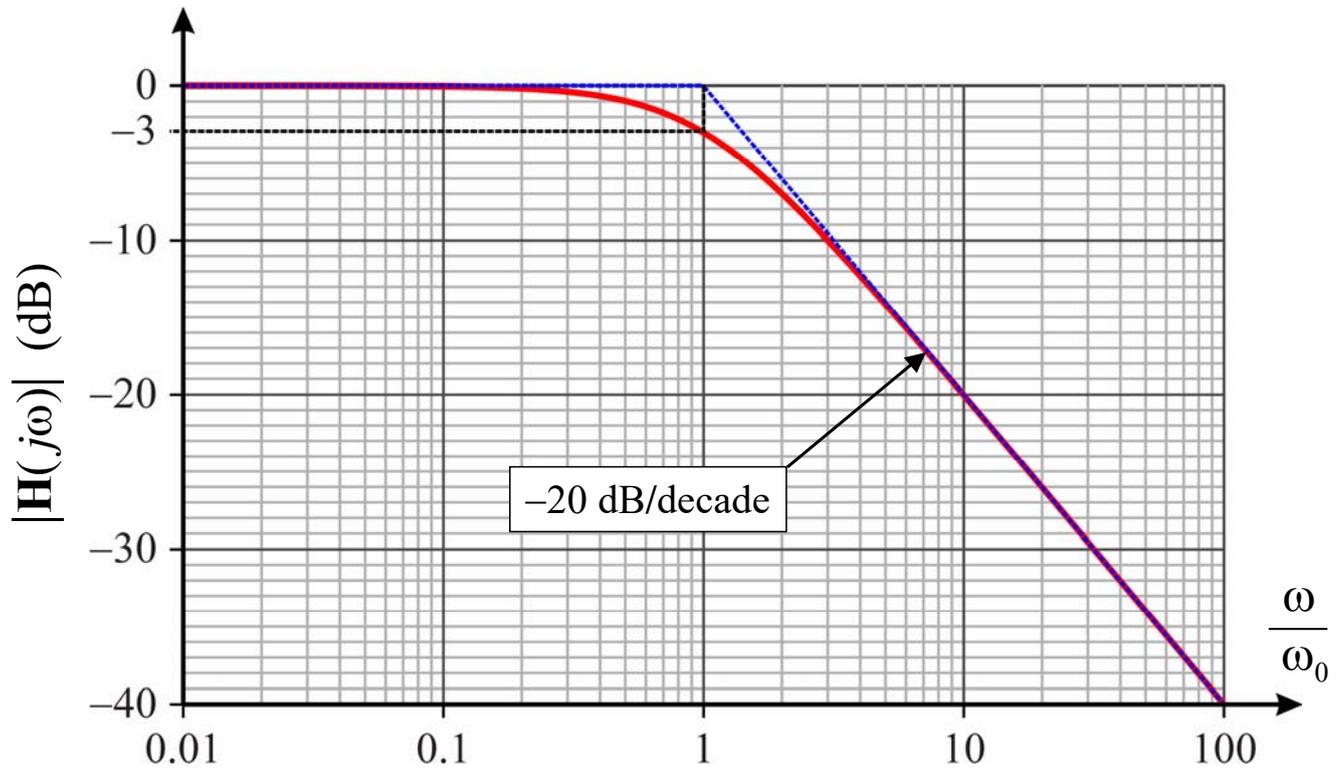
$$20 \log_{10} \frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right|} = -20 \log_{10} \left( \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right| \right)$$

$$\arg \frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right|} = -\arg \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

i diagrammi del modulo e dell'argomento di questa funzione si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse i diagrammi corrispondenti alla funzione  $1 + j\omega\tau$

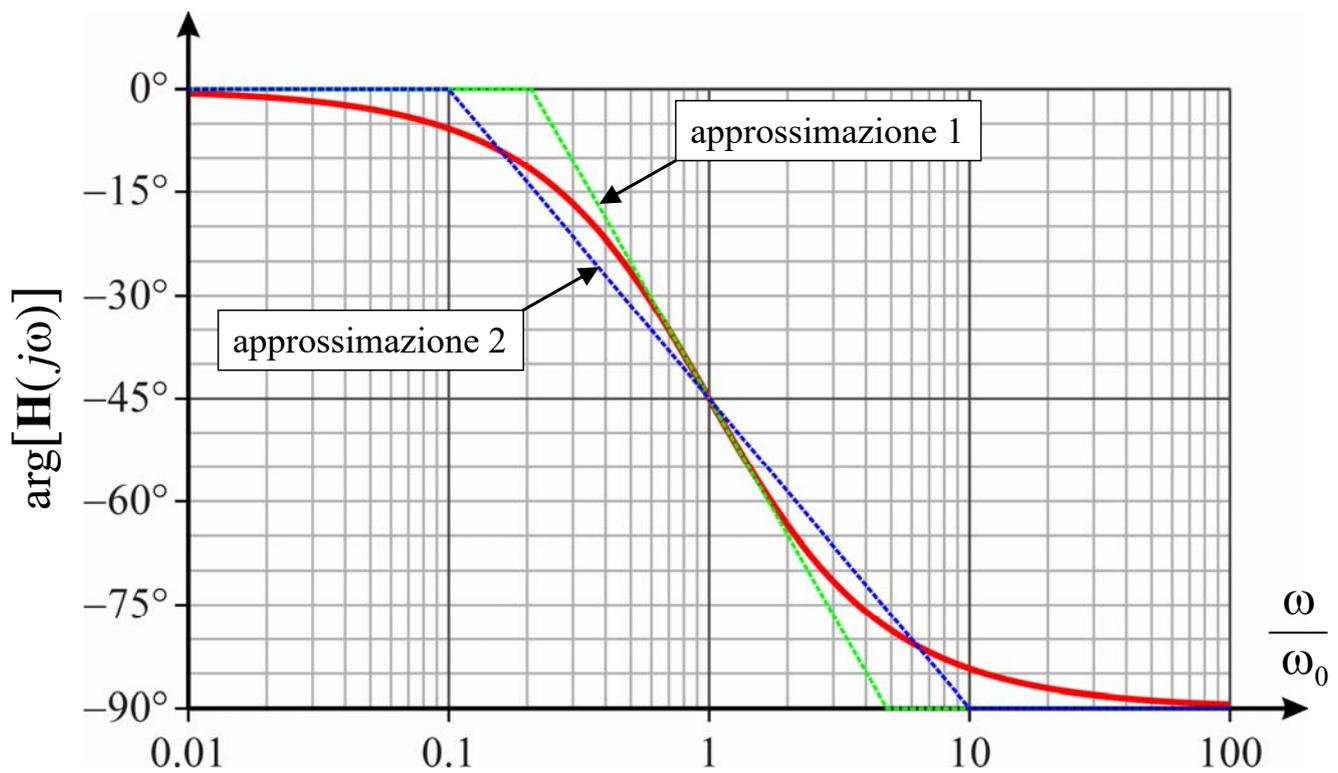
22

## Polo reale - ampiezza



23

## Polo reale - fase



24

## Zeri complessi coniugati - ampiezza

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

- Si individuano due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0$$

➔ retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}} = 40(\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

➔ retta con pendenza +40 dB/decade (+12 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per  $\omega = \omega_0$

25

## Zeri complessi coniugati - ampiezza

- In questo caso, in prossimità della pulsazione  $\omega_0$  l'andamento del modulo di  $\mathbf{H}$  può discostarsi sensibilmente dal diagramma asintotico
- In particolare la curva può presentare un minimo se esiste un valore reale  $\omega_M$  della pulsazione per cui si annulla la derivata di  $|\mathbf{H}|$

$$\frac{d}{d\omega} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} = 0 \Rightarrow \omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

- ◆ Questo avviene se

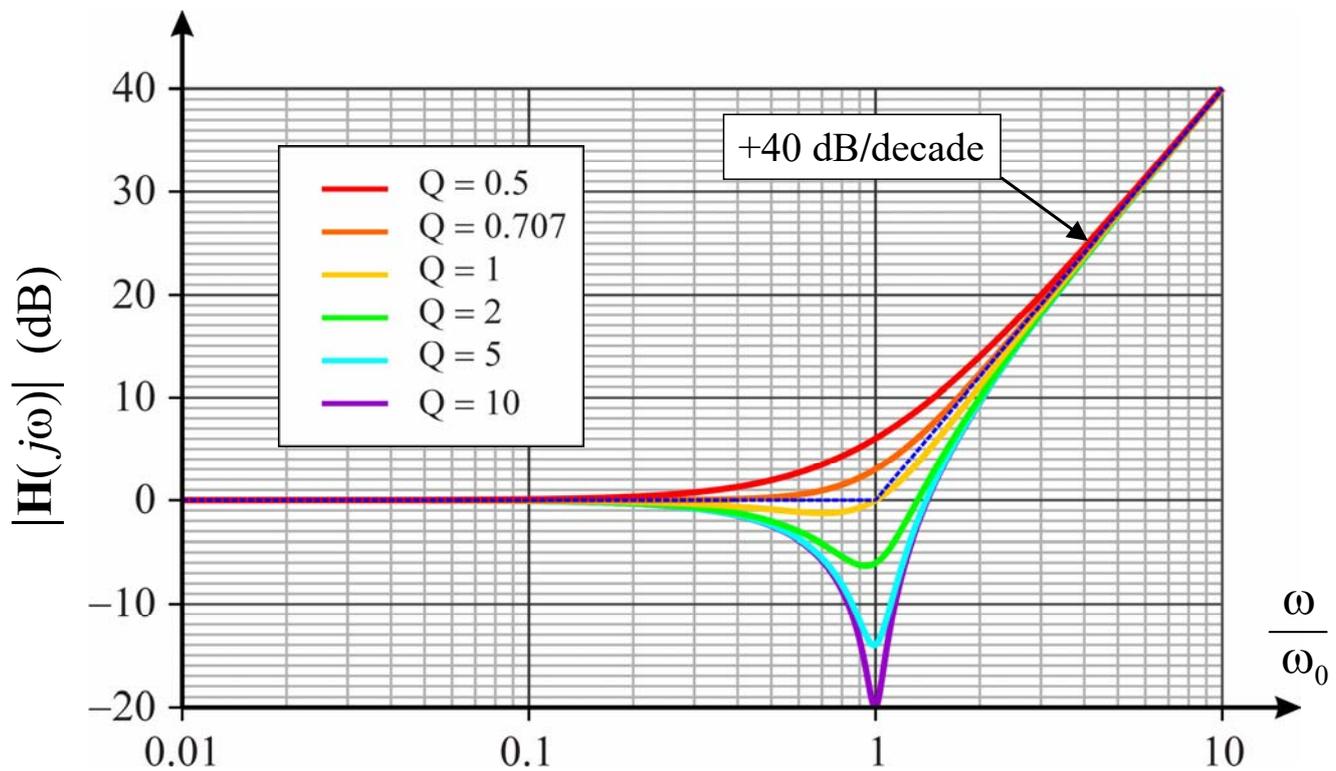
$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- ◆ In questo caso si ha anche

$$|\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

26

## Zeri complessi coniugati - ampiezza



27

## Zeri complessi coniugati - fase

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \begin{cases} \arctg\left[\frac{\omega_0\omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] & \text{per } \omega < \omega_0 \\ 90^\circ & \text{per } \omega = \omega_0 \\ \arctg\left[\frac{\omega_0\omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] + 180^\circ & \text{per } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

- Quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 180^\circ$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega_0)] = 90^\circ$$

- Anche in questo caso si hanno due asintoti orizzontali

28

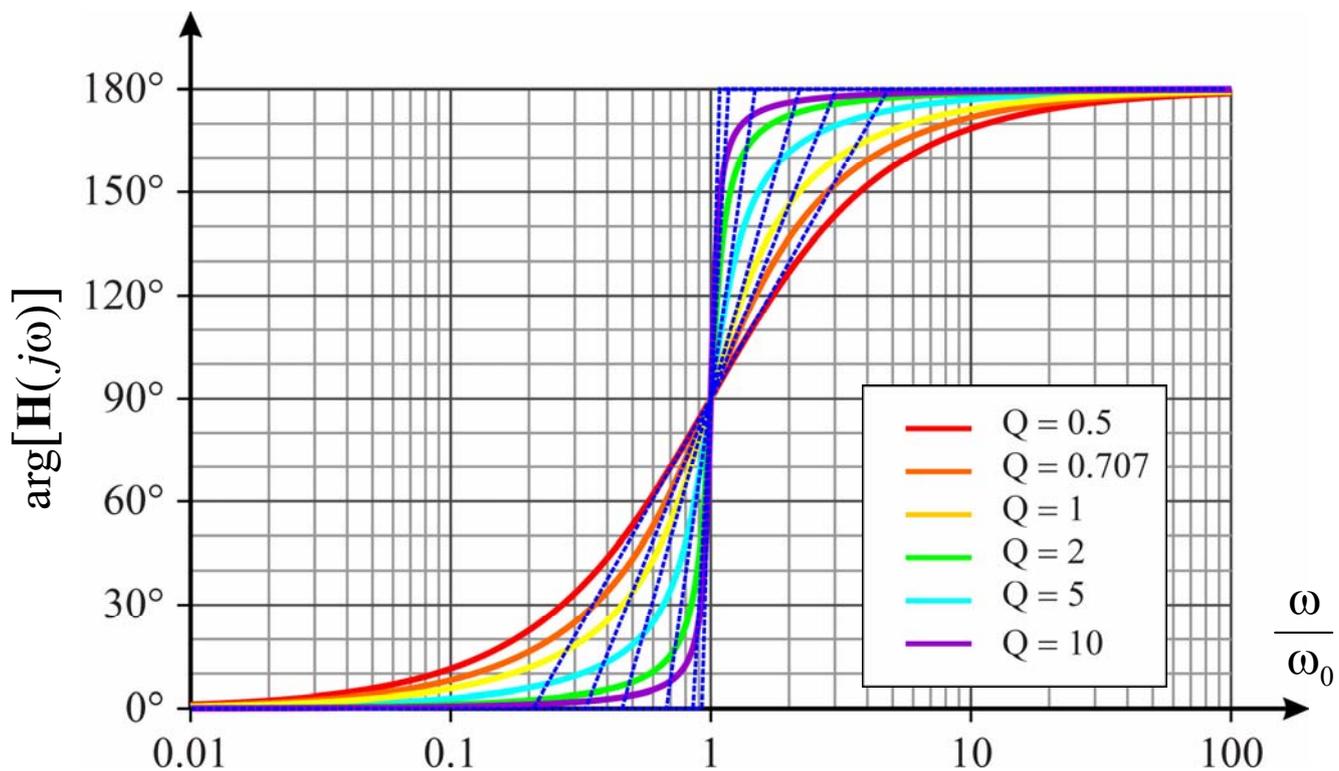
## Zeri complessi coniugati - fase

- Si può approssimare l'andamento della fase mediante una spezzata formata collegando i due asintoti con un segmento obliquo, che può essere tracciato in più modi
- Per esempio si può utilizzare la retta tangente alla curva per  $\omega = \omega_0$
- Si può dimostrare che questa retta interseca gli asintoti per

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 4.81^{-\zeta} \omega_0 \qquad \omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 4.81^{\zeta} \omega_0$$

29

## Zeri complessi coniugati - fase



30

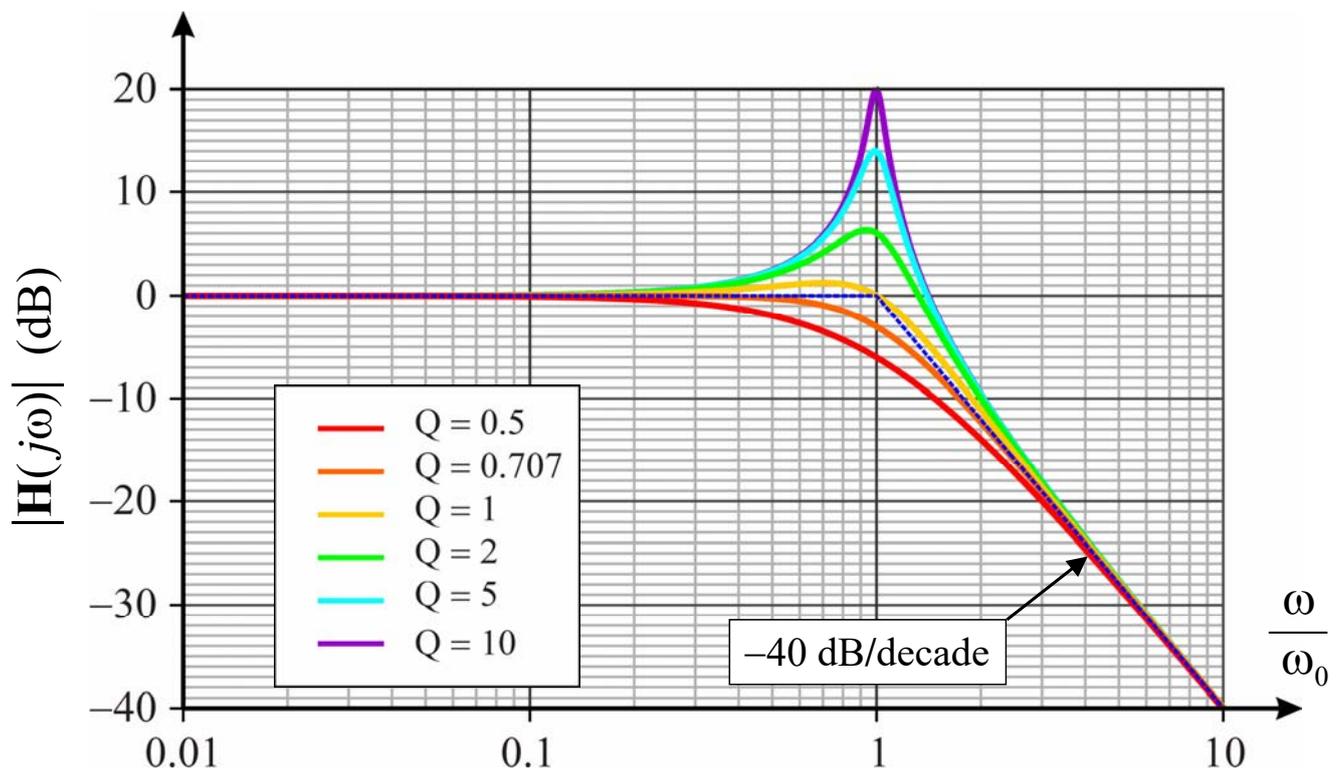
## Poli complessi coniugati

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right)^{-1}$$

- I diagrammi del modulo e della fase di  $\mathbf{H}(j\omega)$  possono essere ottenuti ribaltando attorno all'asse delle ascisse i grafici ottenuti per la funzione precedente

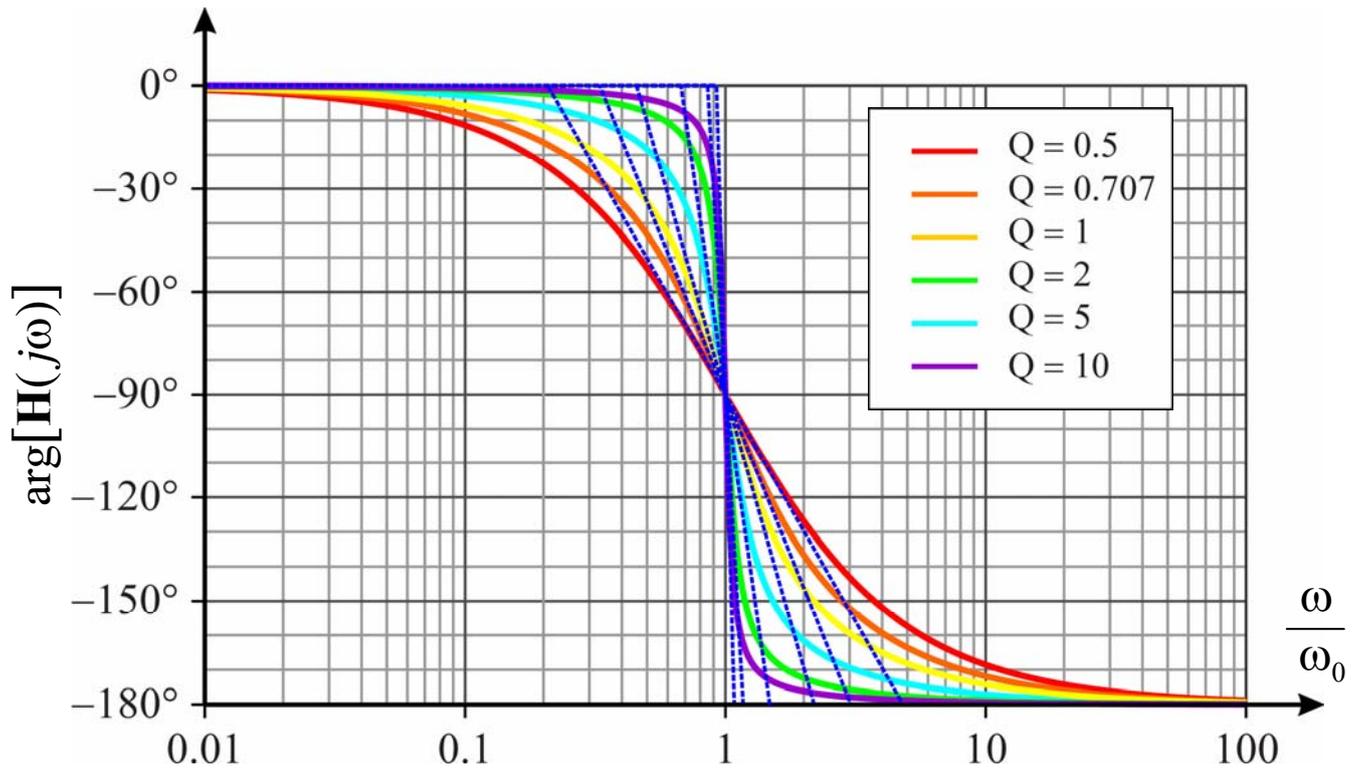
31

## Poli complessi coniugati - ampiezza



32

## Poli complessi coniugati - fase



33

## Esempio 1

- Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2s^2 + 2.04 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^6}$$

- La f.d.t. ha uno zero nell'origine e due poli

$$p_1, p_2 = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm \sqrt{1.0404 \cdot 10^8 - 8 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm 0.98 \cdot 10^4}{2} = \begin{cases} -200 \\ -10^4 \end{cases}$$

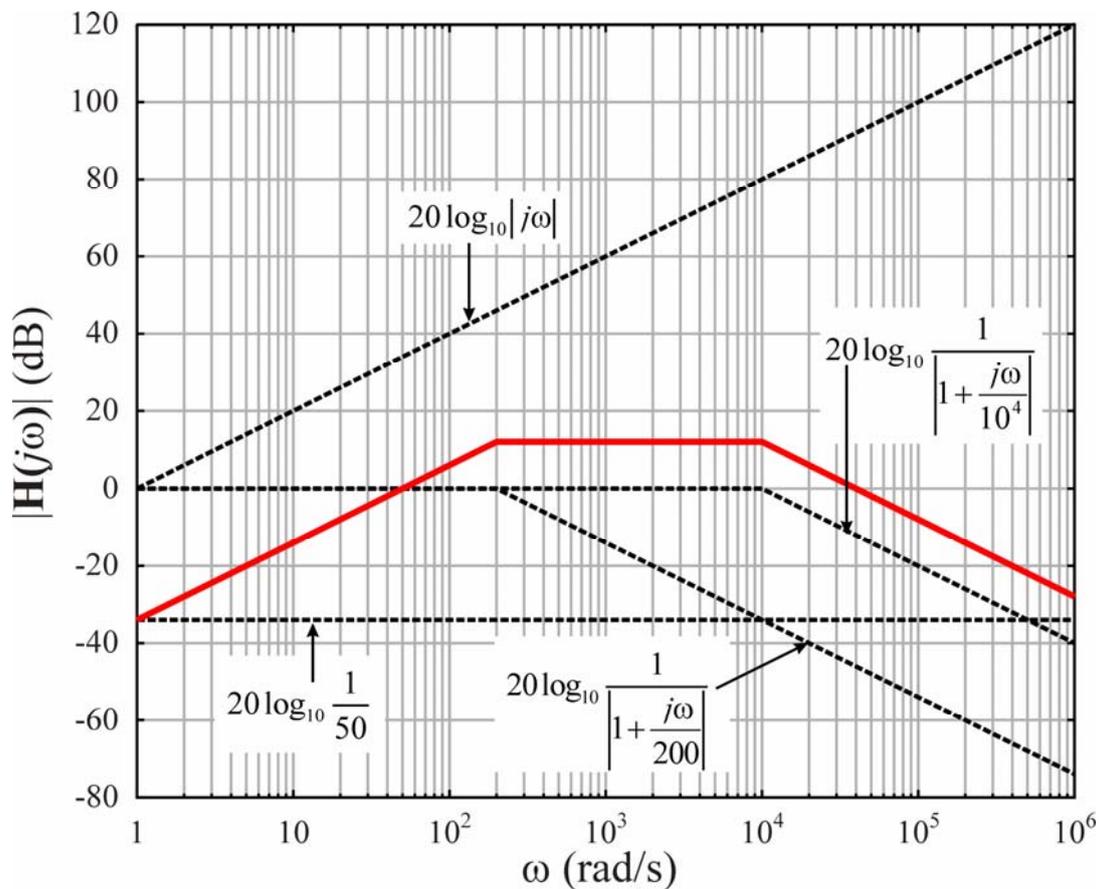
- Si riscrive la funzione in forma canonica

$$\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2(s+200)(s+10^4)} = \frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 200 \cdot 10^4} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right)\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)} = \frac{1}{50} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right)\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

- Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni  $1/50$ ,  $j\omega$ ,  $1/(1+j\omega/200)$ ,  $1/(1+j\omega/10^4)$  e si sommano i loro contributi

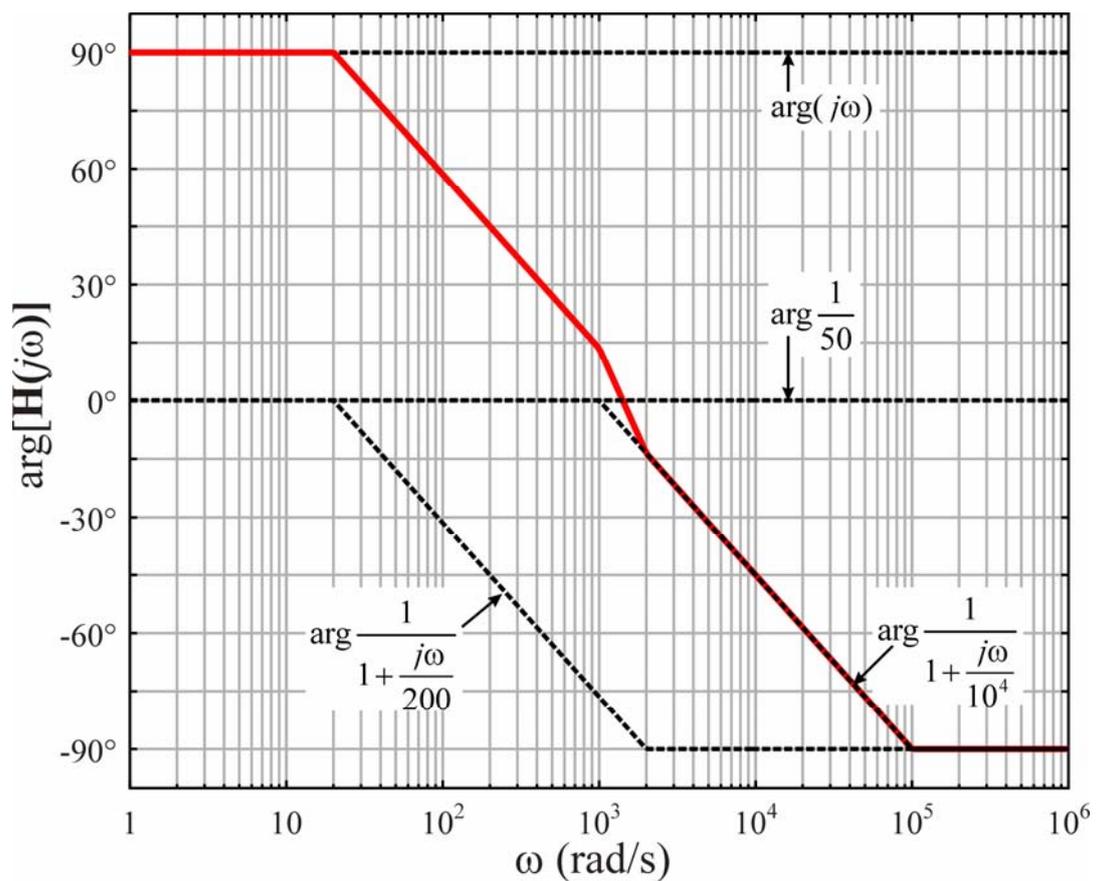
34

## Esempio 1 – diagramma del modulo



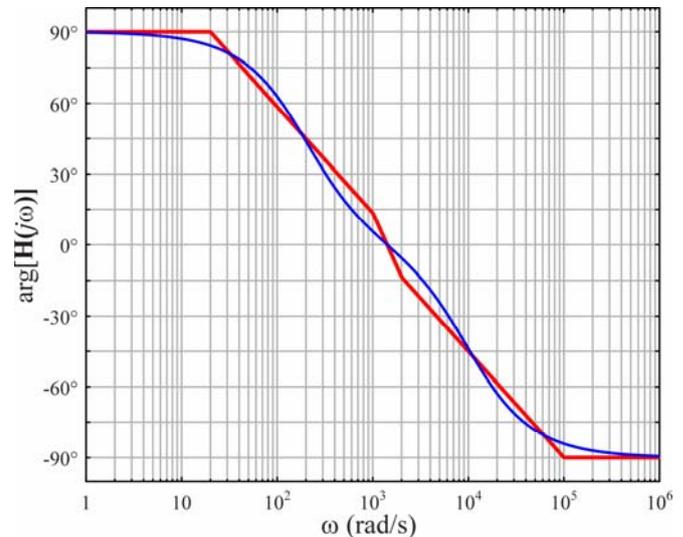
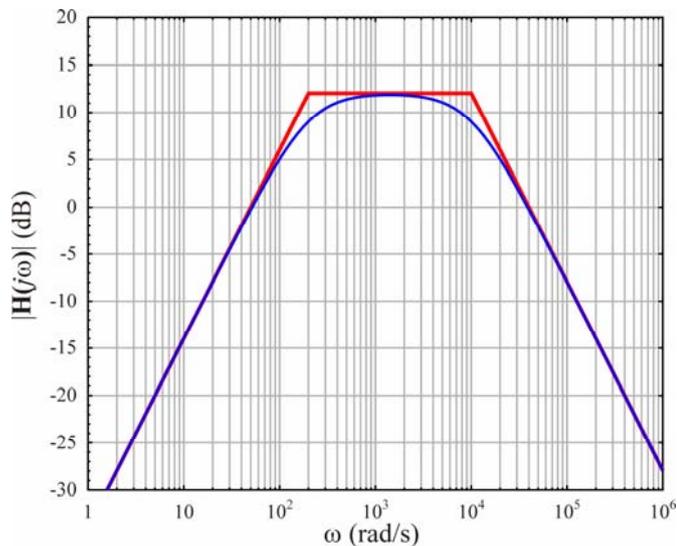
35

## Esempio 1 – diagramma della fase



36

## Esempio 1 – confronto con i diagrammi esatti



37

## Esempio 2

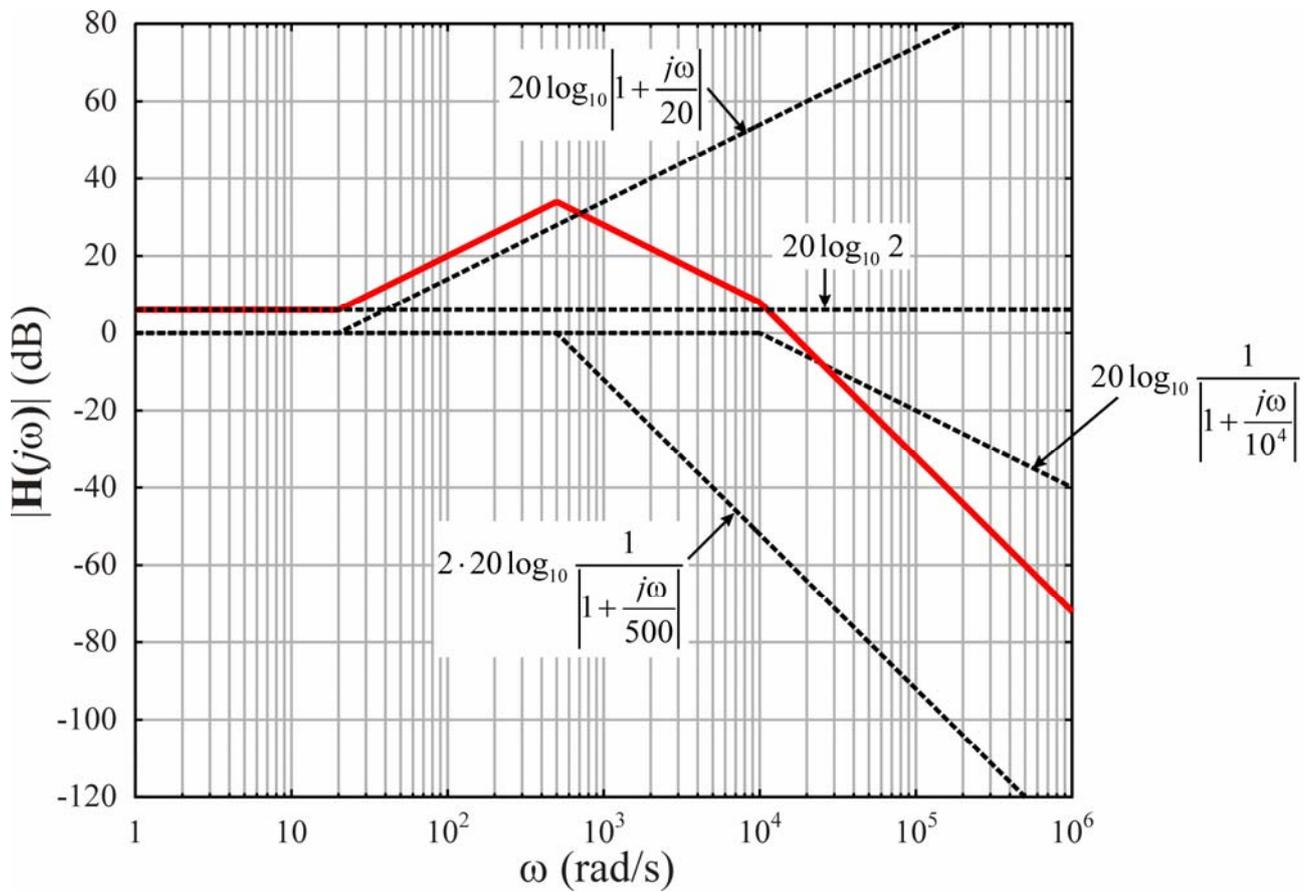
- Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$\mathbf{H}(s) = 2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{20}\right)}{\left(1 + \frac{s}{500}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

- La f.d.t ha uno zero per  $s = -20$ , un polo semplice per  $s = -10^4$  e un polo doppio per  $s = -500$
- Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni  $2$ ,  $1+j\omega/20$ ,  $1/(1+j\omega/500)^2$ ,  $1/(1+j\omega/10^4)$  e si sommano i contributi
- I grafici di  $1/(1+j\omega/500)^2$  si ottengono moltiplicando per 2 il modulo e l'argomento di  $1/(1+j\omega/500)$

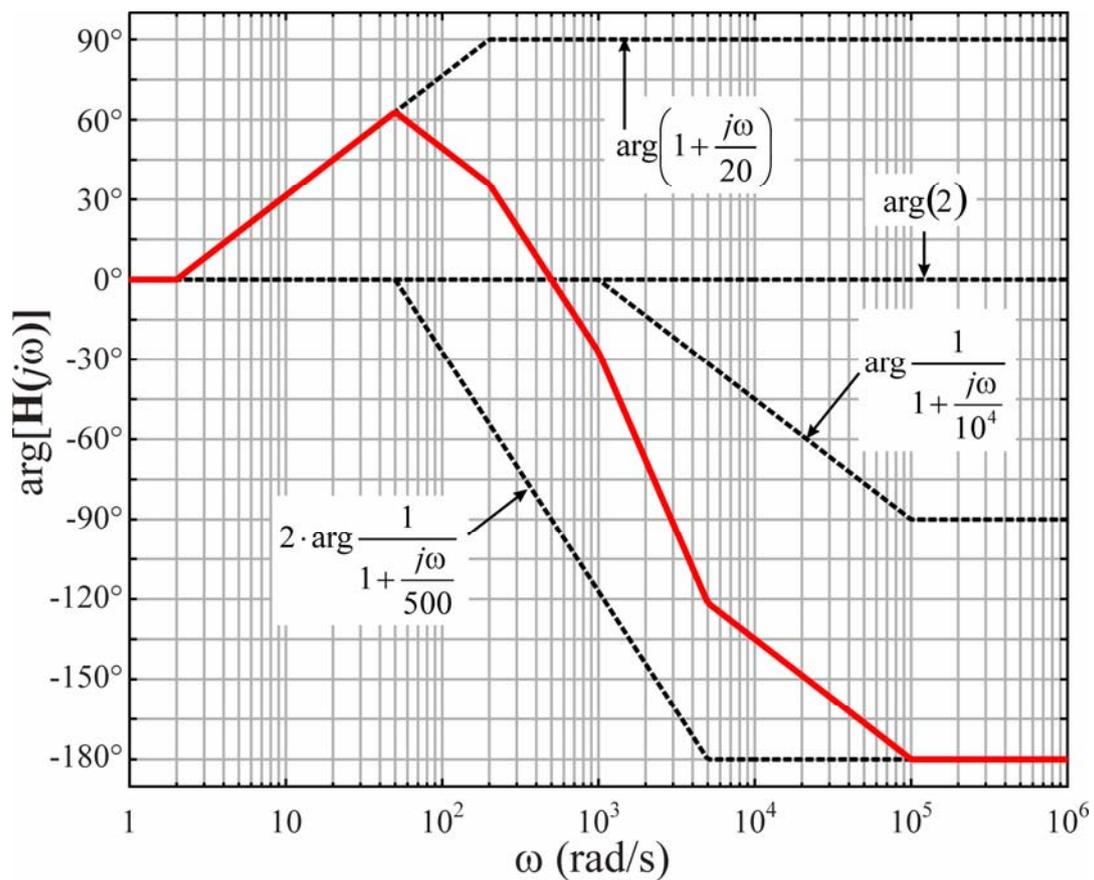
38

## Esempio 2 – diagramma del modulo



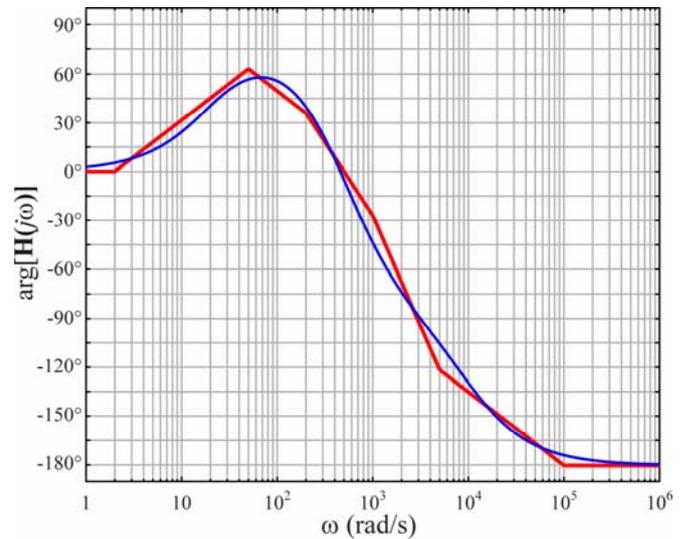
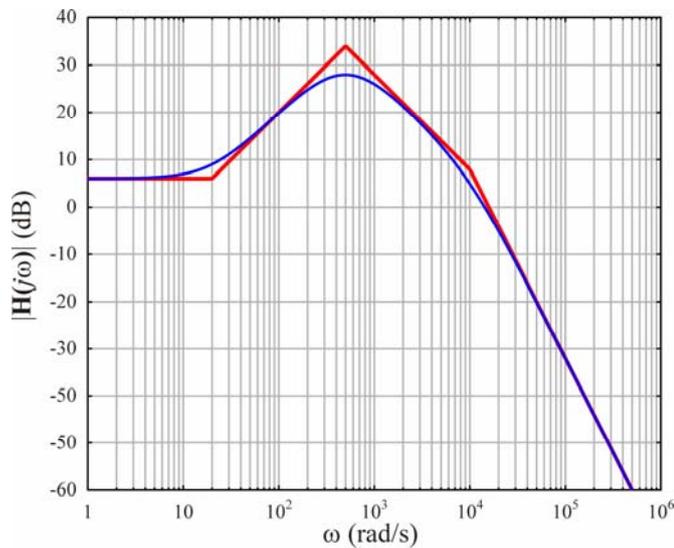
39

## Esempio 2 – diagramma della fase



40

## Esempio 2 – confronto con i diagrammi esatti



41

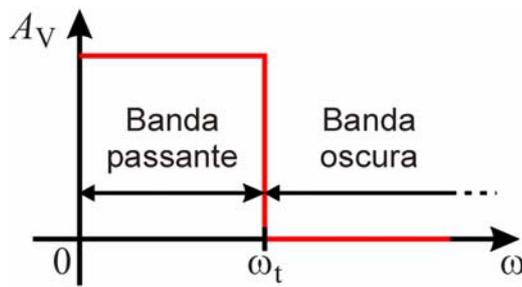
## Filtri

- Un filtro è una rete a due porte in grado di trasferire in uscita segnali con frequenze comprese all'interno di predeterminati intervalli di frequenze (**bande passanti**) e di eliminare i segnali alle altre frequenze (**bande oscure**)
- Esistono quattro tipi principali di filtri
  - ◆ **Filtro passa-basso**: elimina i segnali aventi frequenza maggiore di una frequenza di taglio  $f_t = 2\pi\omega_t$
  - ◆ **Filtro passa-alto**: elimina i segnali aventi frequenza minore di una frequenza di taglio  $f_t = 2\pi\omega_t$
  - ◆ **Filtro passa-banda**: elimina i segnali aventi frequenza all'esterno dell'intervallo compreso tra le frequenze  $f_{t1} = 2\pi\omega_{t1}$  e  $f_{t2} = 2\pi\omega_{t2}$
  - ◆ **Filtro elimina-banda**: elimina i segnali aventi frequenza all'interno dell'intervallo compreso tra le frequenze  $f_{t1} = 2\pi\omega_{t1}$  e  $f_{t2} = 2\pi\omega_{t2}$

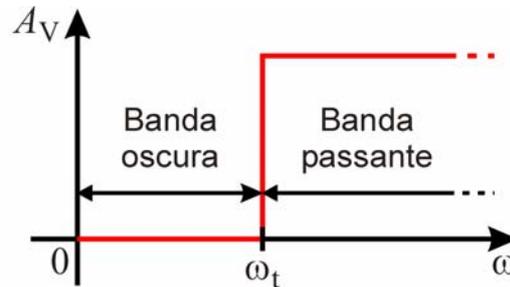
42

# Filtri ideali

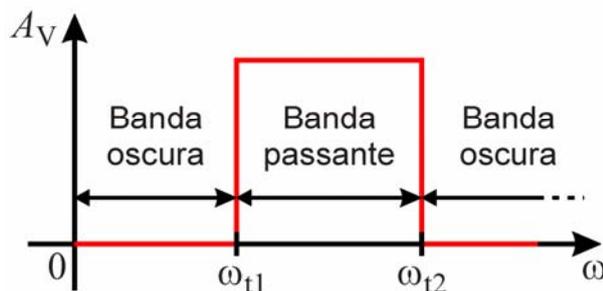
## Passa-basso



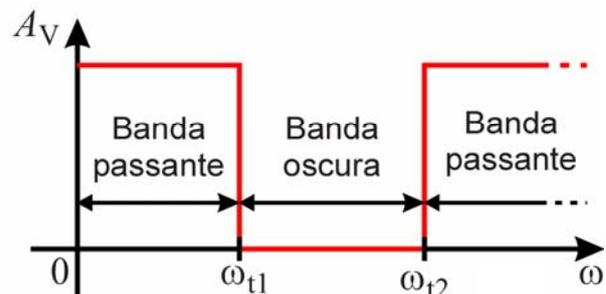
## Passa-alto



## Passa-banda



## Elimina-banda



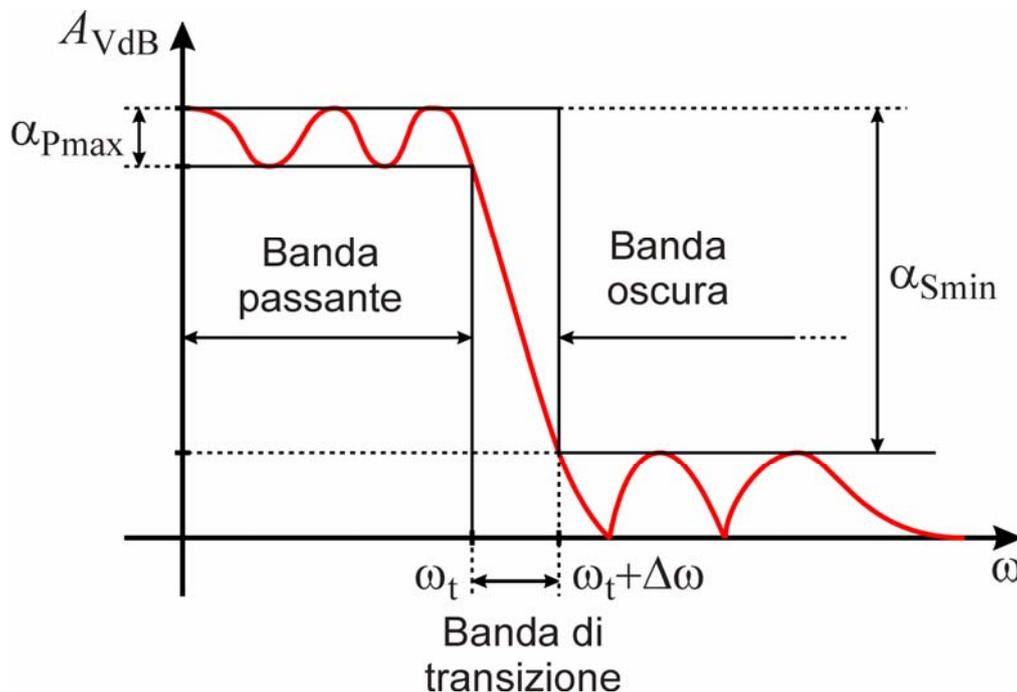
43

# Filtri realizzabili

- Un filtro ideale dovrebbe avere guadagno costante nelle bande passanti e guadagno nullo nelle bande oscure, quindi la risposta in frequenza dovrebbe avere un andamento “a gradini”
- Funzioni di trasferimento di questo tipo però non sono fisicamente realizzabili
- In un filtro fisicamente realizzabile
  - ◆ La transizione tra banda passante e banda oscura non può essere a gradino, ma si deve ammettere che avvenga in un intervallo di ampiezza  $\Delta\omega > 0$  (**banda di transizione**)
  - ◆ Non si può ottenere un guadagno costante in tutta la banda passante, ma si deve ammettere una deviazione  $\alpha_{Pmax}$  (**massima attenuazione in banda passante**)
  - ◆ Analogamente, non si può ottenere un guadagno identicamente nullo in tutta la banda oscura, ma si deve accettare che l'attenuazione non scenda al di sotto di un valore finito  $\alpha_{Smin}$  (**minima attenuazione in banda oscura**)

44

## Filtri realizzabili



45

## Filtri del primo e del secondo ordine

- Di seguito verranno prese in esame le funzioni di trasferimento dei filtri più semplici, cioè le funzioni del primo e del secondo ordine
- Nel caso di funzioni del primo ordine, cioè con un solo polo, si comportano di tipo
  - ◆ passa-basso se la f.d.t. non ha zeri
  - ◆ passa-alto se la f.d.t. ha uno zero nell'origine
- Nel caso di una f.d.t. del secondo ordine con poli complessi coniugati si ha un comportamento di tipo
  - ◆ passa-basso se la f.d.t. non ha zeri
  - ◆ passa-banda se la f.d.t. ha uno zero nell'origine
  - ◆ passa-alto se la f.d.t. ha due zeri nell'origine
  - ◆ elimina-banda se la f.d.t. ha due zeri immaginari coniugati (con pulsazione uguale a quella dei poli)
- Un filtro di ordine  $n > 2$  può essere ottenuto collegando in cascata
  - ◆  $n/2$  filtri del secondo ordine se  $n$  è pari
  - ◆ un filtro del primo ordine e  $n/2$  filtri del secondo ordine se  $n$  è dispari

46

## Filtro passa-basso del primo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

cioè con un polo e priva di zeri, corrisponde a un filtro passa-basso

- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  è costituito da un asintoto orizzontale di ordinata  $20\log_{10}|K|$  (che rappresenta il **guadagno in continua**) e da un asintoto con pendenza  $-20$  dB/decade a partire da  $\omega = \omega_0$
- Per  $\omega = \omega_0$  il modulo della f.d.t. vale

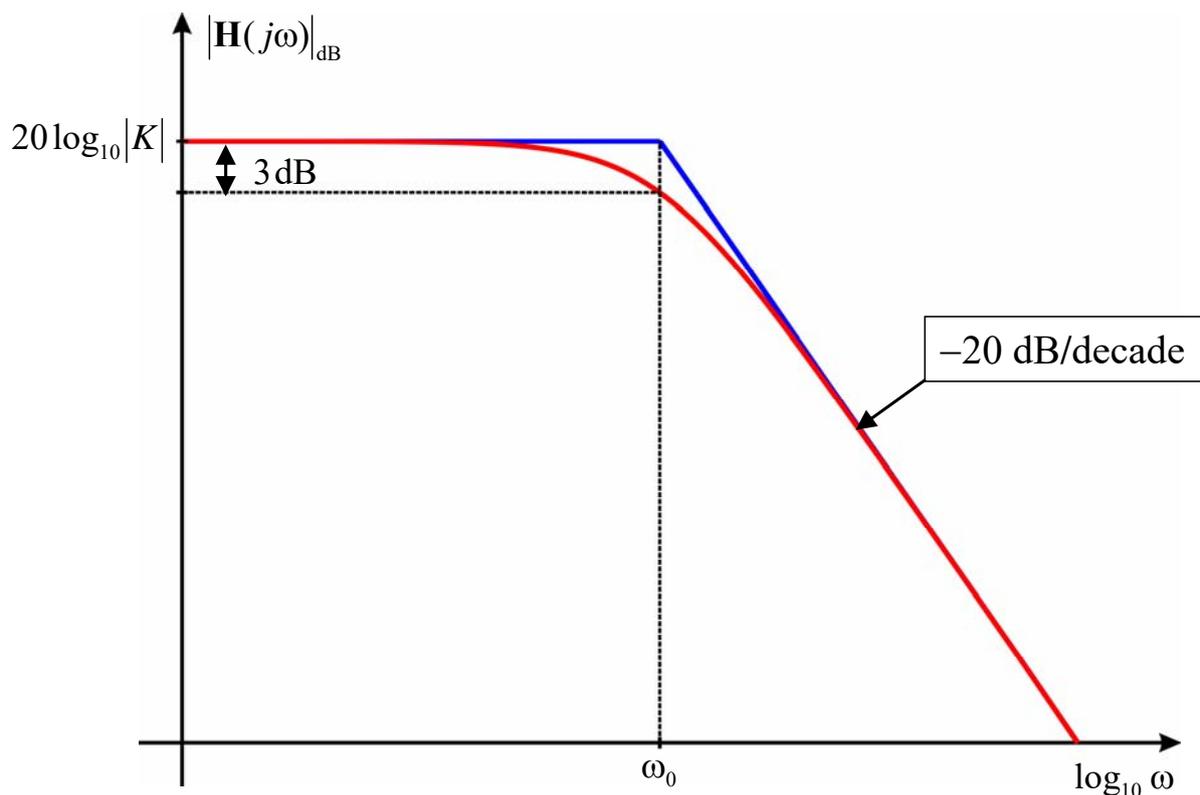
$$H(j\omega_0) = \frac{|K|}{\sqrt{2}}$$

e quindi è inferiore di 3 dB al guadagno in continua

- La pulsazione  $\omega_0$  è assunta convenzionalmente come **pulsazione di taglio del filtro**

47

## Filtro passa-basso del primo ordine



48

## Esempi di filtri passa-basso del primo ordine

- La f.d.t. del circuito RC è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (K = 1)$$

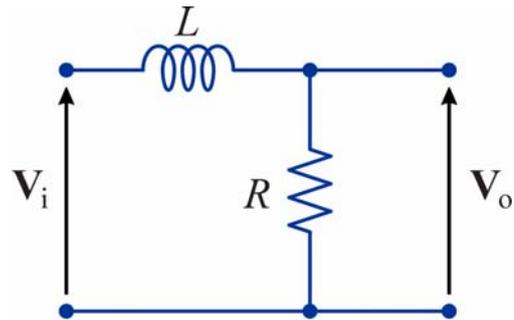
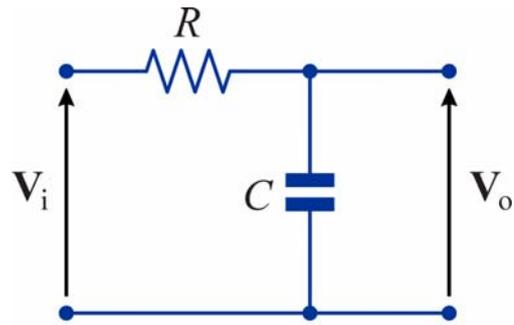
- La f.d.t. del circuito RL è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{L}{R} = \frac{1}{\tau} \quad (K = 1)$$

- Per entrambi i circuiti il guadagno in continua è  $K = 1$  (= 0 dB)



49

## Filtro passa-alto del primo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{j\omega}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

cioè con un polo e uno zero, corrisponde a un filtro passa-alto

- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  è costituito da un asintoto con pendenza +20 dB/decade e da un asintoto orizzontale di ordinata  $20\log_{10}(|K|\omega_0)$  (che rappresenta il **guadagno in ad alta frequenza**) a partire da  $\omega = \omega_0$

- Per  $\omega = \omega_0$  il modulo della f.d.t. vale

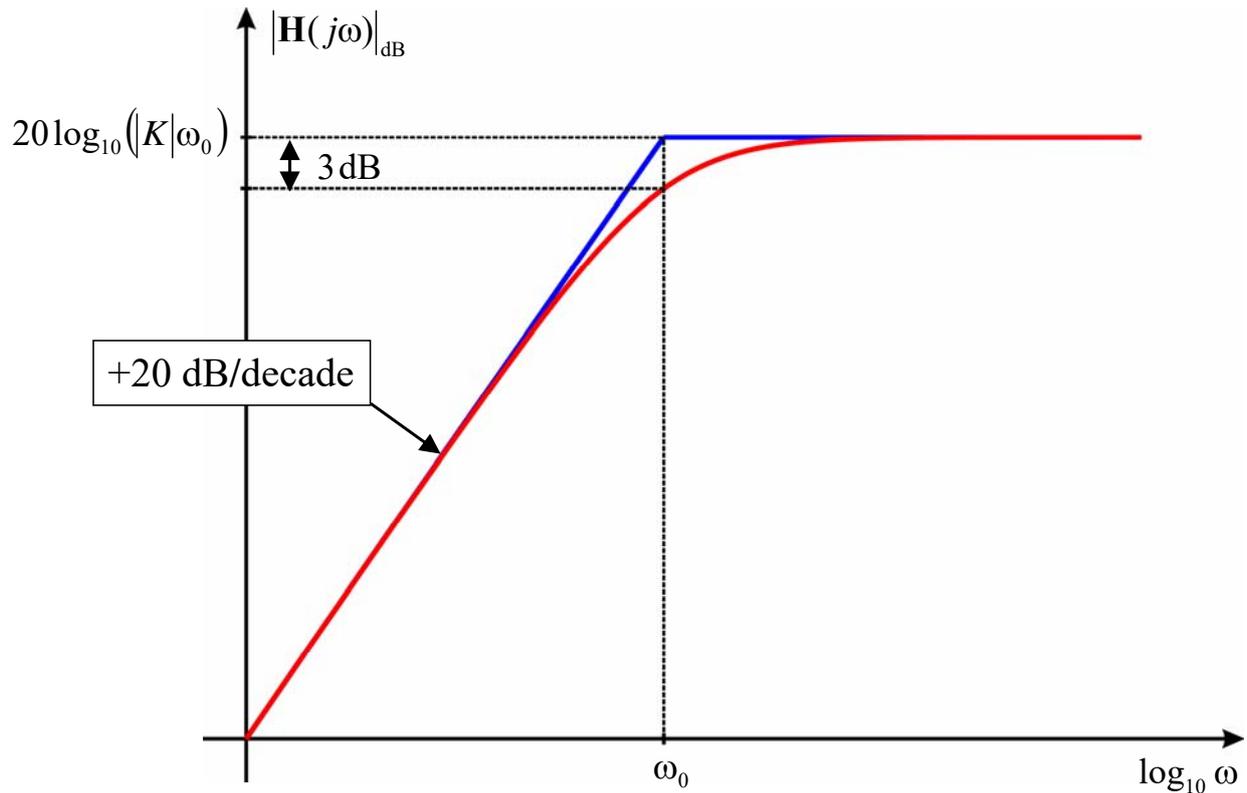
$$H(j\omega_0) = \frac{|K|}{\sqrt{2}} \omega_0$$

e quindi è inferiore di 3 dB al guadagno ad alta frequenza

- La pulsazione  $\omega_0$  è assunta convenzionalmente come **pulsazione di taglio del filtro**

50

# Filtro passa-alto del primo ordine



51

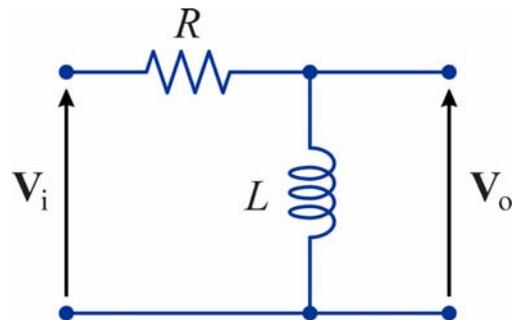
## Esempi di filtri passa-alto del primo ordine

- La f.d.t. del circuito RL è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = K \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad K = \frac{L}{R} = \tau$$

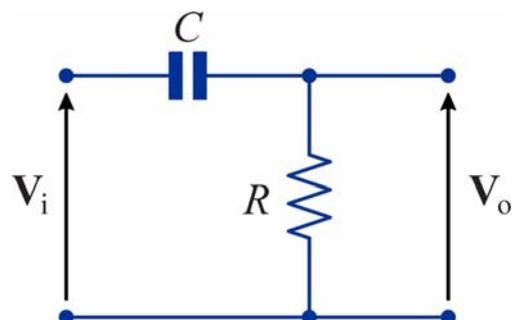


- La f.d.t. del circuito RC è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = K \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC \quad K = RC = \tau$$



- Per entrambi i circuiti il guadagno ad alta frequenza è  $K\omega_0 = 1$  (= 0 dB)

52

## Filtro passa-basso del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e priva di zeri, corrisponde a un filtro passa-basso

- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  è costituito da un asintoto orizzontale di ordinata  $20\log_{10}|K|$  (che rappresenta il **guadagno in continua**) e da un asintoto con pendenza  $-40$  dB/decade a partire da  $\omega = \omega_0$
- Per  $\omega = \omega_0$  si ha  $|\mathbf{H}(j\omega_0)| = |K|Q$ , quindi, in particolare,
  - per  $Q = 1/2$  (cioè quando i poli diventano reali coincidenti) il guadagno per  $\omega = \omega_0$  è inferiore di 6 dB al guadagno in continua
  - per  $Q = \sqrt{2}/2$  il guadagno per  $\omega = \omega_0$  è inferiore di 3 dB al guadagno in continua

53

## Filtro passa-basso del secondo ordine

- Per  $Q > \sqrt{2}/2$  il modulo della f.d.t. ha un picco in corrispondenza della pulsazione

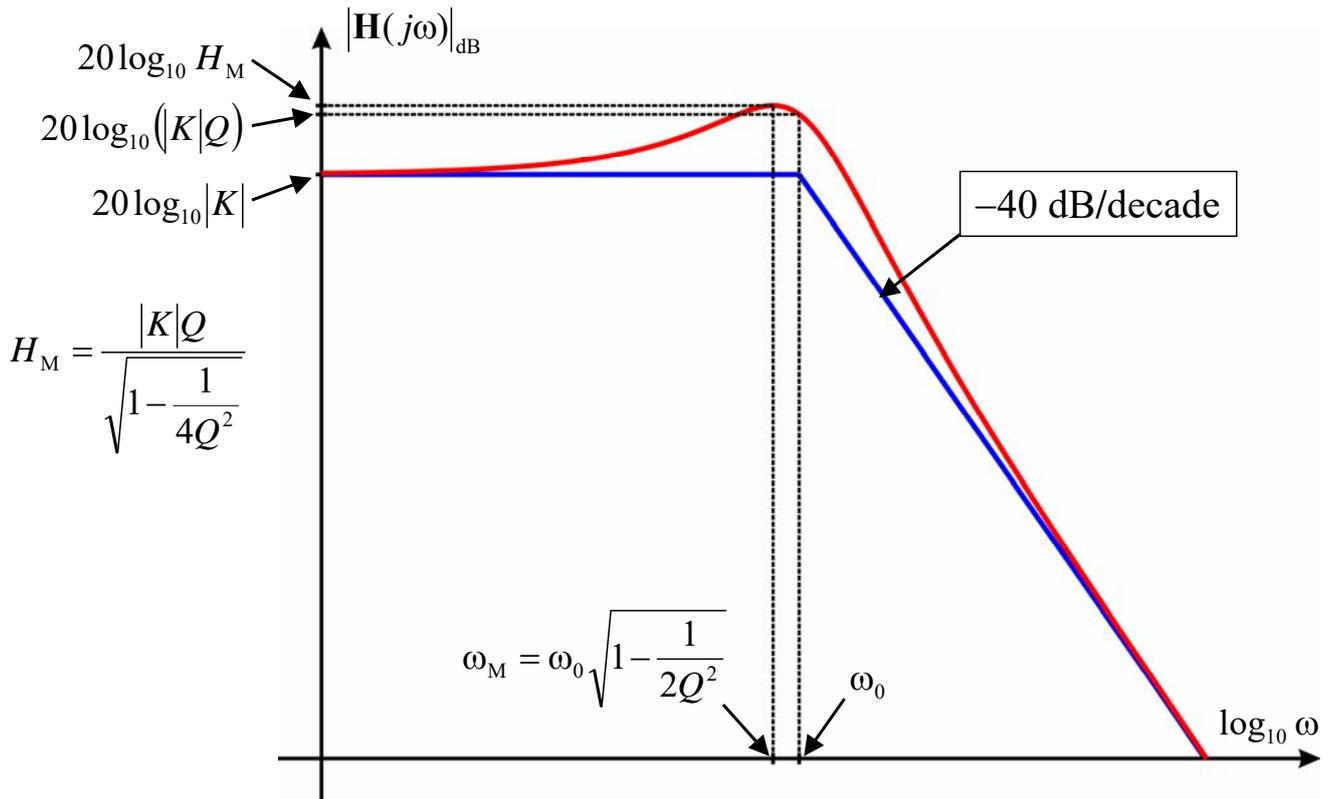
$$\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

il cui valore è

$$H_M = |\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{|K|Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_0)|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

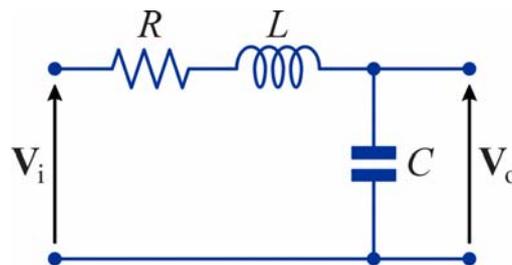
54

## Filtro passa-basso del secondo ordine



55

## Esempio di filtro passa-basso del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (K = 1)$$

- Il guadagno in continua è  $K = 1$  (= 0 dB)

56

## Filtro passa-alto del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{(j\omega)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e due zeri nell'origine, corrisponde a un filtro passa-alto

- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  è costituito da un asintoto con pendenza +40 dB/decade e da un asintoto orizzontale di ordinata  $20\log_{10}(|K|\omega_0^2)$  (che rappresenta il **guadagno ad alta frequenza**) a partire da  $\omega = \omega_0$
- Per  $\omega = \omega_0$  si ha  $|\mathbf{H}(j\omega_0)| = |K|Q\omega_0^2$ , quindi, in particolare,
  - per  $Q = 1/2$  il guadagno per  $\omega = \omega_0$  è inferiore di 6 dB al guadagno ad alta frequenza
  - per  $Q = \sqrt{2}/2$  il guadagno per  $\omega = \omega_0$  è inferiore di 3 dB al guadagno ad alta frequenza

57

## Filtro passa-alto del secondo ordine

- Per  $Q > \sqrt{2}/2$  il modulo della f.d.t. ha un picco in corrispondenza della pulsazione

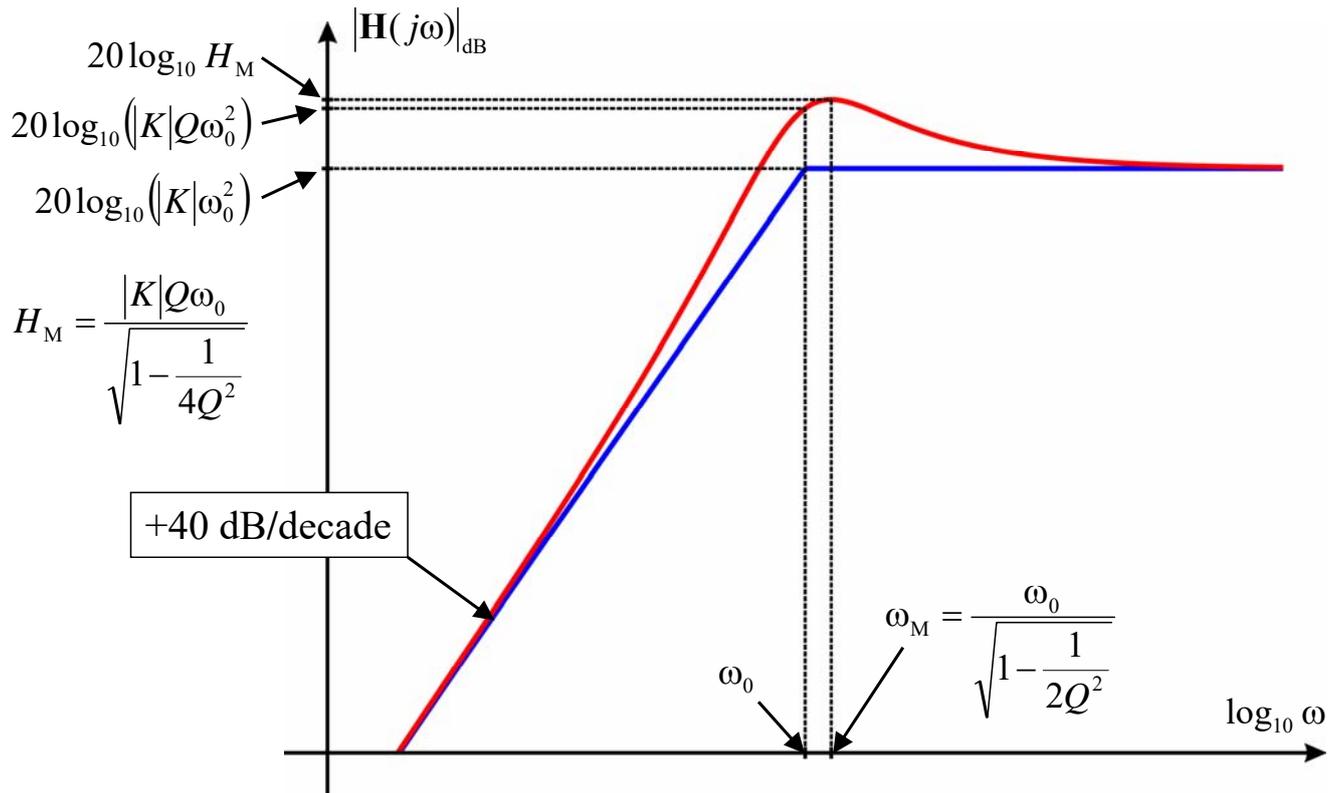
$$\omega_M = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

il cui valore è

$$H_M = |\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{|K|Q\omega_0^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_0)|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

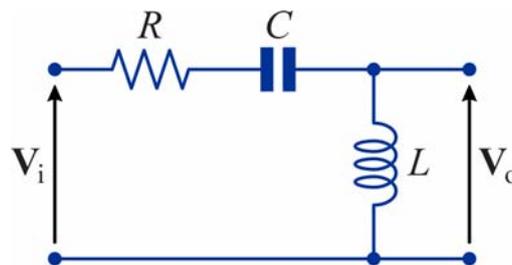
58

## Filtro passa-alto del secondo ordine



59

## Esempio di filtro passa-alto del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(j\omega)^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = K \frac{(j\omega)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad K = LC = \frac{1}{\omega_0^2}$$

- Il guadagno in continua è  $K\omega_0^2 = 1$  (= 0 dB)

60

## Filtro passa-banda del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{j\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e uno zero nell'origine, corrisponde a un filtro passa-banda

- Il modulo della f.d.t. ha un massimo per  $\omega = \omega_0$  (**pulsazione di centro banda**) che vale  $|K|Q\omega_0$
- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  è costituito da un asintoto con pendenza +20 dB/decade e da uno con pendenza -20 dB/decade che si incontrano nel punto  $\omega_0, 20\log_{10}(|K|\omega_0)$

61

## Filtro passa-banda del secondo ordine

- L'andamento del modulo ha *simmetria geometrica* rispetto a  $\omega_0$ , cioè, date due frequenze  $\omega_a$  e  $\omega_b$  tali che  $\omega_a\omega_b = \omega_0^2$  (e quindi  $\omega_0/\omega_a = \omega_b/\omega_0$ ) si ha  $|\mathbf{H}(j\omega_a)| = |\mathbf{H}(j\omega_b)|$
- Di conseguenza, se la frequenza è riportata in scala logaritmica, il grafico ha un andamento simmetrico rispetto a  $\omega_0$
- Questa proprietà può essere messa riscrivendo l'espressione della f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{KQ\omega_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K|Q\omega_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per  $-j \frac{Q\omega_0}{\omega}$

62

## Filtro passa-banda del secondo ordine

- La banda passante del filtro viene definita convenzionalmente come intervallo compreso tra le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  per cui il guadagno risulta inferiore di 3 dB al guadagno di centro-banda

- Quindi le pulsazioni di taglio possono essere determinate imponendo

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K|Q\omega_0}{\sqrt{2}}$$

- Questo richiede che sia

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2 = 0$$

- Le soluzioni positive di questa equazione sono

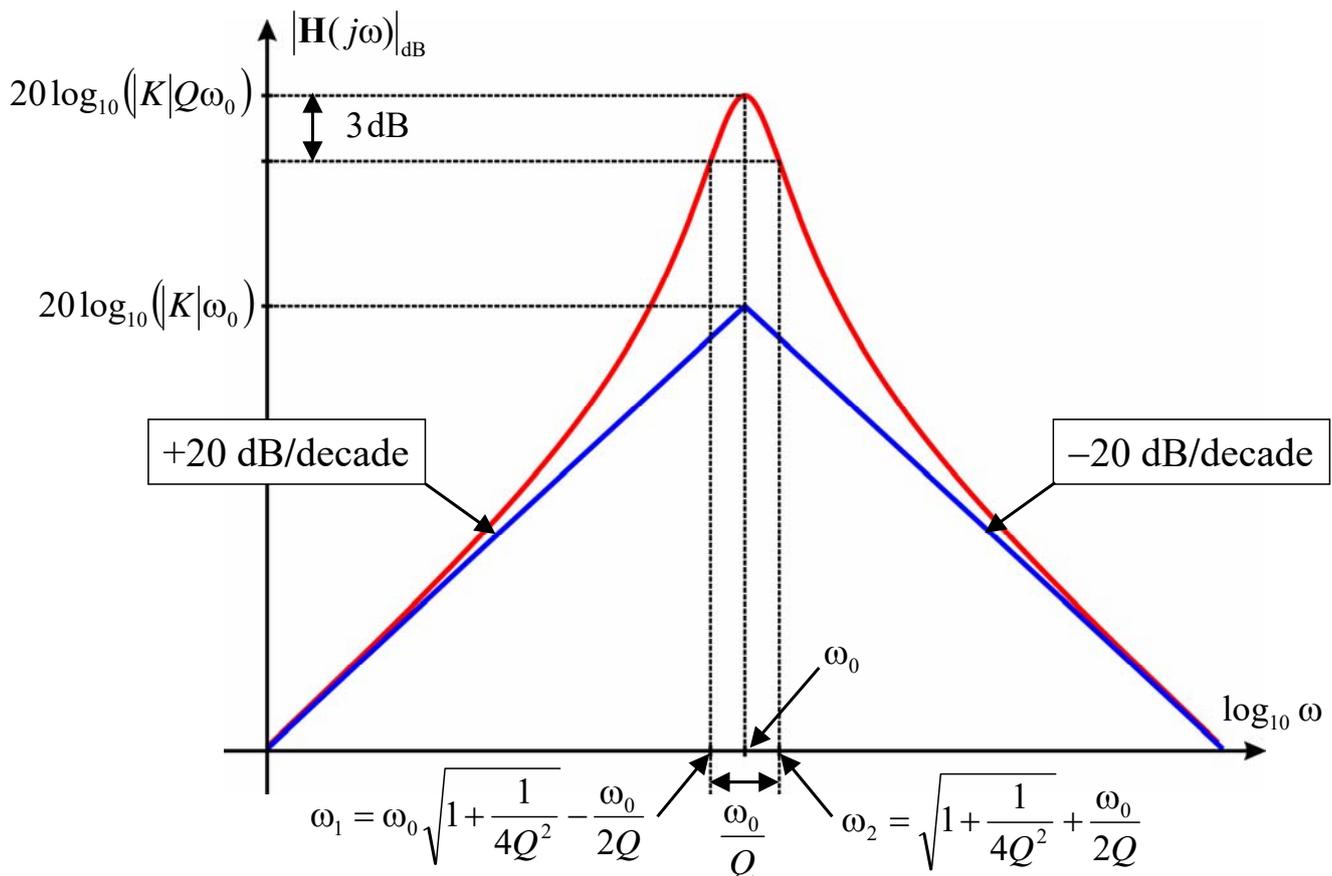
$$\omega_1, \omega_2 = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

- Di conseguenza la larghezza di banda è

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

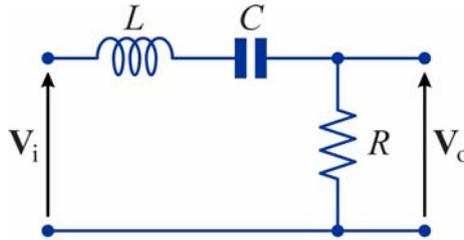
63

## Filtro passa-banda del secondo ordine



64

## Esempio di filtro passa-banda del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = K \frac{j\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad K = RC = \frac{1}{Q\omega_0}$$

- Il guadagno di centro banda è  $KQ\omega_0 = 1$  (= 0 dB)
- La larghezza di banda è  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

65

## Filtro elimina-banda del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e con due zeri immaginari coniugati, con pulsazione uguale a quella dei poli, corrisponde a un filtro elimina-banda

- Il modulo della f.d.t. si annulla per  $\omega = \omega_0$  (detta, anche in questo caso, **pulsazione di centro banda**)
- Il diagramma asintotico di  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  si riduce a una retta orizzontale con ascissa pari a  $20\log_{10}|K|$ , che rappresenta il valore del guadagno in continua e ad alta frequenza

66

## Filtro elimina-banda del secondo ordine

- Anche in questo caso l'andamento del modulo ha *simmetria geometrica* rispetto a  $\omega_0$ , come risulta evidente se si riscrive l'espressione della f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- Procedendo come nel caso del filtro passa-banda si trova che le pulsazioni di taglio sono date ancora della relazioni

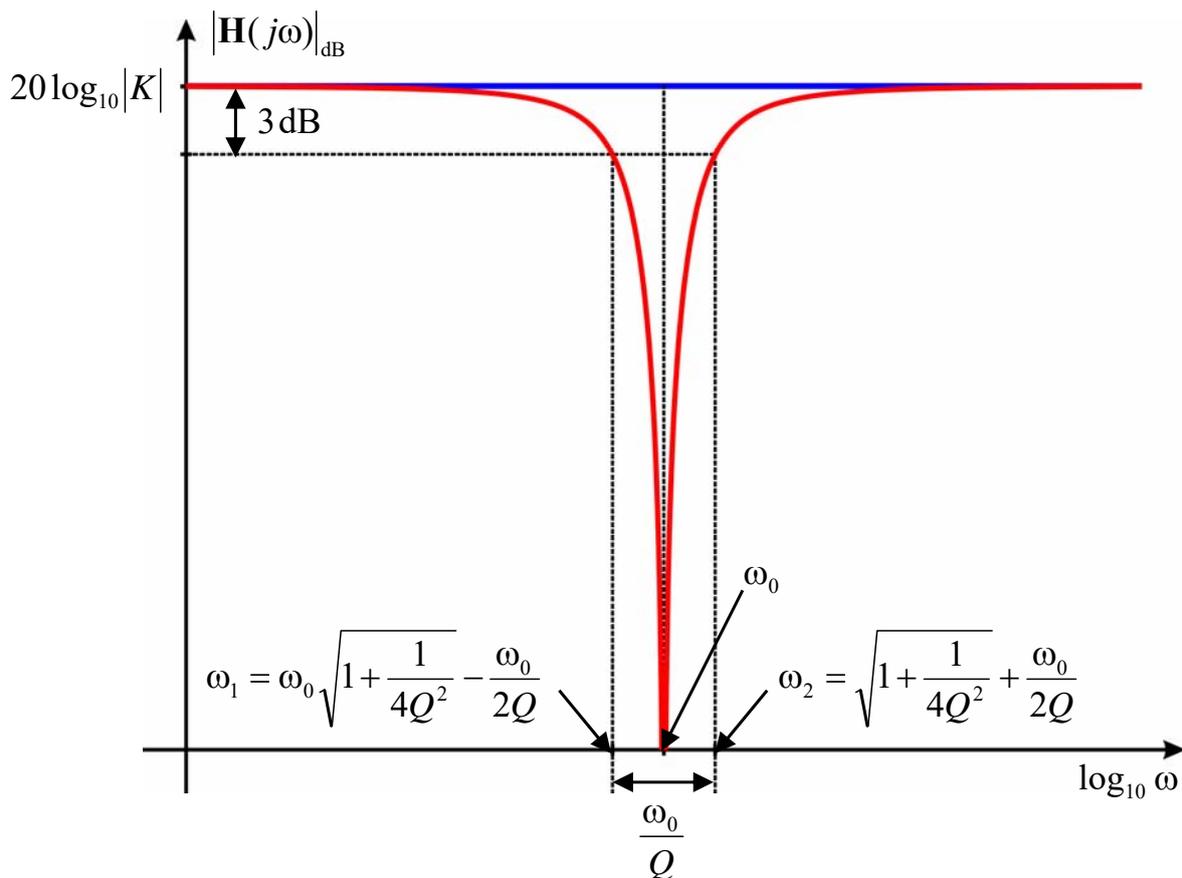
$$\omega_1, \omega_2 = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

e quindi la larghezza di banda è

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

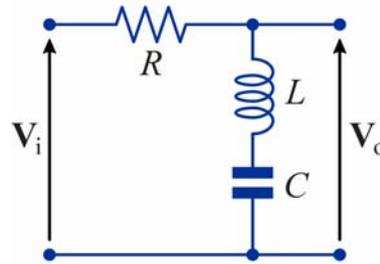
67

## Filtro elimina-banda del secondo ordine



68

## Esempio di filtro elimina-banda del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (K = 1)$$

- Il guadagno di centro banda è  $K = 1$  ( $= 0$  dB)
- La larghezza di banda è  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$