

Amplificatori operazionali

Parte 2

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 22-5-2017)

Retroazione

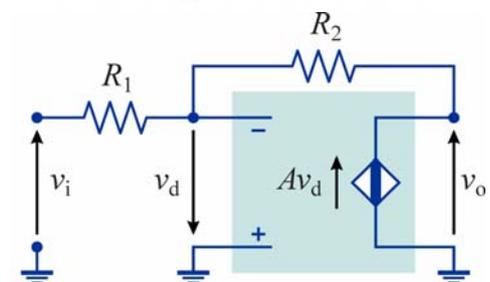
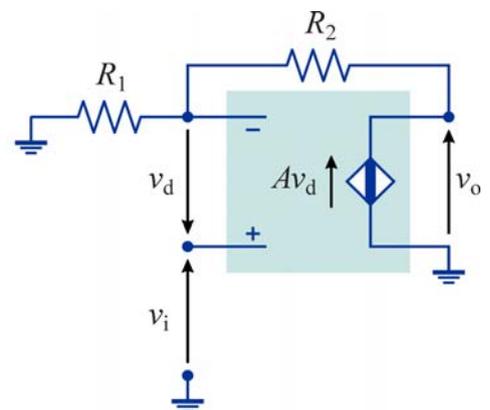
- Se si tiene conto del fatto che nella regione lineare il guadagno ad anello aperto A non è finito, si ottengono, per le configurazioni non invertente e invertente, le relazioni seguenti

Amplificatore non invertente

$$v_o = Av_d = A \cdot \left(v_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \right)$$

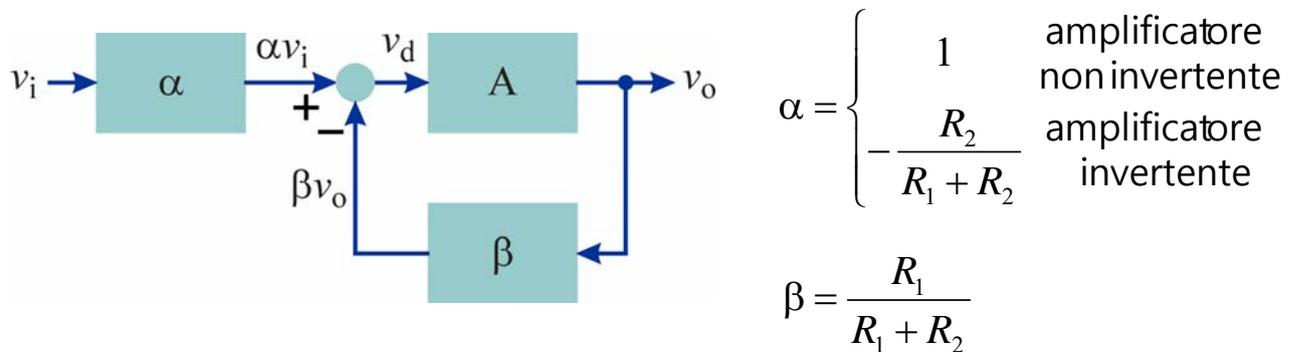
Amplificatore invertente

$$v_o = Av_d = A \cdot \left(-\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \right)$$



Retroazione

- Le due equazioni precedenti sono un caso particolare dell'equazione $v_o = A \cdot (\alpha v_i - \beta v_o)$ che può essere rappresentata mediante lo schema a blocchi



- Questo schema mostra che i due amplificatori costituiscono casi particolari di **sistemi in retroazione**
- La tensione differenziale di ingresso v_d è una combinazione del segnale di ingresso v_i e del segnale di uscita v_o

3

Retroazione

- Il guadagno degli amplificatori può essere espresso come

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \alpha \cdot \frac{A}{1 + A\beta} = \alpha \cdot A_f$$

dove

- $A_f = \frac{A}{1 + A\beta}$ è detto **guadagno ad anello chiuso**
- Il prodotto $A\beta$ è detto **guadagno di anello**
- Se $A\beta > 0$ e quindi $A_f < A$ (come avviene per gli amplificatori invertente e non invertente) si ha una **retroazione negativa** o **controreazione**
- Se $A\beta < 0$ e quindi $A_f > A$ si ha una **retroazione positiva** o **reazione**

4

Alcuni effetti della retroazione negativa

- Negli amplificatori la retroazione negativa viene utilizzata per ottenere vari effetti quali
 - ◆ Desensibilizzazione del guadagno
 - ◆ Riduzione della distorsione non lineare
 - ◆ Aumento della larghezza di banda
- La retroazione positiva produce effetti opposti e, quindi, di solito non desiderati (esistono comunque anche applicazioni che sfruttano la retroazione positiva)

5

Desensibilizzazione del guadagno

- Se il guadagno dell'amplificatore subisce una variazione dA , la corrispondente variazione del guadagno ad anello chiuso è

$$dA_f = \frac{dA_f}{dA} dA = \frac{dA}{(1 + A\beta)^2}$$

- Di conseguenza, la variazione relativa di A_f è

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{dA}{(1 + A\beta)^2} \cdot \frac{1}{A_f} = \frac{dA}{(1 + A\beta)^2} \cdot \frac{1 + A\beta}{A} = \frac{1}{1 + A\beta} \frac{dA}{A}$$

- ➔ Se $A\beta > 0$ le variazioni relative di A_f sono inferiori a quelle di A

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{1}{1 + A\beta} \frac{dA}{A} < \frac{dA}{A}$$

6

Desensibilizzazione del guadagno

- Al limite, se $A\beta$ è molto grande si ottiene una desensibilizzazione totale del guadagno

$$A\beta \gg 1 \Rightarrow A_f = \frac{A}{1 + A\beta} \approx \frac{A}{A\beta} = \frac{1}{\beta}$$

- In queste condizioni il guadagno ad anello chiuso dipende solo dalla rete di retroazione e risulta indipendente da A
- Questo rappresenta un vantaggio perché β , essendo il parametro di trasferimento di una rete passiva, in genere può essere realizzato con una precisione molto superiore a quella con cui può essere un amplificatore con guadagno A

7

Effetto del guadagno ad anello aperto finito

- Nel caso degli amplificatori invertente e non invertente, se $A\beta \gg 1$ e quindi

$$A \gg \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

si ottiene

$$A_v = \alpha \cdot \frac{A}{1 + A\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} = A_{\text{vid}} = \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1} & \text{per l'amplificatore invertente} \\ 1 + \frac{R_2}{R_1} & \text{per l'amplificatore non invertente} \end{cases}$$

- In entrambi i casi lo scostamento relativo del guadagno reale A_v da quello ottenuto con l'ipotesi di amplificatore operazionale ideale A_{vid} è

$$\varepsilon = \frac{A_v - A_{\text{vid}}}{A_{\text{vid}}} = \frac{\alpha \frac{A}{1 + A\beta} - \frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}} = -\frac{1}{1 + A\beta} = -\frac{1}{1 + \frac{AR_1}{R_1 + R_2}}$$

8

Esempio

		Amplificatore invertente			Amplificatore non invertente		
R_1	R_2	A_{vid}	A_v	$\varepsilon\%$	A_{vid}	A_v	$\varepsilon\%$
10 k Ω	10 k Ω	-1	-0.99998	-0.002%	2	1.99996	-0.002%
10 k Ω	100 k Ω	-10	-9.9989	-0.011%	11	10.9988	-0.011%
10 k Ω	1 M Ω	-100	-99.899	-0.101%	101	100.898	-0.101%
10 k Ω	10 M Ω	-1000	-990.089	-0.991%	1001	991.079	-0.991%

Guadagno ad anello aperto: $A = 10^5$

9

Effetto della resistenza di ingresso non infinita

- Idealmente un amplificatore non invertente ha resistenza di ingresso infinita
- Se l'amplificatore operazionale ha una resistenza di ingresso R_{in} finita, anche la resistenza di ingresso dell'amplificatore non invertente

$$R'_{in} = \frac{v_i}{i_i}$$

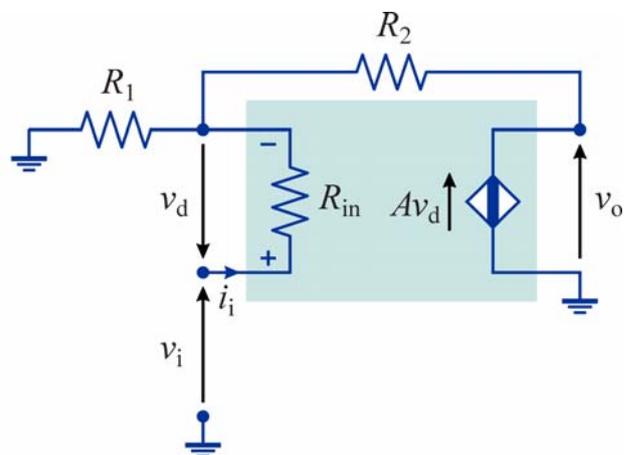
ha valore finito

- Per determinare R'_{in} , si può notare che valgono le relazioni

$$v_o = \frac{A}{1 + A\beta} v_i$$

$$v_d = \frac{v_o}{A} = \frac{1}{1 + A\beta} v_i$$

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



10

Effetto della resistenza di ingresso non infinita

- Quindi si ha

$$i_i = \frac{v_d}{R_{in}} = \frac{1}{R_{in}(1 + A\beta)} v_i$$

- Di conseguenza la resistenza di ingresso è

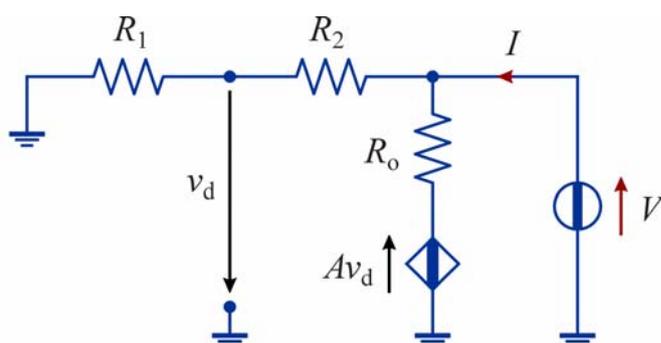
$$R'_{in} = \frac{v_i}{i_i} = R_{in}(1 + A\beta)$$

- Se $A\beta \gg 1$ risulta anche $R'_{in} \gg R_{in}$, cioè, per effetto della retroazione, la resistenza di ingresso dell'amplificatore non invertente risulta molto maggiore della resistenza dell'amplificatore operazionale non retroazionato

11

Effetto della resistenza di uscita non nulla

- Idealmente la resistenza di uscita di un amplificatore operazionale è uguale a zero
- Per determinare l'effetto di una resistenza di uscita non nulla, sia nel caso dell'amplificatore invertente, sia in quello dell'amplificatore non invertente, si può calcolare la resistenza di uscita R'_o dell'amplificatore studiando il seguente circuito (ottenuto annullando la tensione di ingresso v_i)



$$R'_o = \frac{V}{I}$$

12

Effetto della resistenza di uscita non nulla

- Si può notare che

$$v_d = -\beta V$$

$$\left(\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

- Di conseguenza la corrente I è

$$I = \frac{V - Av_d}{R_o} + \frac{V}{R_1 + R_2} = V \cdot \left(\frac{1 + A\beta}{R_o} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)$$

- Normalmente il secondo termine entro la parentesi è trascurabile rispetto al primo quindi

$$R'_o = \frac{V}{I} \approx \frac{R_o}{1 + A\beta}$$

- Se $A\beta \gg 1$, per effetto della retroazione si ha $R'_o \ll R_o$
- Per esempio, per un inseguitore di tensione ($R_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \beta = 1$) realizzato con un amplificatore operazionale con $A = 10^5$ e $R_o = 100 \Omega$ risulta $R'_o \approx 1 \text{ m}\Omega$

13

Linearizzazione

- Si considera il caso in cui l'amplificatore A ha una caratteristica di trasferimento non lineare

$$v_o = f(v_d)$$

- La tensione differenziale di ingresso è

$$v_d = v_i - \beta v_o$$

- In queste condizioni la pendenza della caratteristica di trasferimento dell'amplificatore in retroazione (**guadagno differenziale**) è

$$\frac{dv_o}{dv_i} = \frac{df}{dv_i} = \frac{df}{dv_d} \frac{dv_d}{dv_i} = \frac{df}{dv_d} \left(1 - \beta \frac{dv_o}{dv_i} \right)$$

cioè

$$\frac{dv_o}{dv_i} = \frac{df/dv_d}{1 + \beta df/dv_d}$$

14

Linearizzazione

- La relazione

$$\frac{dv_o}{dv_i} = \frac{df/dv_d}{1 + \beta df/dv_d}$$

mostra che in presenza di retroazione negativa, cioè se

$$\beta df/dv_d > 0$$

la caratteristica ha un andamento “più lineare” rispetto a $f(v_d)$

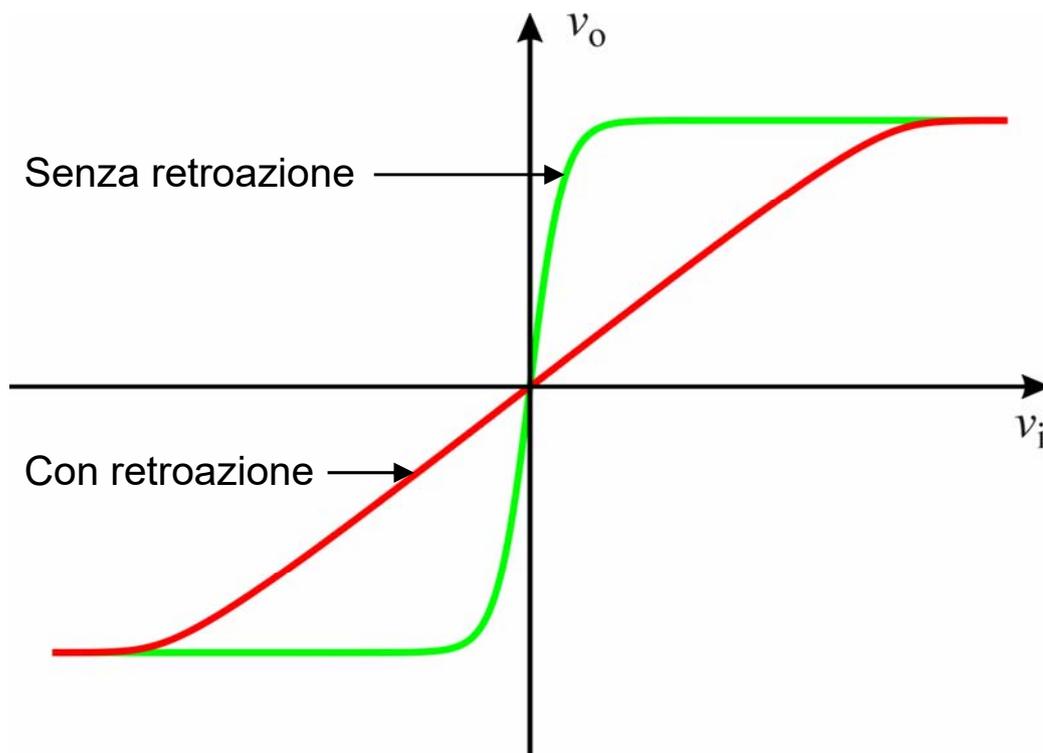
- Infatti si ha una riduzione maggiore della pendenza della caratteristica nei tratti a pendenza più elevata e minore nei tratti a pendenza minore
- Al limite, nei tratti in cui il guadagno differenziale è molto elevato la pendenza diviene praticamente costante ed è determinata unicamente dalla rete di retroazione

$$\beta \frac{df}{dv_d} \gg 1 \Rightarrow \frac{dv_o}{dv_i} \approx \frac{1}{\beta}$$

15

Linearizzazione

Esempio



16

Risposta in frequenza di un amplificatore operazionale

- La dipendenza del guadagno ad anello aperto di un amplificatore operazionale dalla frequenza può essere rappresentata dalla relazione

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{Modello a un polo}$$

A_0 = guadagno ad anello aperto in continua

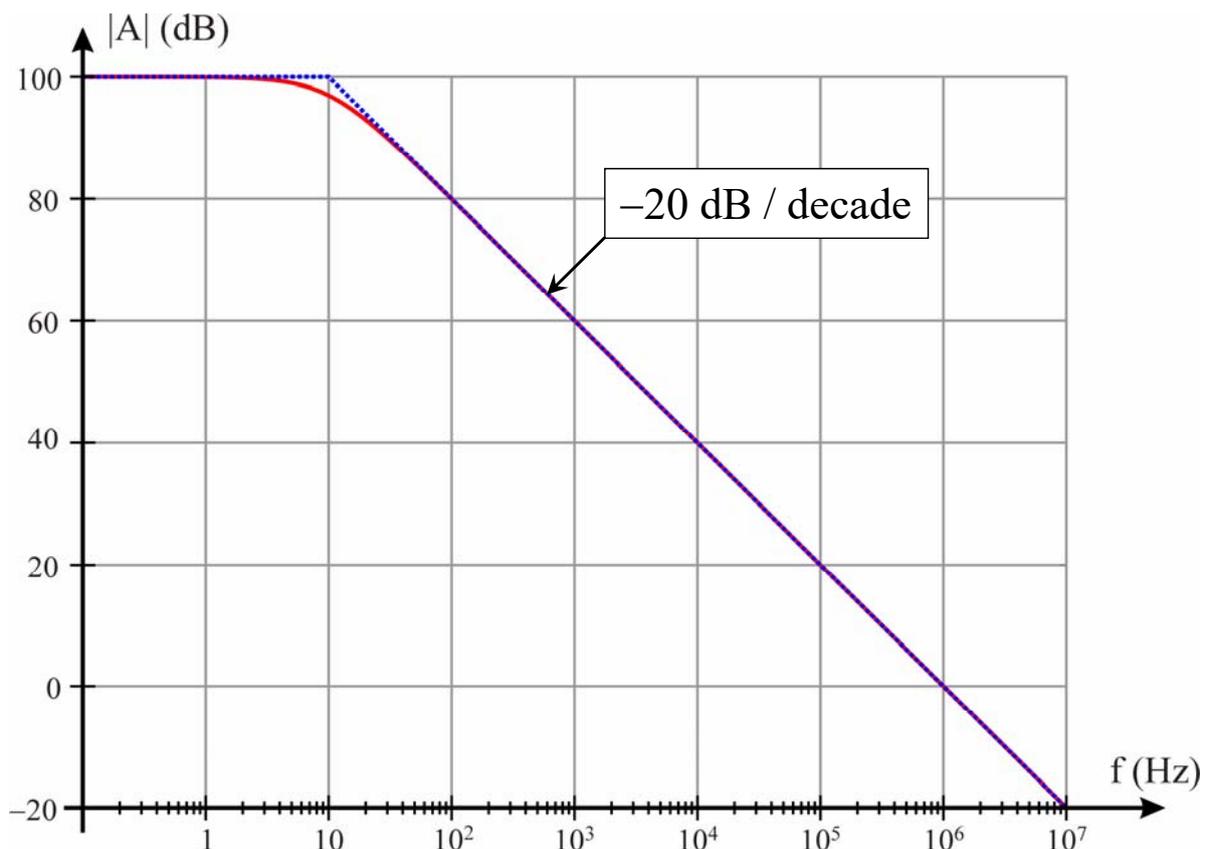
ω_0 = pulsazione dei taglio

$f_0 = \omega_0 / (2\pi)$ = frequenza di taglio

- ➔ Il guadagno diminuisce con pendenza -20 dB/decade (-6 dB/ottava) a partire da una frequenza f_0 relativamente bassa
 - ◆ Valori tipici di f_0 sono dell'ordine di 10 Hz
- Questo comportamento è dovuto a un condensatore che viene inserito nel circuito dell'amplificatore operazionale ed ha lo scopo di garantire che l'amplificatore sia stabile quando viene collegato in retroazione (**compensazione in frequenza**)

17

Risposta in frequenza di un amplificatore operazionale



18

Risposta in frequenza di un amplificatore operazionale

- In un amplificatore operazionale reale sono presenti numerosi effetti reattivi parassiti
- ➔ La funzione di trasferimento ha un numero elevato di poli
- I poli dovuti agli effetti parassiti sono posti a frequenze molto maggiori di f_0 (in genere il secondo polo corrisponde ad una frequenza maggiore di 1 MHz)
- ➔ Per frequenze inferiori a quella a cui interviene il secondo polo, il comportamento dinamico dell'amplificatore operazionale è determinato dal primo polo (**polo dominante**)

19

Banda di guadagno unitario

- La frequenza f_{UG} per cui il guadagno risulta uguale a 1 definisce la **banda di guadagno unitario** dell'amplificatore operazionale
- Dato che $f_{UG} \gg f_0$, si ha
$$|A(j2\pi f_{UG})| \approx \frac{A_0}{f_{UG}/f_0} = 1 \Rightarrow f_{UG} = A_0 f_0$$
- Inoltre, per $f_{UG} \gg f_0$ il guadagno può essere espresso dalla relazione approssimata
$$|A(j2\pi f)| \approx \frac{A_0}{f/f_0} = \frac{f_{UG}}{f}$$
- **Nota:** questi risultati valgono se alla frequenza f_{UG} l'amplificatore operazionale (come avviene normalmente) può essere rappresentato mediante il modello a un polo (cioè se gli altri poli sono a frequenze maggiori di f_{UG})

20

Prodotto guadagno – larghezza di banda

- Per gli amplificatori invertente e non invertente, tenendo conto della dipendenza dalla frequenza del guadagno ad anello aperto, si ottiene

$$\begin{aligned}A_v(j\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)\beta} = \alpha \frac{A_0 / (1 + j\omega / \omega_0)}{1 + A_0\beta / (1 + j\omega / \omega_0)} = \\ &= \alpha \frac{A_0 / (1 + A_0\beta)}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0(1 + A_0\beta)}} = \alpha \frac{A_{0f}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{0f}}}\end{aligned}$$

- dove

- ◆ $A_{0f} = \frac{A_0}{1 + A_0\beta}$ è il **guadagno in continua ad anello chiuso**
- ◆ $\omega_{0f} = \omega_0(1 + A_0\beta)$ è la **frequenza di taglio ad anello chiuso**

21

Prodotto guadagno – larghezza di banda

- Complessivamente per effetto della retroazione si ottiene
 - ◆ una riduzione del guadagno in continua di un fattore $1 + A_0\beta$

$$A_{0f} = \frac{A_0}{1 + A_0\beta}$$

- ◆ un aumento della frequenza di taglio (cioè un aumento della larghezza di banda) dello stesso fattore

$$\omega_{0f} = \omega_0(1 + A_0\beta) \qquad f_{0f} = f_0(1 + A_0\beta)$$

- Il **prodotto guadagno – larghezza di banda (GBW)** non cambia

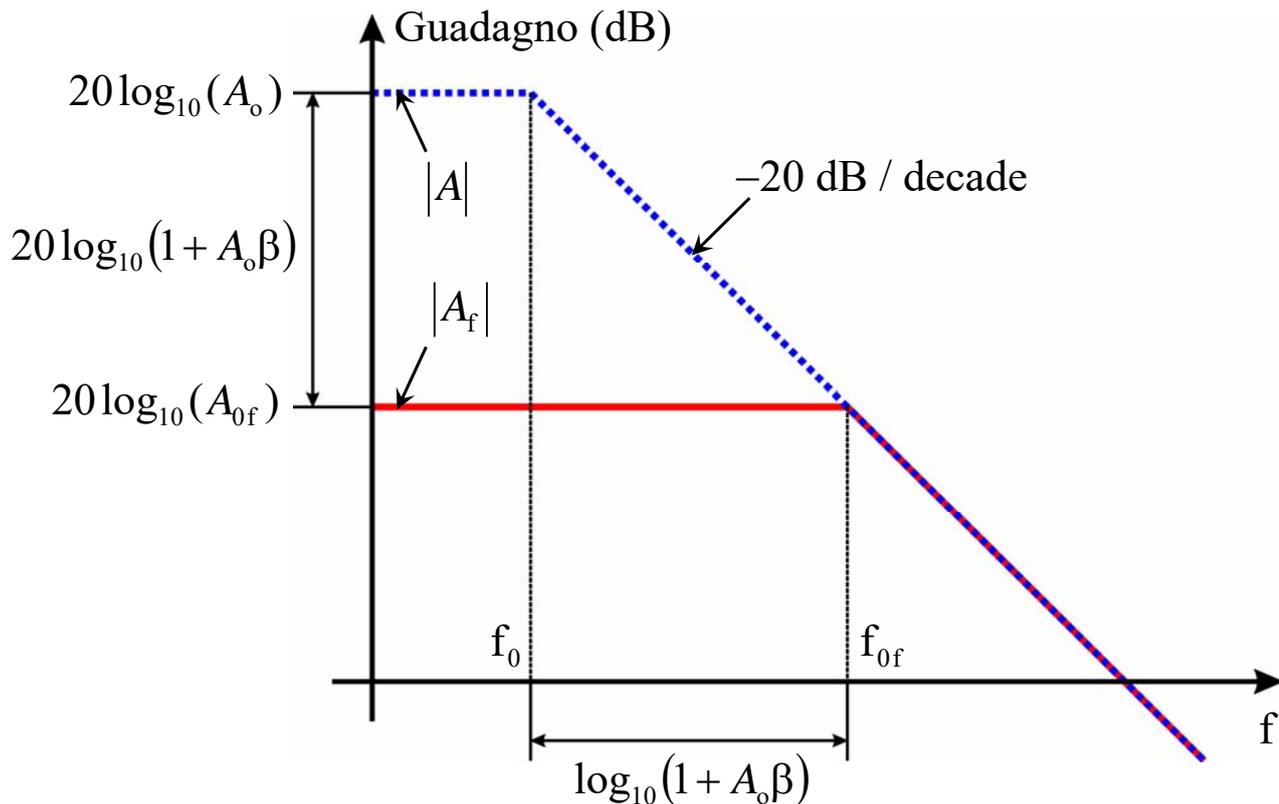
$$GBW = A_0 f_0 = A_{0f} f_{0f}$$

- Inoltre (se alla frequenza di guadagno unitario vale il modello a un polo) si ha anche

$$GBW = f_{UG}$$

22

Prodotto guadagno – larghezza di banda



23

Risposta in frequenza degli amplificatori invertente e non invertente

- Sia nella configurazione invertente sia in quella non invertente risulta

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- Per $A_0 \beta \gg 1$ il guadagno in continua ad anello chiuso è

$$A_{0f} \approx \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Quindi in entrambi i casi la larghezza di banda f_b dell'amplificatore è data dalla relazione

$$f_b = f_{0f} = \frac{GBW}{A_{0f}} = GBW \cdot \beta = \frac{GBW}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

24

Risposta in frequenza degli amplificatori invertente e non invertente

- Per l'amplificatore non invertente il guadagno in continua A_{v0} coincide con A_{f0}
- Quindi la larghezza di banda di un amplificatore non invertente con guadagno in continua A_{v0} è

$$f_b = GBW \cdot \beta = \frac{GBW}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{GBW}{A_{v0}}$$

- Per l'amplificatore invertente, a causa del fattore α , il prodotto $A_{v0} f_b$ diminuisce al diminuire del guadagno in continua A_{v0}
- Per un amplificatore invertente con guadagno in continua A_{v0} la larghezza di banda è

$$f_b = GBW \cdot \beta = \frac{GBW}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{GBW}{1 - A_{v0}}$$

25

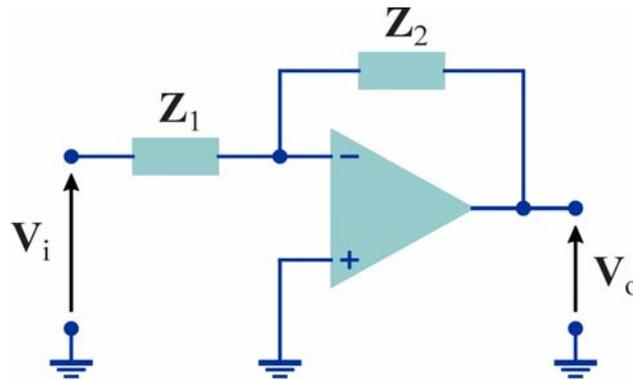
Esempio

$$A_0 = 10^5 \quad GBW = 1 \text{ MHz}$$

Amplificatore non invertente			Amplificatore invertente		
A_{v0}	β	f_b	A_{v0}	β	f_b
1	1	1 MHz	-1	0.5	500 kHz
10	0.1	100 kHz	-10	0.0909	90.9 kHz
100	0.01	10 kHz	-100	0.0099	9.9 kHz
1000	0.001	1 kHz	-1000	0.000999	999 Hz

26

Configurazione invertente generalizzata



- Se nella configurazione invertente si sostituiscono le resistenze R_1 e R_2 con due impedenze $Z_1(j\omega)$ e $Z_2(j\omega)$ si ottiene un circuito avente funzione di trasferimento

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{\mathbf{Z}_2(j\omega)}{\mathbf{Z}_1(j\omega)}$$

27

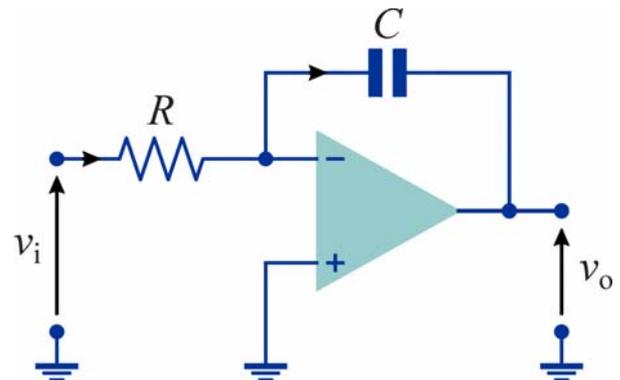
Integratore

- Dato che l'ingresso invertente è virtualmente a massa si ha

$$i_R(t) = \frac{v_i(t)}{R}$$

- Inoltre

$$i_C(t) = i_R(t)$$



- Quindi, se per $t = 0$ la tensione del condensatore è $v_C(0) = V_0$, si ricava

$$v_o(t) = -v_C(t) = -v_C(0) - \frac{1}{C} \int_0^t i_C(x) dx = -V_0 - \frac{1}{RC} \int_0^t v_i(x) dx$$

- ➔ L'uscita è $-V_0$ più un termine proporzionale all'integrale dell'ingresso
- RC = costante di tempo dell'integratore

28

Integratore – Risposta in frequenza

- Si pone

$$Z_1 = R \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

- La funzione di trasferimento è

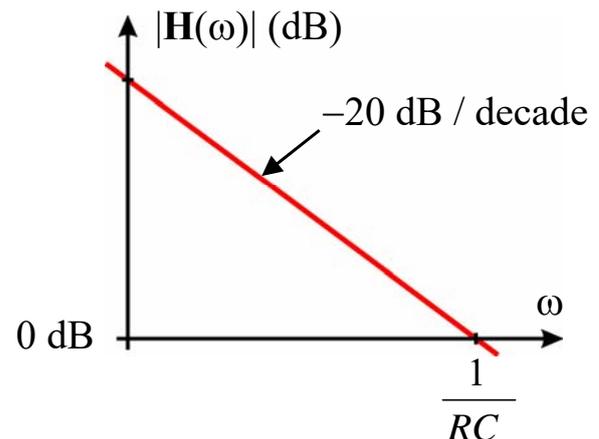
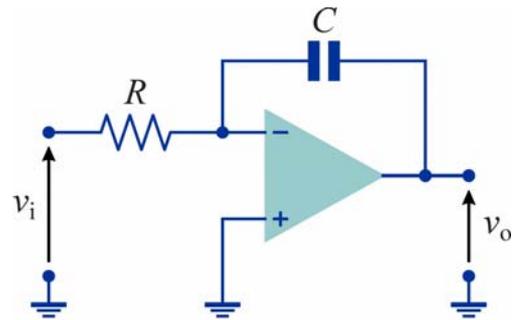
$$\mathbf{H}(j\omega) = -\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{j\omega RC}$$

- Quindi si ha

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC}$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 90^\circ$$

- Il modulo della funzione di trasferimento vale 1 (guadagno = 0 dB) per $\omega = 1/(RC)$



29

Integratore – Risposta in frequenza

- Dato che il guadagno aumenta al diminuire della frequenza, l'integratore risulta particolarmente sensibile ai disturbi a bassa frequenza
- In particolare per ω tendente a 0 il condensatore tende a comportarsi come un circuito aperto e il guadagno tende a infinito
- Idealmente una piccola componente continua del segnale di ingresso produrrebbe una tensione di uscita infinita
 - ◆ In pratica l'amplificatore operazionale viene portato in saturazione, quindi in queste condizioni non si può rappresentare come amplificatore operazionale ideale

30

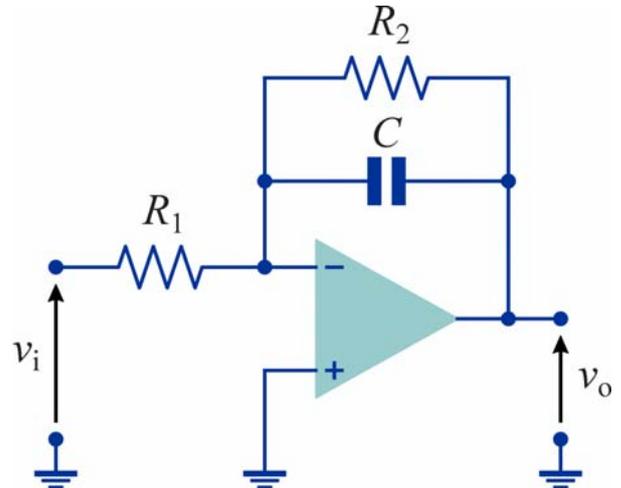
Limitazione del guadagno a bassa frequenza

- I problemi relativi al comportamento a bassa frequenza possono essere ridotti collegando un resistore in parallelo al condensatore
- Il comportamento del circuito, però, si discosta da quello dell'integratore ideale (in misura maggiore al diminuire di R_2)
- In questo caso si ha

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

- Quindi la funzione di trasferimento è

$$\mathbf{H}(j\omega) = -\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{R_2 / R_1}{1 + j\omega R_2 C}$$



31

Limitazione del guadagno a bassa frequenza

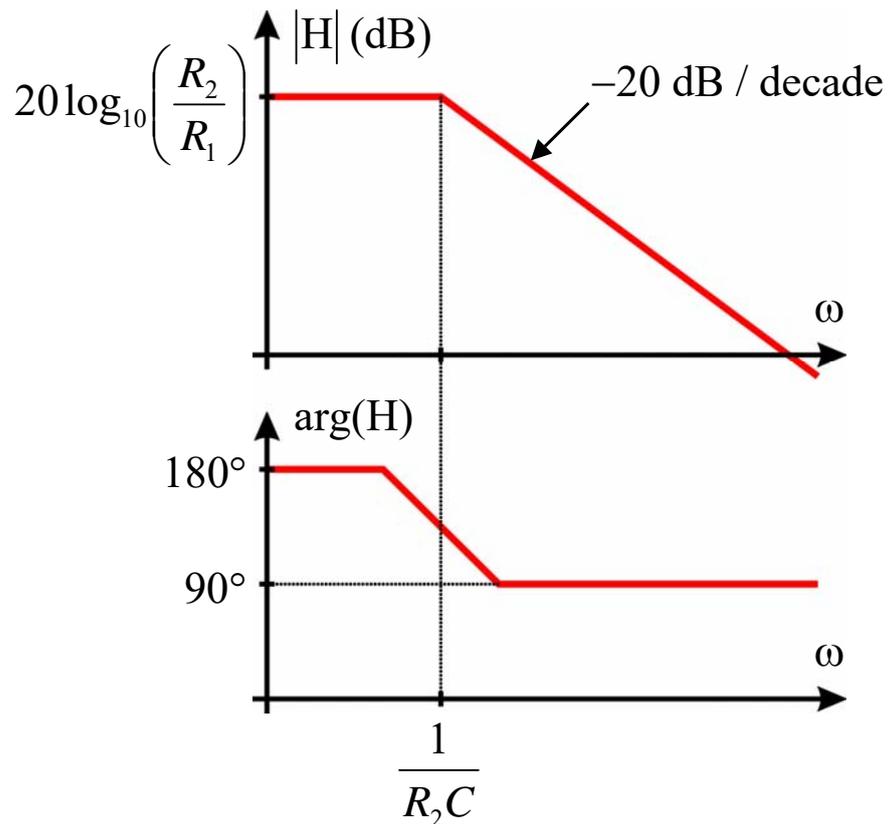
- Con l'inserimento di R_2 il polo della funzione di trasferimento si sposta da $s = 0$ a $s = -1/(R_2 C)$
- In continua il guadagno è finito e vale $-R_2/R_1$
- Per $\omega \gg 1/(R_2 C)$ si ha

$$\mathbf{H}(j\omega) \approx -\frac{R_2 / R_1}{j\omega R_2 C} = -\frac{1}{j\omega R_1 C}$$

e quindi il comportamento del circuito è simile a quello di un integratore ideale

32

Limitazione del guadagno a bassa frequenza



33

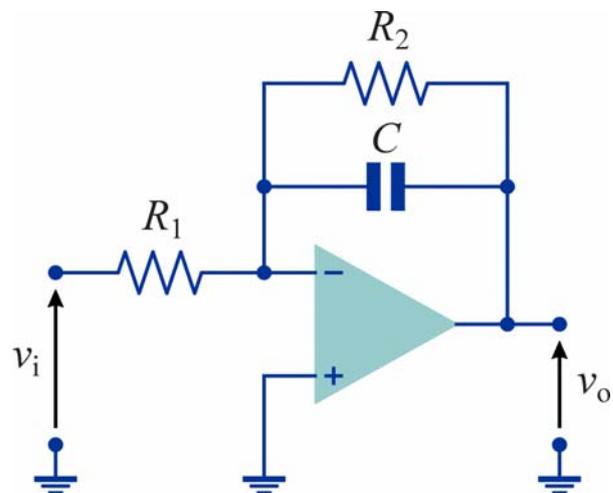
Filtro passa-basso invertente del 1° ordine

- Questo circuito si comporta come un filtro passa-basso del primo ordine
- La pulsazione di taglio è

$$\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$$

- Il guadagno in continua vale

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$



34

Derivatore

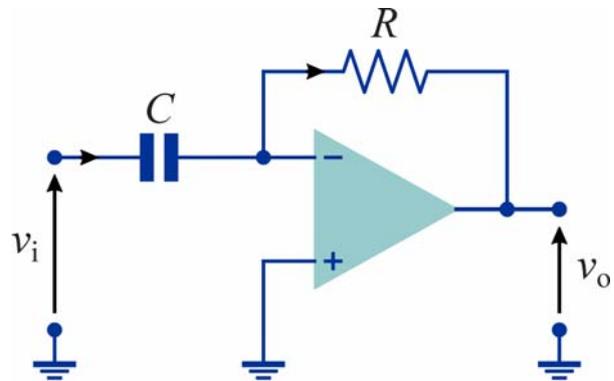
- La tensione del condensatore coincide con la tensione di ingresso
 $v_C(t) = v_i(t)$

- Le corrente del condensatore può circolare solo attraverso R

$$i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_i}{dt}$$

- Quindi si ottiene

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_i}{dt}$$



- ➔ L'uscita è proporzionale alla derivata dell'ingresso

- RC = costante di tempo del derivatore

35

Derivatore – Risposta in frequenza

- Si pone

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_2 = R$$

- La funzione di trasferimento è

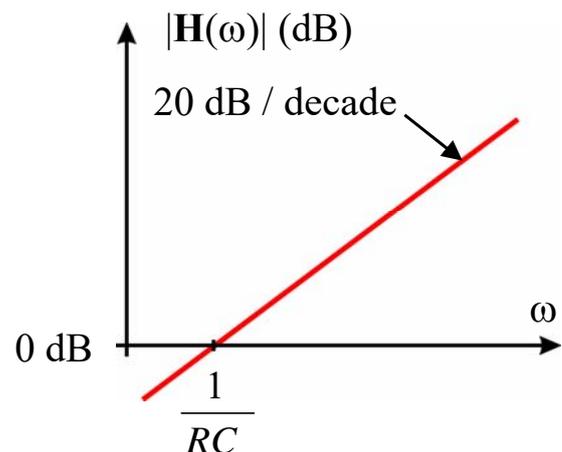
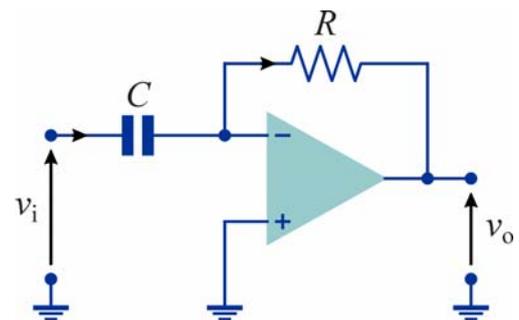
$$\mathbf{H}(j\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -j\omega RC$$

- Quindi si ha

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \omega RC$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = -90^\circ$$

- Il modulo della funzione di trasferimento vale 1 (guadagno = 0 dB) per $\omega = 1/(RC)$



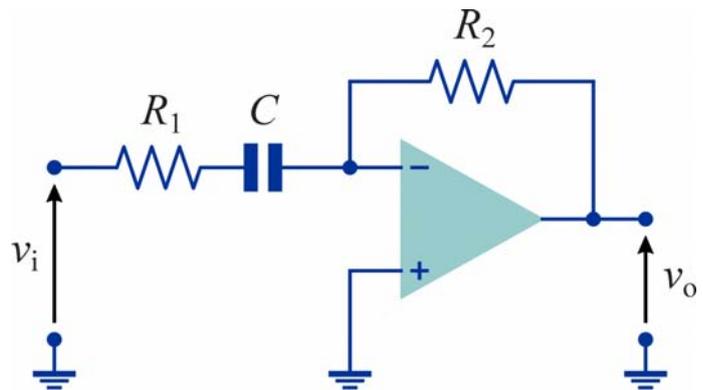
36

Limitazione del guadagno ad alta frequenza

- Il derivatore risulta molto sensibile ai disturbi ad alta frequenza
 - ◆ Rapide variazioni del segnale di ingresso (dovute per esempio a rumore) possono produrre dei picchi di ampiezza elevata in uscita
 - ◆ Inoltre i derivatori tendono ad avere problemi di stabilità
- Questi problemi possono essere ridotti collegando un resistore in serie al condensatore
 - ◆ Il comportamento del circuito, però, si discosta da quello del derivatore ideale (in misura maggiore all'aumentare di R_1)
- In questo caso si ha

$$\mathbf{Z}_2 = R_1 + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = -\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_1 C}$$



37

Limitazione del guadagno ad alta frequenza

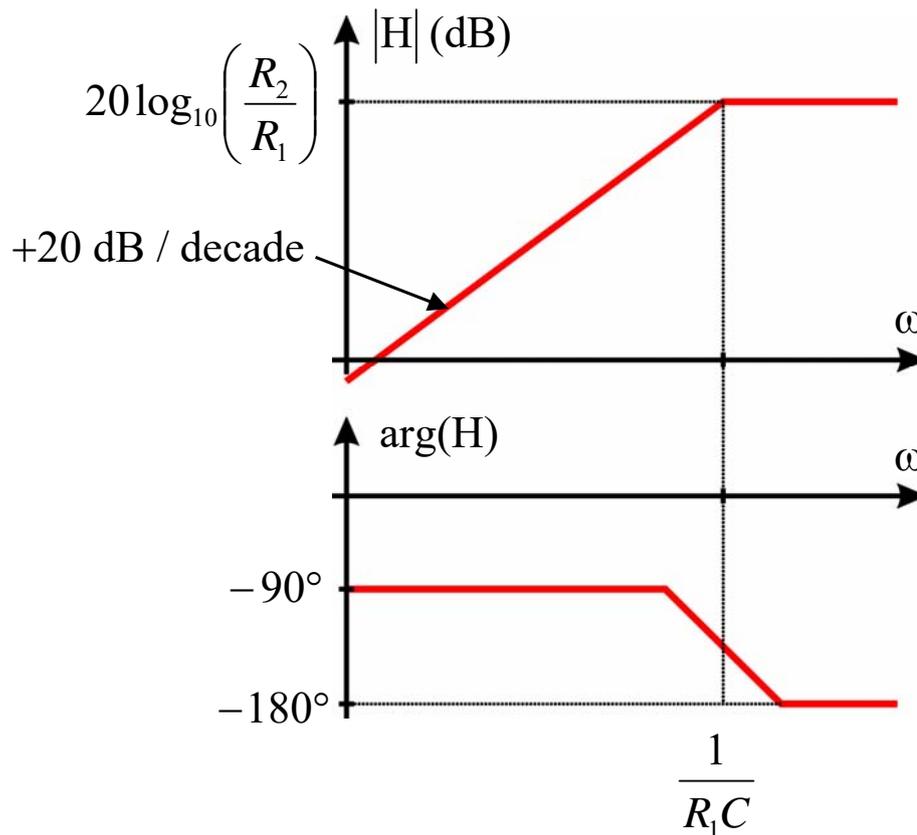
- L'inserimento di R_1 introduce nella funzione di trasferimento un polo per $s = -1/(R_1 C)$
- Ad alta frequenza, cioè per ω maggiore della pulsazione di taglio $1/(R_1 C)$, il guadagno vale $-R_2/R_1$
- Per $\omega \ll 1/(R_1 C)$ si ha

$$\mathbf{H}(j\omega) \approx -j\omega R_2 C$$

e quindi il comportamento del circuito è simile a quello di un derivatore ideale

38

Limitazione del guadagno ad alta frequenza



39

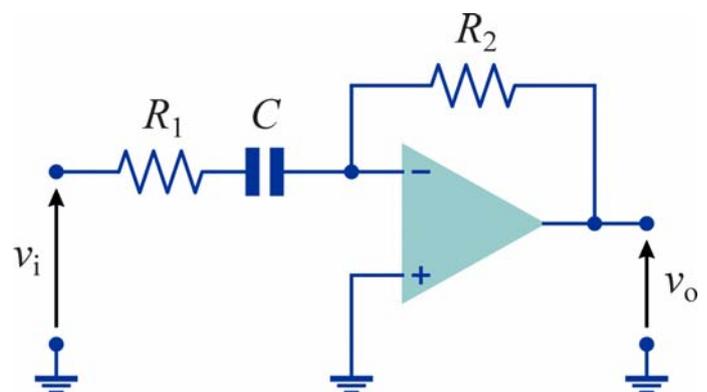
Filtro passa-alto invertente del 1° ordine

- Questo circuito si comporta come un filtro passa-alto del primo ordine
- La pulsazione di taglio è

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1 C}$$

- Il guadagno in continua vale

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

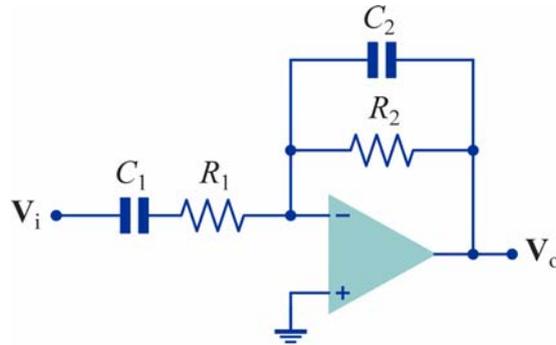


40

40

Filtro passa-banda

- Combinando i due circuiti precedenti è possibile ottenere un filtro passa-banda



- In questo caso la funzione di trasferimento è

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)} = -H_0 \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

41

Filtro passa-banda

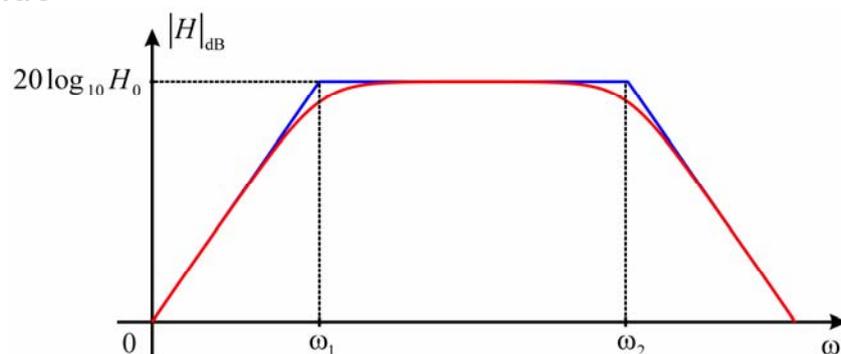
- Nell'ipotesi che le due pulsazioni di taglio soddisfino la condizione

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} < \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

per ω compreso tra ω_1 e ω_2 il guadagno vale

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{guadagno di centro banda})$$

- Al di fuori della banda passante il guadagno diminuisce con pendenza 20 dB/decade



42