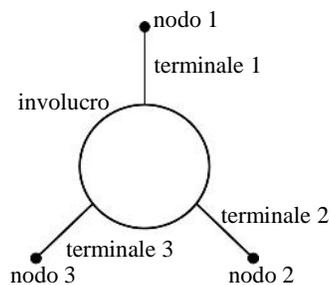


1. Definizioni e Leggi di Kirchhoff

Nodo, polo, terminale, componente, circuito. Bipolo o n-polo complementare. Corrente, tensione. Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC), legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT). Correnti e tensioni rappresentative di un bipolo. Correnti e tensioni rappresentative di un n-polo. Potenza di un bipolo. Convenzione da utilizzatore (o convenzione normale). Convenzione da generatore. Potenza di un n-polo. Porta. m-porte proprio, correnti e tensioni rappresentative di un m-porta proprio. Equivalenza tra n-poli ed (n-1) porte. Doppio bipolo tripolare. Potenza di un m-porte. m-porte improprio.

1

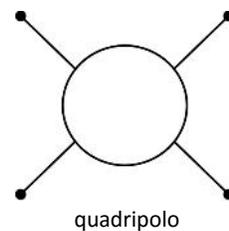
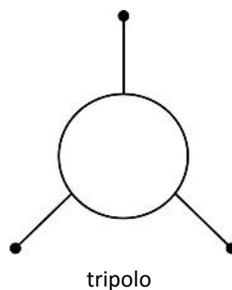
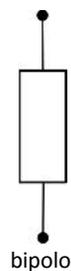
Componente



Si definisce componente una superficie chiusa (detta involucro o superficie limite) dalla quale emergono due o più terminali filiformi.

Il punto estremo di ciascun terminale è detto morsetto, **nodo** oppure polo.

Un componente dotato di n terminali è detto **n-polo**.



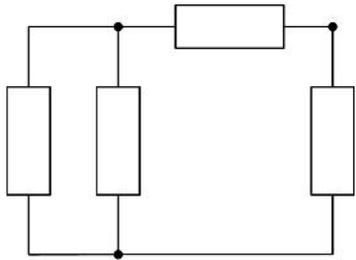
2



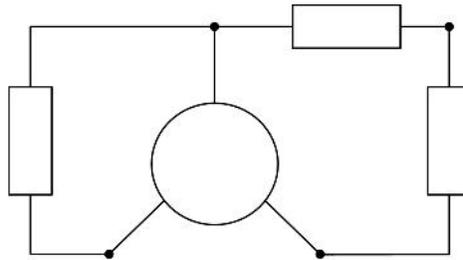
Circuito

Due **componenti** si dicono **interconnessi** se posseggono almeno un nodo in comune

Si definisce **circuito** un insieme di componenti interconnessi



Circuito a 3 nodi costituito da 4 bipoli interconnessi

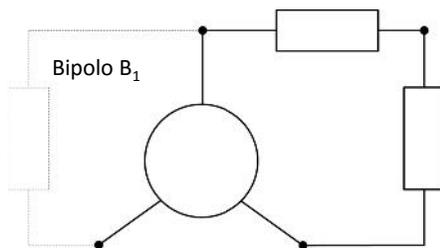


Circuito a 4 nodi costituito da tre bipoli e un tripolo tra loro interconnessi

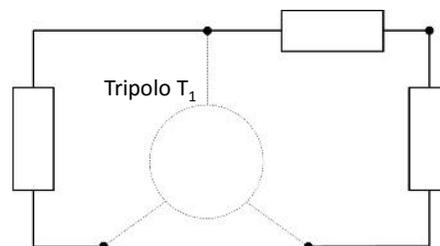
3

n-polo complementare

Ciò che si ottiene escludendo da un circuito un generico n polo è anch'esso un n-polo costituito da un aggregato di componenti. Tale n-polo aggregato è detto **n-polo complementare**



Bipolo complementare di B₁



Tripolo complementare di T₁

4



Corrente

Ad ognuno dei terminali di un componente è associata una grandezza fisica i detta **corrente elettrica**, specificabile con riferimento ad un verso scelto ad arbitrio ed indicato con una freccia. L'unità di misura della corrente elettrica nel sistema internazionale è l'Ampère (A).
In generale la corrente varia nel tempo. Se si desidera evidenziare tale variazione la si indica con $i(t)$.



Dal punto di vista fisico la corrente corrisponde alla quantità di carica elettrica che attraversa la superficie trasversale del terminale nell'unità di tempo. Più in particolare la quantità di carica dq che attraversa la superficie del terminale nell'intervallo di tempo infinitesimo dt è data da $dq = i dt$. Risulta quindi

$$i = \frac{dq}{dt}$$

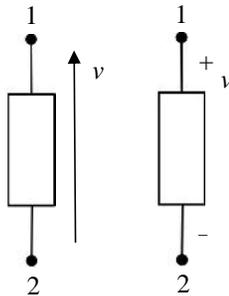
Si precisa che, dal punto di vista fisico, il verso scelto per specificare la corrente corrisponde all'orientazione della superficie. Sono positive le correnti costituite da cariche positive che attraversano la superficie nel verso indicato, oppure da cariche negative che la attraversano nel verso opposto.

Ordine di grandezza delle correnti nei circuiti di interesse nella pratica:

nA- μ A	circuiti integrati
A	apparecchiature domestiche
kA	sistemi per la trasmissione dell'energia

5

Tensione



Ad ogni coppia di nodi è associata una grandezza fisica v detta **tensione elettrica**, specificabile con riferimento ad un verso scelto ad arbitrio ed indicato con una freccia oppure con la coppia di segni $-/+$ (da $-$ a $+$). L'unità di misura della tensione elettrica nel sistema internazionale è il volt (V).
In generale la tensione varia nel tempo. Se si desidera evidenziare tale variazione la si indica con $v(t)$.

In alternativa alla freccia o al segno $+$ è possibile specificare la direzione di riferimento indicando il terminale di partenza k e quello di arrivo h . v_{hk} denota la tensione da k ad h . Ad esempio la tensione indicata con v in figura può essere indicata con v_{12} .

Dal punto di vista fisico la tensione corrisponde alla quantità di energia che è necessario spendere per muovere una carica unitaria dal nodo $-$ a quello $+$. Più in particolare la quantità di energia dW che è necessaria per spostare la carica infinitesima dq è data da $dW = v dq$. Risulta quindi

$$v = \frac{dW}{dq}$$

Ordine di grandezza delle tensioni nei circuiti di interesse nella pratica:

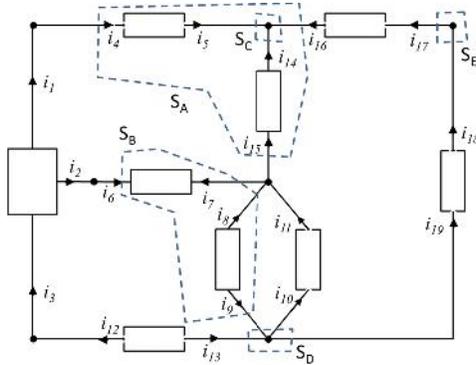
μ V	antenne radio riceventi
V	circuiti integrati
100 V	apparecchiature domestiche
100 kV	sistemi per la trasmissione dell'energia

6



Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

LKC: la somma algebrica delle correnti circolanti attraverso i terminali intersecati da una qualsiasi superficie chiusa che si sviluppa al di fuori dei componenti è uguale a zero.



Per poter esplicitare la LKC è necessario assegnare ad arbitrio un'orientazione alla superficie considerata

$$S_A : i_4 + i_{15} + i_{16} = 0$$

$$S_B : i_6 + i_7 - i_8 - i_9 = 0$$

$$S_C : i_5 + i_{14} + i_{16} = 0$$

$$S_D : i_{13} + i_9 - i_{10} - i_{19} = 0$$

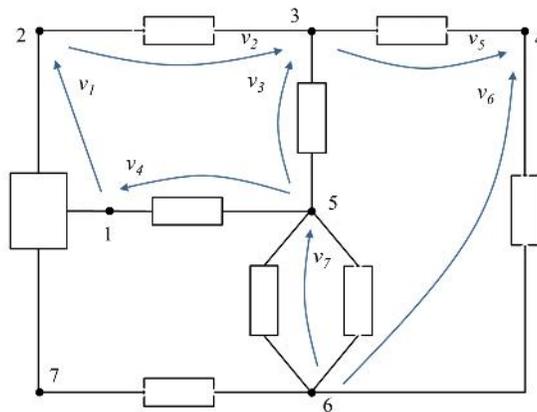
$$S_E : i_{17} - i_{18} = 0$$

Formulazione nodale della LKC: la somma algebrica delle correnti entranti e uscenti da un nodo è uguale a zero.

7

Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

LKT: la somma algebrica delle tensioni agenti tra le coppie di nodi che formano una qualsiasi sequenza chiusa (orientata) è uguale a zero.



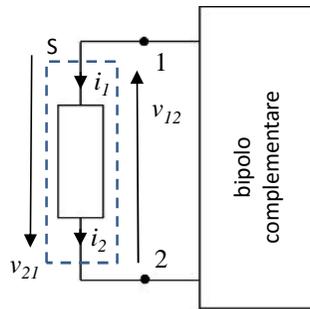
$$12351: v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = 0$$

$$1234651: v_1 + v_2 + v_5 - v_6 + v_7 + v_4 = 0$$

$$34653: v_5 - v_6 + v_7 + v_3 = 0$$

8

Corrente e tensione rappresentative di un bipolo



Per un bipolo operante all'interno di circuito sono definibili due correnti e due tensioni distinte che sono però vincolate dalla LKC e dalla LKT rispettivamente.

LKC applicata alla superficie S

$$i_1 - i_2 = 0 \quad \text{Le due correnti non sono indipendenti} \\ \text{(una è sempre deducibile in funzione dell'altra)}$$

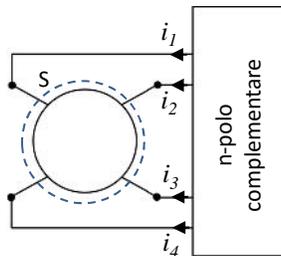
LKT applicata alla sequenza di nodi 1-2-1

$$v_{21} + v_{12} = 0 \quad \text{Le due tensioni non sono indipendenti} \\ \text{(una è sempre deducibile in funzione dell'altra)}$$

Un bipolo risulta completamente definito attraverso una sola corrente ed una sola tensione

9

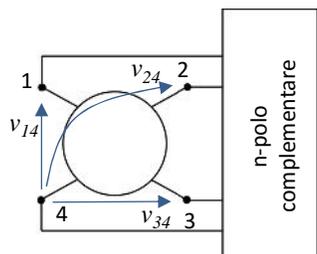
Corrente e tensione rappresentative di un n-polo



Per un n-polo operante all'interno di circuito sono definibili n correnti.

LKC applicata ad una superficie chiusa S che circonda l'involucro del componente intersecandone i terminali stabilisce un vincolo algebrico tra le correnti ($\sum i = 0$)

Le n correnti non sono indipendenti. Una qualunque di esse è deducibile in funzione delle rimanenti n-1



Per un n-polo operante all'interno di circuito sono definibili n(n-1) tensioni

Si individuino ad arbitrio n-1 coppie di nodi tali da non formare sequenze chiuse. Tali coppie definiscono n-1 tensioni.

Qualunque altra coppia di nodi forma con la precedente una sequenza chiusa. La tensione ad essa associata non è indipendente dalle precedenti n-1 per via della LKT.

v_{14}, v_{24}, v_{34} : 3 (n-1) tensioni indipendenti a cespuglio
nodo di riferimento: 4

Un n-polo risulta completamente definito attraverso n-1 correnti ed n-1 tensioni

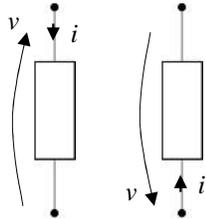
10

Potenza di un bipolo

$$p(t) = v(t) i(t) \quad [\text{W}]$$

Il prodotto tra la tensione e la corrente di un bipolo in un dato istante t rappresenta la potenza da esso assorbita o erogata nel medesimo istante

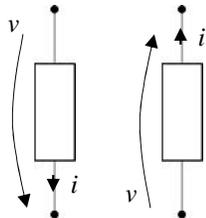
I versi di riferimento per la corrente e la tensione sono scelti ad arbitrio. Al fini del calcolo della potenza è necessario distinguere tra i possibili versi relativi scelti per l'una e per l'altra



Convenzione da utilizzatore (o convenzione normale): la tensione è orientata verso il nodo in cui la corrente entra

$v i = p_a$ Il prodotto $v i$ rappresenta la potenza p_a assorbita dal bipolo.

A seconda del valore assunto da i e v la potenza assorbita p_a può risultare sia positiva che negativa

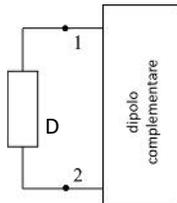


Convenzione da generatore: la tensione è orientata verso il nodo da cui la corrente esce

$v i = p_e$ Il prodotto $v i$ rappresenta la potenza p_e erogata dal bipolo

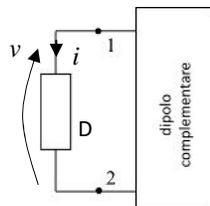
A seconda del valore assunto da i e v la potenza erogata p_e può risultare sia positiva che negativa

11

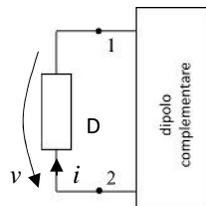


"Il bipolo D di figura è attraversato da una corrente di 5 A entrante dal nodo 1 ed è soggetto ad una tensione di 10 V diretta dal nodo 2 al nodo 1"

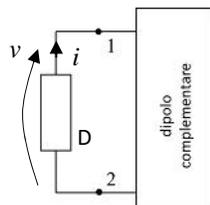
Ai fini della soluzione del circuito è necessario assegnare, ad arbitrio, un verso alla tensione e alla corrente del bipolo. Il risultato ottenuto varierà a seconda della scelta fatta rappresentando però, coerentemente, la medesima realtà fisica



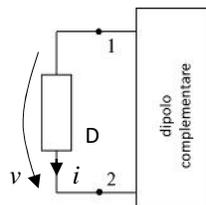
$$\begin{aligned} i &= +5 \text{ A} \\ v &= +10 \text{ V} \\ v i &= p_a = +50 \text{ W} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} i &= -5 \text{ A} \\ v &= -10 \text{ V} \\ v i &= p_a = +50 \text{ W} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} i &= -5 \text{ A} \\ v &= +10 \text{ V} \\ v i &= p_e = -50 \text{ W} \end{aligned}$$

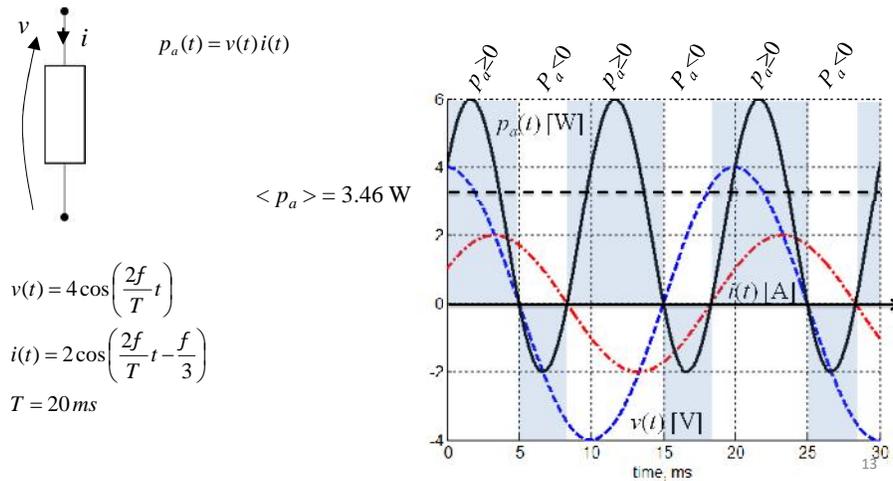


$$\begin{aligned} i &= +5 \text{ A} \\ v &= -10 \text{ V} \\ v i &= p_e = -50 \text{ W} \end{aligned}$$

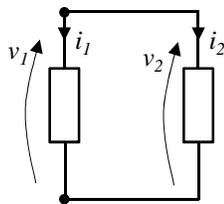
12

È importante evidenziare che, dato che in generale la tensione e la corrente variano nel tempo, sia il modulo che il segno della potenza assorbita variano anch'essi nel tempo

Si consideri a titolo di esempio la potenza assorbita dal bipolo di figura, soggetto ad una tensione e ad una corrente periodiche sinusoidali



Si consideri il circuito di figura, costituito da due bipoli



La potenza assorbita da ciascun bipolo è

$$p_{a1} = v_1 i_1$$

$$p_{a2} = v_2 i_2$$

Le leggi di Kirchhoff impongono

$$i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1$$

$$v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$$

La potenza complessivamente assorbita dal circuito è

$$p_{a\text{circ.}} = p_{a1} + p_{a2} = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 - v_1 i_1 = 0$$

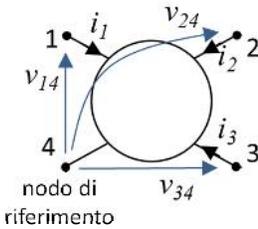
In ogni istante la potenza complessivamente assorbita dal circuito risulta nulla. Il circuito è quindi un sistema energeticamente isolato (non scambia energia con l'esterno). Tale proprietà è del tutto generale (dipende solo dalle LKC e LKT) ed è valida qualunque sia il numero o la tipologia dei componenti (teorema di Tellegen).

Nel caso in esame la potenza assorbita dal secondo bipolo è uguale e opposta a quella assorbita dal primo, ossia è uguale a quella erogata dal primo

$$p_{a2} = v_2 i_2 = -v_1 i_1 = -p_{a1} = p_{e1}$$

In generale la potenza assorbita da un singolo componente è uguale e opposta alla somma delle potenza assorbite da tutti gli altri

Potenza di un n-polo



Sia dato, per un generico n-polo, un vettore \mathbf{v} di n-1 tensioni indipendenti a cespuglio. Sia \mathbf{i} il vettore delle correnti in tutti i terminali escluso quello di riferimento. I versi di riferimento delle tensioni siano associati con quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore.

Potenza p_a assorbita dall'n-polo:
$$p_a(t) = \mathbf{v}(t)^t \mathbf{i}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(t) i_k(t)$$

La potenza assorbita dal bipolo è indipendente dal nodo scelto come riferimento

$$p_{a(4)} = v_{14} i_1 + v_{24} i_2 + v_{34} i_3$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{LKT}} p_{a(3)} &= v_{13} i_1 + v_{23} i_2 + v_{43} i_4 = \\ &= (v_{14} - v_{34}) i_1 + (v_{24} - v_{34}) i_2 - v_{34} i_4 = \\ &= v_{14} i_1 + v_{24} i_2 + v_{34} (-i_1 - i_2 - i_4) = \\ &= v_{14} i_1 + v_{24} i_2 + v_{34} i_3 = p_{a(4)} \end{aligned}$$

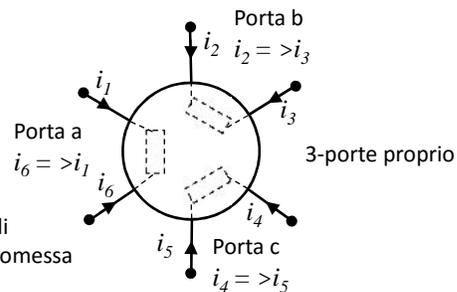
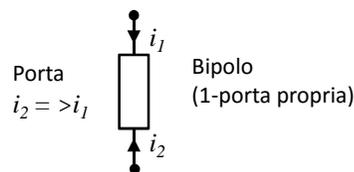
↑ LKC

Più in generale per individuare univocamente le n-1 tensioni indipendenti di un n-polo è possibile associare ad esso n-1 bipoli fittizi che congiungono tutti i nodi senza formare percorsi chiusi. Tali bipoli sono attraversati da correnti fittizie univocamente determinabili sulla base delle effettive correnti dell'n-polo (coincidono con queste nel caso di bipoli che emergono a cespuglio da un nodo scelto come riferimento). È possibile dimostrare che, indipendentemente dalla scelta dei bipoli fittizi effettuata, la potenza assorbita dall'n-polo coincide con la potenza complessivamente assorbita da questi ultimi.

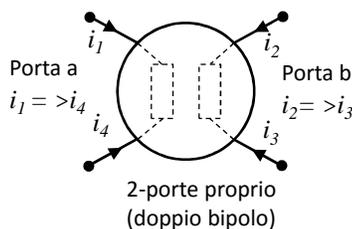
m-porte proprio (o intrinseco)

Si definisce **porta** una coppia di terminali per i quali la corrente uscente dall'uno è sempre uguale alla corrente entrante nell'altro.

Si definisce m-porte proprio (o intrinseco) un componente avente n=2m poli la cui struttura interna è tale da creare m porte



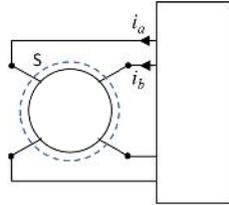
L'indicazione dei bipoli interni viene di solito omessa



Ai fini della determinazione dei vincoli topologici (LKC e LKT) non c'è differenza tra un m-porte proprio o m bipoli distinti. La differenza emerge all'atto della definizione delle relazioni costitutive. Per l'm-porte si otterranno m equazioni. Ciascuna di queste coinvolge tutte le m correnti e le m tensioni. Per m bipoli si otterranno m equazioni. Ciascuna di queste coinvolge solo la propria corrente e la propria tensione. ¹⁶



Corrente e tensione rappresentative di un m-porte proprio



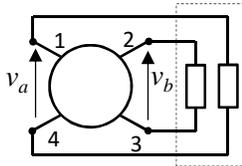
Per un m-porte proprio sono definibili m correnti.

LKC applicata ad una superficie chiusa S che circonda l'involucro intersecando i terminali risulta automaticamente soddisfatta.

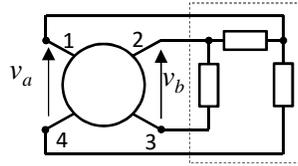
$$i_a - i_a + i_b - i_b = 0$$

Nessun vincolo è posto da questa equazione. Le m correnti sono indipendenti.

Per un m-porte proprio sono definibili m tensioni agenti sulle m porte. Le porte non individuano una sequenza chiusa di nodi, pertanto nessun vincolo è posto dalle LKT sulle relative tensioni. Le m tensioni di porta sono indipendenti. Le tensioni tra due nodi appartenenti a porte diverse non può essere, in generale, definita. Tale tensione diventa definita solo se il circuito è tale da creare una connessione fisica tra i due nodi.



tensioni di porta: v_a, v_b
tensioni v_{12} e v_{34} non definibili

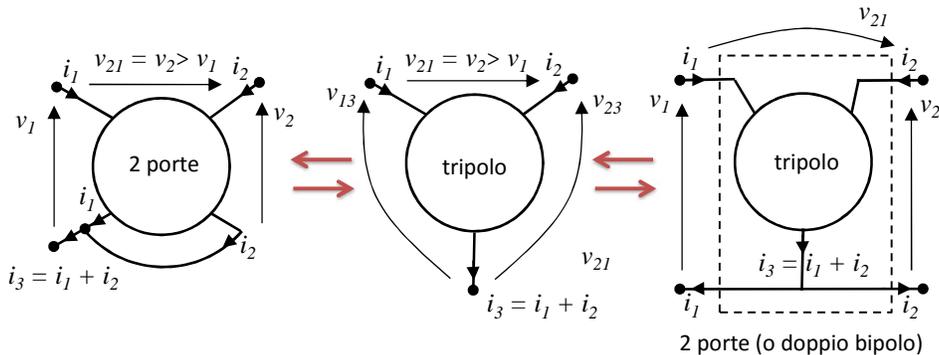


tensioni di porta: v_a, v_b
tensioni v_{12} e v_{34} definibili

Un m-porte risulta completamente definito attraverso m correnti ed m tensioni

17

Un m-porte in cui i terminali di uscita di tutte le porte sono collegati in comune appare all'esterno come un componente a m+1 terminali. La corrente in uscita dal terminale m+1 coincide con la somma delle correnti entranti in tutti gli altri terminali. Inoltre le m tensioni di porta consentono di individuare le tensioni esistenti tra tutte le coppie di nodi. La medesima situazione si verifica in un (m+1)-polo per effetto della LKC. Ne consegue che tale m-porte è equivalente quindi ad un (m+1)-polo.



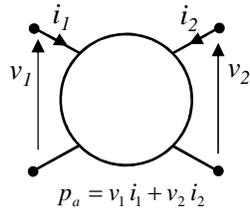
Un generico n-polo può quindi essere considerato come un (n-1)-porte nel quale i terminali di uscita sono collegati in comune.

In particolare un tripolo può essere considerato come un doppio bipolo (2-porte) in cui i terminali sono posti in comune. Si ottiene così un doppio bipolo tripolare

18



Potenza di un m-porte

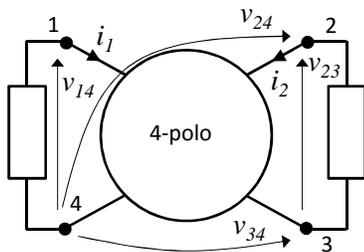


Siano dati, per un generico m-porte, un vettore \mathbf{i} di m correnti di porta e un vettore \mathbf{v} di m tensioni di porta. I versi di riferimento delle tensioni siano associati con quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore.

Potenza p_a assorbita dall'm-porte:
$$p_a = \mathbf{v} \mathbf{i}^t = \sum_{k=1}^m v_k i_k$$

m-porte improprio

Si consideri un n-polo con $n=2m$ connesso a m bipoli distinti. La connessione ai bipoli esterni è tale da creare n condizioni di porta (la corrente entrante è uguale alla corrente uscente). Se opera in queste condizioni il 2m-polo è detto m-porte improprio



Il suo comportamento è specificabile attraverso le due correnti e le due tensioni di porta

$$\begin{aligned} p_a &= v_{14} i_1 + v_{24} i_2 + v_{34} i_3 = \\ &= v_{14} i_1 + (v_{24} - v_{34}) i_2 = v_{14} i_1 + v_{23} i_2 \end{aligned}$$

