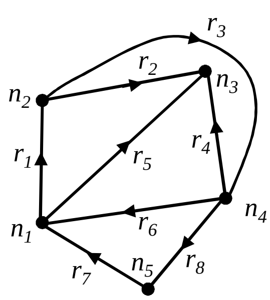
2. Grafi e proprietà topologiche

Grafo. Matrice di incidenza completa. Sottografo. Ordine di un nodo. Percorso, maglia, vettore topologico di maglia. Taglio, vettore topologico di taglio. Ortogonalità tra tagli e maglie. Grafo connesso. Albero, coalbero. Grafo di un n-polo. Sistema risolvente di un circuito. Equazioni topologiche, relazione di definizione (o costitutive) dei componenti. Grafo di un circuito. Tagli fondamentali e insieme massimale di LKC indipendenti. Matrice $\mathbf{T}$ dei tagli fondamentali, vettore delle correnti di ramo, formulazione matriciale delle LKC indipendenti. Maglie fondamentali e insieme massimale di LKT indipendenti. Matrice $\mathbf{L}$ delle maglie fondamentali, vettore delle tensioni di ramo, formulazione matriciale delle LKT indipendenti. Relazione tra le matrici $\mathbf{T}$ e $\mathbf{L}$. Tensioni di albero, correnti di coalbero. Relazione tra tensioni di ramo e tensioni di albero. Relazione tra correnti di ramo e correnti di coalbero. Teorema di Tellegen.

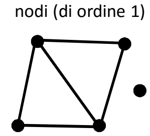
Grafi

Si definisce **grafo orientato $\boldsymbol{G}$** un insieme costituito da un numero N di elementi detti nodi e da un numero R di elementi di diversa tipologia detti rami (oppure lati, archi o segmenti). Ognuno degli R rami termina in un nodo ed inoltre per ognuno di essi è assegnata un'orientazione.

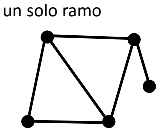


N = 5
R = 8

In generale un grafo può contenere nodi isolati, ossia nodi (di ordine 0) a cui non afferisce nessun ramo, e/o nodi (di ordine 1) a cui afferisce un solo ramo

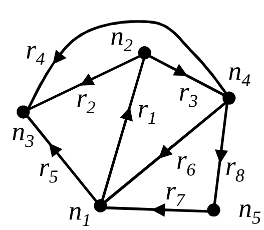


N = 5 , R = 5



N = 5 , R = 6

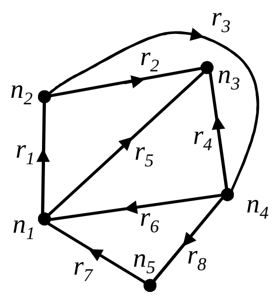
Un grafo può essere assegnato in forma grafica. Esso esprime le proprietà invarianti per deformazione ed è pertanto indipendente dalla posizione dei nodi o dalla forma dei lati. Può essere ridisegnato ad arbitrio purché siano rispettate le relazioni di incidenza ramo-nodo.



Matrice di incidenza completa

Oltre che in forma grafica un grafo orientato può essere assegnato attraverso la matrice di incidenza completa $\mathbf{A}^c$, avente tante righe quanti sono i nodi (N) e tante colonne quanti sono i rami (R), i cui elementi assumono valore -1, 0 o +1

$$\mathbf{A}^c \in \mathbf{M}(\Re)_{N\times R}: \qquad a^c_{h,k} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo k esce dal nodo h} \\ \;\;0 \text{ se il ramo k non incide nel nodo h} \\ -1 \text{ se il ramo k entra nel nodo h} \end{cases}$$

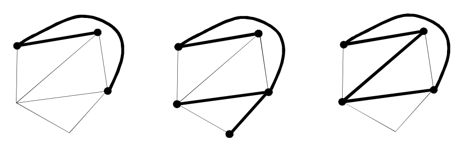


N = 5 , R = 8

$$\mathbf{A}^c = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{array}\right) \\ \underbrace{\begin{array}{cccccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \end{array}}_{R\text{ (8) colonne}} \end{array} \left.\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{array}\right\} N \text{ (5) righe}$$

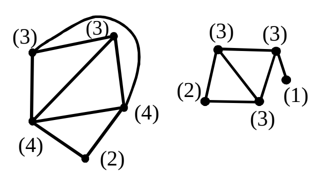
3

Si definisce **sottografo *sG*** la figura costituita da un sottoinsieme di rami del grafo e da tutti e soli i nodi su cui tali lati incidono.

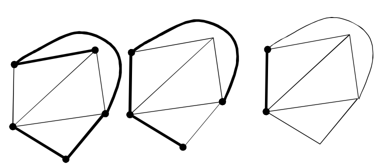


Si definisce **ordine del nodo** il numero di rami che incidono su di esso, indipendentemente dall'orientazione.

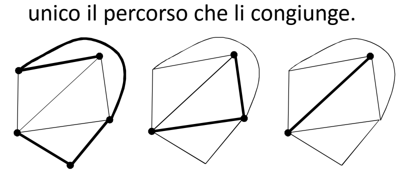
L'ordine di un nodo coincide col numero di elementi non nulli presenti sulla riga della matrice di incidenza corrispondente.



Si definisce **percorso** un sottografo che comprende solo nodi di ordine 2 salvo due nodi di ordine 1 che ne costituiscono gli estremi.

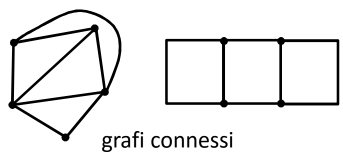


Dati i due estremi in generale non è unico il percorso che li congiunge.

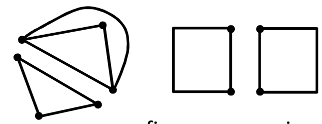


4

Un grafo si dice **connesso** se scelti ad arbitrio due nodi h e k esiste sempre un percorso avente h e k come estremi.

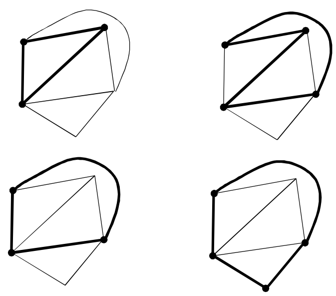


grafi connessi



grafi non connessi

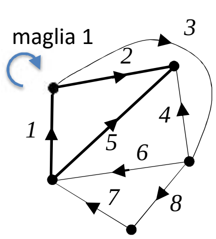
Si definisce **maglia** (o ciclo) un sottografo che comprende solo nodi di ordine 2. In pratica una maglia è un percorso chiuso, in cui i due estremi coincidono.



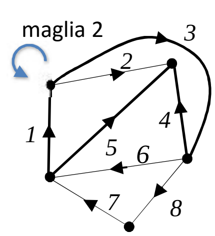
Per ogni maglia è definibile un verso di percorrenza che può essere orario oppure antiorario.

Una generica (h-esima) maglia orientata all'interno di un grafo orientato può essere identificata attraverso il proprio vettore topologico $\mathbf{l}_h$ (vettore riga), avente tanti elementi di valore −1, 0 o +1 quanti sono i rami del grafo (R)

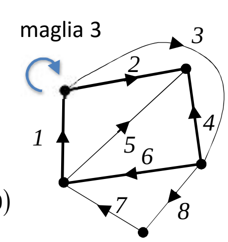
$$\mathbf{l}_h \in \mathbf{M}(\Re)_{1\times R}: \qquad l_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo k appartiene alla maglia h ed è concorde con essa} \\ 0 \text{ se il ramo k non appartiene alla maglia h} \\ -1 \text{ se il ramo k appartiene alla maglia h ed è discorde con essa} \end{cases}$$



$$\mathbf{l}_1 = (+1 \quad +1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

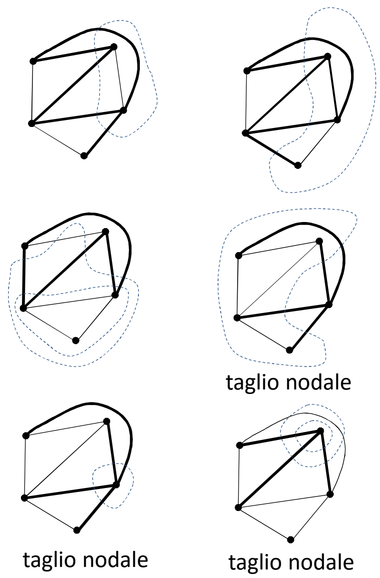


$$\mathbf{l}_2 = (-1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$



$$\mathbf{l}_3 = (+1 \quad +1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad 0 \quad 0)$$

Si suddividano i nodi del grafo in un sottoinsieme α e un sottoinsieme β disgiunti (nessuno dei due sia vuoto). Si definisce **taglio** (o più precisamente insieme di taglio o cociclo) l'insieme dei lati i cui estremi appartengono uno al sottoinsieme α e uno al sottoinsieme β



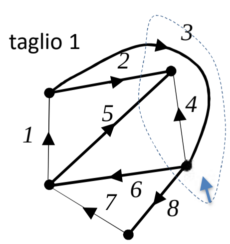
In pratica un taglio coincide con l' insieme dei lati intersecato una sola volta (o un numero dispari di volte) da una superficie chiusa, detta **superficie di taglio**, che suddivide i nodi in due sottoinsiemi (α e β), il primo contenuto all'interno e il secondo all'esterno

Per ogni taglio è definibile un'orientazione che può essere da α verso β o viceversa

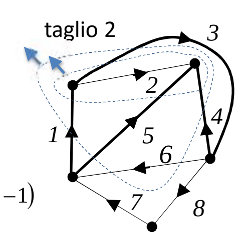
Quando una delle due partizioni α o β contiene un solo nodo il taglio si dice **taglio nodale**

Un generico (h-esimo) taglio orientato all'interno di un grafo orientato può essere identificato attraverso il proprio vettore topologico $\mathbf{t}_h$ (vettore riga), avente tanti elementi di valore -1, 0 o +1 quanti sono i rami del grafo (R)

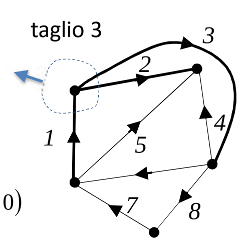
$$\mathbf{t}_h \in \mathbf{M}(\Re)_{1\times R}: \qquad t_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo k appartiene al taglio h ed è concorde con esso} \\ 0 \text{ se il ramo k non appartiene al taglio h} \\ -1 \text{ se il ramo k appartiene al taglio h ed è discorde con esso} \end{cases}$$



$$\mathbf{t}_1 = (0 \quad +1 \quad +1 \quad 0 \quad +1 \quad -1 \quad 0 \quad -1)$$



$$\mathbf{t}_2 = (-1 \quad 0 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$



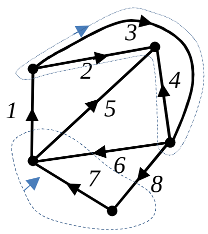
$$\mathbf{t}_3 = (-1 \quad +1 \quad +1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Ortogonalità tra tagli e maglie

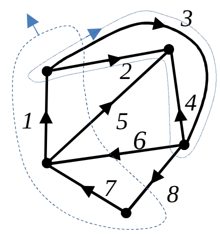
Dati un taglio orientato h qualsiasi e, all'interno dello stesso grafo, una maglia orientata k qualsiasi, i due vettori topologici $\mathbf{t}_h$ e $\mathbf{l}_k$ associati al taglio e alla maglia rispettivamente, risultano ortogonali.

$$\mathbf{t}_h\,\mathbf{l}_k^{\,t} = \mathbf{l}_k\,\mathbf{t}_h^{\,t} = 0 \quad \forall h,k$$

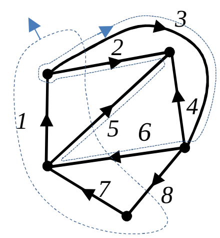
Ciò discende dal fatto che un percorso chiuso (maglia) interseca necessariamente una superfice chiusa (taglio) un numero pari di volte, metà delle quali in una direzione e metà nell'altra.



$\mathbf{l} = (\ 0\ \ -1\ +1\ +1\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ )$
$\mathbf{t} = (-1\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0 - 1 + 1\ \ \ 0 + 1)$



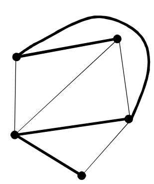
$\mathbf{l} = (\ 0\ \ -1\ +1\ +1\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ 0\ )$
$\mathbf{t} = (\ 0\ \ +1\ +1\ \ \ 0\ \ +1\ \ -1\ \ \ 0\ \ -1)$

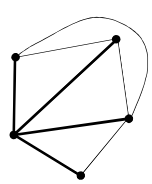


$\mathbf{l} = (\ 0\ \ -1\ +1\ \ \ 0\ \ +1\ \ +1\ \ \ 0\ \ \ 0\ )$
$\mathbf{t} = (\ 0\ \ +1\ +1\ \ \ 0\ \ +1\ \ -1\ \ \ 0\ \ -1)$

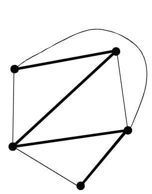
Albero e coalbero

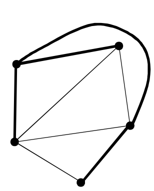
Si definisce **albero *A*** un sottografo connesso che include tutti i nodi e non contiene maglie. Il sottografo complementare dell'albero si definisce **coalbero *C***.





Un albero è per costruzione costituito da N-1 rami. Il coalbero è conseguentemente costituito R-(N-1) rami.

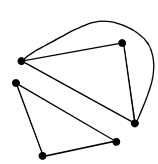




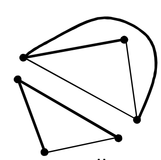
Albero: (N-1) rami
Coalbero: R-(N-1) rami
Grafo: R rami (albero + coalbero)

Si noti che se il grafo non è connesso non è possibile individuare un albero.

È tuttavia possibile individuare un albero per ciascuno dei sottografi connessi in cui il grafo è scomponibile



Albero ?

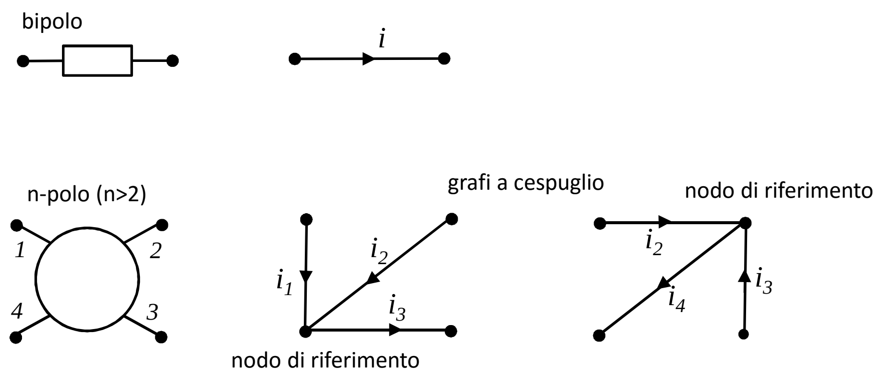


Albero 2

Albero 1

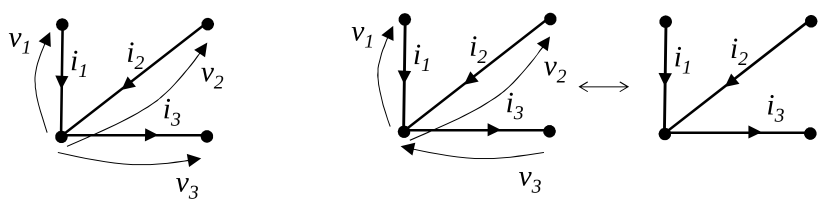
Grafo di un n-polo

Si definisce **grafo di un n-polo** (n≥2) il grafo ottenuto congiungendo tutti gli n nodi senza formare un percorso chiuso. Ad ognuno dei rami introdotti è assegnata, ad arbitrio, una orientazione che indica il verso scelto per la corrente.



Tale grafo possiede per costruzione n-1 rami che consentono di individuare univocamente le n-1 correnti e le n-1 tensioni rappresentative dell'n-polo. Il verso di riferimento della corrente coincide con l'orientazione assegnata al ramo.

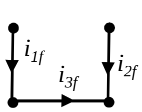
Essendo entrambe arbitrarie le direzioni di riferimento delle tensioni sono in generale svincolate da quelle delle correnti e debbono essere indicate esplicitamente per ogni ramo



Scelta possibile: versi di tensioni e correnti non associati

Scelta tipica: versi di tensioni e correnti associati secondo la convenzione dell'utilizzatore

Se i versi delle tensioni sono associati con quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore (oppure secondo quella dell'utilizzatore) non è necessario indicarli esplicitamente



$i_1=i_{1f}$ $\quad i_2=i_{2f}$

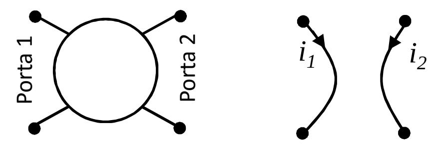
$i_3 = -\,i_{1f} - i_{3f}$

Nota: in alternativa al grafo a cespuglio, in cui tutti i rami emergono da un unico nodo detto di riferimento, è possibile introdurre il grafo a catena rappresentato in figura. Le correnti così introdotte non coincidono con quelle nei terminali effettivi dell'n-polo ma sono da queste univocamente determinabili e viceversa. Anche le relazioni di definizione del componente, possono essere quindi formulate in termini di correnti fittizie. Introducendo un grafo a catena si introduce quindi un insieme di correnti di lavoro fittizie dalle quali è poi possibili dedurre quelle vere. Per componenti con n>4 sono possibili grafi ibridi cespuglio/catena

Grafo di un m-porte

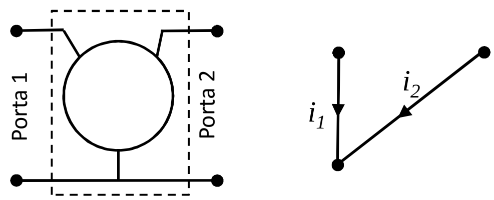
Si definisce **grafo di un m-porte** il grafo ottenuto congiungendo tra loro i due nodi di tutte le porte.

m-porte proprio



Il grafo è non connesso

m-porte ottenuto da un (m+1)-polo



Il grafo è connesso (coincide con quello dell'(m+1)-polo)

Soluzione di un circuito

Per risolvere un circuito occorre

1. Individuare le correnti e le tensioni che vi si stabiliscono

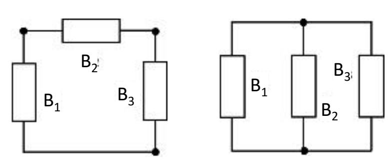
2. Individuare un sistema risolvente, ossia un insieme di tante equazioni quante sono le tensioni e le correnti da determinare

Il comportamento di un circuito dipende sia dalla tipologia dei componenti presenti al suo interno che dalla modalità in cui questi sono tra loro interconnessi:

Date le connessioni, le correnti e le tensioni sono vincolate algebricamente dalle LKC e dalle LKT rispettivamente. Tali vincoli algebrici prendono in nome di **equazioni topologiche**.

La natura dei componenti sarà specificata attraverso opportune equazioni matematiche che prendono il nome **di relazione costitutive (o di definizione) dei componenti**

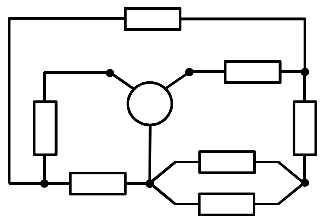
sistema risolvente { **Eq. topologiche**, **Rel. cost. comp.**



Due circuiti fatti dai medesimi componenti connessi in modo diverso. Le relazioni costitutive saranno le medesime, le equazioni topologiche saranno diverse. Il comportamento dei circuiti sarà diverso.

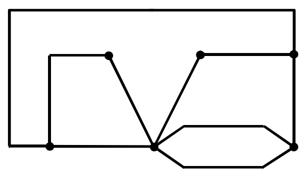
Si definisce **grafo di un circuito** la figura ottenuta sostituendo ad ogni componente il proprio grafo. Il grafo del circuito consente di

1. Individuare le correnti e le tensioni che si stabiliscono nel circuito
2. Individuare un insieme massimale di equazioni topologiche indipendenti



Circuito a 6 nodi composto da 8 componenti (7 bipoli e un tripolo)

$N = 6$



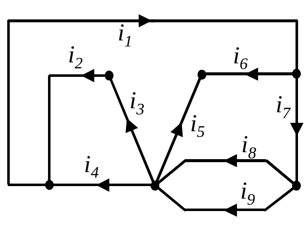
Grafo a 6 nodi e 9 rami

$N = 6$
$R = 9$

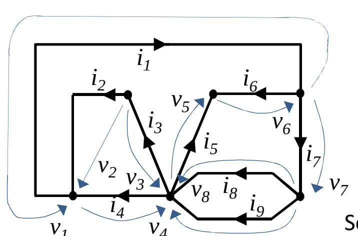
Il numero di nodi del grafo coincide per costruzione con il numero di nodi del circuito.

Si noti che se il circuito contiene uno o più m-porte propri il suo grafo può risultare (ma non è detto che lo sia) non connesso. Per il momento si considerano esclusivamente circuiti il cui grafo è connesso

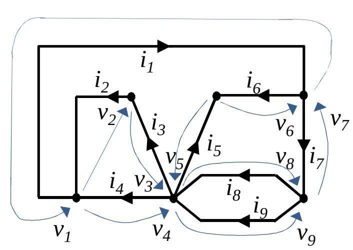
Le correnti agenti nei rami del grafo sono rappresentative di tutti i componenti presenti nel circuito. Per individuare le correnti si assegna un nome ed un verso ad ogni ramo del grafo



Le tensioni agenti ai capi dei rami del grafo sono rappresentative di tutti i componenti presenti nel circuito. Per specificare le tensioni è necessario definire un verso di riferimento per ciascuna di esse



Scelta 1, possibile

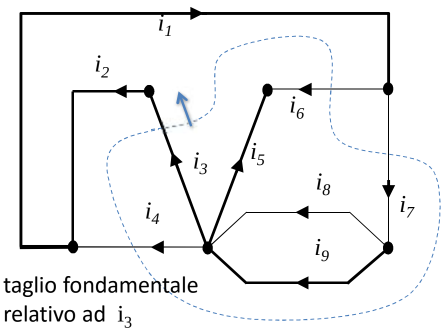


Scelta 2, preferibile

Se si assume che i versi delle tensioni siano associate con quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore si può evitare di riportarle esplicitamente sul disegno

Tagli fondamentali

Al fine di individuare un insieme massimale di LKC indipendenti si suddivide il grafo in albero e coalbero



taglio fondamentale relativo ad i_3

L'eliminazione di uno qualunque degli N-1 rami dell'albero definisce una partizione dei nodi in due insiemi distinti

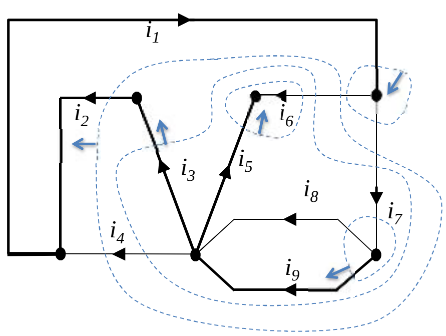
Si definisce **taglio fondamentale** il taglio associato alla partizione dei nodi individuata da un ramo dell'albero e orientato concordemente con esso

Il taglio associato al generico ramo h dell'albero può essere individuato tracciando una superficie, detta superfice di taglio, che interseca il lato h e si richiude non intersecando ulteriori rami dell'albero. Tale superficie è orientata concordemente con in ramo h

All'interno di un grafo a N sono definibili N-1 tagli fondamentali (uno per ogni ramo dell'albero) a prescindere dal numero complessivo dei rami del grafo

Insieme massimale di LKC indipendenti

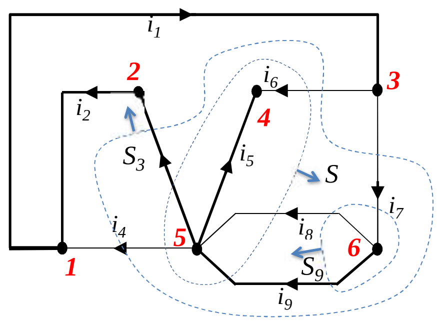
Le N-1 LKC associate alle superfici di taglio fondamentali costituiscono un insieme massimale di equazioni indipendenti



$$N-1=5\left\{\begin{array}{ll} i_1: & i_1-i_6-i_7=0 \\ i_2: & i_2+i_4-i_6-i_7=0 \\ i_3: & i_3+i_4-i_6-i_7=0 \\ i_5: & i_5-i_6=0 \\ i_9: & i_9+i_8-i_7=0 \end{array}\right.$$

La LKC relativa al taglio h-esimo contiene in esclusiva la corrente i_h, pertanto è per costruzione indipendente dalle altre

Qualunque altra LKC non è indipendente da quelle associate alle superfici di taglio fondamentali



S_3:	$[4,5,6]$	$[1,2,3]$	
S_9:	$[6]$	$[1,2,3,4,5]$	
$S_3 - S_9$:	$[4,5]$	$[1,2,3,6]$	$\longleftarrow S$

S_3: $\quad i_3 + i_4 - i_6 - i_7 = 0$

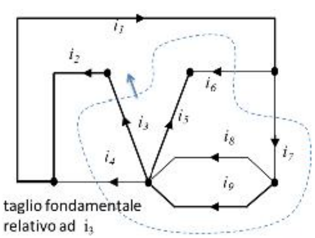
S_9: $\quad i_9 + i_8 - i_7 = 0$

$"S_3 - S_9" : i_3 + i_4 - i_6 - i_9 - i_8 = 0 \quad \longleftarrow S$

La partizione dei nodi individuata da una superfice chiusa S che interseca più di un ramo di albero è ottenibile come combinazione delle partizioni individuate dai rami di albero intersecati. Ne consegue che la LKC relativa alla superfice S è ottenibile come somma/differenza delle LKC relative ai rami di albero intersecati.

Le LKC relative ai tagli fondamentali costituiscono un insieme massimale di N J 1 equazioni indipendenti

Formulazione matriciale delle LKC indipendenti



taglio fondamentale relativo ad i_3

$$i_3 + i_4 - i_6 - i_7 = 0$$

$$0\,i_1 + 0\,i_2 + 1\,i_3 + 1\,i_4 + 0\,i_5 - 1\,i_6 - 1\,i_7 + 0\,i_8 + 0\,i_9 = 0$$

Il vettore dei coefficienti delle correnti nella LKC relativa ad un taglio coincide, per costruzione, con il vettore topologico **t** del taglio.

La LKC relativa al generico taglio h è quindi esprimibile in forma compatta come

$$\mathbf{t}_\mathrm{h}\ \mathbf{i} = 0$$

$\mathbf{t}_\mathrm{h}$ vettore topologico del taglio h

$\mathbf{i}$ vettore delle correnti di ramo ($\mathbf{i} = [i_1, \ldots, i_9]^t$)

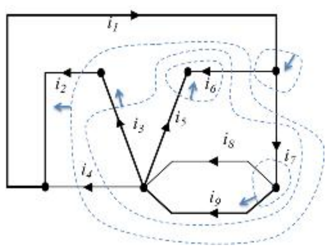
In generale dato un circuito il cui grafo ha N nodi ed R rami l'insieme delle N-1 LKC indipendenti si può esprimere in forma matriciale come

$$\mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{i}$ è il vettore delle R correnti di ramo ($\mathbf{i} = [i_1 , \dots , i_R]^t$) e $\mathbf{T}$ è la **matrice dei tagli fondamentali** così definita

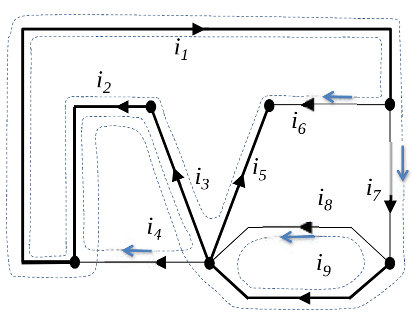
$$\mathbf{T} \in \mathbf{M}(\Re)_{(N-1)\times R} : \qquad t_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo k appartiene al taglio h ed è concorde con esso} \\ 0 \text{ se il ramo k non appartiene al taglio h} \\ -1 \text{ se il ramo k appartiene al taglio h ed è discorde con esso} \end{cases}$$

La h-esima riga della matrice $\mathbf{T}$ è data dal vettore topologico del taglio h



$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 \end{matrix}} \\ R\text{ (9) colonne} \end{array} \begin{array}{l} :i_1 \\ :i_2 \\ :i_3 \\ :i_5 \\ :i_9 \end{array} \Bigg\} \; N\text{-}1 \text{ (5) righe}$$

Maglie fondamentali e insieme massimale di LKT indipendenti



Ciascuno degli R–(N – 1) rami del coalbero individua, assieme ai rami dell'albero una maglia detta **maglia fondamentale.**

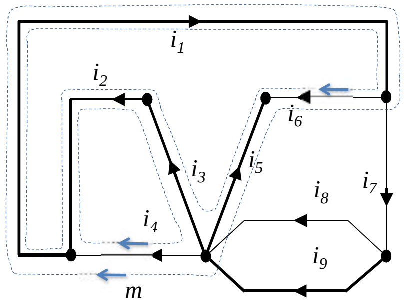
La maglia fondamentale è orientata concordemente con il ramo di coalbero che la individua

Le R–(N – 1) LKT associate alle maglie fondamentali costituiscono un insieme massimale di equazioni indipendenti

$$R-(N-1)=4\quad\begin{cases} i_4: & v_4 - v_2 - v_3 = 0 \\ i_6: & v_6 - v_5 + v_3 + v_2 + v_1 = 0 \\ i_7: & v_7 + v_9 + v_3 + v_2 + v_1 = 0 \\ i_8: & v_8 - v_9 = 0 \end{cases}$$

La LKC relativa alla maglia h-esima contiene in esclusiva la tensione v_h, pertanto è per costruzione indipendente dalle altre

Qualunque altra LKT non è indipendente da quelle associate alle maglie fondamentali

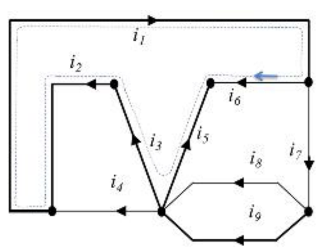


$$
\begin{array}{ll}
i_4: & v_4 - v_2 - v_3 = 0 \\
i_6: & v_6 - v_5 + v_3 + v_2 + v_1 = 0 \\
\hline
"i_4 + i_6": & v_4 + v_1 + v_6 - v_5 = 0 \quad \longleftarrow \; m
\end{array}
$$

Una qualunque maglia che coinvolga più di un ramo di coalbero è ottenibile come combinazione delle maglie fondamentali individuate dai rami di coalbero coinvolti. Ne consegue che la LKT relativa a tale maglia è ottenibile come somma/differenza delle LKT relative alle maglie fondamentali individuate dai rami di coalbero coinvolti

Le LKT relative alle maglie fondamentali costituiscono un insieme massimale di $R-(N-1)$ equazioni indipendenti

Formulazione matriciale delle LKT indipendenti



$$v_6 - v_5 + v_3 + v_2 + v_1 = 0$$

$$+1v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 0v_4 - 1v_5 + 1v_6 + 0v_7 + 0v_8 + 0v_9 = 0$$

Il vettore dei coefficienti delle tensioni nella LKT relativa ad una maglia coincide, per costruzione, con il vettore topologico $\mathbf{l}$ della maglia.

La LKT relativa alla generica maglia h è quindi esprimibile in forma compatta come

$$\mathbf{l}_\mathrm{h} \; \mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{l}_\mathrm{h}$	vettore topologico della maglia h
$\mathbf{v}$	vettore delle tensioni di ramo ($\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_9]^t$)

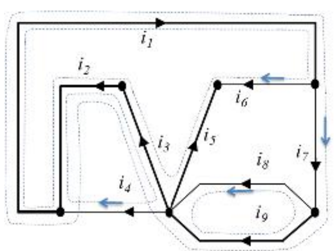
In generale dato un circuito il cui grafo ha N nodi ed R rami l'insieme delle $R-(N-1)$ LKT indipendenti si può esprimere in forma matriciale come

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{v}$ è il vettore delle R tensioni di ramo ($\mathbf{v} = [v_1 \,, \ldots ,\, v_R]^t$) e $\mathbf{L}$ è la **matrice delle maglie fondamentali** così definita

$$\mathbf{L} \in \mathbf{M}(\Re)_{R-(N-1)\times R} : \qquad l_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo k appartiene alla maglia h ed è concorde con essa} \\ 0 \text{ se il ramo k non appartiene alla maglia h} \\ -1 \text{ se il ramo k appartiene alla maglia h ed è discorde con essa} \end{cases}$$

La h-esima riga della matrice **L** è data dal vettore topologico della maglia h



$$\mathbf{L} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{array}\right) & \left.\begin{array}{c} :v_4 \\ :v_6 \\ :v_7 \\ :v_8 \end{array}\right\} R-(N-1)\ (4)\ \text{righe} \\ \underbrace{\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array}}_{R\ (9)\ \text{colonne}} & \end{array}$$

25

Relazione tra le matrici T e L

Dati un taglio orientato h qualsiasi e, all'interno dello stesso grafo, una maglia orientata k qualsiasi, i due vettori topologici $\mathbf{t}_h$ e $\mathbf{l}_k$ associati al taglio e alla maglia rispettivamente, risultano ortogonali.

$$\mathbf{t}_h\, \mathbf{l}_k^{\,t} = \mathbf{l}_k\, \mathbf{t}_h^{\,t} = 0 \quad \forall h, k$$

Ne consegue che le righe della matrice $\mathbf{T}$ dei tagli fondamentali e della matrice $\mathbf{L}$ delle maglie fondamentali sono tra di loro ortogonali, ossia sussistono le relazioni

$$\underbrace{\mathbf{L}\,\mathbf{T}^t = \mathbf{0}}_{(R-(N-1))\times(N-1)} \qquad\qquad \underbrace{\mathbf{T}\,\mathbf{L}^t = \mathbf{0}}_{(N-1)\times(R-(N-1))}$$

Si noti che le precedenti relazioni sussistono anche se l'albero e il coalbero a cui sono relative le matrici $\mathbf{T}$ e $\mathbf{L}$ non sono associati (non sono uno il complementare dell'altro). $\mathbf{T}$ può essere relativa ad un qualunque albero ed $\mathbf{L}$ può essere relativa ad un qualunque coalbero, non necessariamente dedotto dal coalbero a cui è relativa $\mathbf{T}$.

26

Relazione tra tensioni di ramo e tensioni di albero

Le LKT applicate alle maglie fondamentali consentono di esprimere ciascuna tensione di coalbero in funzione di quelle dell'albero.

$$\begin{cases} v_4 = +v_2 + v_3 \\ v_6 = -v_1 - v_2 - v_3 + v_5 \\ v_7 = -v_9 - v_3 - v_2 - v_1 \\ v_8 = v_9 \end{cases}$$

Valgono inoltre le seguenti identità relative alle tensioni di albero

$$\begin{cases} v_1 = +v_1 \\ v_2 = +v_2 \\ v_3 = +v_3 \\ v_5 = +v_5 \\ v_9 = +v_9 \end{cases}$$

Ne consegue che, per un generico circuito avente N nodi ed R rami, la generica tensione v_h agente sull'h-esimo ramo può essere formalmente espressa come

$$v_h = \sum_{k \in \mathbf{A}} c_{hk} v_k$$

dove il generico coefficiente c_{hk} assume valore -1, 0 o $+1$

Indicando con $\mathbf{v}_a$ il vettore delle N-1 tensioni di albero le precedenti relazioni possono essere poste nella seguente forma matriciale

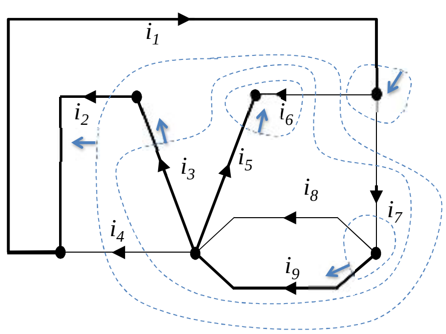
$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\, \mathbf{v}_a$$

dove **C** è una matrice topologica (fatta di -1, 0 o $+1$) che lega le R tensioni di tutti i rami alle N-1 tensioni di albero.

$$\mathbf{C} \in \mathbf{M}(\Re)_{R \times (N-1)}$$

Il generico coefficiente c_{hk} della matrice C risulta così definito:

$$c_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo h appartiene al taglio k ed è concorde con esso} \\ 0 \text{ se il ramo h non appartiene al taglio k} \\ -1 \text{ se il ramo h appartiene al taglio k ed è discorde con esso} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} v_1 &= +v_1 \\ v_2 &= +v_2 \\ v_3 &= +v_3 \\ v_4 &= +v_2 + v_3 \\ v_5 &= +v_5 \\ v_6 &= -v_1 - v_2 - v_3 + v_5 \\ v_7 &= -v_9 - v_3 - v_2 - v_1 \\ v_8 &= +v_9 \\ v_9 &= +v_9 \end{aligned}$$

Dal confronto tra le definizioni dei coefficienti c_{hk} e t_{hk} si evince che la matrice $\mathbf{C}$ coincide con la trasposta della matrice $\mathbf{T}$ dei tagli fondamentali

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^{t} \longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{T}^{t}\, \mathbf{v}_a$$

La generica tensione di ramo v_h è data dalla somma algebrica delle tensioni di albero il cui taglio coinvolge il ramo *h*

Le $N\text{-}1$ tensioni di albero costituiscono quindi un insieme massimale di tensioni indipendenti del circuito. Le tensioni agenti sugli altri $R-(N-1)$ rami (appartenenti al coalbero) possono essere espresse in funzione di queste.

Formalmente le R tensioni in tutti i rami possono essere espresse in funzione delle sole $N\text{-}1$ tensioni di albero utilizzando la matrice dei tagli fondamentali

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{t}\,\mathbf{v}_a$$

$\mathbf{v}$	vettore delle R tensioni di ramo
$\mathbf{v}_a$	vettore delle $(N-1)$ tensioni di albero
$\mathbf{T}$	matrice dei tagli fondamentali (dimensione $(N-1) \times R$)

Si mostrerà in seguito che è possibile definire un ulteriore insieme massimale di tensioni indipendenti dette tensioni di nodo. Al pari delle tensioni di albero le $N\text{-}1$ tensioni di nodo consentono di identificare le tensioni in tutti i rami del circuito ma risultano di più semplice identificazione in quanto non richiedono la scomposizione del grafo in albero e coalbero.

Si noti che, grazie alla ortogonalità tra tagli e maglie, un vettore delle tensioni di ramo costruito a partire da un qualsiasi vettore di tensioni di albero soddisfa automaticamente le LKT. Risulta infatti:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{L}\,\mathbf{T}^{t}\,\mathbf{v}_a = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{v}_a$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{T}^{t}\,\mathbf{v}_a$$

Le due relazioni sono equivalenti. La relazione $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{t}\mathbf{v}_a$ rappresenta una modalità alternativa per formulare le LKT.

Correnti di coalbero

Le LKC applicate ai tagli fondamentali consentono di esprimere ciascuna corrente di albero in funzione di quelle del coalbero

$$\begin{cases} i_1 = +i_6 + i_7 \\ i_2 = -i_4 + i_6 - i_7 \\ i_3 = -i_4 + i_6 + i_7 \\ i_5 = +i_6 \\ i_9 = -i_8 + i_7 \end{cases}$$

Valgono inoltre le seguenti identità relative alle correnti di albero

$$\begin{cases} i_4 = +i_4 \\ i_6 = +i_6 \\ i_7 = +i_7 \\ i_8 = +i_8 \end{cases}$$

Ne consegue che, per un generico circuito avente N nodi e R rami, la generica corrente i_h circolante nell'h-esimo ramo può essere formalmente espressa come

$$i_h = \sum_{k \in \mathcal{C}} d_{hk}\, i_k$$

dove il generico coefficiente d_{hk} assume valore -1, 0 o $+1$

Indicando con $\mathbf{i}_c$ il vettore delle $R-(N-1)$ correnti di coalbero le precedenti relazioni possono essere poste nella seguente forma matriciale

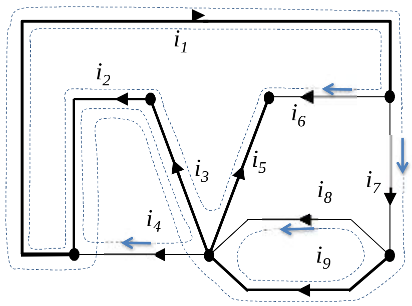
$$\mathbf{i} = \mathbf{D}\,\mathbf{i}_c$$

dove **D** è una matrice topologica (fatta di -1, 0 o $+1$) che lega le R correnti di tutti i rami alle $R-(N-1)$ correnti di coalbero

$$\mathbf{D} \in \mathbf{M}(\Re)_{R\times R-(N-1)}$$

Il generico coefficiente d_{hk} della matrice D risulta così definito:

$$d_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo h appartiene alla maglia k ed è concorde con essa} \\ 0 \text{ se il ramo h non appartiene alla maglia k} \\ -1 \text{ se il ramo h appartiene alla maglia k ed è discorde con essa} \end{cases}$$



$i_1 = +i_6 + i_7$
$i_2 = -i_4 + i_6 - i_7$
$i_3 = -i_4 + i_6 + i_7$
$i_4 = +i_4$
$i_5 = -i_6$
$i_6 = +i_6$
$i_7 = +i_7$
$i_8 = +i_8$
$i_9 = -i_8 + i_7$

Dal confronto tra le definizioni dei coefficienti d_{hk} e l_{hk} si evince che la matrice $\mathbf{D}$ coincide con la trasposta della matrice $\mathbf{L}$ delle maglie fondamentali

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^t \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{i} = \mathbf{L}^t\, \mathbf{i}_c$$

La generica corrente di ramo i_h è data dalla somma algebrica delle correnti di coalbero la cui maglia coinvolge il ramo *h*

Le R–(N – 1) correnti di coalbero costituiscono quindi un insieme massimale di correnti indipendenti del circuito. Le correnti agenti sugli altri $N - 1$ rami (appartenenti all'albero) possono essere espresse in funzione di queste.

Formalmente le R correnti in tutti i rami possono essere espresse in funzione delle sole R–(N – 1) correnti di coalbero utilizzando la matrice delle maglie fondamentali

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^t\, \mathbf{i}_c$$

$\mathbf{i}$	vettore delle R correnti di ramo
$\mathbf{i}_c$	vettore delle R –(N – 1) correnti di albero
$\mathbf{L}$	matrice delle maglie fondamentali (dimensione (R – (N – 1)) × R)

Si mostrerà in seguito che le correnti di coalbero coincidono, di fatto, con le «correnti di maglia» che si utilizzano nell'omonimo metodo di soluzione dei circuiti.

Si noti che, grazie alla ortogonalità tra tagli e maglie, un vettore delle correnti di ramo costruito a partire da un qualsiasi vettore di correnti di coalbero soddisfa automaticamente le LKT. Risulta infatti:

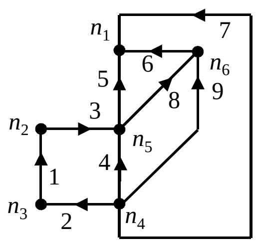
$$\mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{L}^t\,\mathbf{i}_c = \mathbf{0}\,\mathbf{i}_c = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{i}_c$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{L}^t\,\mathbf{i}_c$$

Le due relazioni sono equivalenti. La relazione $\mathbf{i} = \mathbf{L}^t \mathbf{i}_c$ rappresenta una modalità alternativa per formulare le LKC.

Esercizio 2.1

Scomporre il grafo di figura in albero e coalbero. Determinare la matrice di tagli fondamentali e la matrice delle maglie fondamentali. Determinare inoltre le correnti di ramo in funzione di quelle di coalbero e le tensioni di ramo in funzione di quelle di albero.



Esercizio 2.2

Disegnare il grafo relativo alla matrice di incidenza completa riportata. Determinare un insieme massimale di LKC indipendenti e un insieme massimale di LKT indipendenti.

$$\mathbf{A}^{c} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema di Tellegen

Si consideri un circuito con R rami ed N nodi. Si introducano per la corrente e per la tensione dei versi di riferimento associati secondo la convenzione dell'utilizzatore (o secondo quella del generatore). Siano $\mathbf{i}$ un vettore di correnti di ramo tale da soddisfare le LKC e $\mathbf{v}$ un vettore di tensioni di ramo tale da soddisfare le LKT.

La somma algebrica dei prodotti vi di ogni ramo risulta nulla

$$\sum_{h=1}^{R} v_h\, i_h = 0$$

dimostrazione:

$$\sum_{h=1}^{R} v_h\, i_h = \mathbf{v}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i} = \underset{\text{LKT}\uparrow}{(\mathbf{T}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{v}_a)^{\mathrm{t}}}\,\mathbf{i} = \mathbf{v}_a^{\mathrm{t}}\,\overset{\text{LKC}\downarrow}{\mathbf{T}\,\mathbf{i}} = \mathbf{v}_a^{\mathrm{t}}\,\mathbf{0} = 0$$

Si noti che il teorema di Tellegen evidenzia una proprietà intrinseca della teoria dei circuiti. Infatti essa discende esclusivamente dalle due assunzioni che sono alla base della teoria stessa, le LKC e le LKT. Nessuna ipotesi è necessaria sulla natura dei componenti.

Dal teorema di Tellegen discende la conservazione della potenza nei circuiti. Infatti se si considerano come vettore delle correnti e delle tensioni le effettive correnti e tensioni che agiscono in un dato istante t sui rami del circuito il prodotto vi è proprio la potenza dissipata in ciascun ramo nel medesimo istante

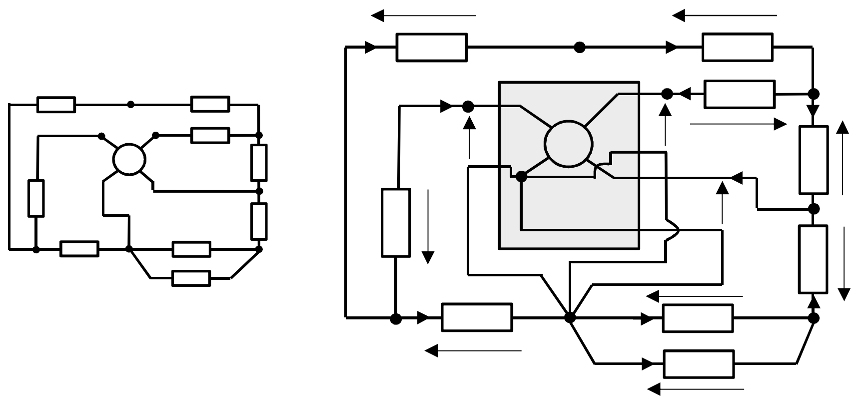
$$\sum_{h=1}^{R} v_h(t)\, i_h(t) = \sum_{h=1}^{R} p_a(t) = 0 \qquad \forall t$$

In ogni istante la somma delle potenze dissipate in tutti rami del circuito è nulla. Un circuito costituisce quindi un sistema energeticamente isolato che pertanto non scambia energia con l'esterno. Tutta la potenza dissipata in esso in un dato istante è prodotta in esso nel medesimo istante.

Dal teorema di Tellegen discendono inoltre le proprietà di conservazione della potenza attiva e reattiva nei circuiti operanti in regime di corrente alternata.

Proprietà di non amplificazione

Si consideri un generico circuito all'interno del quale gli eventuali componenti n-polari presenti siano rappresentati come n-1 porte. Ogni coppia di terminali del circuito (compresi i bipoli) individua quindi una porta propria per la quale è definibile una potenza $p = v\ i$.



Proprietà di non amplificazione delle correnti: Se all'interno di un circuito una sola porta eroga potenza durante l'intervallo di tempo infinitesimo dt allora le correnti di tutte le altre porte che non siano in serie con essa sono necessariamente minori in valore assoluto.

Proprietà di non amplificazione delle tensioni: Se all'interno di un circuito una sola porta eroga potenza durante l'intervallo di tempo infinitesimo dt allora le tensioni di tutte le altre porte che non siano in parallelo con essa sono necessariamente minori in valore assoluto.

È opportuno evidenziare che l'unica porta che eroga potenza non è costituta necessariamente da un generatore indipendente. In generale essa può consistere anche in un componente dinamico o in un generatore pilotato.

Al pari del teorema di Tellegen, anche le proprietà di non amplificazione sono intrinseche della teoria dei circuiti. Infatti discendono esclusivamente dalle due assunzioni che sono alla base della teoria stessa, le LKC e le LKT. Nessuna ipotesi è necessaria sulla natura dei componenti.