6. Metodi di soluzione dei circuiti

Metodi di soluzione dei circuiti. Eliminazione delle correnti di albero e delle tensioni. Metodo delle correnti di coalbero. Metodo delle correnti di maglia. Metodo degli anelli. Grafi non planari. Eliminazione delle tensioni di coalbero e delle correnti. Metodo delle tensioni di albero. Tensioni di nodo. Equivalenza tra tensioni di nodo e tensioni di albero. Formulazione nodale delle LKC. Metodo di Tableau. Metodo dei potenziali di nodo. Teorema di Millmann.

Il sistema risolvente di un circuito contiene come incognite tutte le correnti e tutte le tensioni di ramo. Ciò comporta che anche un circuito semplice dia luogo ad un sistema risolvente di dimensioni significative. Per risolvere tale sistema è possibile ridurne gradualmente la dimensione procedendo per sostituzioni successive (utilizzando cioè alcune equazioni per esprimere alcune delle tensioni o delle correnti in funzione di altre). I **metodi di soluzione** di un circuito sono procedure che consentono di ottenere direttamente un sistema risolvente ridotto senza che sia necessario partire da quello completo

Utilizzando le LKC è possibile eliminare le correnti di albero esprimendole in funzione di quelle di coalbero. Inoltre ove possibile si possono utilizzare le relazioni costitutive per esprimere le tensioni in funzione della correnti. Si perviene così ad un sistema risolvente che contiene come incognite le sole correnti di coalbero nonché le tensioni che non è stato possibile eliminare. Il **metodo delle correnti di maglia** è una procedura che consente di ottenere direttamente tale sistema risolvente ridotto senza partire da quello completo.

Utilizzando le LKT è possibile eliminare le tensioni di coalbero esprimendole in funzione di quelle di albero (o più comunemente in funzione di un insieme equivalente di tensioni indipendenti dette tensioni di nodo). Inoltre ove possibile si possono utilizzare le relazioni costitutive per esprimere le correnti in funzione delle tensioni. Si perviene così ad un sistema risolvente che contiene come incognite le sole tensioni di nodo nonché le correnti che non è stato possibile eliminare. Il **metodo delle tensioni di nodo** è una procedura che consente di ottenere direttamente tale sistema risolvente ridotto senza partire da quello completo.

Componenti definiti in corrente o in tensione

Un generico componente si dice «definito in tensione» se le relazioni costitutive consentono di esprimere la/le corrente/i in funzione della/delle tensione/i. Un componente definito in tensione è anche detto «comandato in tensione» o «a corrente esplicitabile»

Un generico componente si dice «definito in corrente» se le relazioni costitutive consentono di esprimere la/le tensione/i in funzione della/delle corrente/i. Un componente definito in corrente è anche detto «comandato in corrente» o a «a tensione esplicitabile»

Per i generatori pilotati si fa riferimento esclusivamente alla porta pilotata. Infatti il corto circuito o il circuito aperto che individuano rispettivamente la corrente o la tensione di pilotaggio vengono di solito omessi. La porta pilotante coincide, di fatto, con un altro bipolo operante all'interno del circuito (o più in generale con la coppia di terminali di un altro componente).

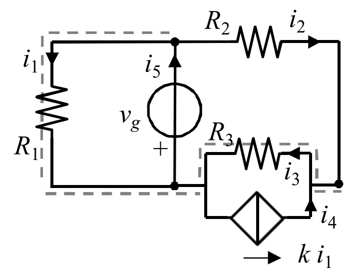
	definito in corrente		definito in tensione	
Resistore	Si	$v = R\, i$	Si	$i = G\, v$
Generatore di tensione indipendente	Si	$v = e_g \quad \forall i$	No	$i = ?$
Generatore di corrente indipendente	No	$v = ?$	Si	$i = i_g \quad \forall v$
Generatore di tensione pilotato	Si	$v_2 = k\, v_1 \quad \forall i_2$ $v_2 = k\, i_1 \quad \forall i_2$	No	$i_2 = ?$
Generatore di corrente pilotato	No	$v_2 = ?$	Si	$i_2 = k\, v_1 \quad \forall v_2$ $i_2 = k\, i_1 \quad \forall v_2$
Doppio bipolo	Si se esiste la matrice $\mathbf{R}$	$\mathbf{v} = \mathbf{R}\, \mathbf{i}$	Si se esiste la matrice $\mathbf{G}$	$\mathbf{i} = \mathbf{G}\, \mathbf{v}$

In pratica tra i bipoli considerati quelli non definiti in corrente sono i generatori di corrente, sia indipendenti che pilotati. Quelli non definiti in tensione sono i generatori di tensione, sia indipendenti che pilotati.

Eliminazione delle tensioni e delle correnti di albero

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura già introdotto in precedenza.

Il sistema risolvente è di seguito riportato. La suddivisione del grafo in albero e coalbero utilizzata per ottenere il sistema risolvente è evidenziata in figura



$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases} \qquad N\!-\!1 \text{ LKC}$$

$$\begin{cases} v_2 + v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \\ v_5 + v_1 = 0 \end{cases} \qquad R - (N\!-\!1) \text{ LKT}$$

$$\begin{cases} v_1 - R_1 i_1 = 0 \\ v_2 - R_2 i_2 = 0 \\ v_3 - R_3 i_3 = 0 \\ i_4 - k\, i_1 = 0 \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

R relazioni costitutive dei componenti

Ci proponiamo di ottenere un sistema risolvente ridotto che contenga come incognite le sole correnti di coalbero (i_2, i_4, i_5) eliminando, se possibile, tutte le altre variabili per sostituzione. A tal fine procediamo attraverso i seguenti passi

1. Utilizziamo le LKC per esprimere le $(N\!-\!1)$ correnti di albero in funzione delle $R - (N\!-\!1)$ correnti di coalbero

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 + i_5 \\ i_3 = i_2 + i_4 \end{cases}$$

2. Utilizziamo, ove possibile, le equazioni costitutive per esprimere le tensioni in funzione delle correnti. Nel caso in esame, essendo il componente sul ramo 4 non definito in corrente (generatore di corrente pilotato), non è possibile esplicitare la tensione v_4 in funzione della corrente

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ v_4 = ? \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

3. Esprimiamo tutte le tensioni esplicitabili in funzione delle sole correnti di coalbero adoperando le espressioni ricavate al passo 1

$$\begin{cases} v_1 = R_1 \left(-i_2 + i_5\right) \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 \left(i_2 + i_4\right) \\ v_4 = ? \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

4. Sostituiamo le espressioni delle tensioni ottenute all'interno delle LKT. Otteniamo così un sistema di $R-(N\!-\!1)$ equazioni nel quale compaiono come incognite le $R-(N\!-\!1)$ correnti di coalbero (i_2, i_4, i_5) e la tensione v_4 che non è stato possibile esplicitare in funzione delle correnti.

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_3)i_2+R_3\,i_4-R_1\,i_5=0 \\ R_3\,i_2+R_3\,i_4+v_4=0 \\ -R_1\,i_2+R_1\,i_5=-v_g \end{cases}$$

Tale sistema è indeterminato perché il numero delle incognite supera quello delle equazioni a causa della presenza nel circuito di un componente non definito in corrente (generatore di corrente pilotato sul ramo 4). Per renderlo determinato è necessario includere in esso la relazione di definizione del componente non definito in corrente

5. Esprimiamo la relazione costitutiva del componente non definito in corrente in funzione delle sole correnti di coalbero

$$i_4-k(-i_2+i_5)=0$$

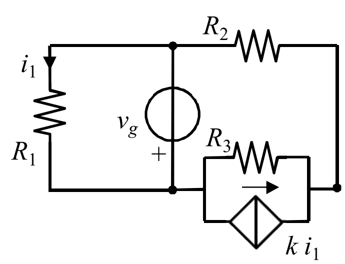
6. Aggiungiamo tale equazione alle precedenti (punto 4) ottenendo così un sistema determinato di 4 equazioni in 4 incognite.

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_3)i_2+R_3\,i_4-R_1\,i_5=0 \\ R_3\,i_2+R_3\,i_4+v_4=0 \\ -R_1\,i_2+R_1\,i_5=-v_g \\ k\,i_2+i_4-k\,i_5=0 \end{cases}$$

La procedura di sostituzione appena esposta può essere implementata gradualmente in fase di analisi del circuito in modo da ottenere direttamente il sistema risolvente ridotto senza che sia necessario partire da quello completo. Tale approccio graduale è detto metodo delle correnti di coalbero. Esso può essere lievemente modificato rinominando e reinterpretando le correnti di coalbero come «correnti di maglia». Si ottiene così il metodo delle correnti di maglia. Nel seguito si espongono in dettaglio questi due metodi equivalenti.

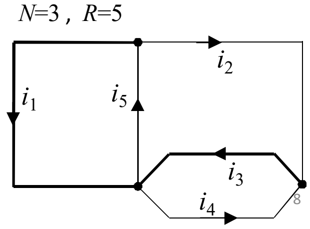
Metodo delle correnti di coalbero

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura (già esaminato in precedenza). Per risolverlo mediante il metodo delle correnti di coalbero è necessario attuare i seguenti passi



1. Introdurre un grafo del circuito avente N nodi e R rami e assegnare un nome e un verso alla corrente di ciascun ramo (ciò assegna di fatto un nome e un verso anche alle tensioni mediante la convenzione dell'utilizzatore). Introdurre inoltre una suddivisione del grafo in albero e coalbero

N=3 , R=5



2. Esprimere le $(N–1)$ correnti di albero in funzione delle $R - (N–1)$ correnti di coalbero utilizzando le LKC relative ai tagli fondamentali

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 + i_5 \\ i_3 = i_2 + i_4 \end{cases}$$

3. Sia P il numero di rami non definiti in corrente. Esprimere le tensioni degli $R - P$ rami definiti in corrente in funzione delle $R - (N–1)$ correnti di coalbero.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 = R_1(-i_2 + i_5) \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 = R_3(i_2 + i_4) \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

$$\{v_4 = ?$$

4. Formulare le $R - (N–1)$ LKT relative alle maglie fondamentali

$$\begin{cases} v_2 + v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \\ v_5 + v_1 = 0 \end{cases}$$

5. Sostituire le espressioni delle tensioni ottenute al punto 3 all'interno delle $R - (N–1)$ LKT. Si ottiene così un sistema indeterminato di $R - (N–1)$ equazioni nelle $R - (N–1) + P$ incognite costituite dalle correnti di coalbero e dalle tensioni dei rami non definiti in corrente È opportuno che le eventuali tensioni impresse dai generatori di tensione indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) i_2 + R_3 i_4 - R_1 i_5 = 0 \\ R_3 i_2 + R_3 i_4 + v_4 = 0 \\ -R_1 i_2 + R_1 i_5 = -v_g \end{cases}$$

6. Esprimere le relazioni costitutive dei P rami non definiti in corrente in funzione delle sole correnti di coalbero È opportuno che le eventuali correnti impresse dai generatori di corrente indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

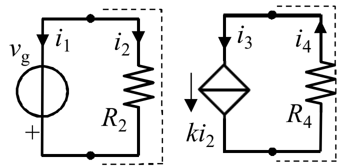
$$i_4 - k\, i_1 = 0$$
$$\Rightarrow i_4 - k(-i_2 + i_5) = 0$$

7. Aggiungere al sistema di equazioni ottenuto al punto 5 le relazioni ottenute al punto 6. Si ottiene così un sistema determinato di $R - (N–1) + P$ equazioni nelle $R - (N–1) + P$ incognite costituite dalle correnti di coalbero e dalle tensioni dei rami non definiti in corrente

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) i_2 + R_3 i_4 - R_1 i_5 = 0 \\ R_3 i_2 + R_3 i_4 + v_4 = 0 \\ -R_1 i_2 + R_1 i_5 = -v_g \\ k\, i_2 + i_4 - k\, i_5 = 0 \end{cases}$$

Metodo delle correnti di coalbero per circuiti non connessi

Se nel circuito sono presenti doppi bipoli propri (o in generale m-porte propri) il grafo del circuito può risultare non connesso. Tale grafo sarà comunque scomponibile in un insieme di sottografi connessi. In questo caso, come discusso in dettaglio nel capitolo 5, è sufficiente applicare indipendentemente il metodo delle correnti di coalbero a ciascun sottografo connesso e unire infine i sistemi risolventi parziali così ottenuti.



2. $\{ i_2 = -i_1$

3. $\begin{cases} v_1 = -v_g \\ v_2 = R_2\, i_2 = -R_2\, i_1 \end{cases}$

4. $\{ v_1 - v_2 = 0$

5. $\{ R_2\, i_1 = e_g$

6.

7. $\{ R_2\, i_1 = e_g$ $\longrightarrow$

$\{ i_4 = i_3$ 2.

$\{ v_4 = R_4\, i_4 = R_3\, i_3$ 3.

$\{ v_3 = ?$

$\{ v_3 + v_4 = 0$ 4.

$\{ v_3 + R_4\, i_4 = 0$ 5.

$\{ i_3 = k\, i_2 = -k\, i_1$ 6.

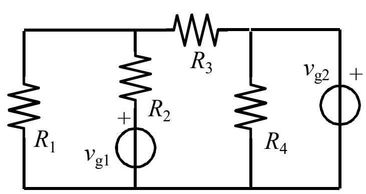
$\begin{cases} v_3 + R_4\, i_3 = 0 \\ i_3 + k\, i_1 = 0 \end{cases}$ 7.

7.bis

$$\begin{cases} R_2\, i_1 = v_g \\ v_3 + R_4\, i_3 = 0 \\ i_3 + k\, i_1 = 0 \end{cases} \longleftarrow$$

Esercizio 6.1

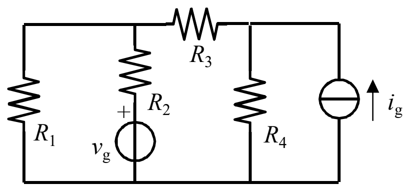
Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$v_{g1} = 4\ \text{V}$
$v_{g2} = 7\ \text{V}$

Esercizio 6.2

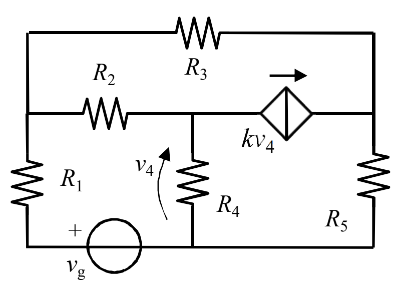
Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$v_g = 4\ \mathrm{V}$
$i_g = 9\ \mathrm{A}$

Esercizio 6.3

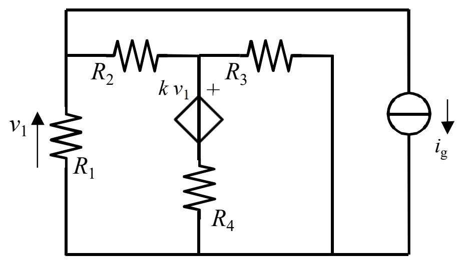
Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero. Verificare inoltre il bilancio delle potenze.



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$R_5 = 4\ \Omega$
$k = 2\ \mathrm{S}$
$v_g = 12\ \mathrm{V}$

Esercizio 6.4

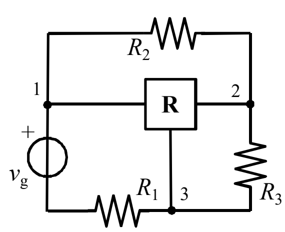
Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero. Determinare la potenza erogata da generatore di corrente.



$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$i_g = 2\ \mathrm{A}$
$k = 3$

Esercizio 6.5

Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.



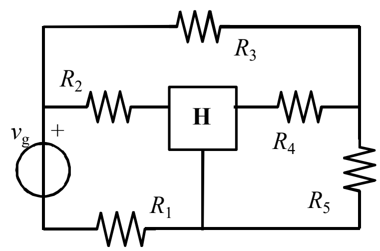
$v_g = 12\ \mathrm{V}$
$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 1\ \Omega$

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ \Omega$
(riferita alle porte 13 e 23)

Esercizio 6.6

Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.

2



$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$
$v_g = 6\ \mathrm{V}$

Caso 1

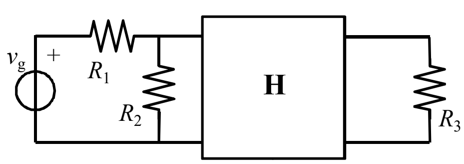
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Caso 2

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.7

Risolvere il circuito di figura, contenente un doppio bipolo proprio, utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.

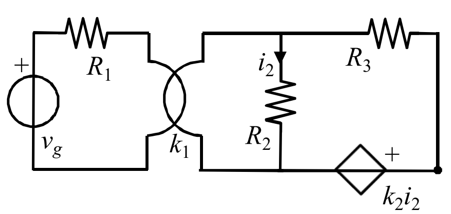


$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$v_g = 6\ \mathrm{V}$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.8

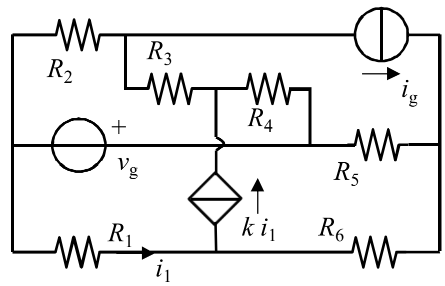
Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.



$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$k_1 = 2$
$k_2 = 0.5\ \Omega$
$v_g = 6\ \mathrm{V}$

Esercizio 6.9

Risolvere il circuito di figura utilizzando il metodo delle correnti di coalbero.



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 1\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$
$R_6 = 1\ \Omega$
$k = 2.5$
$i_g = 5$ A
$v_g = 10$ V

Correnti di maglia

Nel capitolo 2 si è visto come le correnti in ciascun ramo del circuito possano essere espresse in funzione delle sole correnti di coalbero utilizzando la matrice delle maglie fondamentali

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^{t}\,\mathbf{i}_c$$

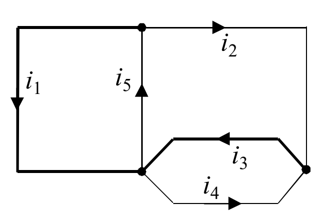
$\mathbf{i}$	vettore delle correnti di ramo
$\mathbf{i}_c$	vettore delle correnti di albero
$\mathbf{L}$	matrice delle maglie fondamentali

$$i_h = \sum_{k \in \mathcal{C}} l^{t}_{hk}\, i_k$$

Il generico coefficiente l^{t}_{hk} della matrice L^t risulta così definito:

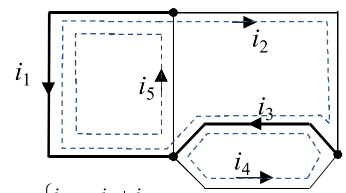
$$l^{t}_{hk} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo h appartiene alla maglia k ed è concorde con essa} \\ 0 \text{ se il ramo h non appartiene alla maglia k} \\ -1 \text{ se il ramo h appartiene alla maglia k ed è discorde con essa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 + i_5 \\ i_2 = i_2 \\ i_3 = i_2 + i_4 \\ i_4 = i_4 \\ i_5 = i_5 \end{cases}$$



Le espressioni delle correnti in ciascun ramo in funzione delle sole correnti di coalbero possono essere così interpretate:

1. Si assume che ciascuna corrente di coalbero circoli lungo tutta la propria maglia fondamentale. In conseguenza di tale assunzione le correnti di coalbero sono dette correnti di maglia (o correnti cicliche).



2. La corrente del generico ramo orientato (sia esso di albero o di coalbero) è ottenibile come somma algebrica delle correnti di maglia che lo lambiscono (considerate col segno + o – a seconda che siano concordi o discordi rispettivamente)

$$\begin{cases} i_1 = -i_2 + i_5 \\ i_2 = i_2 \\ i_3 = i_2 + i_4 \\ i_4 = i_4 \\ i_5 = i_5 \end{cases}$$

Si ribadisce che quanto esposto costituisce una modalità alternativa di formulare le LKC. Infatti grazie alla ortogonalità tra tagli e maglie, il vettore delle correnti di ramo costruito a partire da un qualsiasi vettore di correnti di coalbero soddisfa automaticamente le LKC.

$$\mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{T}\,\mathbf{L}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_c = \mathbf{0}\,\mathbf{i}_c = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{i}_c$$

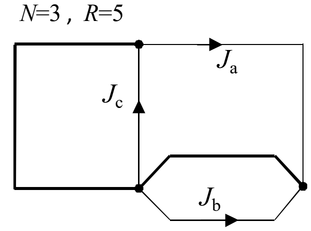
$$\mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{L}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_c$$

Metodo delle correnti di maglia

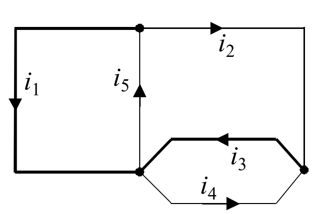
Si consideri a titolo di esempio il medesimo circuito già considerato per il metodo delle correnti di coalbero. Per risolverlo mediante il metodo delle correnti di maglia è necessario attuare i seguenti passi

1. Introdurre un grafo del circuito avente N nodi e R rami. Introdurre inoltre una suddivisione del grafo in albero e coalbero. Assegnare un nome (di solito si usa la lettera J) ed un verso alle correnti di maglia.

N=3 , R=5



2. Assegnare un verso alle correnti di ramo e dedurre la loro espressione in funzione delle correnti di maglia



$$\begin{cases} i_1 = -J_a + J_c \\ i_2 = J_a \\ i_3 = J_a + J_b \\ i_4 = J_b \\ i_5 = J_c \end{cases}$$

3. Sia P il numero di rami non definiti in corrente. Esprimere le tensioni degli $R-P$ rami definiti in corrente in funzione delle $R-(N-1)$ correnti di coalbero

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 = R_1 \left(-J_a + J_c\right) \\ v_2 = R_2 J_a \\ v_3 = R_3 i_3 = R_3 \left(J_a + J_b\right) \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

4. Formulare le $R-(N-1)$ LKT relative alle maglie fondamentali

$$\begin{cases} v_5 + v_1 = 0 \\ v_2 + v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \end{cases}$$

5. Sostituire le espressioni delle tensioni ottenute al punto 3 all'interno delle $R-(N-1)$ LKT. Si ottiene così un sistema indeterminato di $R-(N-1)$ equazioni nelle $R-(N-1)+P$ costitiute dalle correnti di coalbero e dalle tensioni dei rami non definiti in corrente. È opportuno che le eventuali tensioni impresse dai generatori di tensione indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) J_a + R_3 J_b - R_1 J_c = 0 \\ R_3 J_a + R_3 J_b + v_4 = 0 \\ -R_1 J_a + R_1 J_c = -v_g \end{cases}$$

6. Esprimere le relazioni costitutive dei P rami non definiti in corrente in funzione delle sole correnti di coalbero. È opportuno che le eventuali correnti impresse dai generatori di corrente indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

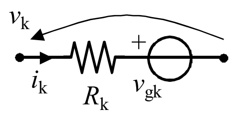
$$i_4 - k\, i_1 = 0$$
$$\Rightarrow J_b - k\left(-J_a + J_c\right) = 0$$

7. Aggiungere al sistema di equazioni ottenuto al punto 5 le relazioni ottenute al punto 6. Si ottiene così un sistema determinato di $R-(N-1)+P$ equazioni nelle $R-(N-1)+P$ incognite costituite dalle correnti di coalbero e dalle tensioni dei rami non definiti in corrente

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) J_a + R_3 J_b - R_1 J_c = 0 \\ R_3 J_a + R_3 J_b + v_4 = 0 \\ -R_1 J_a + R_1 J_c = -v_g \\ k J_a + J_b - k J_c = 0 \end{cases}$$

Si noti che il sistema risolvente ottenuto con il metodo delle correnti di maglia coincide con quello ottenuto con il metodo delle correnti di coalbero. La sola differenze consiste nell'aver rinominato i_1 con J_a, i_4 con J_b e i_5 con J_c.

Nel caso in cui il circuito contenga solo resistori e generatori di tensione indipendenti la relazione di definizione del generico ramo k è esprimibile come



$$v_k = R_k\, i_k + v_{g\,k}$$

Si noti che sia R_k che v_{gk} possono essere nulli se il ramo non contiene il resitore o il generatore rispettivamente

L'insieme delle relazioni di definizione di tutti i rami può essere posto nella segunte forma matriciale

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} + \mathbf{v}_g$$

Dove $\mathbf{v}$ è il vettore delle tensioni di ramo, $\mathbf{i}$ è il vettore delle correnti di ramo e $\mathbf{R}$ è una matrice diagonale il cui elemento R_{kk} è la resistenza R_k del ramo k-esimo.

Per tale circuito l'insieme delle LKT può essere posto nella forma

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}\,\mathbf{R}\,\mathbf{i} + \mathbf{L}\,\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$$

Sostituendo nella precedente l'espressione delle correnti di ramo in funzione della correnti di magli (coalbero) si ottiene

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^t\,\mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{L}\,\mathbf{R}\,\mathbf{L}^t\,\mathbf{J} = -\mathbf{L}\,\mathbf{v}_g$$

Per i circuiti contenenti solo resistori e generatori di tensione indipendenti il sistema risolvente ottenuto mediante il metodo delle correnti di maglia (o di coalbero) può essere posto nella segunte forma

$$\mathbf{R}^c\,\mathbf{J} = \mathbf{V}^g$$

$\mathbf{J}$ vettore delle correnti di maglia
$\mathbf{V}^g$ vettore delle forzanti
$\mathbf{R}^c$ matrice dei coefficienti (simmetrica)

in cui

$$\mathbf{R}^c = \mathbf{L}\,\mathbf{R}\,\mathbf{L}^t$$

$$\mathbf{V}^g = -\mathbf{L}\,\mathbf{v}_g$$

Dalle loro definizione è possibile dedurre che la matrice $\mathbf{R}^c$ e il vettore $\mathbf{E}$ possono essere assemblati automaticamente utilizzando le le seguenti regole

$R^c{}_{hh}$ = Somma delle resistenze presenti lungo i rami appartenenti alla maglia h

$R^c{}_{hk}$ = Somma algebrica delle resistenze presenti lungo i rami in comune tra le maglie h e k. Ciascuna di tali resistenze è considerata col segno + se il ramo cui appartiene è concorde o discorde con entrambe le maglie, è considerata col segno – in caso contrario

$V^g{}_h$ = Somma algebrica delle tensioni impresse dai generatori presenti lungo i rami appartenenti alla maglia h. Ciascuna di tali tensioni è considerata col segno + se è concorde con la maglie h, è considerata col segno – in caso contrario

Se nel circuito sono presenti generatori di corrente sia indipendenti che pilotati il metodo descritto non è direttamente applicabile (questi bipoli non sono definiti in corrente, quindi non è possibile porre la relazione di ramo nella forma $v = R\,i + vg$)

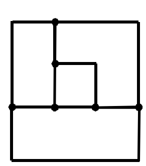
E' tuttavia possibile estendere il metodo descritto trattando tali componenti come generatori di tensione la cui tensione è però incognita; è necessario aggiungere al sistema così ottenuto le loro equazioni di definizione in termini di corrente.

Sono altresì formulabili regole per la generalizzazione del metodo al caso di generatori di tensione pilotati e di doppi bipoli ma tali regole sono di difficile applicazione e memorizzazione e non vengono riportate.

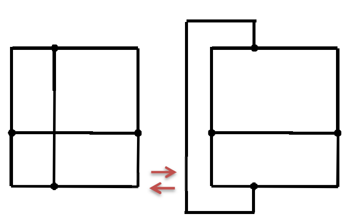
Grafi planari, anelli e metodo delle correnti di anello

Il metodo delle correnti di maglia suddivide il grafo in albero e coalbero e utilizza come sistema risolvente le LKT relative alle maglie fondamentali (eventualmente integrate dalle relazioni costitutive dei componenti non definiti in corrente). In realtà al posto delle maglie fondamentali (associate al coalbero) si può utilizzare un insieme qualsiasi di $R-(N-1)$ maglie purché indipendenti. Nel seguito si descrive un modo, non generale, per individuare $R-(N-1)$ maglie indipendenti senza far ricorso alla suddivisione del grafo in albero e coalbero. Si premettono alcune definizioni.

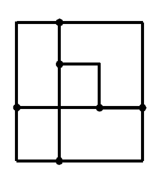
Grafo planare: un grafo è detto planare se è possibile disegnarlo su un piano senza che i suoi lati si intersechino



grafo planare

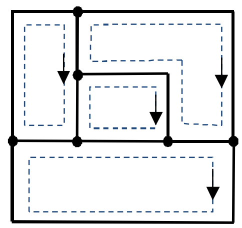


grafo planare



grafo non planare

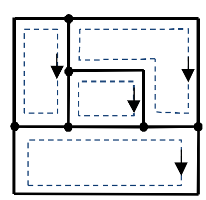
Anello: Si consideri un grafo planare. Si definisce anello (o maglia elementare) una maglia che non contiene lati al suo interno



È possibile dimostrare che:

1. All'interno di un grafo planare composto da N nodi e R rami sono identificabili $R-(N-1)$ anelli
2. Tali anelli (maglie elementari) sono indipendenti (nessuno di essi può essere ottenuto dall'unione degli altri)
3. Se si associa una corrente ad ogni anello la corrente in ciascun ramo può essere ottenuta come somma algebrica delle correnti di anello che lambiscono quel ramo

Si noti che non è possibile in generale associare gli $R-(N-1)$ anelli indipendenti ad una suddivisione del grafo in albero e coalbero (si consideri a tal proposito l'esempio di figura).



Utilizzando gli anelli anziché le maglie fondamentali è dunque possibile formulare $R-(N-1)$ LKT indipendenti in maniera alternativa

Adoperando gli anelli e procedendo in modo del tutto analogo a quanto visto per il metodo delle correnti di maglia si ottiene un sistema risolvente equivalente costituito dal medesimo numero di equazioni e dal medesimo numero di incognite. Tale procedura, di semplice applicazione, è detta **metodo delle correnti di anello**.

Si ribadisce però che l'utilizzo del metodo delle correnti di anello è possibile solo per circuiti il cui grafo è planare

Esercizio 6.1 bis

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.1 utilizzando il metodo delle correnti di maglia

Esercizio 6.2 bis

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.2 utilizzando il metodo delle correnti di maglia

Esercizio 6.4 bis

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.4 utilizzando il metodo delle correnti di maglia

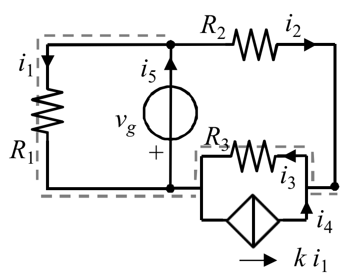
Esercizio 6.8 bis

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.8 utilizzando il metodo delle correnti di maglia

Eliminazione delle correnti e delle tensioni di coalbero

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura, già ripetutamente considerato.

Il sistema risolvente è di seguito riportato. La suddivisione del grafo in albero e coalbero utilizzata per ottenere il sistema risolvente è evidenziata in figura



$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases} \quad N\!-\!1 \text{ LKC}$$

$$\begin{cases} v_2 + v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \\ v_5 + v_1 = 0 \end{cases} \quad R-(N\!-\!1) \text{ LKT}$$

$$\begin{cases} v_1 - R_1 i_1 = 0 \\ v_2 - R_2 i_2 = 0 \\ v_3 - R_3 i_3 = 0 \\ i_4 - k\, i_1 = 0 \\ v_5 = v_g \end{cases}$$

R relazioni costitutive dei componenti

Ci proponiamo di ottenere un sistema risolvente ridotto che contenga come incognite le sole tensioni di albero (v_1, v_3) eliminando, se possibile, tutte le altre variabili per sostituzione. A tal fine procediamo attraverso i seguenti passi

1. Utilizziamo le LKT per esprimere le $R-(N-1)$ tensioni di coalbero in funzione delle $(N-1)$ tensioni di albero

$$\begin{cases} v_2 = v_1 - v_3 \\ v_4 = -v_3 \\ v_5 = -v_1 \end{cases}$$

2. Utilizziamo, ove possibile, le equazioni costitutive per esprimere le correnti in funzione delle tensioni. Nel caso in esame, essendo il componente sul ramo 5 non definito in tensione (generatore di tensione), non è possibile esplicitare la corrente i_5 in funzione della tensione.

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 = G_2 v_2 \\ i_3 = G_3 v_3 \\ i_4 = k\, i_1 = k\, G_1 v_1 \\ i_5 = ? \end{cases}$$

3. Esprimiamo tutte le correnti esplicitabili in funzione delle sole tensioni di albero adoperando le espressioni ricavate al passo 1

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 = G_2 (v_1 - v_3) \\ i_3 = G_3 v_3 \\ i_4 = k\, G_1 v_1 \\ i_5 = ? \end{cases}$$

33

4. Sostituiamo le espressioni delle tensioni ottenute all'interno delle LKC. Otteniamo così un sistema di $(N-1)$ equazioni nel quale compaiono come incognite le $(N-1)$ tensioni di albero (i_1, i_3) e la corrente i_5 che non è stato possibile esplicitare in funzione delle tensioni.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2) v_1 - G_2 v_3 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) v_1 + (G_2 + G_3) v_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è indeterminato perché il numero delle incognite supera quello delle equazioni a causa della presenza nel circuito di un componente non definito in tensione (generatore di tensione sul ramo 5). Per renderlo determinato è necessario includere in esso la relazione di definizione del componente non definito in tensione.

5. Esprimiamo la relazione costitutiva del componente non definito in tensione in funzione delle sole tensioni di coalbero

$$v_5 = v_g \Rightarrow v_1 = -v_g$$

6. Aggiungiamo tale equazione alle precedenti (punto 4) ottenendo così un sistema determinato di 3 equazioni in 3 incognite.

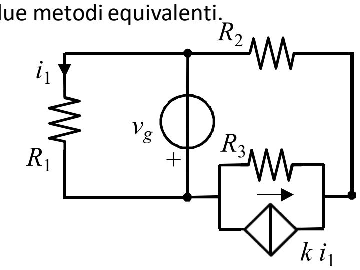
$$\begin{cases} (G_1 + G_2) v_1 - G_2 v_3 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) v_1 + (G_2 + G_3) v_3 = 0 \\ v_1 = -v_g \end{cases}$$

34

La procedura di sostituzione appena esposta può essere implementata gradualmente in fase di analisi del circuito in modo da ottenere direttamente il sistema risolvente ridotto senza che sia necessario partire da quello completo. Tale approccio graduale è detto metodo delle tensioni di albero. Esso può essere modificato utilizzando in luogo delle tensioni di albero un insieme equivalente di tensioni indipendenti dette «tensioni di nodo». Si ottiene così il metodo delle tensioni di nodo, largamente utilizzato nella soluzione dei circuiti. Nel seguito si espongono in dettaglio questi due metodi equivalenti.

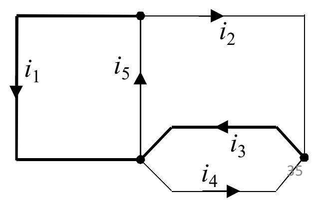
Metodo delle tensioni di albero

Si consideri ancora a titolo di esempio il circuito di figura. Per risolverlo mediante il metodo delle tensioni di albero è necessario attuare i seguenti passi



1. Introdurre un grafo del circuito avente N nodi e R rami e assegnare un nome e un verso alla corrente di ciascun ramo (ciò assegna di fatto un nome e un verso anche alle tensioni mediante la convenzione dell'utilizzatore). Introdurre inoltre una suddivisione del grafo in albero e coalbero

N=3 , R=5



35

2. Esprimere le $R-(N-1)$ tensioni di coalbero albero in funzione delle $(N-1)$ tensioni di albero utilizzando le LKT relative alle maglie fondamentali

$$\begin{cases} v_2 = v_1 - v_3 \\ v_4 = -v_3 \\ v_5 = -v_1 \end{cases}$$

3. Sia P il numero di rami non definiti in tensione. Esprimere le correnti degli $R-P$ rami definiti in tensione in funzione delle $(N-1)$ tensioni di albero

$$\begin{cases} i_1 = G_1\, v_1 \\ i_2 = G_2\left(v_1 - v_3\right) \\ i_3 = G_3\, v_3 \\ i_4 = k\, G_1\, v_1 \end{cases}$$
$$\left\{ i_5 = ? \right.$$

4. Formulare le $(N-1)$ LKC relative ai tagli fondamentali

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases}$$

5. Sostituire le espressioni delle correnti ottenute al punto 3 all'interno delle $(N-1)$ LKC. Si ottiene così un sistema indeterminato di $(N-1)$ equazioni nelle $(N-1)+P$ incognite costituite dalle tensioni di albero e dalle correnti dei rami non definiti in tensione. È opportuno che le eventuali correnti impresse dai generatori di corrente indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$$\begin{cases} \left(G_1 + G_2\right)v_1 - G_2\, v_3 - i_5 = 0 \\ -\left(G_2 + k\, G_1\right)v_1 + \left(G_2 + G_3\right)v_3 = 0 \end{cases}$$

6. Esprimere le relazioni costitutive dei P rami non definiti in tensione in funzione delle sole tensioni di albero. È opportuno che le eventuali tensioni impresse dai generatori di tensioni indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

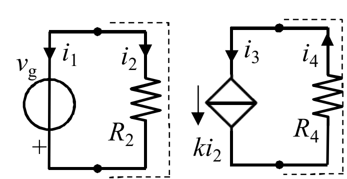
$$v_5 = v_g$$
$$\Rightarrow v_1 = -v_g$$

7. Aggiungere al sistema di equazioni ottenuto al punto 5 le relazioni ottenute al punto 6. Si ottiene così un sistema determinato di $(N\!-\!I) + P$ equazioni nelle $(N\!-\!I) + P$ incognite costituite dalle tensioni di albero e dalle correnti dei rami non definiti in tensione

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_3 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\,G_1)v_1 + (G_2 + G_3)v_3 = 0 \\ v_1 = -v_g \end{cases}$$

Metodo delle tensioni di albero per circuiti non connessi

Analogamente a quanto visto per gli altri metodi se il grafo del circuito è non connesso è necessario applicare indipendentemente il metodo delle tensioni di albero a ciascuno dei sottografi connessi e unire infine i sistemi risolventi parziali così ottenuti.



2. $\{v_1 = v_2$ — $\{v_3 = -v_4$ 2.

3. $\{i_2 = G_2 v_2$, $\{i_1 = ?$ — $\begin{cases} i_3 = k\,i_2 = k\,G_2\,v_2 \\ i_4 = G_4\,v_4 \end{cases}$ 3.

4. $\{i_1 + i_2 = 0$ — $\{i_3 - i_4 = 0$ 4.

5. $\{i_1 + R_2\,v_2 = 0$ — $\{k\,G_2\,v_2 - G_4\,v_4 = 0$ 5.

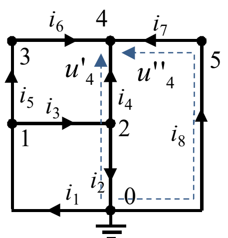
6. $\begin{cases} v_1 = -v_g \\ \Rightarrow v_2 = -v_g \end{cases}$ — 6.

7. $\begin{cases} i_1 + R_2\,v_2 = 0 \\ v_2 = -v_g \end{cases}$ $\longrightarrow$ 7.bis $\begin{cases} i_1 + R_2\,v_2 = 0 \\ v_2 = -v_g \\ k\,G_2\,v_2 - G_4\,v_4 = 0 \end{cases}$ $\longleftarrow$ $\{k\,G_2\,v_2 - G_4\,v_4 = 0$ 7.

Tensioni (o potenziali) di nodo

Si consideri un generico grafo connesso composto da N nodi e R rami. Si scelga ad arbitrio un generico nodo 0 al quale si attribuisce il ruolo di nodo di riferimento.

N=5 , R=8



$u'_4 = v_2 - v_4$

$u''_4 = -v_8 - v_7$

Essendo il grafo connesso esiste almeno un percorso che congiunge il nodo di riferimento a ciascuno degli altri nodi

Si definisce **tensione (o potenziale) di nodo** del generico nodo h (rispetto al nodo di riferimento 0) la somma algebrica delle tensioni che agiscono lungo il percorso orientato che congiunge 0 ad h.

La tensione del generico nodo h rispetto al nodo di riferimento 0 si indica di solito con u_{h0} o più semplicemente con u_h

La legge di Kirchhoff delle tensioni assicura che la tensione di nodo sia indipendente dal percorso scelto per determinarla.

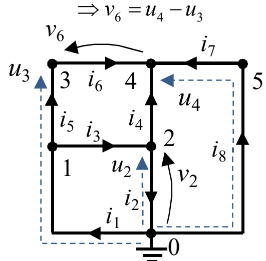
$$u''_4 - u'_4 = -v_8 - v_7 - v_2 + v_4 = \sum_{\substack{percorso \\ chiuso}} v = 0$$

$$\Rightarrow u''_4 = u'_4$$

Per un grafo a N nodi scelto un nodo di riferimento sono definibili N–1 tensioni di nodo

$v_6 - u_3 + u_4 = 0$

$\Rightarrow v_6 = u_4 - u_3$



$v_2 = u_2$

Si consideri il generico ramo orientato i, uscente dal nodo h ed entrante nel nodo k. La legge di Kirchhoff delle tensioni consente di esprimere la tensione di ramo v_i come differenza tra la tensione u_h del nodo di partenza e la tensione u_k del nodo di arrivo.

$$v_i = u_h - u_k$$

Se il generico ramo orientato è uscente dal nodo h ed entrante nel nodo di rifermento la sua tensione sarà u_h. Se invece è uscente dal nodo di riferimento ed è entrante nel nodo h la sua tensione sarà $-u_h$

$$v_i = \pm u_h$$

Le espressioni che legano le tensioni di ramo a quelle di nodo possono essere poste in forma matriciale

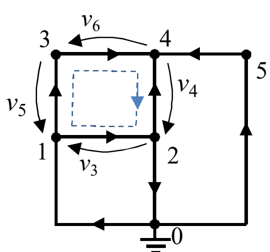
$$\begin{aligned} v_1 &= -u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_2 \\ v_4 &= u_2 - u_4 \\ v_5 &= u_1 - u_3 \\ v_6 &= u_3 - u_4 \\ v_7 &= u_5 - u_4 \\ v_8 &= -u_5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

La matrice , di dimensione $(N\!-\!1) \times R$, che consente di esprimere il vettore $\mathbf{v}$ delle R tensioni di ramo in funzione dal vettore $\mathbf{u}$ delle $N\!-\!1$ tensioni di nodo coincide con la trasposta della matrice di incidenza ridotta $\mathbf{A}$. Tale matrice è ottenuta eliminando dalla matrice di incidenza completa la riga relativa al nodo di riferimento ed è così definita

$$\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\Re)_{(N-1)\times R}: \qquad a_{h,k} = \begin{cases} +1 \text{ se il ramo h esce dal nodo k} \\ 0 \text{ se il ramo h non incide nel nodo k} \\ -1 \text{ se il ramo h entra nel nodo k} \end{cases}$$

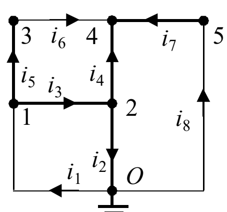
La relazione tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ assume quindi la seguente forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{u}$$



Le tensioni di ramo così definite rispettano necessariamente le LKT. Infatti l'equazione relativa a qualunque maglia orientata espressa in termini di tensioni di nodo conterrà due volte e con segno opposto le tensioni dei nodi appartenenti alla maglia e sarà quindi identicamente soddisfatta.

$$v_4 + v_3 - v_5 - v_6 = u_2 - u_4 + u_1 - u_2 - u_1 + u_3 - u_3 + u_4 = 0$$
$$\forall u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$$



Si introduca ora una suddivisione del grafo in albero e coalbero. Come noto il vettore $\mathbf{v}$ delle R tensioni di ramo è ottenibile dal vettore $\mathbf{v}_{\mathrm{a}}$ delle $N\!-\!1$ tensioni di albero mediante la matrice dei tagli fondamentali

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{a}}$$

Per ogni nodo esiste ed è unico il percorso di albero che lo congiunge al nodo di riferimento (ciò deriva dalla definizione stessa di albero). È evidente quindi che esiste una corrispondenza biunivoca tra le tensioni di albero e quelle di nodo. Indicando con $\mathbf{C}$ la matrice di corrispondenza tra i vettori $\mathbf{v}_{\mathrm{a}}$ e $\mathbf{u}$ (tale matrice si ottiene eliminando dalla matrice $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ le righe corrispondenti ai rami di coalbero) otteniamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{a}} = \mathbf{T}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}\,\mathbf{u}$$

Risulta quindi $\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \mathbf{T}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{C}$. Sostituendo questa relazione all'interno delle LKT espresse attraverso la matrice $\mathbf{L}$ delle maglie fondamentali ed utilizzando la ortogonalità tra $\mathbf{L}$ e $\mathbf{T}$ otteniamo

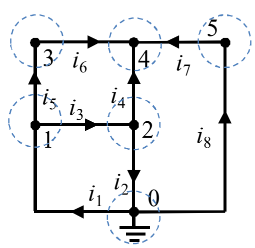
$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{L}\,\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{u} = \mathbf{L}\,\mathbf{T}^{\mathrm{t}}\mathbf{C}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u}$$

Tale relazione ribadisce il fatto che, data l'ortogonalità tra tagli e maglie, un insieme di tensioni di ramo ottenuto, attraverso la matrice $\mathbf{A}^t$, da un qualsiasi insieme di tensioni di nodo soddisfa per costruzione le LKT. In altri termini essa stabilisce che la relazione $\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \mathbf{u}$, al pari della relazione $\mathbf{v} = \mathbf{T}^t \mathbf{v}_a$, costituisce un modo alternativo di formulare le LKT.

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}^t\,\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{T}^t\,\mathbf{v}_a$$

Da tutto ciò consegue che le tensioni di ramo e le tensioni di nodo costituiscono due insiemi di tensioni equivalenti. Entrambe rappresentano un insieme massimale di tensioni indipendenti del circuito.

Formulazione nodale delle LKC



La LKC stabilisce che la somma algebrica delle correnti che intersecano una qualsiasi superficie chiusa è uguale a zero. Una LKC può quindi essere formulata per ciascuna superfice chiusa che racchiude individualmente un nodo del circuito (LKC nodale).

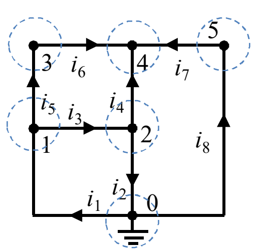
$$\begin{aligned}
0&: \quad +i_1 - i_2 + i_8 = 0 \\
1&: \quad -i_1 + i_3 + i_5 = 0 \\
2&: \quad +i_2 - i_3 + i_4 = 0 \\
3&: \quad -i_5 + i_6 = 0 \\
4&: \quad -i_4 - i_6 - i_7 = 0 \\
5&: \quad +i_7 - i_8 = 0
\end{aligned}$$

Le N LKC relative ai nodi del circuito non sono indipendenti. La loro somma è necessariamente nulla in quanto per ciascuna corrente esiste una ed un sola equazione che la contiene con il segno + (quella relativa al nodo di partenza) ed una ed una sola equazione che la contiene con il segno – (quella relativa al nodo di arrivo). Ne consegue che la LKC relativa a ciascun nodo è ottenibile dalla somma, cambiata di segno, delle LKC di tutti gli altri.

Ciò trova risconto nel fatto che la generica superfice nodale orientata verso l'esterno (interno) è ottenibile dall'unione delle rimanenti N-1 superfici nodali orientate verso l'interno (esterno)

Le LKC relative a qualsiasi insieme di $N\!-\!1$ nodi del circuito risultano necessariamente indipendenti qualunque sia il nodo escluso. Si indichi infatti con h il nodo escluso e si immagini di voler ottenere l'equazione del generico nodo i, diverso da h, dalle rimanenti $N\!-\!2$ equazioni. Sia le correnti di h che quelle di i (ad esclusione di quelle degli eventuali rami aventi h e i come estremi che scompaiono) compaiono una volta sola in due equazioni diverse e non possono essere eliminate. Qualunque combinazione lineare delle rimanenti $N\!-\!2$ equazioni non potrà contenere in esclusiva le correnti del nodo i senza coinvolgere anche quelle del nodo h, e quindi non potrà coincidere con la LKC del nodo i.

Le $N\!-\!1$ LKC nodali relative a tutti i nodi del circuito escluso quello di riferimento costituiscono quindi un insieme massimale di equazioni indipendenti. Tali equazioni possono essere espresse in forma compatta attraverso la matrice di incidenza ridotta



$$\mathbf{A\,i} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} -i_1 + i_3 + i_5 &= 0 \\ +i_2 - i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_5 + i_6 &= 0 \\ -i_4 - i_6 - i_7 &= 0 \\ +i_7 - i_8 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di incidenza ridotta consente di

1. definire, sulla base delle $N\!-\!1$ tensioni di nodo $\mathbf{u}$, un insieme $\mathbf{v}$ di R tensioni di ramo che soddisfano automaticamente le LKC $\qquad \mathbf{v} = \mathbf{A}^{t}\,\mathbf{u}$
2. individuare un insieme massimale di $N\!-\!1$ LKC indipendenti $\qquad \mathbf{A\,i} = \mathbf{0}$

Nella matrice di incidenza ridotta sono quindi condensate tutte le informazioni contenute nella matrice $\mathbf{T}$ dei tagli fondamentali e nella matrice $\mathbf{L}$ delle maglie fondamentali

Metodo di Tableau

Si consideri un circuito con R rami ed N nodi. Scelto ad arbitrio un nodo di riferimento è possibile formulare il seguente sistema risolvente

incognite

R correnti di ramo ($\mathbf{i}$)
R tensioni di ramo ($\mathbf{v}$)
$N-1$ tensioni di ramo ($\mathbf{u}$)

$2R + N - 1$ incognite

equazioni

$2R + N - 1$ equazioni:

$R + N - 1$ eq.:

$\mathbf{A\,i = 0}$ ← N–1 LKC

$\mathbf{v = A^t\,u}$ ← R tensioni di ramo compatibili con le LKT

R eq.:

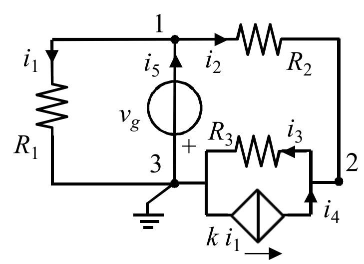
$\mathbf{f\,(\,i\,,\,v\,) = 0}$ ← R Rel. costitutive dei componenti

Tale approccio, noto come metodo di Tableau, utilizza esclusivamente la matrice di incidenza ridotta e considera formalmente come incognite sia le tensioni di nodo che quelle di ramo (introducendo così $R + N - 1$ anziché R equazioni topologiche)

I vantaggi del metodo di Tableau sono la sua assoluta generalità e semplicità (non è necessario suddividere il grafo in albero e coalbero e non è necessario distinguere tra componenti definiti o non definiti in tensione/corrente). Lo svantaggio è il maggior numero di incognite (sopperibile però attraverso il fatto che la matrice $\mathbf{A}$ è molto sparsa). Il metodo di Tableau si presta particolarmente per l'implementazione diretta al calcolatore.

Eliminazione delle correnti e delle tensioni di ramo dal sistema risolvente di Tableau

Il sistema risolvente di Tableau del circuito di figura ottenuto scegliendo il nodo 3 come nodo di riferimento è di seguito riportato.



$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases}$$ N–1 LKC

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_1 - u_2 \\ v_3 = u_2 \\ v_4 = u_2 \\ v_5 = -u_1 \end{cases}$$ R tensioni di ramo compatibili con le LKT

$$\begin{cases} v_1 - R_1\,i_1 = 0 \\ v_2 - R_2\,i_2 = 0 \\ v_3 - R_3\,i_3 = 0 \\ i_4 - k\,i_1 = 0 \\ v_5 = v_g \end{cases}$$ R relazioni costitutive dei componenti

Ci proponiamo di ottenere un sistema risolvente ridotto che contenga come incognite le sole tensioni di nodo (u_1, u_2) eliminando, se possibile, tutte le altre variabili per sostituzione. A tal fine procediamo attraverso i seguenti passi

1. Utilizziamo, ove possibile, le equazioni costitutive per esprimere le correnti in funzione delle tensioni di ramo. Nel caso in esame, essendo il componente sul ramo 5 non definito in tensione (generatore di tensione), non è possibile esplicitare la corrente i_5 in funzione della tensione.

$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 = G_2 v_2 \\ i_3 = G_3 v_3 \\ i_4 = k\, i_1 = k\, G_1 v_1 \\ i_5 = ? \end{cases}$$

2. Esprimiamo tutte le correnti esplicitabili in funzione delle sole tensioni di nodo

$$\begin{cases} i_1 = G_1 u_1 \\ i_2 = G_2 (u_1 - u_2) \\ i_3 = G_3 u_2 \\ i_4 = k\, G_1 u_1 \\ i_5 = ? \end{cases}$$

3. Sostituiamo le espressioni delle correnti ottenute all'interno delle LKC. Otteniamo così un sistema di $(N\!-\!1)$ equazioni nel quale compaiono come incognite le $(N\!-\!1)$ tensioni di nodo (u_1, u_3) e la corrente i_5 che non è stato possibile esplicitare in funzione delle tensioni.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2) u_1 - G_2 u_2 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) u_1 + (G_2 + G_3) u_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è indeterminato perché il numero delle incognite supera quello delle equazioni a causa della presenza nel circuito di un componente non definito in tensione (generatore di tensione sul ramo 5). Per renderlo determinato è necessario includere in esso la relazione di definizione di tale componente

4. Esprimiamo la relazione costitutiva del componente non definito in tensione in funzione delle sole tensioni di nodo

$$v_5 = e_g \Rightarrow u_1 = -e_g$$

5. Aggiungiamo tale equazione alle precedenti (punto 3) ottenendo così un sistema determinato di 3 equazioni in 3 incognite.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2) u_1 - G_2 u_2 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) u_1 + (G_2 + G_3) u_2 = 0 \\ u_1 = -v_g \end{cases}$$

La procedura di sostituzione appena esposta può essere implementata gradualmente in fase di analisi del circuito in modo da ottenere direttamente il sistema risolvente ridotto senza che sia necessario partire da quello di Tableau. Tale approccio graduale è detto **metodo delle tensioni di nodo**.

Metodo delle tensioni di nodo

Il metodo dei potenziali di nodo utilizza gli stessi passaggi del metodo delle tensioni di albero con le due seguenti differenze

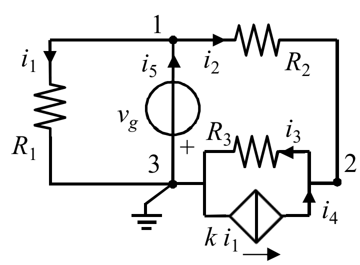
1. Le LKC sono espresse in forma nodale attraverso la matrice di incidenza ridotta anziché attraverso la matrice dei tagli fondamentali
$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

2. Le tensioni di ramo sono ottenute da quelle di nodo attraverso la trasposta della matrice di incidenza ridotta anziché da quelle di albero attraverso la matrice delle maglie fondamentali
$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{t}\,\mathbf{u} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{T}^{t}\,\mathbf{v}_{a}$$

Dal punto di vista concettuale i due metodi sono identici ma dal punto di vista implementativo il metodo dei potenziali di nodo è vantaggioso perché non richiede la suddivisione del grafo in albero e coalbero. È sufficiente la matrice di incidenza ridotta.

Il sistema risolvente del metodo dei potenziali di nodo può essere ottenuto dal sistema risolvente di Tableau procedendo per sostituzioni successive.

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura. Per risolverlo mediante il metodo delle tensioni di nodo è necessario attuare i seguenti passi



1. Numerare i nodi e scegliere ad arbitrio un nodo di riferimento. Assegnare un nome e un verso alla corrente (e alla tensione) di ciascun ramo

2. Esprimere le R tensioni di ramo in funzione delle $(N\!-\!1)$ tensioni di nodo

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_2 \\ v_4 &= -u_2 \\ v_5 &= -u_1 \end{aligned}$$

3. Esprimere le correnti degli $R - P$ rami definiti in tensione in funzione delle $(N\!-\!1)$ tensioni di nodo

$$\begin{cases} i_1 = G_1 u_1 \\ i_2 = G_2 (u_1 - u_2) \\ i_3 = G_3 u_2 \\ i_4 = k\, G_1 u_1 \end{cases}$$

4. Formulare le $(N\!-\!1)$ LKC nodali relative a tutti i nodi eccetto quello di riferimento

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_5 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \end{cases}$$

5. Sostituire le espressioni delle correnti ottenute al punto 3 all'interno delle $(N\!-\!1)$ LKC. Si ottiene così un sistema indeterminato di $(N\!-\!1)$ equazioni nelle $(N\!-\!1) + P$ incognite costituite dalle tensioni di nodo e dalle correnti dei rami non definiti in tensione. È opportuno che le eventuali correnti impresse dai generatori di corrente indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$$\begin{cases} (G_1 + G_2) u_1 - G_2 u_2 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) u_1 + (G_2 + G_3) u_2 = 0 \end{cases}$$

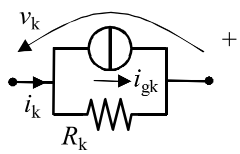
6. Esprimere le relazioni costitutive dei P rami non definiti in tensione in funzione delle sole tensioni di nodo. È opportuno che le eventuali tensioni impresse dai generatori di tensioni indipendenti siano riportate a destra in queste equazioni in modo da evidenziarne il ruolo di forzanti (termini noti).

$$v_5 = e_g$$
$$\Rightarrow u_1 = -v_g$$

7. Aggiungere al sistema di equazioni ottenuto al punto 5 le relazioni ottenute al punto 6. Si ottiene così un sistema determinato di $(N\!-\!1) + P$ equazioni nelle $(N\!-\!1) + P$ incognite costituite dalle tensioni di nodo e dalle correnti dei rami non definiti in tensione

$$\begin{cases} (G_1 + G_2) u_1 - G_2 u_2 - i_5 = 0 \\ -(G_2 + k\, G_1) u_1 + (G_2 + G_3) u_2 = 0 \\ u_1 = -v_g \end{cases}$$

Nel caso in cui il circuito contenga solo resistori e generatori di corrente indipendenti la relazione di definizione del generico ramo k è esprimibile come



$$i_k = G_k v_k + i_{g_k}$$

Si noti che sia G_k che i_{gk} possono essere nulli se il ramo non contiene il resitore o il generatore rispettivamente

L'insieme delle relazioni di definizione di tutti i rami può essere posto nella segunte forma matriciale

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\,\mathbf{v} + \mathbf{i}_g$$

Dove $\mathbf{i}$ è il vettore delle correnti di ramo, $\mathbf{v}$ è il vettore delle tensioni di ramo e $\mathbf{G}$ è una matrice diagonale il cui elemento G_{kk} è la conduttanza G_k del ramo k-esimo.

Per tale circuito l'insieme delle LKC può essere posto nella forma

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\,\mathbf{G}\,\mathbf{v} + \mathbf{A}\,\mathbf{i}_g = \mathbf{0}$$

Sostituendo nella precedente l'espressione delle tensioni di ramo in funzione della tensioni di nodo si ottiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t\,\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{A}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A}^t\,\mathbf{u} = -\mathbf{A}\,\mathbf{i}_g$$

Per i circuiti contenenti solo resistori e generatori di corrente indipendenti il sistema risolvente ottenuto mediante il metodo delle tensioni di nodo può essere posto nella forma

$$\mathbf{G}^c\,\mathbf{u} = \mathbf{I}^g$$

$\mathbf{u}$	vettore delle tensioni di nodo	
$\mathbf{I}^g$	vettore delle forzanti	
$\mathbf{G}^c$	matrice dei coefficienti (simmetrica)	

in cui

$$\mathbf{G}^c = \mathbf{A}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A}^t$$

$$\mathbf{I}^g = -\mathbf{A}\,\mathbf{i}_g$$

Dalle loro definizione è possibile dedurre che la matrice $\mathbf{G}^c$ e il vettore $\mathbf{I}^g$ possono essere assemblati automaticamente utilizzando le le seguenti regole

$G^c{}_{hh}$ = Somma delle conduttanze dei rami afferenti al nodo h

$G^c{}_{hk}$ = Somma cambiata di segno delle conduttanze dei rami che hanno come estremi i nodi h e k.

I_h = Somma algebrica delle correnti impresse dai generatori presenti nei rami afferenti al nodo h. Ciascuna corrente impressa è considerata col segno + se è entrante nel nodo h, è considerata col segno – se è uscente

Se nel circuito sono presenti generatori di tensione sia indipendenti che pilotati il metodo descritto non è direttamente applicabile (questi bipoli non sono definiti in tensione, quindi non è possibile porre la relazione di ramo nella forma $i = G\,v + i_g$)

E' tuttavia possibile estendere il metodo descritto trattando tali componenti come generatori di corrente; tale corrente è però incognita ed quindi è necessario aggiungere al sistema così ottenuto le loro equazioni di definizione in termini di tensione.

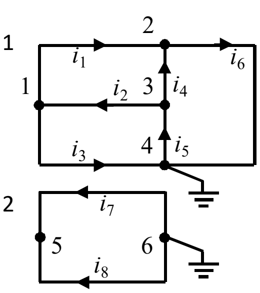
Sono altresì formulabili regole per la generalizzazione del metodo al caso di generatori di corrente pilotati e di doppi bipoli ma tali regole sono di difficile applicazione e memorizzazione e non vengono riportate.

Metodo delle tensioni di nodo per circuiti non connessi

Si consideri un grafo non connesso avente R rami e N nodi. Per tale grafo non è sempre possibile trovare un percorso che congiunge due qualsiasi dei suoi nodi. Sia S il numero dei sottografi connessi e disgiunti da cui il grafo è costituito. Siano N_i e R_i il numero di nodi e di rami di ciascuno di tali sottografi. Come discusso in dettaglio nel capitolo 5 per ciascun sottografo è possibile formulare $R_i - (N_i - 1)$ LKT indipendenti (per l'intero circuito è quindi possibile formulare $R - (N - S)$ LKT indipendenti). Per ciascun nodo di un sottografo connesso è possibile trovare un percorso che lo congiunge ad un nodo di riferimento scelto ad arbitrio all'interno del medesimo sottografo. Per il sottografo S_i risultano quindi definibili $N_i - 1$ tensioni di nodo. Le tensioni di ramo di tale sottografo sono ottenibili utilizzando la matrice di incidenza ridotta del sottografo, composta da R_i righe e $(N_i - 1)$ colonne. Tali tensioni rispettano per costruzione la LKT.

Sottografo connesso 1
$N_1 = 4, R_1 = 6$

Sottografo connesso 2
$N_2 = 2, R_2 = 2$



$v_1 = u_1 - u_2$
$v_2 = u_3 - u_1$
$v_3 = u_1$
$v_4 = u_3 - u_2$
$v_5 = -u_3$
$v_6 = u_2$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1^{\mathbf{t}}\,\mathbf{u}_1$$

$v_7 = u_5$
$v_8 = u_5$

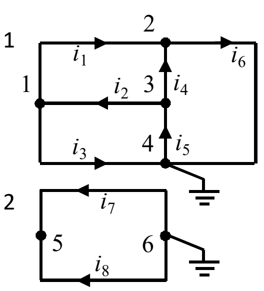
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1^{\mathbf{t}}\,\mathbf{u}_1$$

Si deduce quindi che un insieme massimale di tensioni indipendenti del circuito è costituito da $N-S$ tensioni di nodo. Non è tuttavia possibile stabilire alcuna relazione tra le tensioni dei due sottografi connessi.

Per ciascun sottografo è inoltre possibile formulare ($N_i - 1$) LKC indipendenti (per l'intero circuito è quindi possibile formulare ($N-S$) LKC indipendenti). Tali equazioni sono esprimibili in forma nodale attraverso le matrici di incidenza ridotte di ciacun sottografo.

Sottografo connesso 1
$N_1 = 4, R_1 = 6$

Sottografo connesso 2
$N_2 = 2, R_2 = 2$



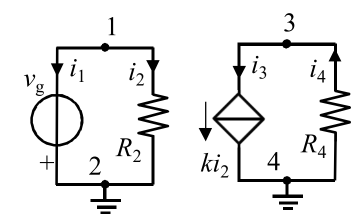
$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$-i_1 - i_4 + i_6 = 0$$
$$i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{i}_1 = \mathbf{0}$$

$$i_7 + i_8 = 0$$

$$\mathbf{A}_2\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{0}$$

Ne consegue che per ottenere il sistema risolvente di un circuito non connesso è necessario applicare indipendentemente il metodo delle tensioni di nodo a ciascuno dei sottografi connesso e unire infine i sistemi risolventi parziali così ottenuti.



2. $\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_1 \end{cases}$

3. $\{ i_2 = G_2\, u_1$
$\{ i_1 = ?$

4. $\{ i_1 + i_2 = 0$

5. $\{ i_1 + R_2\, u_1 = 0$

6. $\begin{cases} v_1 = -v_g \\ \Rightarrow u_1 = -v_g \end{cases}$

7. $\begin{cases} i_1 + R_2\, u_1 = 0 \\ u_1 = -v_g \end{cases}$ $\longrightarrow$

$\begin{cases} v_3 = u_3 \\ v_4 = u_3 \end{cases}$ 2.

$\begin{cases} i_3 = k\, i_2 = k\, G_2\, u_1 \\ i_4 = G_4\, u_3 \end{cases}$ 3.

$\{ i_3 - i_4 = 0$ 4.

$\{ k\, G_2\, u_1 - G_4\, u_3 = 0$ 5.

6.

$\longleftarrow$ $\{ k\, G_2\, u_1 - G_4\, u_3 = 0$ 7.

7.bis

$$\begin{cases} i_1 + R_2\, u_1 = 0 \\ u_1 = -v_g \\ k\, G_2\, u_1 - G_4\, u_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6.8

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.1 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.9

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.2 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.10

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.3 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.11

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.4 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.12

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.5 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.13

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.6 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.14

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.7 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.15

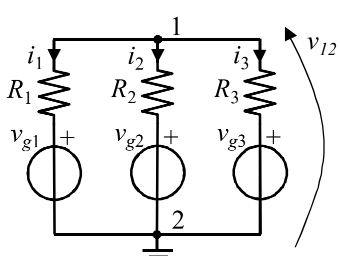
Risolvere il circuito dell'esercizio 6.8 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Esercizio 6.16

Risolvere il circuito dell'esercizio 6.9 utilizzando il metodo delle tensioni di nodo

Teorema di Millmann

Si consideri un generico circuito composto da N rami in parallelo, ciascuno dei quali costituito da un generatore di tensione indipendente con in serie una resistenza. Si intende valutare la tensione v_{12} che si stabilisce ai capi del parallelo.



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\downarrow$$

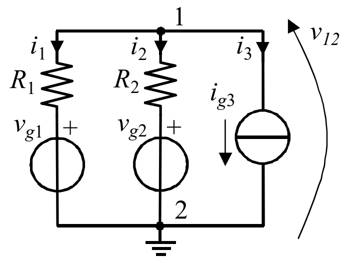
$$G_1 (u_1 - v_{g1}) + G_2 (u_1 - v_{g2}) + G_3 (u_1 - v_{g3}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$v12 = u_1 = \frac{G_1\, v_{g1} + G_2\, v_{g2} + G_3\, v_{g3}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Questo risultato, direttamente ottenibile dall'applicazione del metodo dei potenziali di nodo, è noto come teorema di Millmann

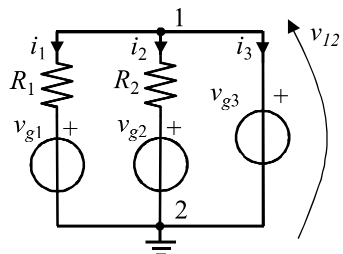
Casi particolari



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$G_1\,(u_1 - v_{g1}) + G_2\,(u_1 - v_{g2}) + i_{g3} = 0$$

$$v_{12} = \frac{G_1\, v_{g1} + G_2\, v_{g2} - i_{g3}}{G_1 + G_2}$$



$$v_{12} = v_{g3}$$