7. Proprietà dei circuiti lineari adinamici

Forma matriciale del sistema risolvente di un circuito lineare. Circuito inerte. Coefficienti di rete. Reciprocità dei circuiti lineari. Proprietà di sovrapposizione. Rappresentazione in corrente di bipoli lineari (Teorema di Thevenin). Rappresentazione in tensione di una rete bipolare lineare (Teorema di Norton). Rappresentazioni in corrente, in tensione e ibride di doppi bipoli lineari.

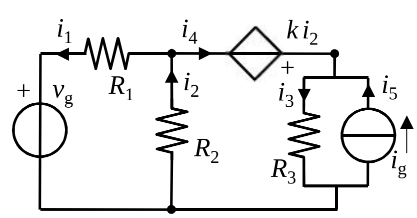
Un circuito adinamico è lineare se contiene solo componenti adinamici lineari (bipoli, doppi bipoli ….) e generatori indipendenti di corrente o tensione. Si consideri a titolo di esempio il circuito lineare di figura. Il sistema risolvente completo è di seguito riportato

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_4 = 0 \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0 \end{cases} \quad NJ1 \text{ LKC}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 0 \\ v_3 + v_5 = 0 \end{cases} \quad R-(NJ1) \text{ LKT}$$

$$\begin{cases} v_1 - R_1 i_1 = v_g \\ v_2 - R_2 i_2 = 0 \\ v_3 - R_3 i_3 = 0 \\ v_4 + k i_1 = 0 \\ i_5 = i_g \end{cases}$$

R relazioni costitutive dei componenti



Alla destra del sistema compaiono, nel ruolo di termini noti, la corrente e la tensione impresse dai generatori indipendenti

Risolvendo analiticamente si ottiene

$$i_1 = -\frac{G_1(1-G_1)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g + \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$i_2 = -\frac{G_2 G_1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g - \frac{G_2}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$i_3 = \frac{G_3 G_1(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g + \frac{G_3(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$i_4 = \frac{G_3 G_1(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g - \frac{G_1+G_2}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$i_5 = i_g$$

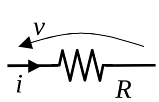
$$v_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g + \frac{1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$v_2 = -\frac{G_1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g - \frac{1}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$v_3 = \frac{G_1(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g + \frac{(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$v_4 = \frac{k G_1 G_2}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g + \frac{k G_2}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$
$$v_5 = -\frac{G_1(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}v_g - \frac{(1-kG_2)}{G_1+G_2+G_3(1-kG_2)}i_g$$

Ogni corrente ed ogni tensione del circuito è composta, in generale, da due contributi: uno dovuto al generatore di tensione indipendente ed uno dovuto al generatore di corrente indipendente

La relazione costitutiva di un bipolo lineare e di un generatore indipendente può essere espressa in termini generali nella seguente forma implicita

$$h^{\mathrm{i}}\, i + h^{\mathrm{v}}\, v = h^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}}\, i_{\mathrm{g}} + h^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}}\, v_{\mathrm{g}}$$

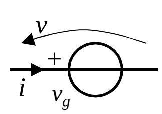
Si possono avere i seguenti casi



$v = R\,i$

$\downarrow$

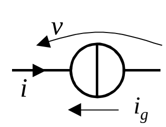
$h^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} = h^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} = 0; \quad h^{\mathrm{i}} = -R\,h^{\mathrm{v}};$



$v = v_g \quad \forall i$

$\downarrow$

$h^{\mathrm{i}} = h^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} = 0; \quad h^{\mathrm{v}} = h^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} = 1;$

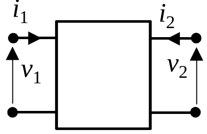


$i = i_a \quad \forall v$

$\downarrow$

$h^{\mathrm{v}} = h^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} = 0; \quad h^{\mathrm{i}} = h^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} = 1;$

Analogamente, qualunque sia la rappresentazione adottata, la relazione costitutiva di un doppio bipolo lineare può essere espressa in termini generali nella seguente forma implicita



$$\begin{cases} h^i_{11} i_1 + h^i_{12} i_2 + h^v_{11} v_1 + h^v_{12} v_2 = 0 \\ h^i_{21} i_1 + h^i_{22} i_2 + h^v_{21} v_1 + h^v_{22} v_2 = 0 \end{cases}$$

esempio:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}\, i_1 + r_{12}\, i_2 \\ v_2 = r_{21}\, i_1 + r_{22}\, i_2 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} h^i_{11} = r_{11};\ h^i_{12} = r_{12};\ h^i_{21} = r_{21};\ h^i_{22} = r_{22}; \\ h^v_{11} = h^v_{22} = 1;\ h^v_{12} = h^v_{21} = 0; \end{cases}$$

Si consideri un circuito lineare avente R rami ed N nodi nel quale agiscono N_{gi} generatori indipendenti di corrente e N_{gv} generatori indipendenti di tensione. Assemblando in forma matriciale le relazioni costitutive di tutti i componenti il sistema risolvente completo si può esprimere in forma compatta come segue

$$\begin{cases} \mathbf{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{0} & N\mathrm{J}1 \ \text{ LKC} \\ \mathbf{L}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} & R-(N\mathrm{J}1) \ \text{ LKT} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}}\,\mathbf{i} + \mathbf{H}^{\mathrm{v}}\,\mathbf{v} = \mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}}\,\mathbf{i}_{\mathrm{g}} + \mathbf{H}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{g}} & R \text{ relazioni costitutive dei componenti} \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}}$ ($\mathbf{H}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}}$) è una matrice diagonale di dimensione $R \times N_{gi}$ ($R \times N_{gv}$) il cui generico elemento in posizione h,h vale $+1$ se sul ramo h è presente un generatore di corrente (di tensione) e zero altrimenti

Esprimendo la precedente in forma matriciale otteniamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}} & \mathbf{H}^{\mathrm{v}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\mathrm{g}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} \end{pmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{g}}$$

Ad esempio con riferimento al circuito considerato si ottiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}} & \mathbf{H}^{\mathrm{v}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} \end{pmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{g}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} \end{pmatrix} \mathbf{i}_{\mathrm{g}}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} i_{\mathrm{g}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_{\mathrm{g}}$$

Invertendo la matrice dei coefficienti (ciò è sempre possibile a condizione che il circuito sia non patologico) si ottiene la seguente espressione della soluzione

$$\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}} & \mathbf{H}^{\mathrm{v}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}}\end{pmatrix}\mathbf{i}_{\mathrm{g}}+\begin{bmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\\ \mathbf{H}^{\mathrm{i}} & \mathbf{H}^{\mathrm{v}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{H}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}}\end{pmatrix}\mathbf{v}_{\mathrm{g}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} i_h &= \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gi}}} \sim_{hk} i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gv}}} g_{hk} v_{g\,k} \\ v_h &= \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gi}}} r_{hk} i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gv}}} {}_{hk} v_{g\,k} \end{aligned} \qquad h=1,\ldots,R$$

La corrente e la tensione in ciascun ramo di un circuito lineare sono esprimibili come combinazione lineare della correnti e delle tensioni impresse dai generatori indipendenti

I coefficienti di proporzionalità sono detti **coefficienti di rete**

guadagno di corrente

$$\sim_{hk}=\left.\frac{i_h}{i_{g\,k}}\right|_{\substack{i_{g\,j}=0\ \forall j\neq k\\ v_{g\,j}=0\ \forall j}}$$

conduttanza di ingresso (k=h)
conduttanza di trasferimento (k÷h)

$$g_{hk}=\left.\frac{i_h}{v_{g\,k}}\right|_{\substack{i_{g\,j}=0\ \forall j\\ v_{g\,j}=0\ \forall j\neq k}}$$

resistenza di ingresso (k=h)
resistenza di trasferimento (k÷h)

$$r_{hk}=\left.\frac{v_h}{i_{g\,k}}\right|_{\substack{i_{g\,j}=0\ \forall j\neq k\\ v_{g\,j}=0\ \forall j}}$$

guadagno di tensione

$${}_{hk}=\left.\frac{v_h}{v_{g\,k}}\right|_{\substack{i_{g\,j}=0\ \forall j\\ v_{g\,j}=0\ \forall j\neq k}}$$

Il generico coefficiente x_{hk} può essere calcolato/misurato spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno del circuito fuorché quello agente sul ramo k, calcolando/misurando la grandezza (corrente o tensione) di interesse sul ramo h e facendone il rapporto. Data la proporzionalità tra tale grandezza e quella impressa sul ramo k e dovendone considerare il rapporto risulta che ciascun coefficiente è indipendente dal valore delle grandezze impresse.

Circuito lineare inerte

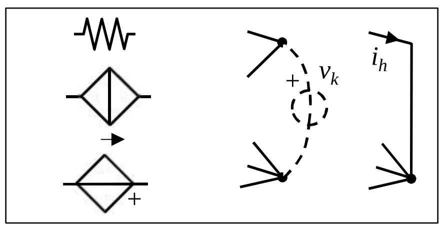
Un circuito lineare nel quale siano spenti tutti i generatori indipendenti si dice inerte (tale circuito contiene solo resistori, generatori pilotati e doppi bipoli resistivi)

Un generatore di tensione spento (i.e. con tensione impressa $v_g = 0$) è equivalente ad un corto circuito. Un generatore di corrente spento (i.e. con corrente impressa $i_g = 0$) è equivalente ad un circuito aperto. Si può allora assumere che in ogni ramo della rete sia presente un generatore di tensione spento e tra ogni coppia di nodi sia presente un generatore di corrente spento.

Ciò comporta che, in termini generali, un coefficiente di rete possa essere definito relativamente ad una qualunque combinazione di rami e/o coppie di nodi di un circuito inerte

Esempio: conduttanza di trasferimento tra le porte h e k

Circuito inerte



$$g_{hk} = \frac{i_h}{v_k}$$

Proprietà di reciprocità dei circuiti lineari

Un circuito inerte costituito da bipoli lineari è necessariamente reciproco rispetto a qualsiasi paio di rami e rispetto a qualunque paio di coppie di nodi

Dimostrazione: Si consideri un circuito a R rami. Si introduca in serie al ramo h un generatore di tensione la cui tensione impressa è v_g. Sia i'_i la corrente imposta da tale generatore nell'i-esimo ramo. La tensione del i-esimo ramo sarà $v'_i = r_i\, i'_i$ se $i \neq h$ e $v'_i = v_g + r_i\, i'_i$ se $i = h$. Si introduca ora il medesimo generatore in serie al ramo k. Sia i''_i la corrente imposta da tale generatore nell'i-esimo ramo. La tensione dell'i-esimo ramo sarà $v''_i = r_i\, i''_i$ se $i \neq k$ e $v''_i = v_g + r_i\, i''_i$ se $i = k$. Entrambi gli insiemi di corrente di ramo i' e i'' rispettano le LKC. Entrambi gli insiemi di tensioni di ramo v' e v'' rispettano le LKT. È possibile dunque applicare il teorema di Tellegen ai prodotti incrociati $v'_i\, i''_i$ e $v'_i\, i''_i$. Si ottiene quindi

$$\sum_{i=1}^{R} v_i'\, i_i'' = 0 \qquad \sum_{i=1}^{R} v_i''\, i_i' = 0$$

da cui

$$v_g\, i_h'' = -\sum_{i=1}^{R} r_i\, i_i'\, i_i'' \qquad v_g\, i_k' = -\sum_{i=1}^{R} r_i\, i_i''\, i_i'$$

Data l'arbitrarietà di v_g si ottiene quindi $i''_h = i'_k$, il che prova la reciprocità del circuito rispetto ai due generici rami h e k. Con considerazioni analoghe è possibile dimostrare la reciprocità del circuito rispetto a qualunque paio di coppie di nodi.

Un circuito inerte costituito da bipoli lineari e doppi bipoli (o m-porte) lineari è reciproco rispetto a qualsiasi paio di rami e rispetto a qualunque paio di coppie di nodi se è solo se i doppi bipoli (o m-porte) in esso presenti sono reciproci

Dimostrazione: Si consideri un circuito a R rami in cui è presente un doppio bipolo caratterizzato dall matrice $\mathbf{R}$. Siano p e q i rami corrispondenti alle sue porte. Si introduca in serie al ramo h un generatore di tensione la cui tensione impressa è v_g. Sia i'_i la corrente imposta da tale generatore nell'i-esimo ramo. Sia $\mathbf{i}'$ il vettore delle correnti imposte nel doppio bipolo ($\mathbf{i}'^t = [i'_p , i'_q]$). La tensione dell'i-esimo ramo sarà $v'_i = r_i\, i'_i$ se $i \neq h,p,q$ e $v'_i = v_g + r_i\, i'_i$ se $i = h$. Il vettore delle tensioni dei rami p e q sarà $\mathbf{v}'=\mathbf{R}\,\mathbf{i}'$. Si introduca ora il medesimo generatore in serie al ramo k. Sia i''_i la corrente imposta da tale generatore nell'i-esimo ramo. La tensione dell'i-esimo ramo sarà $v''_i = r_i\, i''_i$ se $i \neq k, p, q$ e $v''_i = v_g + r_i\, i''_i$ se $i = k$. Sia $\mathbf{i}''$ il vettore delle correnti del doppio bipolo. Il vettore delle tensioni dei rami p e q sarà $\mathbf{v}''=\mathbf{R}\,\mathbf{i}''$. Entrambi gli insiemi di corrente di ramo i' e i'' rispettano le LKC. Entrambi gli insiemi di tensioni di ramo v' e v'' rispettano le LKT. È possibile dunque applicare il teorema di Tellegen ai prodotti incrociati $v'_i\, i''_i$ e $v'_i\, i''_i$. Si ottiene quindi

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} v_i'\, i_i'' + \mathbf{v}'^{t}\, \mathbf{i}'' = 0 \qquad\qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} v_i''\, i_i' + \mathbf{v}''^{t}\, \mathbf{i}' = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$v_g\, i_h'' = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} r_i\, i_i'\, i_i'' - \left(\mathbf{R}\,\mathbf{i}'\right)^{t} \mathbf{i}'' \qquad\qquad v_g\, i_k' = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} r_i\, i_i''\, i_i' - \left(\mathbf{R}\,\mathbf{i}''\right)^{t} \mathbf{i}'$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$v_g\, i_h'' = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} r_i\, i_i'\, i_i'' - \mathbf{i}'^{t}\, \mathbf{R}^{t}\, \mathbf{i}'' \qquad\qquad v_g\, i_k' = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{R} r_i\, i_i''\, i_i' - \mathbf{i}'^{t}\, \mathbf{R}\, \mathbf{i}''$$

Data l'arbitrarietà di v_g si ottiene quindi che $i''_h = i'_k$ (i.e. il circuito è reciproco rispetto ai due generici rami h e k) se e solo se $\mathbf{R}=\mathbf{R}^t$, ossia se è solo se il doppio bipolo è reciproco ($r_{12} = r_{21}$). Con considerazioni analoghe è possibile dimostrare che la reciprocità del doppio bipolo è condizione necessaria e sufficiente anche per la reciprocità del circuito rispetto a qualunque paio di coppie di nodi.

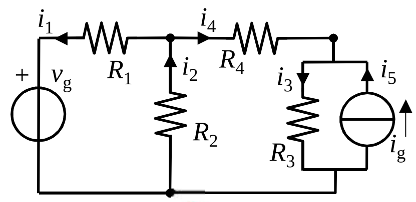
Proprietà di sovrapposizione

Per un circuito lineare è possibile enunciare la seguente proprietà di sovrapposizione

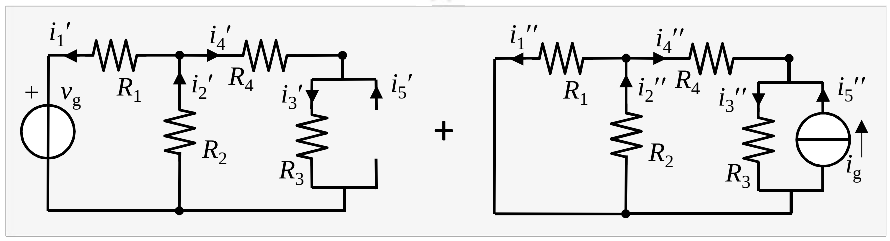
> La corrente (tensione) che si stabilisce in un ramo del circuito a causa della presenza contemporanea di più generatori indipendenti è ottenibile come somma dei contributi dovuti a ciascun generatore considerato agente singolarmente

Ciò comporta che in un circuito all'interno del quale sono presenti N_{gi} e N_{gv} generatori indipendenti di corrente e di tensione rispettivamente sia scomponibile in $N_{gi} + N_{gv}$ circuiti distinti all'interno dei quali agisce un solo generatore

La proprietà di sovrapposizione può essere sfruttata per risolvere rapidamente circuiti che non contengono generatori pilotati. Infatti in tal caso ciascuno dei sotto circuiti contiene, oltre ai resistori, un solo generatore (indipendente) e può essere quindi ridotto ad una sola maglia elementare attraverso equivalenze serie/parallelo e/o trasformazioni stella-triangolo. In questo modo è possibile calcolare rapidamente il contributo di ciascun generatore alla corrente e alla tensione di ciascun ramo. La corrente e le tensioni complessive possono essere ottenute sommando infine i diversi contributi. Questa procedura è mostrata nel seguente esempio.



$i_1 = i_1' + i_1''$
$i_2 = i_2' + i_2''$
$i_3 = i_3' + i_3''$
$i_4 = i_4' + i_4''$
$i_5 = i_5' + i_5''$



$$i_1' = -\frac{v_g}{R_1 + \dfrac{R_2\,(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} \qquad i_2' = \frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4}\, i_1'$$

$$i_3' = i_4' = -\frac{R_2}{R_2+R_3+R_4}\, i_1' \qquad i_5' = 0$$

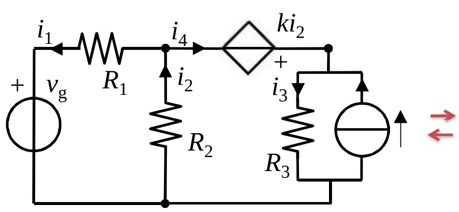
$$i_3'' = \frac{R_4 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}{R_3+R_4+\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}\, i_g \qquad i_5'' = i_g$$

$$i_2'' = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, i_4''$$

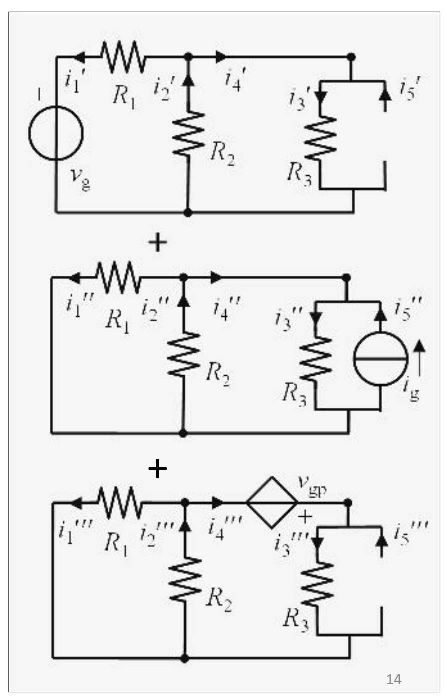
$$i_4'' = -\frac{R_3}{R_3+R_4+\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}\, i_g \qquad i_1'' = -\frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_4''$$

La proprietà di sovrapposizione può essere sfruttata anche per risolvere circuiti in cui siano presenti generatori dipendenti attraverso i seguenti passaggi:

1. Si suddivide il circuito in tanti sottocircuiti quanti sono i generatori, sia indipendenti che pilotati. In ciascun sottocircuito agisce un solo generatore, indipendente oppure pilotato.



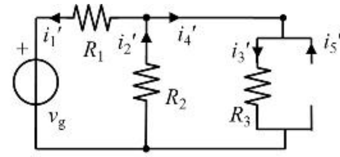
$i_1 = i_1' + i_1'' + i_1'''$
$i_2 = i_2' + i_2'' + i_2'''$
$i_3 = i_3' + i_3'' + i_3'''$
$i_4 = i_4' + i_4'' + i_4'''$
$i_5 = i_5' + i_5'' + i_5'''$



2. Si determina il contributo di ciascun generatore alla corrente e alla tensione di ogni ramo. Per quanto riguarda il generatore pilotato lo si tratta come se fosse un generatore indipendente la cui grandezza impressa però non è nota. Si ottiene così un relazione di proporzionalità tra le grandezze di ramo (corrente, tensione) e la grandezza impressa. In particolare si ottiene una relazione di proporzionalità tra la grandezza di pilotaggio e quella impressa dal generatore pilotato.

$$i_1' = -\frac{v_g}{R_1 + R_2 R_3/(R_2+R_3)} \qquad i_2' = i_1' R_3/(R_2+R_3)$$

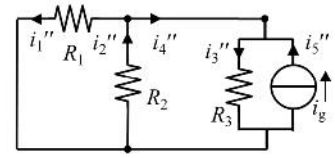
$$i_3' = i_4' = -i_1' R_2/(R_2+R_3) \qquad i_5' = 0$$



$$i_3'' = \frac{R_1 R_2/(R_1+R_2)}{R_3 + R_1 R_2/(R_1+R_2)} i_g \qquad i_5'' = i_g$$

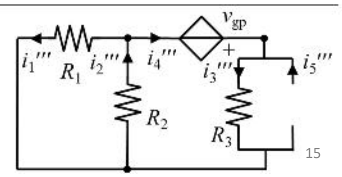
$$i_2'' = i_4'' R_1/(R_1+R_2)$$

$$i_4'' = -\frac{R_3}{R_3 + R_1 R_2/(R_1+R_2)} i_g \qquad i_1'' = -i_4'' R_2/(R_1+R_2)$$



$$i_4''' = i_3''' = \frac{v_{\mathrm{gp}}}{R_3 + R_1 R_2/(R_1+R_2)} \qquad i_1''' = -i_4''' R_2/(R_1+R_2)$$

$$i_2''' = i_4''' R_1/(R_1+R_2) \qquad i_5''' = 0$$



3. Si considera la relazione di definizione del generatore pilotato. La grandezza impressa sarà composta da tanti contributi noti dovuti ai generatori indipendenti, nonché da un contributo proporzionale ad essa stessa. Si ottiene quindi un'equazione in cui l'unica incognita è la grandezza impressa che può esser quindi determinata (nel caso siano presenti N_{gp} generatori pilotati è possibile ottenere un insieme di N_{gp} equazioni in cui le incognite sono le N_{gp} grandezze impresse)

$$v_{\mathrm{gp}} = k\, i_2 = k\left(i_2' + i_2'' + i_2'''\right)$$

$$\downarrow$$

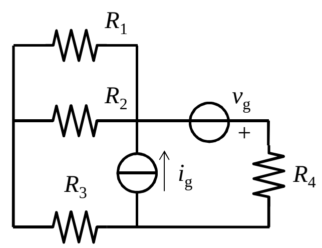
$$v_{\mathrm{gp}} = k\left(-\frac{R_3/(R_2+R_3)}{R_1 + R_2 R_3/(R_2+R_3)} v_g - \frac{R_1 R_3/(R_1+R_2)}{R_3 + R_1 R_2/(R_1+R_2)} i_g + \frac{R_1/(R_1+R_2)}{R_3 + R_1 R_2/(R_1+R_2)} v_{\mathrm{gp}} \right)$$

$$\downarrow$$

$$v_{\mathrm{gp}} = -\frac{k\, G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3\left(1 - k\, G_2\right)} v_g - \frac{k\, G_2}{G_1 + G_2 + G_3\left(1 - k\, G_2\right)} i_g$$

Esercizio 7.1

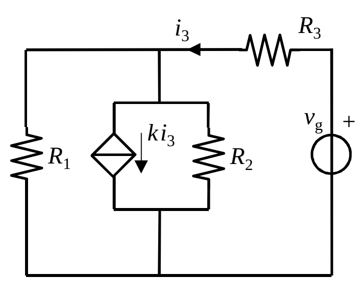
Risolvere il circuito di figura adoperando la proprietà di sovrapposiozne degli effettti



$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 1\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$v_g = 24$ V
$i_g = 16$ A

Esercizio 7.2

Risolvere il circuito di figura adoperando la proprietà di sovrapposiozne degli effettti

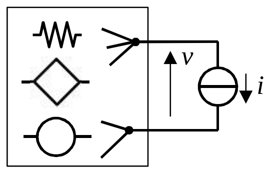


$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$v_g = 12$ V
$k = 2$

Rappresentazioni una rete bipolare lineare (Teoremi di Thevenin e Norton)

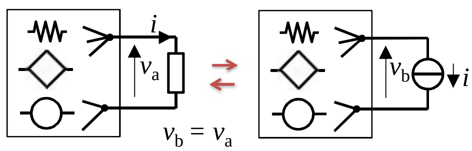
Si consideri un circuito adinamico lineare, comunque complesso, accessibile attraverso due terminali. Tale circuito costituisce un bipolo. Ci proponiamo di valutare la tensione v che si stabilisce ai suoi capi quando nei suoi terminali circola una generica corrente i. In altri termini ci proponiamo di trovare la rappresentazione in corrente del bipolo, ossia la relazione che esiste tra la tensione v ai suoi capi e la corrente i che lo attraversa.

bipolo lineare composto



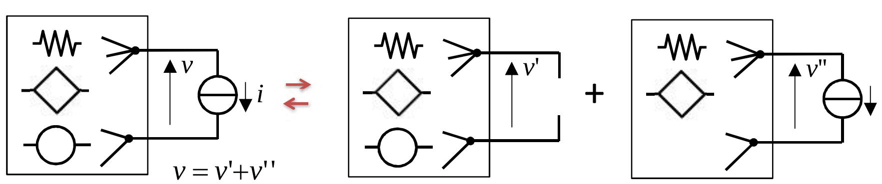
A tal fine colleghiamo al bipolo un generatore di corrente che impone la corrente i. Assumiamo che tale collegamento sia possibile, ossia che il circuito così costruito non sia patologico.

Si noti che la proprietà di sostituzione assicura che, assegnata la corrente i, la tensione ai capi del bipolo è la medesima qualunque sia il bipolo esterno ad esso collegato, purché questo eroghi la corrente i



L'utilizzo del generatore di corrente non lede quindi la generalità delle conclusioni. La relazione v-i è indipendente dal tipo di bipolo esterno

Utilizzando la proprietà di sovrapposizione possiamo scomporre il circuito così ottenuto in due circuiti distinti: un primo circuito nel quale agiscono solo i generatori indipendenti presenti all'interno del bipolo ed un secondo circuito in cui agisce solo il generatore di corrente esterno. La tensione v sarà ottenibile dalla somma dei due contributi v' e v'' indicati in figura



La tensione v' coincide con la tensione a vuoto ai capi del bipolo ed è indipendente dalla corrente i che circola nel bipolo in condizioni di carico. È consuetudine indicare tale tensione con v_{eq}. Indicando con N_{gi} e N_{gv} rispettivamente il numero di generatori indipendenti di corrente e di tensione presenti all'interno del bipolo essa può essere espressa come

$$v_{\mathrm{eq}} = v' = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gi}}} r_k i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gv}}} {}_k v_{g\,k}$$

La tensione v'' è dovuta esclusivamente al generatore di corrente esterno. Essa è proporzionale alla corrente impressa i attraverso la resistenza di ingresso del bipolo inerte associato. È consuetudine indicare tale resistenza di ingresso con r_{eq}. La sue espressione è

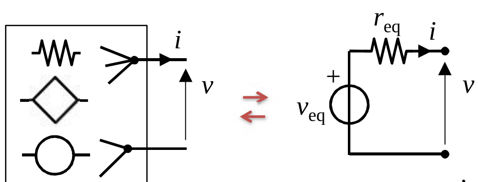
$$r_{eq} = -\frac{v''}{i} = -\frac{v}{i}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

Si ottiene quindi

$$v = v' + v'' = v_{eq} - r_{eq}\, i$$

da cui discende la seguente proprietà generale nota come **Teorema di Thevenin**:

Qualunque bipolo lineare che ammetta la rappresentazione in corrente è equivalente ad un bipolo costituito da un generatore indipendente di tensione e da una resistenza in serie. La tensione v_{eq} impressa dal generatore è quella che si stabilisce a vuoto ai capi del bipolo e la resistenza r_{eq} è la resistenza del bipolo vista dai terminali di ingresso quando i generatori indipendenti al suo interno sono spenti.

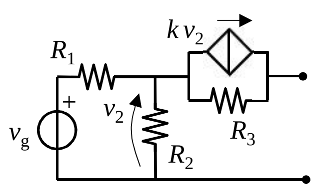


$$v = v_{eq} - r_{eq}\, i$$

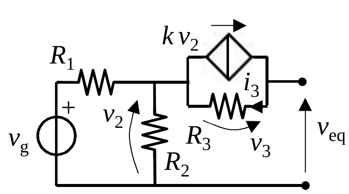
$$v_{eq} = v\big|_{i=0} = \sum_{k=1}^{N_{gi}} r_k i_{g_k} + \sum_{k=1}^{N_{gv}} {}_k v_{g_k}$$

$$r_{eq} = -\frac{v}{i}\bigg|_{v_{eq}=0} = -\frac{v}{i}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

Si vuol determinare, a titolo di esempio, la rappresentazione di Thevenin del bipolo di figura



1. Determinazione di v_{eq}

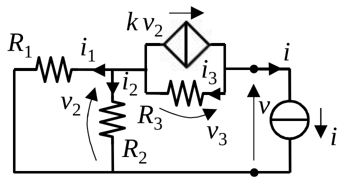


$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g$$

$$v_3 = R_3\, i_3 = R_3\, k\, v_2 = k\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2} v_g$$

$$\boxed{v_{eq} = v_2 + v_3 = \left(1 + k\, R_3\right)\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g}$$

2. Determinazione di r_{eq}



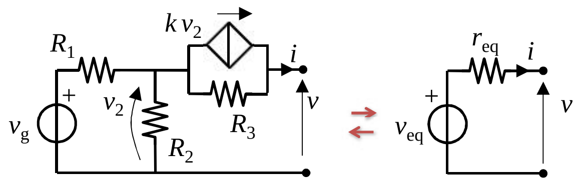
$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1+R_2}\,i \qquad v_2 = R_2\, i_2 = -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\,i$$

$$v_3 = R_3\, i_3 = R_3\,(k\, v_2 - i) = -R_3\,\frac{R_1 + R_2 + k\, R_1 R_2}{R_1+R_2}\,i$$

$$v = v_2 + v_3 = -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + k\, R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2}\,i$$

$$\boxed{r_{eq} = -\frac{v}{i} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + k\, R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2}}$$

Per la determinazione di r_{eq} è necessario risolvere il circuito in forma simbolica. In alternativa è possibile assegnare un valore arbitrario alla corrente i, calcolare il corrispondente valore numerico della tensione v e farne il rapporto. Si ottiene quindi

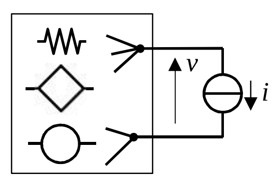


$$v_{eq} = (1 + k\, R_3)\frac{R_2}{R_1+R_2}\,v_g$$

$$r_{eq} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + k\, R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2}$$

Si noti che sia la tensione che la resistenza equivalente possono risultare positive, nulle o negative a seconda del valore del parametro k. In assenza di generatori pilotati la resistenza è necessariamente positiva.

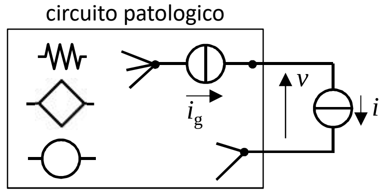
La rappresentazione di Thevenin di un bipolo è possibile se e solo se la LKC non risulta violata qualunque sia il valore di corrente nei suoi terminali. In altri termini la rappresentazione di Thevenin è possibile se e solo se il circuito ottenuto collegando ad esso un generatore di corrente non è patologico



circuito non patologico

Si consideri il seguente circuito costituito da un bipolo generico in serie ad un generatore di corrente. Ad esso non è possibile applicare nessuna corrente diversa da i_g (neppure $i = 0$ è ammessa, quindi esso non può operare a vuoto) pertanto non è possibile determinare la tensione che si stabilisce ai suoi capi in funzione della corrente. Il bipolo non ammette quindi la rappresentazione in corrente (di Thevenin).

circuito patologico

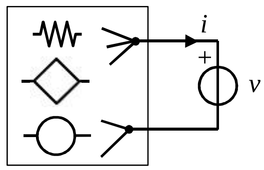


Si noti che ai fini del circuito esterno tale bipolo è equivalente al solo generatore di corrente i_g. La non esistenza della rappresentazione di Thevenin è il semplice riflesso del fatto che non è possibile rappresentare un generatore di corrente indipendente mediante un generatore di tensione

Si noti che in alcuni casi la non esistenza della rappresentazione di Thevenin può non essere evidente (in presenza di generatori pilotati). In ogni caso se essa non esiste entrambi i circuiti per la determinazione di v_{eq} e r_{eq} risultano impossibili o indeterminati

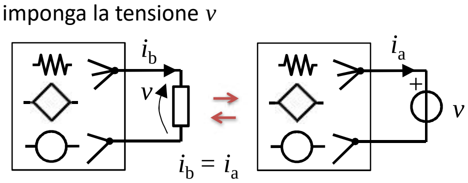
Si consideri ancora un bipolo adinamico lineare la cui struttura interna può essere comunque complessa. Ci proponiamo ora di valutare la corrente i che circola nei suoi terminali quando ai suoi capi si stabilisce una generica tensione v. In altri termini ci proponiamo di trovare la rappresentazione in tensione del bipolo, ossia la relazione che esiste tra la corrente i che lo attraversa e la tensione v ai suoi capi.

bipolo lineare composto



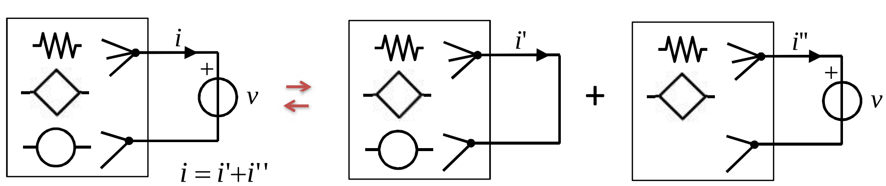
A tal fine colleghiamo al bipolo un generatore di tensione che impone la tensione v. Assumiamo che tale collegamento sia possibile, ossia che il circuito così costruito non sia patologico.

La proprietà di sostituzione assicura che, assegnata la tensione v, la corrente ai capi del bipolo è la medesima qualunque sia il bipolo esterno ad esso collegato, purché questo imponga la tensione v



L'utilizzo del generatore di tensione non lede quindi la generalità delle conclusioni. La relazione i-v è indipendente dal tipo di bipolo esterno

Utilizzando la proprietà di sovrapposizione possiamo scomporre il circuito ottenuto in due circuiti distinti: un primo circuito nel quale agiscono solo i generatori indipendenti presenti all'interno del bipolo ed un secondo circuito in cui agisce solo il generatore di tensione esterno. La corrente i sarà ottenibile dalla somma dei due contributi i' e i'' indicati in figura



La corrente i' coincide con la corrente di corto circuito del bipolo ed è indipendente dalla tensione v che si stabilisce ai sui capi in condizioni di carico. È consuetudine indicare tale corrente con i_{eq}. Indicando con N_{gi} e N_{gv} rispettivamente il numero di generatori indipendenti di corrente e di tensione presenti all'interno del bipolo essa può essere espressa come

$$i_{eq} = i' = \sum_{k=1}^{N_{gi}} \sim_k i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{gv}} g_k v_{g\,k}$$

La corrente i'' è dovuta esclusivamente al generatore di tensione esterno. Essa è proporzionale alla tensione impressa v attraverso la conduttanza di ingresso del bipolo inerte associato. È consuetudine indicare tale conduttanza di ingresso con g_{eq}. La sua espressione è

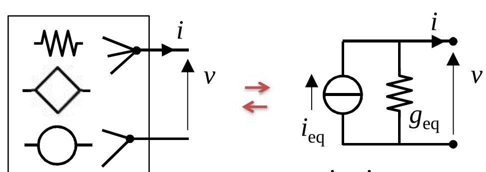
$$g_{eq} = -\frac{i''}{v} = -\frac{i}{v}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

Si ottiene quindi

$$i = i' + i'' = i_{eq} - g_{eq}\, v$$

da cui discende la seguente proprietà generale nota come **Teorema di Norton**:

Qualunque bipolo lineare che ammetta la rappresentazione in tensione è equivalente ad un bipolo costituito da un generatore indipendente di corrente e da una conduttanza in parallelo. La corrente i_{eq} impressa dal generatore è quella che si stabilisce nel bipolo in condizioni di corto circuito e la conduttanza g_{eq} è la conduttanza del bipolo vista dai terminali di ingresso quando i generatori indipendenti al suo interno sono spenti.

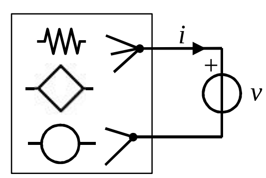


$$i = i_{eq} - g_{eq}\, v$$

$$i_{eq} = i\big|_{v=0} = \sum_{k=1}^{N_{gi}} \sim_k i_{g_k} + \sum_{k=1}^{N_{gv}} g_k v_{g_k}$$

$$g_{eq} = -\frac{i}{v}\bigg|_{i_{eq}=0} = -\frac{i}{v}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

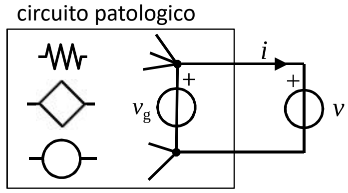
La rappresentazione di Norton di un bipolo è possibile se e solo se la LKT non risulta violata qualunque sia il valore di tensione nei suoi terminali. In altri termini la rappresentazione di Norton è possibile se e solo se il circuito ottenuto collegando ad esso un generatore di tensione non è patologico



circuito non patologico

Si consideri il seguente bipolo costituito da un bipolo generico in parallelo ad un generatore di tensione. Ad esso non è possibile applicare nessuna tensione diversa da v_g (neppure $v = 0$ è ammessa, quindi esso non può operare in corto circuito) pertanto non è possibile determinare la corrente che si stabilisce nei suoi terminali in funzione della tensione. Il bipolo non ammette quindi la rappresentazione in tensione (di Norton).

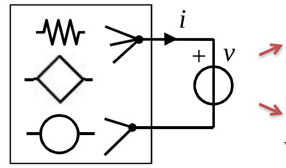
circuito patologico

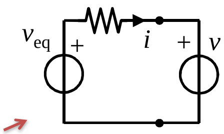


Si noti che ai fini del circuito esterno tale bipolo è equivalente al solo generatore di tensione v_g. La non esistenza della rappresentazione di Norton è il semplice riflesso del fatto che non è possibile rappresentare un generatore di tensione indipendente mediante un generatore di corrente.

Si noti che in alcuni casi la non esistenza della rappresentazione di Norton può non essere evidente (in presenza di generatori pilotati). In ogni caso se essa non esiste entrambi i circuiti per la determinazione di v_{eq} e r_{eq} risultano impossibili o indeterminati

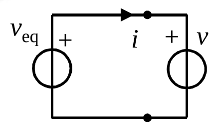
Si consideri un bipolo che ammette la rappresentazione di Thevenin





$r_{eq} \neq 0$
Non patologico

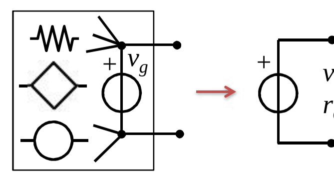
$$v = v_{eq} - r_{eq}\, i$$



$r_{eq} = 0$
Patologico

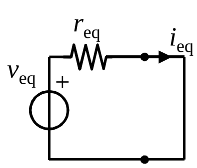
Se la resistenza equivalente r_{eq} è non nulla allora il circuito ottenuto collegando il bipolo ad un generico generatore di tensione è necessariamente non patologico, pertanto il bipolo ammette anche la rappresentazione di Norton. Al contrario se r_{eq} è nulla allora il suddetto circuito è patologico e il bipolo non ammette la rappresentazione di Norton.

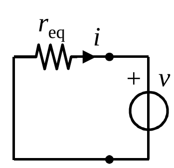
Ciò è il riflesso del fatto che se $r_{eq} = 0$ è allora il bipolo è equivalente ad un generatore di tensione indipendente ($v = v_g\ \forall i$) e non può essere rappresentato mediante un generatore di corrente.



$v_{eq} = v_g$
$r_{eq} = 0$

Parametri del bipolo di Norton

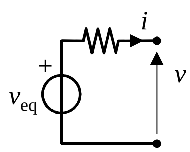




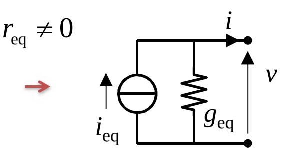
$$i_{eq} = i\big|_{v=0} = \frac{v_{eq}}{r_{eq}}$$

$$g_{eq} = -\frac{i}{v}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}} = -\frac{i}{v}\bigg|_{v_{eq}=0} = \frac{1}{r_{eq}}$$

Se la resistenza equivalente r_{eq} è non nulla la rappresentazione di Norton esiste e i suoi parametri possono essere determinati sulla base dei parametri della rappresentazione di Thevenin



$r_{eq} \neq 0$

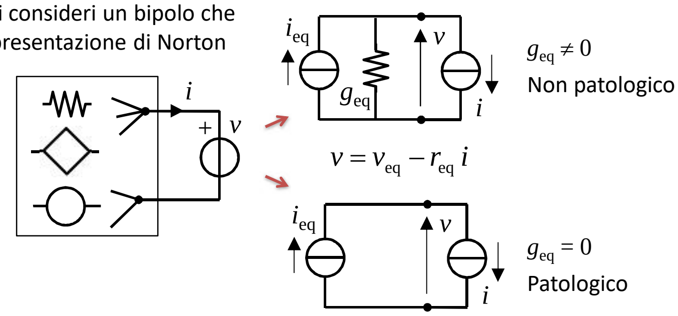


$$v = v_{eq} - r_{eq}\, i \qquad i = i_{eq} - g_{eq}\, v$$

$$i_{eq} = \frac{v_{eq}}{r_{eq}}$$

$$g_{eq} = \frac{1}{r_{eq}}$$

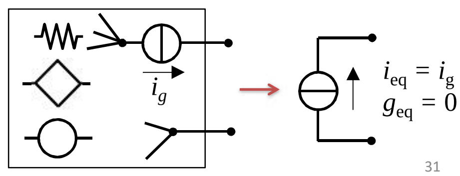
Analogamente si consideri un bipolo che ammette la rappresentazione di Norton



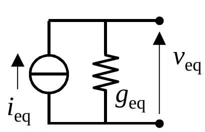
$$v = v_{eq} - r_{eq}\, i$$

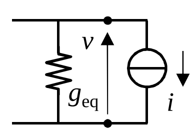
Se la conduttanza equivalente g_{eq} è non nulla allora il circuito ottenuto collegando il bipolo ad un generico generatore di corrente è necessariamente non patologico, pertanto il bipolo ammette anche la rappresentazione di Thevenin. Al contrario se g_{eq} è nulla allora il suddetto circuito è patologico e il bipolo non ammette la rappresentazione di Thevenin.

Ciò è il riflesso del fatto che se $g_{eq} = 0$ è allora il bipolo è equivalente ad un generatore di corrente indipendente ($i = i_g\ \forall v$) e non può essere rappresentato mediante un generatore di tensione.



Parametri del bipolo di Thevenin

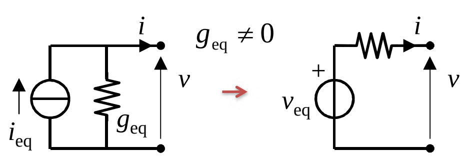




$$v_{eq} = v\big|_{i=0} = \frac{i_{eq}}{g_{eq}}$$

$$r_{eq} = -\frac{v}{i}\bigg|_{\substack{i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}} = -\frac{v}{i}\bigg|_{i_{eq}=0} = \frac{1}{g_{eq}}$$

Se la conduttanza equivalente g_{eq} è non nulla la rappresentazione di Thevenin esiste e i suoi parametri possono essere determinati sulla base dei parametri della rappresentazione di Norton

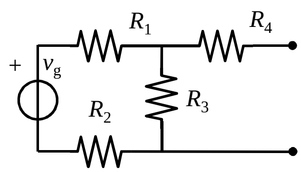


$$i = i_{eq} - g_{eq}\, v \qquad v = v_{eq} - r_{eq}\, i$$

$$v_{eq} = \frac{i_{eq}}{g_{eq}} \qquad r_{eq} = \frac{1}{g_{eq}}$$

Esercizio 7.3

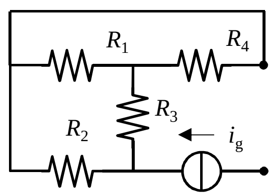
Determinare la rappresentazione di Norton del bipolo di figura



$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 3\ \Omega$
$R_4 = 0.5\ \Omega$
$v_g = 12$ V

Esercizio 7.4

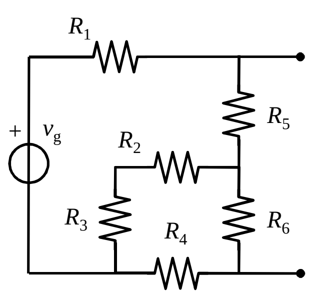
Determinare, se esistono, le rappresentazioni di Thevenin e Norton del bipolo di figura



$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 3\ \Omega$
$R_4 = 0.5\ \Omega$
$i_g = 6$ A

Esercizio 7.5

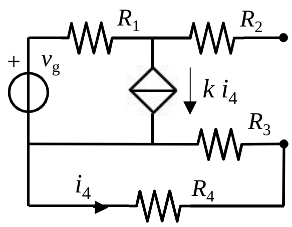
Determinare le rappresentazione di Thevenin e Norton del bipolo di figura



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 0.5\ \Omega$
$R_3 = 1\ \Omega$
$R_4 = 1\ \Omega$
$R_5 = 1.5\ \Omega$
$R_6 = 1.5\ \Omega$
$v_g = 10$ V

Esercizio 7.6

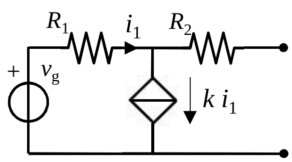
Determinare la rappresentazione di Thevenin del bipolo di figura



$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 0.5\ \Omega$
$k = 0.5$
$v_g = 8\ \text{V}$

Esercizio 7.7

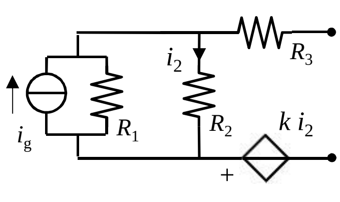
Determinare la rappresentazione di Norton del bipolo di figura



$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$k = 0.5$
$v_g = 8\ \text{V}$

Esercizio 7.8

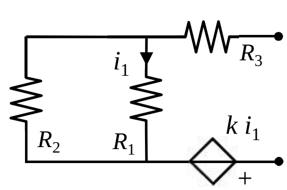
Determinare la rappresentazione di Norton del bipolo di figura



$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 0.5\ \Omega$
$k = 2\ \Omega$
$i_g = 8\ \text{A}$

Esercizio 7.9

Determinare la rappresentazione di Thevenin del bipolo di figura

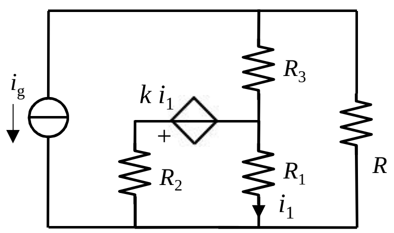


$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$k = 0.5$

Esercizio 7.10

Determinare la corrente che attraversa il resistore R nei seguenti casi:

a. $R = 0.1\ \Omega$ b. $R = 1\ \Omega$ c. $R = 10\ \Omega$

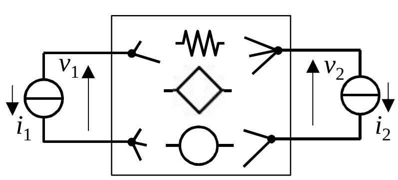


$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 2.5\ \Omega$
$k = 1.5\ \Omega$
$i_g = 6$ A

+

Rappresentazione in corrente di un doppio bipolo lineare non inerte

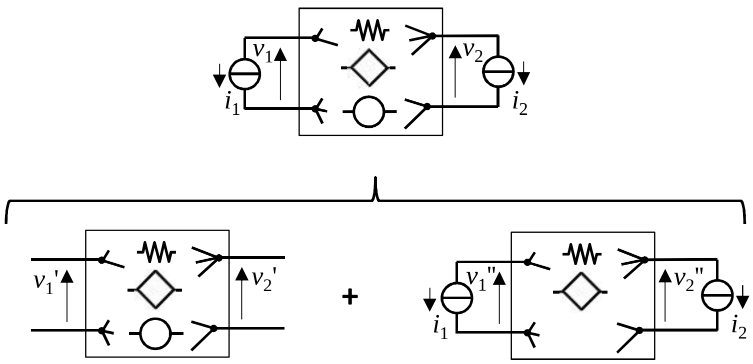
Si consideri un circuito adinamico lineare, comunque complesso, accessibile attraverso due porte (i.e. due coppie di terminali). Tale circuito costituisce un doppio bipolo. Ci proponiamo di valutare le tensioni v_1 e v_2 che si stabiliscono ai capi delle due porte quando in esse circolano le generiche correnti i_1 e i_2.



A tal fine colleghiamo al doppio bipolo due generatori di corrente che impongono le correnti i_1 e i_2. Assumiamo che tale collegamento sia possibile, ossia che il circuito così costruito non sia patologico.

La proprietà di sostituzione assicura che, assegnate le correnti i_1 e i_2 alle porte, le tensioni siano le medesime qualunque siano i bipoli esterni ad esso collegati (purché questi siano interessati dalle correnti i_1 e i_2)

Utilizzando la proprietà di sovrapposizione possiamo scomporre il circuito così ottenuto in due circuiti distinti: un primo circuito nel quale agiscono solo i generatori indipendenti presenti all'interno del doppio bipolo, un secondo circuito in cui agiscono solo i generatori di corrente esterni i_1 e i_2. Ciascuna tensione di porta sarà ottenibile dalla somma dei contributi v' , v'' indicati in figura



$$v_1 = v_1' + v_1''$$
$$v_2 = v_2' + v_2''$$

La tensione v_1' (v_2') coincide con la tensione a vuoto ai capi della porta 1 (2) ed è indipendente dalle correnti che circolano in entrambe le porte in condizione di carico. È consuetudine indicare tale tensione con $v_{1\mathrm{eq}}$ ($v_{2\mathrm{eq}}$). Indicando con N_{gi} e N_{gv} rispettivamente il numero di generatori indipendenti di corrente e di tensione presenti all'interno del bipolo essa può essere espressa come

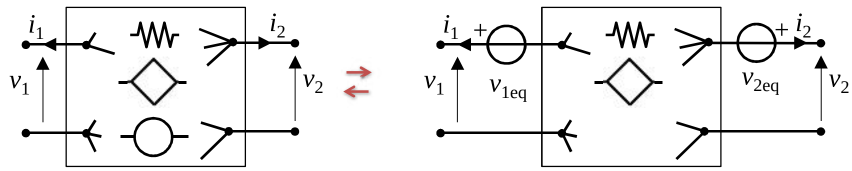
$$v_{1\mathrm{eq}} = v_1' = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gi}}} r_{1k} i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gv}}} {}_{1k} v_{g\,k}$$
$$v_{2\mathrm{eq}} = v_2' = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gi}}} r_{2k} i_{g\,k} + \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{gv}}} {}_{2k} v_{g\,k}$$

r_{1k} e ${}_{1k}$ (r_{1k} e ${}_{1k}$): resistenze di trasferimento e guadagni di tensione del circuito inerte associato

Le tensioni v_1'' e v_2'' sono dovute esclusivamente ai generatori di corrente esterno i_1 e i_2. Esse sono proporzionali alle correnti impresse i_1 e i_2 attraverso la resistenza di ingresso e la resistenza di trasferimento del doppio bipolo inerte associato.

$$v_1'' = -r_{11}\, i_1 - r_{12}\, i_2$$
$$v_2'' = -r_{21}\, i_1 - r_{22}\, i_2$$

Possiamo enunciare quindi la seguente proprietà generale: qualunque doppio bipolo lineare che ammetta la rappresentazione in corrente è equivalente ad un doppio bipolo costituito dal doppio bipolo inerte associato (rappresentato mediante la matrice **R**) e da due generatori indipendenti di tensione posti in serie a ciascuna porta.



$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1eq} \\ v_{2eq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Elementi della matrice della resistenze del doppio bipolo inerte associato

Tensioni a vuoto sulle due porte

Le tensioni $v_{1\mathrm{eq}}$ e $v_{2\mathrm{eq}}$ impresse dai generatori sono quelle che si stabiliscono sulle porte 1 e 2 rispettivamente quando entrambe lavorano a vuoto

$$v_{1eq} = v_1\Big|_{\substack{i_1=0 \\ i_2=0}}$$

$$v_{2eq} = v_2\Big|_{\substack{i_1=0 \\ i_2=0}}$$

I coefficienti sono r_{11}, r_{12} , r_{21} e r_{22} sono gli elementi della matrice della resistenze del bipolo inerte associato (definita nel capitolo 5).

$$r_{11} = -\frac{v_1}{i_1}\Bigg|_{\substack{i_2=0 \\ i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}} \qquad r_{12} = -\frac{v_1}{i_2}\Bigg|_{\substack{i_1=0 \\ i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

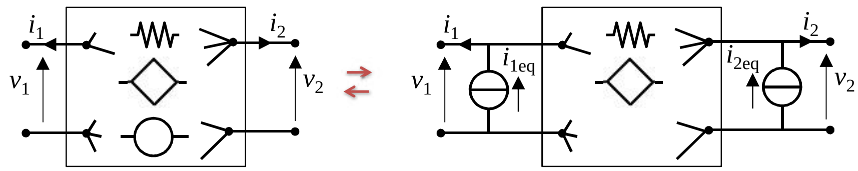
$$r_{21} = -\frac{v_2}{i_1}\Bigg|_{\substack{i_2=0 \\ i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}} \qquad r_{22} = -\frac{v_2}{i_2}\Bigg|_{\substack{i_1=0 \\ i_{g_k}=0\ \forall k \\ v_{g_k}=0\ \forall k}}$$

Nota: questi coefficienti coincidono esattamente con gli elementi della matrice **R** riportati nel capitolo 5. Il segno meno che qui compare è dovuto al fatto che in questo capitolo si sono assunte positive le correnti uscenti.

Procedendo in modo del tutto analogo quanto fatto per la rappresentazione in corrente è possibile introdurre le rappresentazioni in tensione, ibrida diretta e ibrida inversa doppi bipoli non inerti. Tali rappresentazioni sono esposte nel seguito.

Rappresentazione in tensione di un doppio bipolo lineare non inerte

Qualunque doppio bipolo lineare che ammetta la rappresentazione in tensione è equivalente ad un doppio bipolo costituito dal doppio bipolo inerte associato (rappresentato mediante la matrice $\mathbf{G}$) e da due generatori indipendenti di corrente posti in parallelo a ciascuna porta.



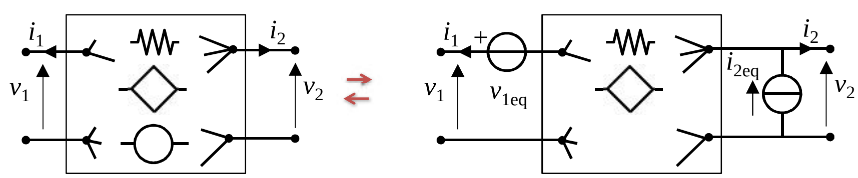
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{1eq} \\ i_{2eq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Elementi della matrice della conduttanze del doppio bipolo inerte associato

Correnti di cortocircuito sulle due porte

Rappresentazione ibrida diretta di un doppio bipolo lineare non inerte

Qualunque doppio bipolo lineare che ammetta la rappresentazione ibrida diretta è equivalente ad un doppio bipolo costituito dal doppio bipolo inerte associato (rappresentato mediante la matrice $\mathbf{H}$), da un generatore indipendente di tensione posto in serie alla prima porta e da un generatore indipendente di corrente posto in parallelo alla seconda porta.



Tensione a vuoto sulla porta 1 (porta 2 in corto circuito)

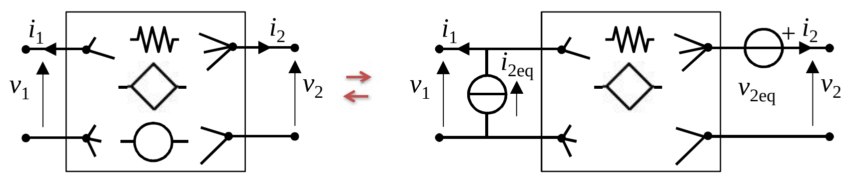
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1eq} \\ i_{2eq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & +h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Elementi dellla matrice ibrida diretta del doppio bipolo inerte associato

Corrente di cortocircuito sulla porta 2 (porta 1 a vuoto)

Rappresentazione ibrida inversa di un doppio bipolo lineare non inerte

Qualunque doppio bipolo lineare che ammetta la rappresentazione ibrida diretta è equivalente ad un doppio bipolo costituito dal doppio bipolo inerte associato (rappresentato mediante la matrice $\mathbf{H'}$), da un generatore indipendente di corrente posto in parallelo alla prima porta e da un generatore indipendente di tensione posto in serie alla seconda porta.



Corrente di cortocircuito sulla porta 1 (porta 2 a vuoto)

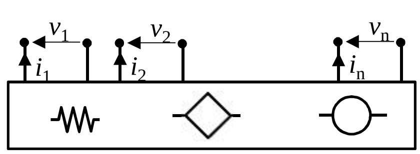
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{1eq} \\ v_{2eq} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +h'_{11} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & +h'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Elementi della matrice ibrida inversa del doppio bipolo inerte associato

Tensione a vuoto sulla porta 2 (porta 1 in corto circuito)

Rappresentazioni di m-porte adinamici lineari non inerti

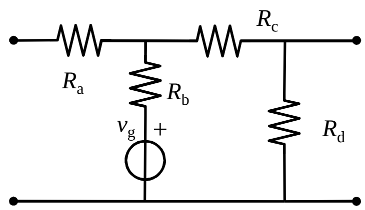
Tutto quanto esposto fino ad ora relativamente ai doppi bipoli lineari non inerti è generalizzabile ai componenti a m-porte



Per gli m-porte lineari non inerti sono definibili
- la rappresentazione in corrente: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{eq}$ J $\mathbf{R}\,\mathbf{i}$
- la rappresentazione in tensione: $\mathbf{i} = \mathbf{i}_{eq}$ J $\mathbf{G}\,\mathbf{v}$
- le rappresentazioni ibride

Esercizio 7.11

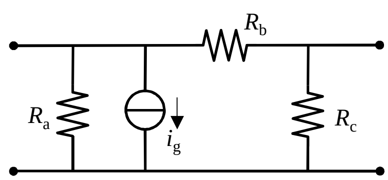
Determinare la rappresentazione ibrida diretta del doppio bipolo non inerte di figura



$R_a = 1\ \Omega$
$R_b = 4\ \Omega$
$R_c = 2\ \Omega$
$R_d = 2\ \Omega$
$v_g = 14\ \mathrm{V}$

Esercizio 7.12

Determinare la rappresentazione in tensione del doppio bipolo non inerte di figura



$R_a = 1\ \Omega$
$R_b = 1\ \Omega$
$R_c = 1\ \Omega$
$i_g = 6\ \mathrm{A}$