

9. Circuiti dinamici

Induttore. Potenza assorbita dall'induttore. Energia magnetica. Comportamento energetico dell'induttore. Condensatore. Potenza assorbita dal condensatore. Energia elettrostatica. Comportamento energetico del condensatore. Circuiti RL e RC del primo ordine. Equazione di stato e costante di tempo. Risposta libera e risposta forzata. Comportamento dei circuiti RL e RC con eccitazione costante e con eccitazione sinusoidale. Stabilità. Circuiti LC, LL e CC del secondo ordine. Equazione di stato e soluzione generale. Comportamento asintoticamente sovrasmorzato, smorzato critico, armonico smorzato. Comportamento instabile. Eccitazione costante. Circuiti dinamici contenenti interruttori o deviatori (a topologia variabile). Induttori mutuamente accoppiati. Cenni ai circuiti degeneri. Vincoli algebrici tra variabili di stato e grandezze impresse. Compensazione impulsi di corrente o tensione nei circuiti degeneri. Continuità delle variabili di stato nei circuiti non degeneri.

1

Induttore



$$v = L \frac{di}{dt}$$

Il parametro di definizione L è detto induttanza (o coefficiente di autoinduzione). La sua unità di misura nel sistema internazionale è l'Henry

$$[H] = [V \cdot s] / [A] = [J/A^2]$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t') dt' = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t') dt' + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt' = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

La corrente dell'induttore al generico istante t è determinabile se si conosce l'andamento della tensione ai suoi capi sin da un istante infinitamente remoto nel quale la corrente è nulla. In alternativa, stabilito un istante t_0 assunto come istante iniziale, la corrente è determinabile se si conosce, oltre all'andamento della tensione nell'intervallo $[t_0, t]$, anche il valore che essa assume in t_0 . Per questa ragione l'induttore è detto componente con memoria.

Un induttore fisico è costituito da un avvolgimento in rame fatto di molte spire, di solito avvolte attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico. L'induttanza L rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra la corrente dell'avvolgimento e il flusso Φ del campo magnetico da questa prodotto concatenato con l'avvolgimento stesso, i.e. $\Phi = L i$. Se si trascurano, come è lecito, le dissipazioni di potenza che si verificano nel conduttore e nel materiale ferromagnetico, dalla legge di Faraday si ottiene che la relazione tra la corrente i e la tensione v ai capi dell'avvolgimento è $v = L di/dt$.

2



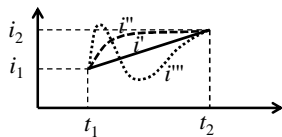
La potenza p assorbita da un induttore è un differenziale esatto esprimibile come

$$p(t) = v(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) = \frac{d}{dt} W_m$$

La quantità W_m rappresenta l'energia immagazzinata dall'induttore (mediante il campo magnetico da esso prodotto) e prende il nome di energia magnetica. Essa è una funzione di stato perché dipende esclusivamente dalla corrente che circola nell'induttore. La corrente i assume quindi il ruolo di variabile di stato.

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad \text{Energia magnetica dell'induttore}$$

Dato che l'energia magnetica di un singolo avvolgimento è strettamente positiva (è nulla solo se $i=0$) il coefficiente di autoinduzione L risulta sempre positivo ($L>0$)



$$\Delta W_m' = \Delta W_m'' = \Delta W_m'''$$

L'energia ΔW_m complessivamente assorbita da un induttore in un dato intervallo eguaglia la variazione della sua energia magnetica. Essa non dipende dall'andamento della corrente ma esclusivamente dai valori da questa assunti agli estremi dell'intervallo (funzione di stato).

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) dt = \frac{1}{2} Li_2^2 - \frac{1}{2} Li_1^2 = \Delta W_m$$

L'energia complessivamente assorbita da un induttore (dal tempo $-\infty$) risulta in qualunque istante positiva (se $|i(t)| \neq 0$) o al più nulla (se $i(t)=0$)

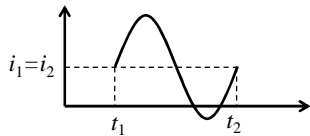
$$w(-\infty, t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

Si noti che l'induttore può erogare potenza, in un dato intervallo, supponiamo da t_0 a t . Risulta però

$$\int_{-\infty}^{t_0} p(t) dt + \int_{t_0}^t p(t) dt \geq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_0} p(t') dt' - \int_{t_0}^t p_e(t') dt' \geq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^t p_e(t') dt' \leq w(-\infty, t_0)$$

L'induttore è quindi un componente passivo. L'energia da esso erogata in un dato intervallo è sempre minore o uguale a quella complessivamente assorbita in precedenza.

L'energia complessivamente assorbita da un induttore in un ciclo ($i_1=i_2$) risulta nulla



$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{2} Li_1^2 - \frac{1}{2} Li_1^2 = 0$$

Se dunque in un data fase del ciclo l'induttore assorbe (eroga) potenza nella fase successiva la eroga (assorbe)

Se un induttore è attraversato da una corrente costante nel tempo la tensione ai suoi capi è nulla



In condizioni stazionarie quindi un induttore si comporta come un corto circuito

5

Si assuma ora che in un dato istante t_0 la corrente dell'induttore subisca una discontinuità, ossia passi dal valore $i(t_0^-)$ al valore $i(t_0^+)$. Integrando la relazione di definizione dell'induttore nell'intervallo infinitesimo $[t_0^-, t_0^+]$ si ottiene

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} v dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} L \frac{di}{dt} dt = L(i(t_0^+) - i(t_0^-))$$

La precedente è soddisfatta se e solo se l'andamento della tensione è

$$v(t) = L(i(t_0^+) - i(t_0^-))\delta(t - t_0)$$

dove δ rappresenta l'impulso di Dirac.

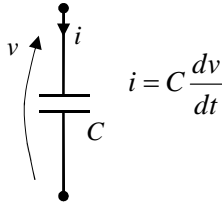
Se in un dato istante quindi la corrente di un induttore subisce discontinuità la tensione ai suoi capi subisce un impulso. In tali condizioni all'istante t_0 l'induttore assorbe/eroga una potenza infinita (in grado di variare istantaneamente l'energia accumulata). Tale potenza è erogata/fornita dal bipolo complementare.

Quanto discusso è un comportamento limite (irrealizzabile nella pratica per via dei fenomeni resistivi parassiti). Nei circuiti reali possono tuttavia verificarsi delle rapide variazioni della corrente negli induttori. In tali condizioni ai loro capi si stabilisce una notevole tensione cui corrisponde lo scambio di una notevole potenza.

6



Condensatore



Il parametro di definizione C è detto capacità. La sua unità di misura nel sistema internazionale è il Farad

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$[F] = [A \cdot s] / [V] = [C] / [V] = [J/V^2]$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t') dt' + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

La tensione del condensatore al generico istante t è determinabile se si conosce l'andamento della corrente che lo attraversa sin da un istante infinitamente remoto nel quale la tensione è nulla. In alternativa, stabilito un istante t_0 assunto come istante iniziale, la tensione è determinabile se si conosce, oltre all'andamento della corrente nell'intervallo $[t_0, t]$, anche il valore che essa assume in t_0 . Per questa ragione il condensatore è detto componente con memoria.

Un condensatore fisico è costituito da due lastre (armature) di materiale conduttore poste in vicinanza. Di solito tra le lastre è interposto un dielettrico (materiale isolante ad alta permeabilità). La capacità C rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra la tensione che agisce tra le due armature e la carica q accumulata (con segno opposto) su ciascuna di esse, i.e. $q = C v$. Se si trascura, come è lecito, la conducibilità del dielettrico, dalla definizione di corrente si ottiene che la relazione tra la tensione v e la corrente i ai capi dell'avvolgimento è $i = C dv/dt$.

7

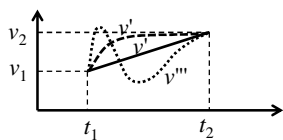
La potenza p assorbita da un condensatore è un differenziale esatto esprimibile come

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) = \frac{d}{dt} W_e$$

La quantità W_e rappresenta l'energia immagazzinata dal condensatore (mediante il campo elettrico da esso prodotto) e prende il nome di energia elettrostatica (elettrica). Essa è una funzione di stato perché dipende esclusivamente dalla tensione ai capi del condensatore. La tensione v assume quindi il ruolo di variabile di stato.

$$W_e = \frac{1}{2} C v^2 \quad \text{Energia elettrostatica del condensatore}$$

Dato che l'energia elettrostatica è strettamente positiva (è nulla solo se $v=0$) la capacità C risulta sempre positiva ($C > 0$)



L'energia ΔW_e complessivamente assorbita da un condensatore in un dato intervallo eguaglia la variazione della sua energia elettrostatica. Essa non dipende dall'andamento della tensione ma esclusivamente dai valori da questa assunti agli estremi dell'intervallo (funzione di stato).

$$\Delta W_m' = \Delta W_m'' = \Delta W_m'''$$

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2(t) \right) dt = \frac{1}{2} C v_2^2 - \frac{1}{2} C v_1^2 = \Delta W_e \quad 8$$



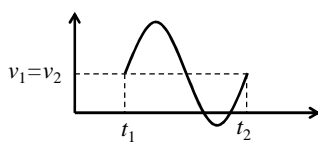
L'energia complessivamente assorbita da un condensatore (dal tempo $-\infty$) risulta in qualunque istante positiva (se $|v(t)| \neq 0$) o al più nulla (se $v(t)=0$)

$$w(-\infty, t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \frac{1}{2} C v^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

Si noti che il condensatore può erogare potenza, in un dato intervallo, supponiamo da t_0 a t . Risulta però

$$\int_{-\infty}^{t_0} p(t) dt + \int_{t_0}^t p(t) dt \geq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_0} p(t) dt - \int_{t_0}^t p_e(t) dt \geq 0 \Rightarrow \int_{t_0}^t p_e(t) dt \leq w(-\infty, t_0)$$

Il condensatore è quindi un componente passivo. L'energia da esso erogata in un dato intervallo è sempre minore o uguale a quella complessivamente assorbita in precedenza. L'energia complessivamente assorbita da un condensatore in un ciclo risulta nulla

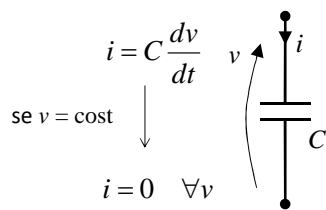


$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{2} C v_1^2 - \frac{1}{2} C v_2^2 = 0$$

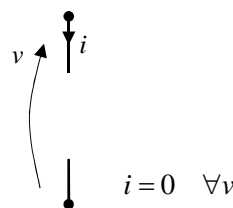
Se dunque in un data fase del ciclo il condensatore assorbe (eroga) potenza nella fase successiva la eroga (assorbe)

9

Se un condensatore è soggetto ad una tensione costante nel tempo la corrente che lo attraversa è nulla



condensatore in condizioni stazionarie



circuito aperto

In condizioni stazionarie quindi un condensatore si comporta come un circuito aperto

10



Si assuma ora che in un dato istante t_0 la tensione del condensatore subisca una discontinuità, ossia passi dal valore $v(t_0^-)$ al valore $v(t_0^+)$. Integrando la relazione di definizione del condensatore nell'intervallo infinitesimo $[t_0^-, t_0^+]$ si ottiene

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} i = \int_{t_0^-}^{t_0^+} C \frac{dv}{dt} dt = C (v(t_0^+) - v(t_0^-))$$

La precedente è soddisfatta se e solo se l'andamento della corrente è

$$i(t) = C (v(t_0^+) - v(t_0^-)) \delta(t - t_0)$$

dove rappresenta δ l'impulso di Dirac.

Se in un dato istante quindi la tensione del condensatore subisce discontinuità la sua corrente subisce un impulso. In tali condizioni all'istante t_0 il condensatore assorbe/eroga una potenza infinita (in grado di variare istantaneamente l'energia accumulata). Tale potenza è erogata/fornita dal bipolo complementare.

Quanto discusso è un comportamento limite (irrealizzabile nella pratica per via dei fenomeni resistivi parassiti). Nei circuiti reali possono tuttavia verificarsi delle rapide variazioni della tensione ai capi dei condensatori. In tali condizioni in essi si stabilisce una notevole corrente cui corrisponde lo scambio di una notevole potenza.

11

Circuiti dinamici

Si definisce dinamico un circuito contenente almeno un induttore oppure un condensatore. Un circuito dinamico è caratterizzato da un sistema risolvibile algebrico-differenziale. Le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori compaiono sotto il segno di derivata ed assumono il ruolo di variabili di stato. Per determinare la soluzione è necessario scomporre il sistema (vedi appendice A2) in una parte puramente differenziale (equazione di stato) e in una parte puramente algebrica (equazione di uscita).

Le variabili di stato possono essere determinate autonomamente risolvendo l'equazione di stato. A tal fine è necessario conoscere, oltre agli ingressi, i valori che queste assumono nell'istante iniziale. Successivamente, note le variabili di stato e gli ingressi, si possono determinare le variabili di uscita utilizzando la relativa equazione.

Quando le variabili di stato non sono tutte indipendenti ma sono soggette a vincoli algebrici il circuito si dice degenere. In questi casi è ancora possibile isolare la parte differenziale ma l'ordine del sistema risulta ridotto (non tutte le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori diventano variabili di stato effettive).

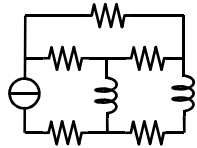
12



Circuito dinamico degenere: circuito dinamico le cui connessioni e/o i cui componenti sono tali da stabilire almeno un vincolo algebrico che coinvolge esclusivamente correnti negli induttori e/o tensioni sui condensatori ed, eventualmente, grandezze impresse.

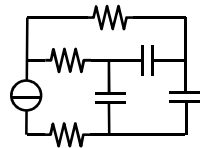
Un circuito è degenere se sostituendo gli induttori con un generatore di corrente e i condensatori con un generatore di tensione si ottiene un circuito patologico. Si riportano alcuni esempi.

Degenerazioni topologicamente evidenti



$$i_{L1} + i_{L2} + i_g = 0$$

Tagli composti da soli induttori o da induttori e generatori di corrente indipendenti

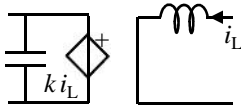


$$v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} = 0$$

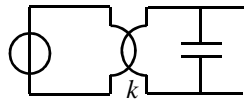
Maglie composte da soli condensatori o da condensatori e generatori di tensione indipendenti

13

Degenerazioni dovute a generatori pilotati o trasformatori (non evidenti topologicamente)

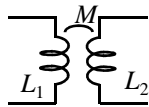


$$v_c - k i_L = 0$$



$$v_c = \frac{v_g}{k}$$

Degenerazioni dovute ad induttori perfettamente accoppiati



$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$i_{L2} - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_{L1} = 0$$

Per i circuiti degeneri è importante distinguere tra i casi in cui il vincolo algebrico è omogeneo (non coinvolge grandezze impresse) oppure è non omogeneo (coinvolge grandezze impresse).

Nel seguito, salvo esplicito avviso, limiteremo la nostra analisi esclusivamente ai circuiti non degeneri. Qualche cenno ai circuiti degeneri sarà fatto successivamente.

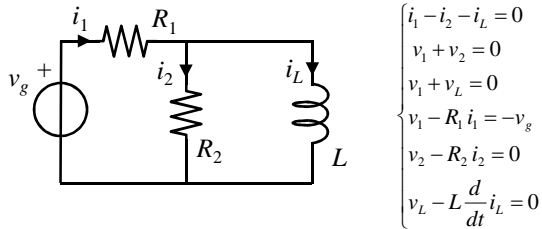
14



Si analizzano ora i circuiti dinamici del primo ordine, ossia circuiti non degeneri contenenti un solo induttore oppure un solo condensatore.

Circuito induttivo del primo ordine (circuito RL)

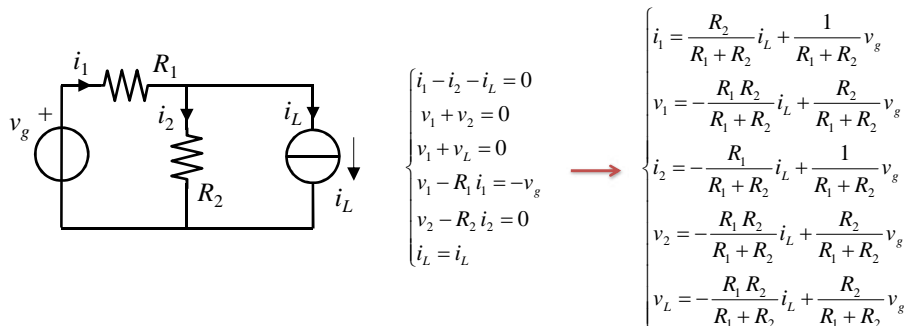
Si considerino a titolo di esempio il circuito di figura e il relativo sistema risolvente



Per risolvere il circuito è necessario determinare l'equazione di stato, ossia è necessario isolare la parte differenziale del sistema risolvente. Per un circuito induttivo del primo ordine l'equazione di stato è composta da una sola equazione nella sola variabile di stato costituita dalla corrente i_L dell'induttore.

15

Per ottenere l'equazione di stato è necessario innanzitutto determinare l'equazione di uscita, ossia è necessario calcolare il valore che tutte le grandezze del circuito assumono in funzione della variabile di stato e delle grandezze impresse. Ciò può essere ottenuto sostituendo l'induttore con un generatore indipendente di corrente che impone la generica corrente i_L



Si evidenzia che in virtù dell'ipotesi di circuito non degeneri ciò che si ottiene sostituendo l'induttore con un generatore di corrente è un circuito adinamico necessariamente non patologico (le relazioni di definizione dei componenti non sono in conflitto con le equazioni topologiche). Risulta quindi possibile esprimere tutte le grandezze in funzione delle grandezze impresse e della corrente i_L

16



A questo punto si sostituisce l'espressione ottenuta per v_L all'interno dell'equazione di definizione dell'induttore ottenendo così un'equazione differenziale che contiene solo i_L (equazione di stato)

$$L \frac{d}{dt} i_L = - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g$$

L'equazione di stato può essere posta in forma canonica (poichè $L \neq 0$) e risolta autonomamente se sono noti l'andamento di v_g per ogni istante $t \geq 0$ nonché il valore di i_L all'istante iniziale. Le altre grandezze di interesse del circuito possono essere ottenute successivamente adoperando l'equazione di uscita con i_L noto.

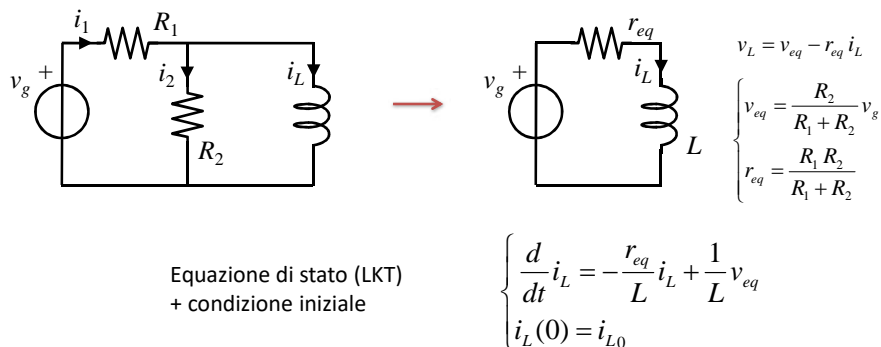
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L = - \frac{1}{L} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{L} \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g \\ i_L(0) = i_{L0} \end{cases}$$

Equazione di stato
+ condizione iniziale

$$\begin{cases} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} v_g \\ v_1 = - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g \\ i_2 = - \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} v_g \\ v_2 = - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g \\ v_L = - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_g \end{cases}$$

Equazione di uscita 17

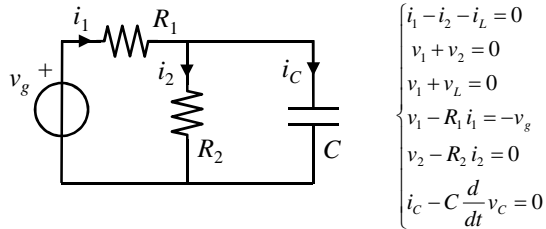
Si evidenzia che ai fini dell'ottenimento dell'equazione di stato si è determinata la tensione che, a causa del circuito a cui è connesso, si stabilisce ai capi dell'induttore quando in esso circola la generica corrente i_L . Ciò vuol dire che si è determinata la rappresentazione di Thevenin del bipolo complementare dell'induttore. Tale rappresentazione esiste sicuramente per via del fatto che, essendo il circuito in esame non degenere, il circuito ottenuto sostituendo all'induttore un generatore di corrente è non patologico.



L'equazione di stato di un circuito induttivo del primo ordine può quindi essere ottenuta immediatamente rappresentando il bipolo complementare dell'induttore mediante il bipolo equivalente di Thevenin e considerando la LKT applicata alla maglia

Circuito capacitivo del primo ordine (circuito RC)

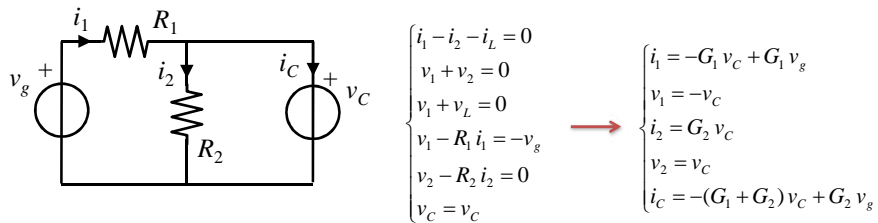
Si considerino a titolo di esempio il circuito di figura e il relativo sistema risolvente



Per risolvere il circuito è necessario determinare l'equazione di stato, ossia è necessario isolare la parte differenziale del sistema risolvente. Per un circuito capacitivo del primo ordine l'equazione di stato è composta da una sola equazione nella sola variabile di stato costituita dalla tensione v_C del condensatore.

19

Per ottenere l'equazione di stato è necessario innanzitutto determinare l'equazione di uscita, ossia è necessario calcolare il valore che tutte le grandezze del circuito assumono in funzione della variabile di stato e delle grandezze impresse. Ciò può essere ottenuto sostituendo il condensatore con un generatore indipendente di tensione che impone la v_C



Si evidenzia che in virtù dell'ipotesi di circuito non degeneri ciò che si ottiene sostituendo il condensatore con un generatore di tensione è un circuito necessariamente non patologico (le relazioni di definizione dei componenti non sono in conflitto con le equazioni topologiche). Risulta quindi possibile esprimere tutte le grandezze in funzione delle grandezze impresse e della tensione v_C

20



A questo punto si sostituisce l'espressione ottenuta per i_C all'interno dell'equazione di definizione del condensatore ottenendo così un'equazione differenziale che contiene solo v_C (equazione di stato)

$$C \frac{d}{dt} v_C = -(G_1 + G_2) v_C + G_1 v_g$$

L'equazione di stato può essere posta in forma canonica (poichè $C \neq 0$) e risolta autonomamente se sono noti l'andamento di v_g per ogni istante $t \geq 0$ nonché il valore di v_C all'istante iniziale. Le altre grandezze di interesse del circuito possono essere ottenute successivamente adoperando l'equazione di uscita con v_C noto.

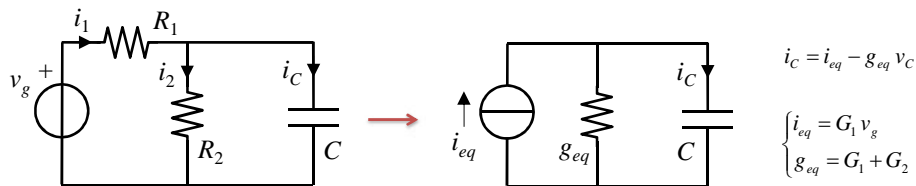
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_C = -\frac{1}{C} (G_1 + G_2) v_C + G_1 v_g \\ v_C(0) = v_{C0} \end{cases}$$

Equazione di stato
+ condizione iniziale

$$\begin{cases} i_1 = -G_1 v_C + G_1 v_g \\ v_1 = -v_C \\ i_2 = G_2 v_C \\ v_2 = v_C \\ i_C = -(G_1 + G_2) v_C + G_2 v_g \end{cases}$$

Equazione di uscita 21

Si evidenzia che ai fini dell'ottenimento dell'equazione di stato si è determinata la corrente che, a causa del circuito a cui è connesso, circola nel condensatore quando esso è sottoposto alla generica tensione v_C . Ciò vuol dire che si è determinata la rappresentazione di Norton del bipolo complementare del condensatore. Tale rappresentazione esiste sicuramente per via del fatto che, essendo il circuito in esame non degenere, il circuito ottenuto sostituendo condensatore un generatore di tensione è non patologico.



Equazione di stato (LKC)
+ condizione iniziale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_C = -\frac{g_{eq}}{C} v_C + \frac{1}{C} i_{eq} \\ v_C(0) = v_{C0} \end{cases}$$

L'equazione di stato di un circuito capacitivo del primo ordine può quindi essere ottenuta immediatamente rappresentando il bipolo complementare del condensatore mediante il bipolo equivalente di Norton e considerando la LKC al nodo

22



Circuiti RC e RL con eccitazione costante

Se tutte le grandezze impresse del circuito sono costanti la tensione/corrente del generatore equivalente di Thevenin/Norton risulta costante. L'equazione di stato è

$$\frac{d}{dt}i_L = -\frac{r_{eq}}{L}i_L + \frac{1}{L}V_{eq} \quad \text{con } V_{eq}=\text{cost}$$

$$\frac{d}{dt}v_C = -\frac{g_{eq}}{C}v_C + \frac{1}{C}I_{eq} \quad \text{con } I_{eq}=\text{cost}$$

La soluzione generale dell'equazione di stato (vedi appendice A2) è

$$i_L(t) = k e^{-\frac{t}{\dagger}} + i_L^{\text{ecc}}(t)$$

$$v_C(t) = k e^{-\frac{t}{\dagger}} + v_C^{\text{ecc}}(t)$$

dove

$$\dagger = \frac{L}{r_{eq}} \quad \text{costante di tempo del circuito RL}$$

([V·s]/[A]) / [V/A] = s

dove

$$\dagger = \frac{C}{g_{eq}} \quad \text{costante di tempo del circuito RC}$$

([A·s]/[V]) / [A/V] = s

I termini i_L^{ecc} e v_C^{ecc} hanno lo stesso andamento nel tempo della tensione/corrente impressa. Si ottiene quindi

$$i_L(t) = k e^{-\frac{t}{\dagger}} + \frac{V_{eq}}{r_{eq}}$$

$$v_C(t) = k e^{-\frac{t}{\dagger}} + \frac{I_{eq}}{g_{eq}}$$

23

Imponendo il rispetto della condizione iniziale si ottiene infine

$$i_L(t) = \left(i_{L0} - \frac{V_{eq}}{r_{eq}} \right) e^{-\frac{t}{\dagger}} + \frac{V_{eq}}{r_{eq}}$$

\uparrow \uparrow
 Componente Componente
 di regime, i_{Lr} transitoria, i_{Lt}

$$v_C(t) = \left(v_{C0} - \frac{I_{eq}}{g_{eq}} \right) e^{-\frac{t}{\dagger}} + \frac{I_{eq}}{g_{eq}}$$

\uparrow \uparrow
 Componente Componente
 di regime, v_{Cr} transitoria, v_{Ct}

La risposta complessiva può essere vista anche come somma della risposta con stato zero e della risposta con ingresso zero.

$$i_L(t) = i_{L0} e^{-\frac{t}{\dagger}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\dagger}} \right) \frac{V_{eq}}{r_{eq}}$$

\uparrow \uparrow
 Risposta con Risposta con
 ingresso zero, i_{L0} stato zero, i_{Ls0}

$$v_C(t) = v_{C0} e^{-\frac{t}{\dagger}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\dagger}} \right) \frac{I_{eq}}{g_{eq}}$$

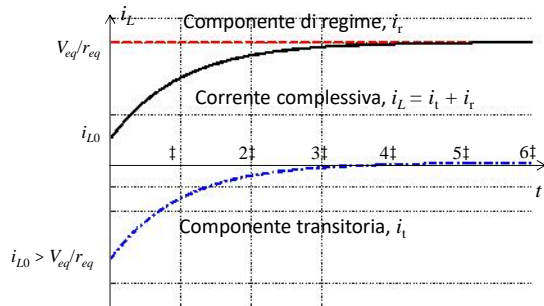
\uparrow \uparrow
 Risposta con Risposta con
 ingresso zero, v_{C0} stato zero, v_{Cs0}

Nel seguito si riporta l'andamento nel tempo della corrente dell'induttore del circuito RL. Andamenti del tutto analoghi valgono per la tensione del condensatore del circuito RC

24



Se $r_{eq} > 0$ o $g_{eq} > 0$ allora $\tau > 0$. Il circuito è asintoticamente stabile. Il termine esponenziale si estingue e la soluzione raggiunge un valore di regime stazionario. Tutte le grandezze nel circuito raggiungono un valore stazionario.

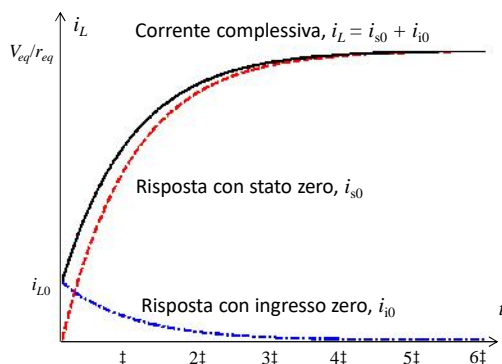


Si evidenzia che la sola componente di regime violerebbe la condizione iniziale. La componente transitoria si genera per fare in modo che questa sia soddisfatta. Si noti che la componente transitoria non si manifesta nel caso in cui la componente di regime è tale da soddisfare, autonomamente, la condizioni iniziale

$$i_t(t) = 0 \quad \text{se} \quad i_L(0) - \frac{V_{eq}}{r_{eq}} = 0$$

25

La corrente complessiva può essere vista anche come somma della risposta allo stato zero e della risposta all'ingresso zero.



La risposta con stato zero è inizialmente nulla e raggiunge il valore di regime al crescere di t . La risposta con ingresso zero si manifesta, al fine di consentire alla corrente di soddisfare la condizione iniziale, purché sia $i_L(0) \neq 0$ e diminuisce (in valore assoluto) fino ad annullarsi al valore al crescere di t .

26

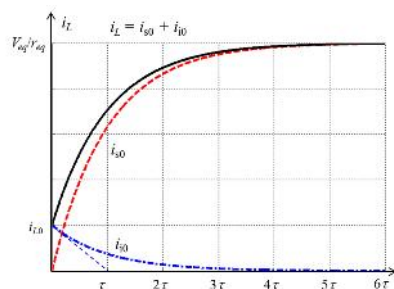
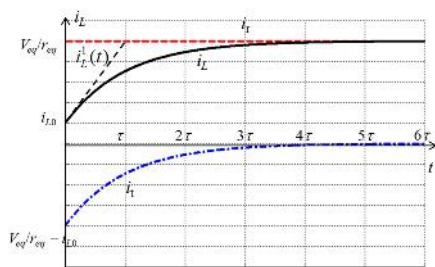


Si sottolinea che noto l'andamento della variabile di stato tutte le grandezze di interesse del circuito possono essere ottenute successivamente adoperando l'equazione di uscita. Tutte le grandezze avranno quindi lo stesso andamento nel tempo della variabile di stato (decadimento esponenziale con costante di tempo τ).

La costante di tempo è il parametro caratteristico della dinamica dell'intero circuito. Essa è indipendente dalle grandezze impresse (non dipende da v_{eq} ma solo da r_{eq}) e fornisce un'indicazione della rapidità con la quale le grandezze del circuito possono rispondere ad una sollecitazione impressa.

t	$i_{i0}(t) / i_{L0}$	$i_L(t) / i_r$ ($i_L(0) = 0$)
0	100 %	0 %
\ddagger	36.79 %	63.21 %
$2\ddagger$	13.53 %	86.47 %
$3\ddagger$	4.98 %	95.02 %
$4\ddagger$	1.83 %	98.17 %
$5\ddagger$	0.67 %	99.33 %

27



$$i_L^1(t) = i_L(0) + \left. \frac{d}{dt} i_L(t) \right|_{t=0} t = i_L(0) + \left(\frac{V_{eq}}{r_{eq}} - i_L(0) \right) \frac{t}{\ddagger}$$

$$i_{i0}^1(t) = i_{i0}(0) + \left. \frac{d}{dt} i_{i0}(t) \right|_{t=0} t = i_{i0}(0) - i_L(0) \frac{t}{\ddagger}$$

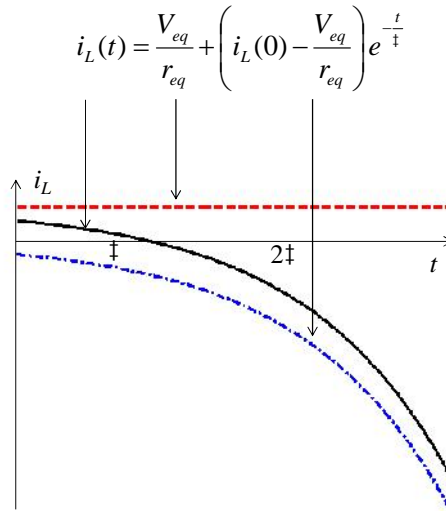
La costante \ddagger esprime il tempo necessario perché la corrente linearizzata all'origine raggiunga il valore di regime

Analogamente la costante di tempo è il tempo necessario perché la risposta con ingresso zero linearizzata all'origine raggiunga il valore nullo

28



Se $r_{eq} < 0$ o $g_{eq} < 0$ allora $\dagger < 0$. Il circuito è instabile. Il termine esponenziale cresce indefinitamente al crescere di t . La soluzione non raggiunge quindi un valore di regime stazionario.



29

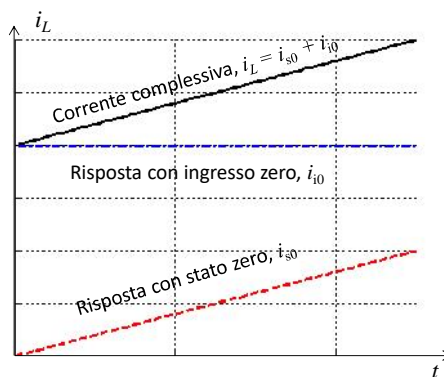
Se $r_{eq} = 0$ o $g_{eq} = 0$ la soluzione precedentemente trovata non è applicabile. L'equazione di stato e la soluzione diventano

$$\begin{cases} L \frac{d}{dt} i_L = V_{eq} \\ i_L(t=0) = i_{L0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C \frac{d}{dt} v_C = I_{eq} \\ v_C(t=0) = v_{C0} \end{cases}$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{V_{eq}}{L} t$$

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{I_{eq}}{C} t$$



La risposta con stato zero cresce linearmente col tempo. **La soluzione non raggiunge un valore di regime stazionario.** L'autovalore associato all'equazione differenziale è nullo (la costante di tempo \dagger è infinita). La risposta con ingresso zero è quindi costituita da un termine costante pari al valore iniziale (modo stazionario, $i_L(0) e^0 = i_L(0)$). Il circuito è semplicemente stabile (vedi appendice A2).

30



Si noti che se il bipolo dinamico complementare al suo interno non contiene generatori pilotati la sua resistenza equivalente di Thevenin è necessariamente positiva o al più nulla.

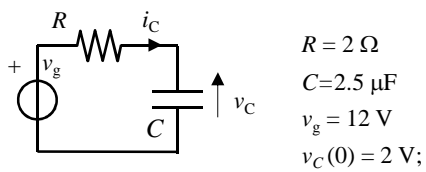
Lo stesso vale per la conduttanza equivalente di Norton.

Allora un circuito del primo ordine che contenga solo resistori e generatori indipendenti o è asintoticamente stabile o, al limite (se $r_{eq} = 0$ o $g_{eq} = 0$), è semplicemente stabile. È escluso che possa essere instabile.

31

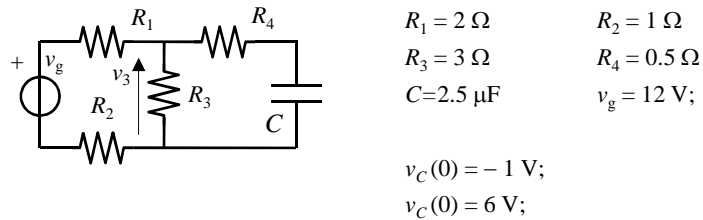
Esercizio 9.1

Determinare l'andamento nel tempo della tensione v_C e della corrente i_C del condensatore.



Esercizio 9.2

Determinare l'andamento nel tempo della tensione v_3

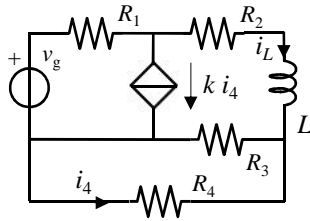


32



Esercizio 9.3

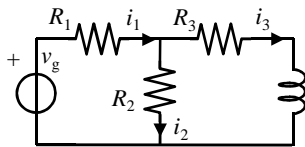
Determinare l'andamento nel tempo della corrente i_L dell'induttore



$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \Omega & R_2 &= 2 \Omega \\ R_3 &= 2 \Omega & R_4 &= 0.5 \Omega \\ v_g &= 8 \text{ V} \\ L &= 5.6 \text{ mH} \\ i_L(0) &= 0 \text{ A} \\ k &= 0.5; \quad k = -3; \quad k = -6.5; \end{aligned}$$

Esercizio 9.4

Determinare l'andamento nel tempo delle correnti i_1 , i_2 e i_3 del circuito. Determinare inoltre l'energia complessivamente ceduta dall'induttore al circuito nell'intervallo $[0, +\infty[$



$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \Omega & R_2 &= 2 \Omega \\ R_3 &= 1 \Omega & L &= 2 \text{ mH} \\ v_g &= 4 \text{ V}; \\ i_L(0) &= -2 \text{ A}; \end{aligned}$$

33

Circuiti RC e RL con eccitazione sinusoidale

Se tutte le grandezze impresse del circuito variano nel tempo con andamento sinusoidale alla stessa frequenza anche la tensione/corrente del generatore equivalente di Thevenin/Norton assume andamento sinusoidale alla stessa frequenza. L'equazione di stato è

$$\frac{d}{dt} i_L = -\frac{r_{eq}}{L} i_L + \frac{1}{L} V_{eq} \quad \text{con} \quad v_{eq}(t) = V_{eq} \cos(\check{S}t + \Gamma) \quad \left| \quad \frac{d}{dt} v_C = -\frac{g_{eq}}{C} v_C + \frac{1}{C} I_{eq} \quad \text{con} \quad i_{eq}(t) = I_{eq} \cos(\check{S}t + \Gamma)$$

La soluzione generale dell'equazione di stato è

$$i_L(t) = k e^{-\frac{t}{\ddagger}} + i_L^{ecc}(t)$$

dove

$$\ddagger = \frac{L}{r_{eq}} \quad \text{costante di tempo del circuito RL} \\ ([\text{V}\cdot\text{s}]/[\text{A}]) / [\text{V}/\text{A}] = \text{s}$$

$$v_C(t) = k e^{-\frac{t}{\ddagger}} + v_C^{ecc}(t)$$

dove

$$\ddagger = \frac{C}{g_{eq}} \quad \text{costante di tempo del circuito RC} \\ ([\text{A}\cdot\text{s}]/[\text{V}]) / [\text{A}/\text{V}] = \text{s}$$

34

I termini i_L^{ecc} e v_C^{ecc} hanno lo stesso andamento nel tempo della tensione/corrente di eccitazione $v_{\text{eq}}(t) / i_{\text{eq}}(t)$. Nel caso di eccitazione sinusoidale si ottiene (vedi appendice A2)

$$i_L(t) = k e^{\frac{t}{\tau}} + I_L \cos(\tilde{S}t + r - \{\})$$

$$v_C(t) = k e^{\frac{t}{\tau}} + V_C \cos(\tilde{S}t + r - \{\})$$

dove

$$\begin{cases} I_L = \frac{V_{\text{eq}}}{\sqrt{r_{\text{eq}}^2 + (\tilde{S}L)^2}} \\ \{\} = \tan^{-1} \frac{\tilde{S}L}{r_{\text{eq}}} \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} V_C = \frac{I_{\text{eq}}}{\sqrt{g_{\text{eq}}^2 + (\tilde{S}C)^2}} \\ \{\} = \tan^{-1} \frac{\tilde{S}C}{g_{\text{eq}}} \end{cases}$$

Si noti che la soluzione particolare trovata è valida anche nei casi $r_{\text{eq}} = 0$ e $g_{\text{eq}} = 0$, in cui nello specifico diventa

$$\begin{cases} I_L = \frac{V_{\text{eq}}}{\tilde{S}L} \\ \{\} = \frac{f}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_C = \frac{I_{\text{eq}}}{\tilde{S}C} \\ \{\} = \frac{f}{2} \end{cases}$$

35

Imponendo il rispetto della condizione iniziale si ottiene infine

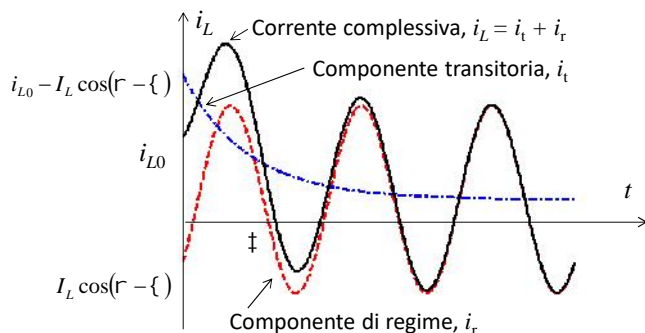
$$i_L(t) = (i_{L0} - I_L \cos(r - \{\})) e^{\frac{t}{\tau}} + I_L \cos(\tilde{S}t + r - \{\})$$

$$v_C(t) = (v_{C0} - V_C \cos(r - \{\})) e^{\frac{t}{\tau}} + V_C \cos(\tilde{S}t + r - \{\})$$

36



Se $r_{eq} > 0$ o $g_{eq} > 0$ allora $\dagger > 0$. Il circuito è asintoticamente stabile. Il termine esponenziale si estingue e la soluzione raggiunge un valore di regime sinusoidale. Tutte le grandezze nel circuito raggiungono un andamento di regime sinusoidale (Vedremo in seguito che la soluzione di regime del circuito può essere calcolata agevolmente attraverso il metodo dei fasori (trasformata di Steinmetz)

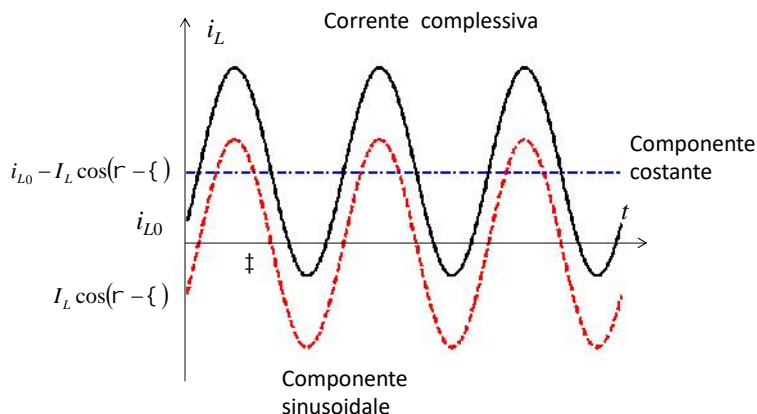


Si specifica che l'ampiezza del termine transitorio è pari alla differenza tra il valore della componente di regime all'istante $t=0$ e il valore della corrente dell'induttore nel medesimo istante. In particolare il termine transitorio può non manifestarsi se il valore della componente di regime a $t=0$ è uguale al valore iniziale della corrente dell'induttore.

$$I_L \cos(r - \zeta) = i_{L0}$$

37

Se $r_{eq} = 0$ o $g_{eq} = 0$ allora $\dagger \rightarrow \infty$. Il termine esponenziale è costante. Il circuito è semplicemente stabile (nel senso che non diverge) ma la soluzione non raggiunge un andamento di regime sinusoidale (a valore medio nullo).

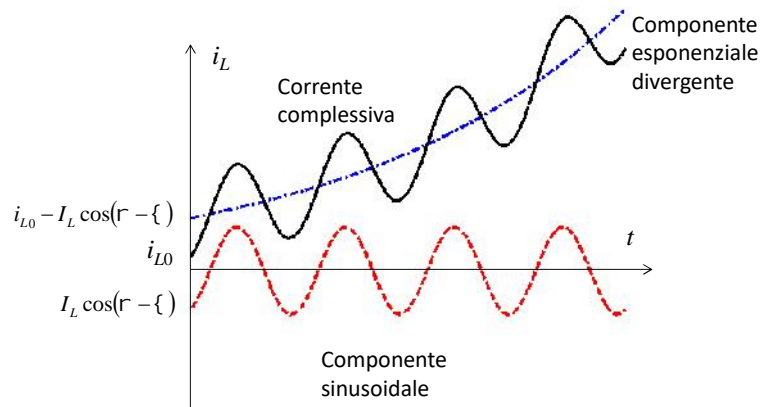


Si specifica che l'ampiezza del termine transitorio è pari alla differenza tra il valore della componente di regime all'istante $t=0$ e il valore della corrente dell'induttore nel medesimo istante. In particolare il termine transitorio può non manifestarsi se il valore della componente di regime a $t=0$ è uguale al valore iniziale della corrente dell'induttore.

38



Se $r_{eq} < 0$ o $g_{eq} < 0$ allora $\ddagger < 0$. Il circuito è instabile. Il termine esponenziale diverge al crescere di t . Il circuito è instabile. La soluzione non raggiunge un andamento di regime sinusoidale.

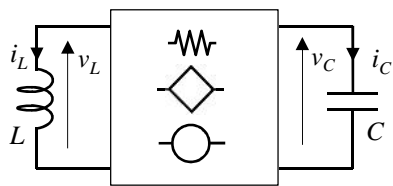


39

Si analizzano ora i circuiti dinamici del secondo ordine, ossia circuiti dinamici non degeneri contenenti

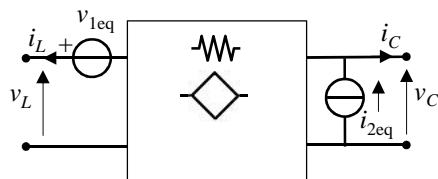
- un induttore e un condensatore, oppure
- due induttori, oppure
- due condensatori

Circuito del secondo ordine con induttore e condensatore



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L - \frac{1}{L} v_L = 0 \\ \frac{d}{dt} v_C - \frac{1}{C} i_C = 0 \end{cases}$$

Relazioni di definizione dei componenti dinamici



$$\begin{cases} v_L = -h_{11} i_L - h_{12} v_C + v_{1eq} \\ i_C = -h_{21} i_L - h_{22} v_C + i_{2eq} \end{cases}$$

Rappresentazione ibrida diretta del doppio bipolo complementare

40



Equazione di stato

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{h_{11}}{L} & \frac{h_{12}}{L} \\ \frac{h_{21}}{C} & \frac{h_{22}}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v_{1eq}}{L} \\ \frac{i_{2eq}}{C} \end{pmatrix} \\ i_L(0) = i_{L0} \\ v_C(0) = v_{C0} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

La soluzione particolare \mathbf{x}^{ecc} ha lo stesso andamento delle forzanti (purchè nessuna delle frequenze naturali del circuito - autovalori della matrice \mathbf{A} - coincida con la frequenza delle forzanti stesse). Per determinare la soluzione generale occorre determinare gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice \mathbf{A} e i corrispondenti autovettori \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 (vedi appendice A2)

Equazione caratteristica

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 - \left(\frac{h_{11}}{L} + \frac{h_{22}}{C} \right) \lambda + \left(\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{LC} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \text{traccia}(\mathbf{A}) \lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$$

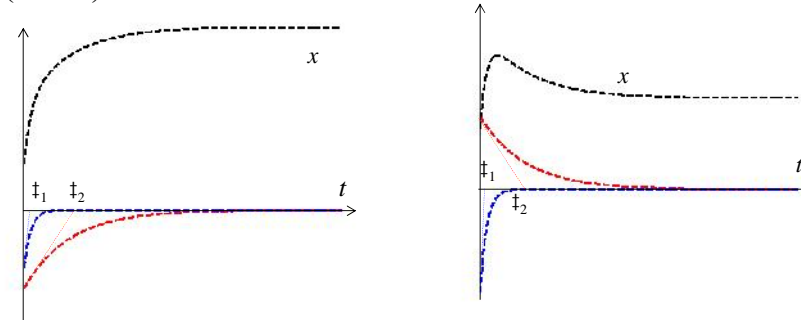
Il discriminante dell'equazione caratteristica è

$$\Delta = (\text{traccia}(\mathbf{A}))^2 - 4 \det(\mathbf{A}) \quad \longrightarrow \quad \Delta = \left(\frac{h_{11}}{L} + \frac{h_{22}}{C} \right)^2 - 4 \left(\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{LC} \right) = \left(\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C} \right)^2 + 4 \frac{h_{12}h_{21}}{LC}$$

Si analizzano ora i possibili comportamenti di un circuito LC del secondo ordine soggetto ad eccitazione costante. Si considerano esclusivamente circuiti asintoticamente stabili, ossia le cui frequenze naturali (autovalori) hanno entrambe parte reale negativa.

1. Autovalori reali e distinti / comportamento sovrasmorzato

$$\left(\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C} \right)^2 + 4 \frac{h_{12}h_{21}}{LC} > 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = k_1 \mathbf{s}_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} + k_2 \mathbf{s}_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}} + \mathbf{x}^{ecc}(t)$$

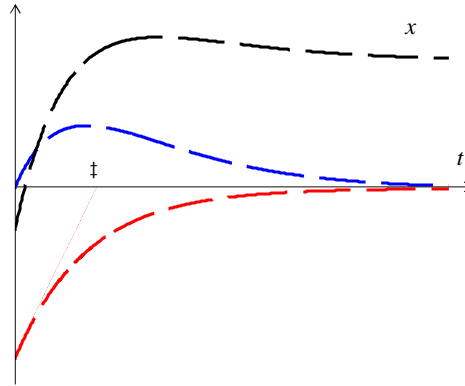


La tensione del condensatore e la corrente dell'induttore evolvono secondo un andamento dello stesso tipo. Se un'autovalore è molto grande (in valore assoluto) rispetto all'altro la costante di tempo corrispondente è molto piccola e il modo a questo associato diventa presto trascurabile. L'evoluzione libera associata all'autovalore più piccolo in valore assoluto è detto **modo dominante**.

2. Autovalori reali e coincidenti

$$\left(\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C}\right)^2 + 4\frac{h_{12}h_{21}}{LC} = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2 < 0$$

$$\mathbf{x}(t) = (k_1 \mathbf{s} + k_2 \mathbf{u}) e^{-\frac{t}{\tau}} + k_2 \epsilon \mathbf{s} t e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{x}^{\text{ecc}}(t)$$

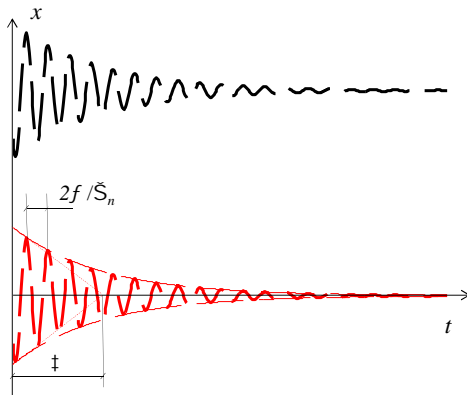


43

3. Autovalori complessi e coniugati / comportamento armonico smorzato

$$\left(\frac{h_{11}}{L} - \frac{h_{22}}{C}\right)^2 + 4\frac{h_{12}h_{21}}{LC} < 0 \quad \gamma_1 = -\frac{1}{\tau} + j\tilde{\omega}_n \quad \gamma_2 = -\frac{1}{\tau} - j\tilde{\omega}_n$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} X_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\tilde{\omega}_n t + \gamma_1) \\ X_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\tilde{\omega}_n t + \gamma_2) \end{pmatrix} + \mathbf{x}^{\text{ecc}}(t)$$



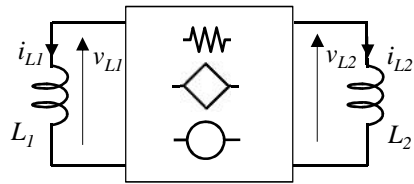
Si noti che affinché nel circuito LC del secondo ordine possa manifestarsi il comportamento armonico smorzato deve risultare necessariamente $h_{12}h_{21} < 0$ (altrimenti risulta $\Delta > 0$)

Se il doppio bipolo complementare è reciproco (come accade se è costituito solo da resistori) si ha $h_{12}h_{21} < 0$ ($h_{12} = h_{21}$) per cui il comportamento armonico smorzato può avere (in generale) luogo

44

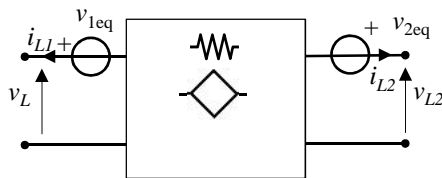


Circuito del secondo ordine con due induttori



$$\begin{cases} L_1 \frac{d}{dt} i_{L1} - v_{L1} = 0 \\ L_2 \frac{d}{dt} i_{L2} - v_{L2} = 0 \end{cases}$$

Relazioni di definizione dei componenti dinamici



$$\begin{cases} v_{L1} = -r_{11} i_{L1} - r_{12} i_{L2} + v_{1eq} \\ v_{L2} = -r_{21} i_{L1} - r_{22} i_{L2} + v_{2eq} \end{cases}$$

Rappresentazione in corrente del doppio bipolo complementare

45

Equazione di stato + Condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{L_1} & \frac{r_{12}}{L_1} \\ \frac{r_{21}}{L_2} & \frac{r_{22}}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v_{1eq}}{L_1} \\ \frac{v_{2eq}}{L_2} \end{pmatrix} \\ i_{L1}(0) = i_{L10} \\ i_{L2}(0) = i_{L20} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Si noti che nel caso di circuito con due induttori il comportamento armonico smorzato può manifestarsi esclusivamente se il doppio bipolo complementare è non reciproco. Nel caso di doppio bipolo reciproco risulta infatti $r_{12} r_{21} > 0$ ($r_{12} = r_{21}$) e si ottiene

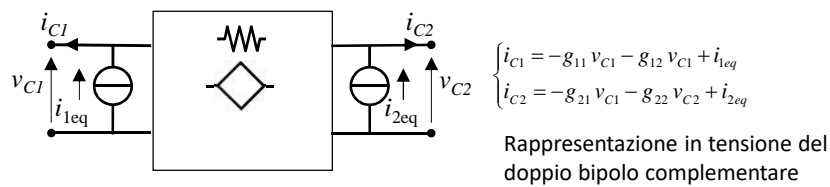
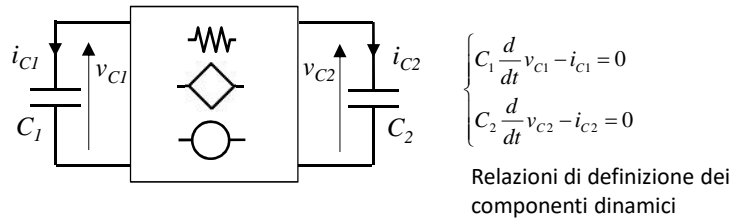
$$\Delta = \left(\frac{r_{11}}{L_1} + \frac{r_{22}}{L_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21}}{L_1 L_2} \right) = \left(\frac{r_{11}}{L_1} - \frac{r_{22}}{L_2} \right)^2 + 4 \frac{r_{12} r_{21}}{L_1 L_2} > 0$$

In particolare se il doppio bipolo complementare è fatto solo di resistenze e generatori indipendenti ma non contiene generatori pilotati esso è reciproco e il comportamento armonico smorzato non può manifestarsi

46



Circuito del secondo ordine con due condensatori



47

Equazione di stato + Condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{g_{11}}{C_1} & \frac{g_{12}}{C_1} \\ \frac{g_{21}}{C_2} & \frac{g_{22}}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i_{1eq}}{C_1} \\ \frac{i_{2eq}}{C_2} \end{pmatrix} \\ v_{C1}(0) = v_{C10} \\ v_{C2}(0) = v_{C20} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Si noti che nel caso di circuito con due condensatori il comportamento armonico smorzato può manifestarsi esclusivamente se il doppio bipolo complementare è non reciproco. Nel caso di doppio bipolo reciproco risulta infatti $g_{12} g_{21} > 0$ ($g_{12} = g_{21}$) e si ottiene

$$\Delta = \left(\frac{g_{11}}{C_1} + \frac{g_{22}}{C_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}}{C_1 C_2} \right) = \left(\frac{g_{11}}{C_1} - \frac{g_{22}}{C_2} \right)^2 + 4 \frac{g_{12} g_{21}}{C_1 C_2} > 0$$

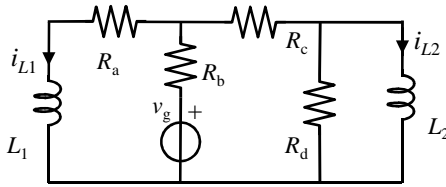
In particolare se il doppio bipolo complementare è fatto solo di resistenze e generatori indipendenti ma non contiene generatori pilotati esso è reciproco e il comportamento armonico smorzato non può manifestarsi

48



Esercizio 9.5

Determinare le costanti di tempo del circuito e l'andamento nel tempo delle correnti i_{L1} e i_{L2}

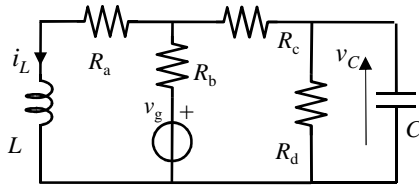


$$\begin{aligned} R_a &= 2 \, \Omega & R_b &= 4 \, \Omega \\ R_c &= 1 \, \Omega & R_d &= 5 \, \Omega \\ v_g &= 5 \, \text{V} \\ L_1 &= 2 \, \text{mH} & L_2 &= 1 \, \text{mH} \\ i_{L1}(0) &= 2 \, \text{A} & i_{L2}(0) &= -3 \, \text{A} \end{aligned}$$

Il doppio bipolo adinamico complementare coincide con quello dell'esercizio 7.11

Esercizio 9.6

Determinare le costanti di tempo del circuito e l'andamento nel tempo della corrente i_L e della tensione v_C



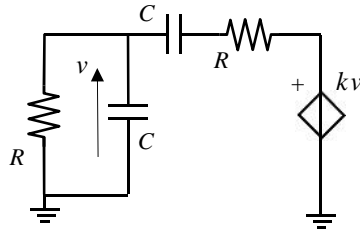
$$\begin{aligned} R_a &= 2 \, \Omega & R_b &= 4 \, \Omega \\ R_c &= 1 \, \Omega & R_d &= 5 \, \Omega \\ v_g &= 5 \, \text{V} \\ L &= 4 \, \text{mH} & C &= 1 \, \text{F} \\ i_L(0) &= 2 \, \text{A} & v_C(0) &= -3 \, \text{V} \end{aligned}$$

Il doppio bipolo adinamico complementare coincide con quello dell'esercizio 7.11

49

Esercizio 9.7 – oscillatore di Wien

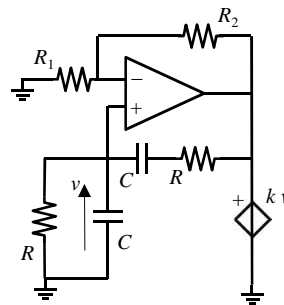
Determinare le frequenze naturali e studiare la stabilità del circuito di figura in funzione del parametro k



Nota: Il circuito rappresenta il comportamento lineare nell'intorno del punto di equilibrio del seguente circuito (ocillatore di Wien)

Il guadagno di tensione k è

$$k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



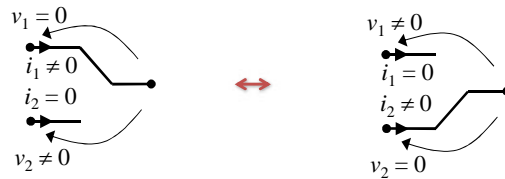
50

Interruttori ideali e deviatori

L'interruttore ideale è un bipolo in grado di imporre un corto circuito oppure un circuito aperto tra i suoi terminali e di commutare istantaneamente da una condizione all'altra



Il deviatore è un doppio bipolo tripolare in grado di imporre un corto circuito in una porta e un circuito aperto nell'altra e di commutare da una condizione all'altra per ciascuna porta simultaneamente e in modo istantaneo.

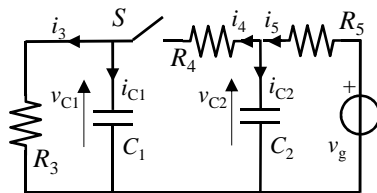


Le commutazioni di interruttori ideali o deviatori introducono nuove connessioni tra i componenti o eliminano connessioni esistenti, per cui modificano la topologia dl circuito

51

Circuiti con interruttori e/o deviatori (a topologia variabile)

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura, operante in regime di corrente continua. All'istante $t = t_0$ l'interruttore S chiude. Ci proponiamo di derminare la soluzione del circuito per $t \geq t_0$. A tal fine è necessario distinguere tra l'istante $t = t_0^-$ immediatamente precedente la chiusura, e l'istante $t = t_0^+$ immediatamente successivo.



All'istante $t = t_0^-$ le tensioni ai capi dei condensatori valgono

$$\begin{cases} v_{C1}(t_0^-) = 0 \\ v_{C2}(t_0^-) = v_g(t_0) \end{cases}$$

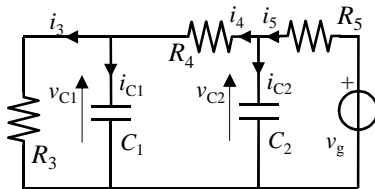
All'istante $t = t_0^-$ le correnti del circuito sono tutte nulle

Si assume che v_g sia continua in t_0 , per cui $v_g(t_0^-) = v_g(t_0^+) = v_g(t_0)$. Nell'analizzare il comportamento del circuito è importante distinguere il caso con $R_4 \neq 0$ dal caso con $R_4 = 0$

52

Caso 1: $R_4 \hat{=} 0$. La commutazione dà luogo ad un circuito non degenere

Per $t \geq t_0^+$ il circuito diventa

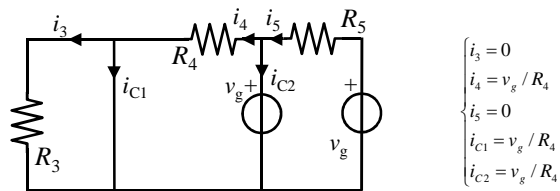


Il circuito è non degenere. In corrispondenza della commutazione le variabili di stato non subiscono discontinuità.

$$\begin{cases} v_{C1}(t_0^+) = v_{C1}(t_0^-) = 0 \\ v_{C2}(t_0^+) = v_{C2}(t_0^-) = v_g(t_0) \end{cases}$$

53

All'istante $t = t_0^+$ il comportamento del circuito è



Tutte le grandezze del circuito possono essere dedotte. Il circuito ottenuto assumendo la continuità delle variabili di stato non viola la LKT. Le correnti i_4 , i_{C1} e i_{C2} sono discontinue in corrispondenza della commutazione.

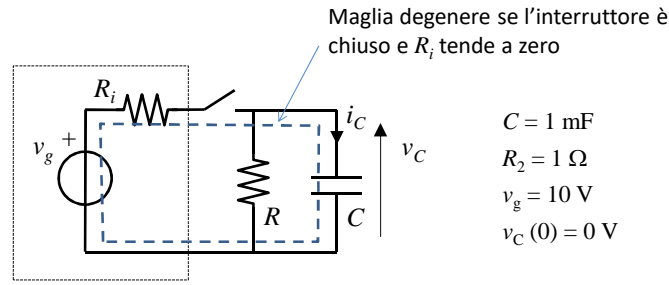
L'equazione di stato per $t \geq t_0^+$ si determina attraverso il metodo consueto e risulta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{G_3 + G_4}{C_1} & -\frac{G_4}{C_1} \\ -\frac{G_4}{C_1} & \frac{G_4 + G_5}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{G_5}{C_2} \end{pmatrix} v_g \\ v_{C1}(t_0^+) = 0 \\ v_{C2}(t_0^+) = v_g(t_0) \end{cases}$$

54



Si precisa che i componenti di un circuito reale non sono mai esattamente schematizzabili attraverso componenti ideali (sono sempre presenti resistori che schematizzano le inevitabili perdite), per cui è escluso che nella realtà si determinino circuiti degeneri. Tuttavia spesso alcuni parametri sono trascurabili e possono dar luogo a maglie o tagli quasi degeneri. Il comportamento del circuito può divenire molto prossimo a quello di un circuito degenere. I circuiti degeneri sono quindi casi limite dei circuiti reali

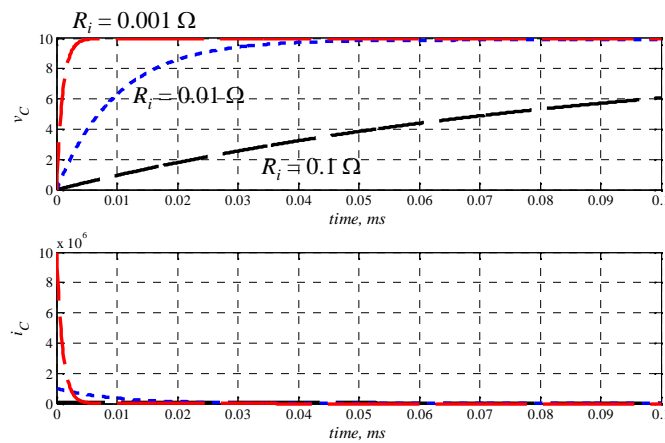


$$\begin{aligned}
 C &= 1 \text{ mF} \\
 R_2 &= 1 \Omega \\
 v_g &= 10 \text{ V} \\
 v_C(0) &= 0 \text{ V}
 \end{aligned}$$

generatore reale
(generatore ideale + resistenza interna)

$$\begin{cases}
 C \frac{d}{dt} v_C = -\frac{R R_i}{R_i + R} v_C + \frac{v_g}{R_i} \\
 v_C(0) = 0
 \end{cases}
 \quad
 \begin{aligned}
 v_C &= \frac{R}{R_i + R} v_g (1 - e^{-t/\tau}) \\
 \tau &= \frac{R R_i}{R_i + R} C
 \end{aligned}$$

55



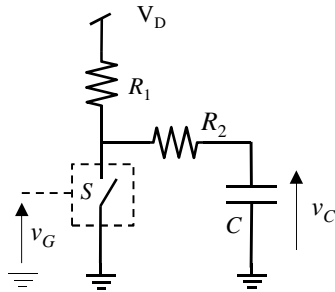
Al tendere di R_i a zero la tensione del condensatore varia rapidissimamente e la sua corrente assume carattere impulsivo (illimitata). Il circuito tende ad un comportamento degenere.

56

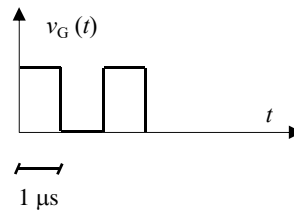


Esercizio 9.8 (invertitore logico)

L'interruttore S del circuito di figura è chiuso se il segnale v_G è nullo ed è aperto se il segnale v_G è > 0 . Determinare l'andamento nel tempo che la tensione v_C ai capi del condensatore se il segnale ha l'andamento rappresentato in figura. All'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario. Si assuma che l'interruttore sia ideale e che le commutazioni siano istantanee.



$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 100 \Omega \\ V_D &= 3 \text{ V} \\ C &= 0.01 \text{ pF} \end{aligned}$$

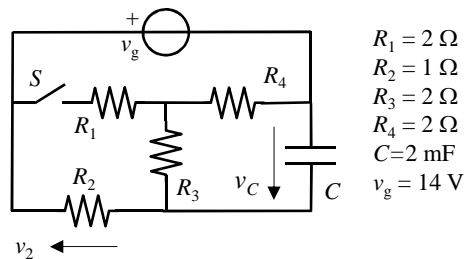


57

Esercizio 9.9

Il circuito di figura opera in regime di corrente continua. All'istante $t = 0$ l'interruttore ideale S chiude. Determinare

1. La costante di tempo del circuito per $t \geq 0^+$
2. L'energia complessivamente ceduta dal circuito al condensatore nell'intervallo $[0, +\infty[$
3. L'andamento nel tempo della tensione v_2



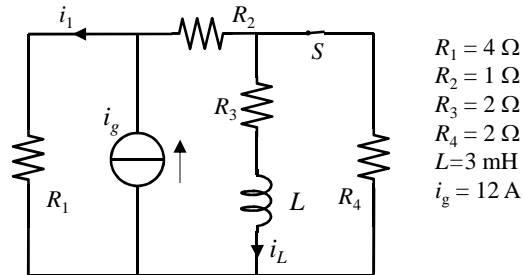
$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \Omega \\ R_2 &= 1 \Omega \\ R_3 &= 2 \Omega \\ R_4 &= 2 \Omega \\ C &= 2 \text{ mF} \\ v_g &= 14 \text{ V} \end{aligned}$$

58

Esercizio 9.10

Il circuito di figura opera in regime di corrente continua. All'istante $t=0$ l'interruttore ideale S apre. Determinare

1. La variazione di energia dell'induttore nell'intervallo $[0, +\infty[$
2. L'andamento nel tempo della corrente i_1 per $t \geq 0$
3. La potenza erogata dal generatore all'istante $t = 0^+$

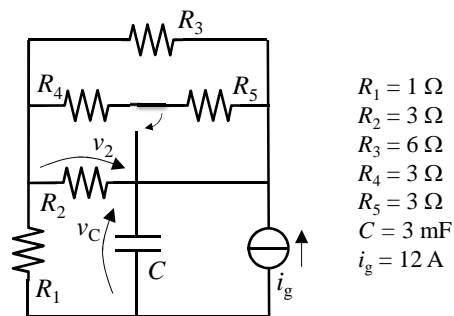


59

Esercizio 9.11

Il circuito di figura opera in regime di corrente continua. All'istante $t=0$ l'interruttore ideale S apre. Determinare

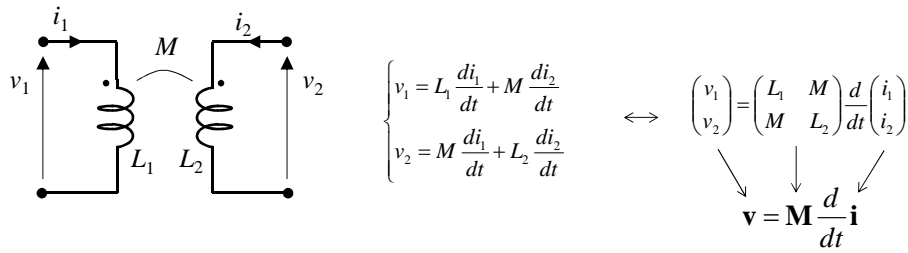
1. La variazione di energia dell'induttore nell'intervallo $[0, +\infty[$
2. L'andamento nel tempo della tensione v_2 per $t \geq 0$
3. La potenza erogata dal generatore all'istante $t = 0^+$



60



Induttori mutuamente accoppiati

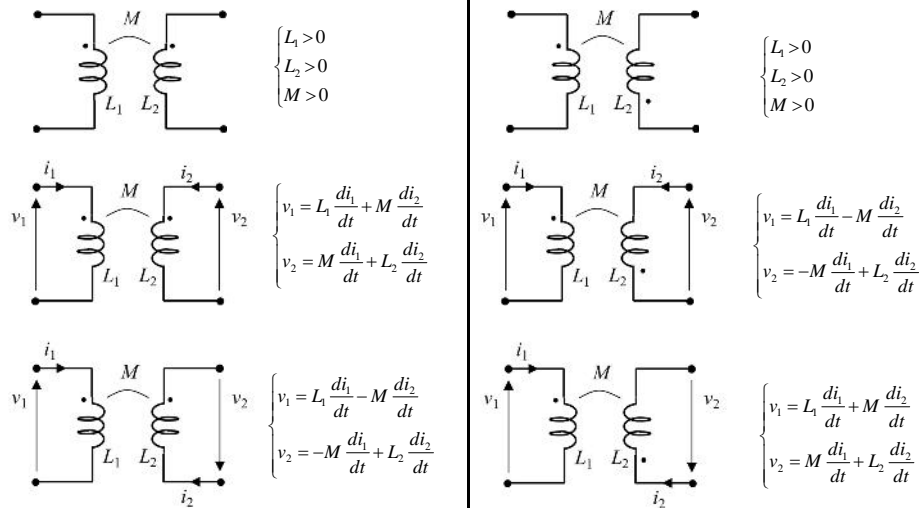


L_1, L_2 , coefficienti di autoinduzione (o auto-induttanze), [H]
 M , coefficiente di mutua induzione (o mutua induttanza), [H]

Fisicamente due induttori accoppiati sono costituiti da due avvolgimenti in rame fatti di molte spire, di solito avvolti attorno ad un nucleo di materiale ferromagnetico comune. L'auto-induttanza L_1 rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra la corrente i_1 del primo avvolgimento e il flusso $\{_{11}$ del campo magnetico da questa prodotto concatenato con l'avvolgimento stesso, i.e. $\{_{11} = L_1 i_1$. Per l'auto-induttanza L_2 vale la definizione analoga, cioè $\{_{22} = L_2 i_2$. La mutua induttanza M rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra la corrente i_1 del primo avvolgimento e il flusso $\{_{21}$ del campo magnetico da questa prodotto concatenato con il secondo l'avvolgimento, $\{_{21} = M i_1$. Attraverso considerazioni fisiche è possibile dimostrare che il medesimo coefficiente di proporzionalità M sussiste tra la corrente i_2 del secondo avvolgimento e il flusso $\{_{12}$ del campo magnetico da questa prodotto e concatenato con il primo avvolgimento, i.e. $\{_{12} = M i_2$. Trascurando, come è lecito, le dissipazioni di potenza che si verificano nel conduttore e nel materiale ferromagnetico, dalla legge di Faraday si ottengono le equazioni costitutive degli induttori accoppiati, ossia la relazione tra le correnti e la tensioni dei due avvolgimenti.

61

Il coefficiente di mutua induzione M può essere sia positivo che negativo. Il suo segno dipende dal verso con cui sono realizzati avvolgimenti. Di solito per M si fornisce il valore assoluto e si specifica con dei puntini il corrispondente verso degli avvolgimenti. Le correnti e le tensioni scelte per rappresentare i due induttori accoppiati debbono tenere conto di questo verso.



62



Dato che la matrice \mathbf{M} è simmetrica la potenza p assorbita in ogni istante dai due induttori accoppiati è un differenziale esatto esprimibile come

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \mathbf{i}^t \mathbf{v} = \mathbf{i}^t \mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{M} \mathbf{i} \right) = \frac{d}{dt} W_m$$

La quantità W_m rappresenta l'energia immagazzinata dai due induttori (mediante il campo magnetico complessivo da essi prodotto) e prende il nome di energia magnetica. Essa è una funzione di stato perché dipende esclusivamente dalle correnti che circolano negli induttori. Le correnti i_1 e i_2 assumono quindi il ruolo di variabili di stato.

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{M} \mathbf{i} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad \text{Energia magnetica dell'induttore}$$

L'energia magnetica di due induttori accoppiati è una quantità positiva o al più nulla, ossia

$$W_m \geq 0 \quad \forall i_1, i_2$$

Cio impone che la matrice \mathbf{M} sia semidefinita positiva, valgono cioè le seguenti relazioni

$$\begin{cases} L_1 > 0 \\ L_2 > 0 \\ L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si noti che il maggiore stretto (anzichè } \geq \text{) nelle prime due condizioni} \\ \text{deriva dal fatto che se } i_1 \neq 0 \text{ e } i_2 = 0 \text{ l'energia magnetica coincide con} \\ \text{quella del primo avvolgimento, che è strettamente positiva, per cui} \\ \text{deve essere } L_1 > 0. \text{ Analogamente per } L_2. \end{array}$$

63

Nessuna condizione è imposta sul coefficiente M , che può essere sia positivo che negativo. Si definisce coefficiente di accoppiamento tra i due induttori il rapporto

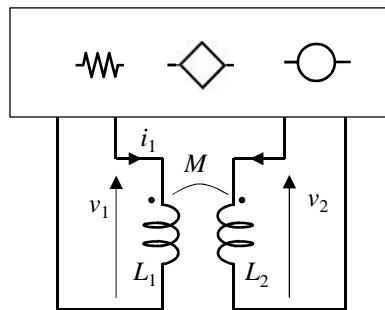
$$\dagger = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Se $\dagger = 0$ i due induttori sono disaccoppiati. L'energia magnetica complessiva coincide con la somma delle energia magnetiche dei singoli avvolgimenti.

64

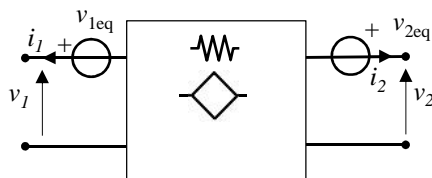


Un circuito contenente due induttori accoppiati è, in generale, del secondo ordine. Per determinare l'equazione di stato si procede nel modo consueto



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{i}$$

Relazioni di definizione dei componenti dinamici



$$\begin{cases} v_1 = -r_{11} i_1 - r_{12} i_2 + v_{1eq} \\ v_2 = -r_{21} i_1 - r_{22} i_2 + v_{2eq} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = -\mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{v}_{eq}$$

Rappresentazione in corrente del doppio bipolo adinamico complementare

65

Il doppio bipolo adinamico complementare può essere costituito o da un doppio bipolo (proprio o improprio) oppure da due bipoli distinti, nel qual caso i termini r_{12} e r_{21} risultano nulli. Sostituendo le sue equazioni di definizione nelle relazioni di definizione degli induttori accoppiati si ottiene l'equazione di stato in forma non canonica

Equazione di stato in forma non canonica

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_{L2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1eq} \\ v_{2eq} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{v}_{eq}$$

Se i due induttori non sono perfettamente accoppiati ($L_1 L_2 > M^2 \neq 0$) la matrice dei coefficienti di auto e mutua induzione è invertibile e l'equazione di stato può essere posta in forma canonica

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_{L2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_{1eq} \\ v_{2eq} \end{pmatrix} \\ i_1(0) = i_{10} \\ i_2(0) = i_{20} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}_{eq}$$

66



Se i due induttori sono invece perfettamente accoppiati ($L_1 L_2 > M^2 = 0$) sottraendo alla prima riga dell'equazione in forma non canonica la seconda moltiplicata per la radice del rapporto L_1/L_2 si ottiene il seguente vincolo algebrico tra i_1 e i_2

$$v_{1eq} - (r_{11} - r_{21}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}})i_1 = v_{2eq}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - (r_{22}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - r_{12})i_2$$

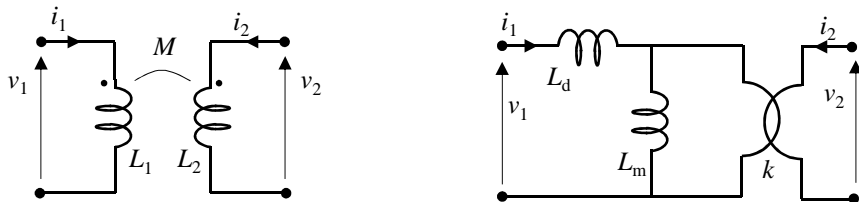
Il circuito è degenere. Le correnti dei due induttori non sono indipendenti e non possono assumere, entrambe, il ruolo di variabile di stato. Il circuito è in realtà del primo ordine. Una delle correnti è deducibile dall'altra.

In particolare se il doppio bipolo adinamico complementare è costituito da due bipoli distinti i termini r_{12} e r_{21} sono nulli. Dalla precedente si ottiene

$$v_{1eq} - r_{11}i_1 = v_{2eq}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - r_{22}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}i_2$$

67

Si vuole ora valutare sotto quale condizione sussiste l'equivalenza tra i due seguenti circuiti, entrambi caratterizzati da tre parametri



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = L_d + L_m \\ M = L_m/k \\ L_2 = L_m/k^2 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} v_1 = L_d \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{i_2}{k} \right) \\ v_2 = \frac{L_m}{k} \frac{d}{dt} \left(i_1 + \frac{i_2}{k} \right) \end{cases}$$

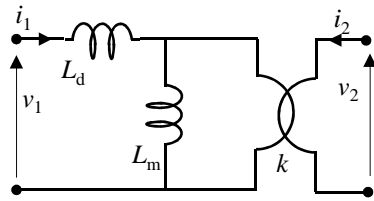
$$\begin{cases} L_d = L_1 - M^2/L_2 \\ L_m = M^2/L_2 \\ k = M/L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_d = L_1(1 - \dagger)^2 \\ L_m = \dagger^2 L_1 \\ k = \dagger L_1/L_2 \end{cases}$$

68

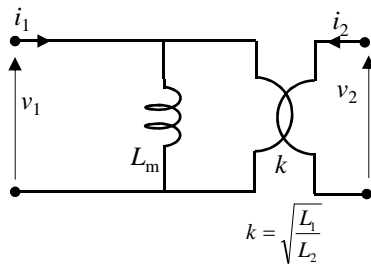


Due induttori mutuamente accoppiati possono essere quindi rappresentati attraverso due induttori non accoppiati ed un trasformatore ideale.



$$\begin{cases} L_d = L_1(1-\dagger) \\ L_m = \dagger L_1 \\ k = \dagger L_1/L_2 \end{cases}$$

Il doppio bipolo ottenuto schematizza un trasformatore reale, comprensivo di induttanza di dispersione L_a e di induttanza di magnetizzazione L_b .

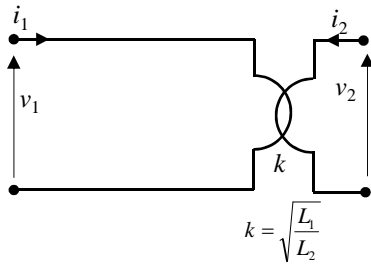


Nel caso di accoppiamento perfetto l'induttanza di dispersione si annulla ed il circuito è rappresentabile mediante un unico induttore (circuito del primo ordine)

$$k = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

69

Se inoltre l'induttanza L_1 (e conseguentemente anche l'induttanza L_2) tende a infinito il circuito diventa



$$k = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

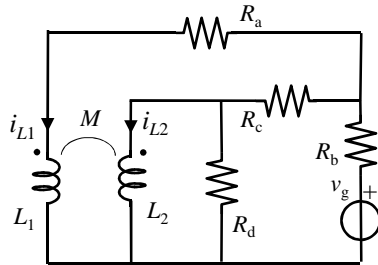
I due induttori accoppiati di elevato valore (infinito) e con accoppiamento perfetto si comportano come un trasformatore ideale. Il loro comportamento è totalmente adinamico. L'energia immagazzinata è identicamente nulla.

70



Esercizio 9.10

Determinare le costanti di tempo del circuito e l'andamento nel tempo delle correnti i_{L1} e i_{L2}



$$\begin{aligned} R_a &= 2 \Omega & R_b &= 4 \Omega \\ R_c &= 1 \Omega & R_d &= 5 \Omega \\ v_g &= 5 \text{ V} \\ L_1 &= 2 \text{ mH} \\ L_2 &= 1 \text{ mH} \\ M &= 1 \text{ mH} \\ i_{L1}(0) &= 2 \text{ A} \\ i_{L2}(0) &= -3 \text{ A} \end{aligned}$$

Il circuito coincide con quello dell'esercizio 9.5 salvo che in questo caso i due induttori sono accoppiati

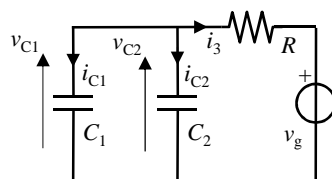
71

Cenni allo studio dei Circuiti degeneri

Si consideri a titolo di esempio il circuito di figura, apparentemente del secondo ordine. Il circuito è degenere in quanto contiene una maglia di soli condensatori. Le presunte variabili di stato sono le tensioni v_{C1} e v_{C2} ai capi dei condensatori.

Per determinare l'equazione di stato secondo il metodo sviluppato finora dovremmo determinare la rappresentazione del doppio bipolo dinamico complementare nelle tensioni v_{C2} e v_{C2} . Tale rappresentazione non esiste in quanto il circuito dinamico che si ottiene imponendo v_{C2} e v_{C2} attraverso due generatori di tensione è patologico

Per determinare l'equazione di stato è necessario adoperare la rappresentazione implicita del doppio bipolo dinamico complementare



$$\begin{cases} i_{C1} + i_{C2} + i_3 = 0 \\ v_{C1} - v_{C2} = 0 \\ v_{C1} - v_3 = 0 \\ v_3 - Ri_3 = v_g \\ i_{C1} = C_1 \frac{d}{dt} v_{C1} \\ i_{C2} = C_2 \frac{d}{dt} v_{C2} \end{cases} \quad \text{sistema risolvente}$$

72

La rappresentazione implicita del doppio bipolo adinamico può essere ottenuta considerando tutte le equazioni del sistema risolvente meno quelle che definiscono componenti dinamici ed eliminando da queste tutte le variabili (correnti, tensioni) che non riguardano i componenti dinamici

$$\begin{cases} i_{C1} + i_{C2} + i_3 = 0 \\ v_{C1} - v_{C2} = 0 \\ v_{C1} - v_3 = 0 \\ v_3 - Ri_3 = v_g \end{cases} \rightarrow i_3 = -i_{C1} - i_{C2}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} v_{C1} - v_{C2} = 0 \\ v_{C1} - v_3 = 0 \\ v_3 + Ri_{C1} + Ri_{C2} = v_g \end{cases} \rightarrow v_3 = v_g - Ri_{C1} - Ri_{C2}$$

$$\begin{cases} v_{C1} - v_{C2} = 0 \\ v_{C1} + Ri_{C1} + Ri_{C2} = v_g \end{cases}$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione implicita del doppio bipolo complementare

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_g \end{pmatrix}$$

Dalla rappresentazione implicita si vede che, in accordo con quanto atteso, la matrice che premoltiplica le correnti è singolare e non è possibile esprimere queste in funzione delle tensioni

73

Si sostituiscono ora le relazioni di definizione dei componenti dinamici all'interno della rappresentazione implicita e si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ RC_1 & RC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_g \end{pmatrix}$$

La prima delle equazioni ottenute è non differenziale ma riflette il vincolo algebrico tra le variabili di stato dovuto al fatto che il circuito è degenere (LKT applicata alla maglia dei condensatori).

Utilizzando il vincolo algebrico possiamo esprimere una delle presunte variabili di stato in funzione dell'altra

$$v_{C2} = v_{C1}$$

Infine sostituendo la precedente all'interno della seconda si ottiene la seguente equazione di stato in forma canonica

$$\frac{d}{dt} v_{C1} = - \frac{1}{R(C_1 + C_2)} v_{C1} + \frac{1}{R(C_1 + C_2)} v_g$$

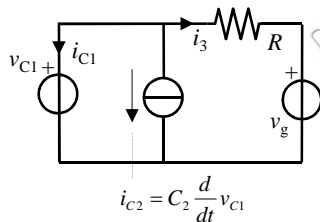
L'equazione ottenuta coincide quella ottenibile considerando i due condensatori in parallelo come un unico condensatore equivalente di capacità $C_{eq} = C_1 + C_2$

74



L'equazione di stato ottenuta coinvolge una sola delle tensioni dei condensatori. Il circuito è del primo ordine. Si noti che, nel caso analizzato, la variabile di stato non è discontinua anche nel caso in cui la tensione v_g impressa dal generatore lo sia.

Essendo il circuito dinamico in esame degenere il circuito adinamico che si ottiene imponendo v_{C1} e v_{C2} attraverso due generatori di tensione è patologico. Per ottenere l'equazione di uscita è necessario imporre la tensione di un solo condensatore, quello la cui tensione è la variabile di stato. Per l'altro condensatore è necessario imporre la variabile coniugata, ossia la corrente



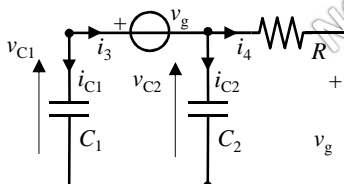
Equazione di uscita

$$\begin{cases} v_3 = v_{C1} \\ i_3 = (v_{C1} - v_g)/R \\ v_{C2} = v_{C1} \\ i_{C1} = -(v_{C1} - v_g)/R - C_2 \frac{d}{dt} v_{C1} \end{cases}$$

Si noti che nell'equazione di uscita del circuito compare, oltre alla variabile di stato anche la sua derivata

75

Si consideri ora il circuito rappresentato in figura. Il circuito è degenere in quanto contiene una maglia costituita da due condensatori e un generatore di tensione. Le presunte variabili di stato sono le tensioni v_{C1} e v_{C2} ai capi dei condensatori. Si noti che a differenza del circuito precedentemente analizzato in questo caso il vincolo algebrico che lega le tensioni dei condensatori è non omogeneo.



$$\begin{cases} i_{C1} + i_3 = 0 \\ i_{C1} - i_3 + i_4 = 0 \\ v_{C1} - v_{C2} - v_3 = 0 \\ v_{C1} - v_4 - v_3 = 0 \\ v_3 = v_g \\ v_4 - R_4 i_4 = 0 \\ i_{C1} = C_1 \frac{d}{dt} v_{C1} \\ i_{C2} = C_2 \frac{d}{dt} v_{C2} \end{cases} \quad \text{sistema risolvente}$$

76

Analogamente al caso precedente per determinare l'equazione di stato introduciamo la rappresentazione implicita del doppio bipolo adinamico complementare. A questo fine consideriamo tutte le equazioni del sistema risolvente meno quelle che definiscono componenti dinamici ed eliminiamo da queste le variabili (correnti, tensioni) che non riguardano i componenti dinamici

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} i_{C1} + i_3 = 0 \\ i_{C1} - i_3 + i_4 = 0 \\ v_{C1} - v_{C2} - v_3 = 0 \\ v_{C1} - v_4 - v_3 = 0 \\ v_3 = v_g \\ v_4 - R i_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_3 = -i_{C1} \\ \downarrow \\ i_{C2} + i_{C1} + i_4 = 0 \\ v_{C1} - v_{C2} - v_3 = 0 \\ v_{C1} - v_4 - v_3 = 0 \\ v_3 = v_g \\ v_4 - R i_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_4 = -i_{C2} - i_{C1} \\ \downarrow \\ v_{C1} - v_{C2} - v_3 = 0 \\ v_{C1} - v_4 - v_3 = 0 \\ v_3 = v_g \\ v_4 + R i_{C1} + R i_{C2} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{C1} - v_{C2} = v_g \\ v_{C1} + R i_{C1} + R i_{C2} = v_g \\ \uparrow \\ v_3 = v_g \\ v_4 = -R i_{C1} - R i_{C2} = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione implicita del doppio bipolo adinamico

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{C1} \\ i_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_g \\ v_g \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso, come atteso, la matrice che premoltiplica le correnti è singolare e non è possibile esprimere queste in funzione delle tensioni

77

Sostituendo le relazioni di definizione dei componenti dinamici all'interno della rappresentazione implicita si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R C_1 & R C_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_g \\ v_g \end{pmatrix}$$

La prima delle equazioni ottenute è non differenziale e riflette il vincolo algebrico tra le variabili di stato dovuto al fatto che il circuito è degenere (LKT applicata alla maglia costituita dai condensatori e dal generatore di tensione). In questo caso però il vincolo è non omogeneo.

$$v_{C2} = v_{C1} - v_g$$

Infine sostituendo la precedente all'interno della seconda si ottiene la seguente equazione di stato in forma canonica

$$\frac{d}{dt} v_{C1} = - \frac{1}{R(C_1 + C_2)} v_{C1} + \frac{1}{R(C_1 + C_2)} v_g + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{d}{dt} v_g$$

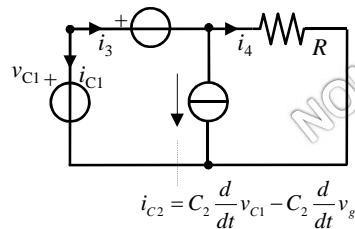
Come nel caso precedente l'equazione di stato coinvolge una sola delle tensioni dei condensatori. Il circuito è del primo ordine.

78



In questo caso tra le forzanti oltre alla tensione del generatore compare anche la derivata. Se la tensione impressa dal generatore è discontinua anche la variabile di stato deve essere discontinua per compensare l'impulso che sorge al secondo membro dell'equazione. Nei condensatori ha luogo quindi un impulso di corrente.

Per ottenere l'equazione di uscita è necessario imporre la tensione di un solo condensatore, quello la cui tensione è la variabile. Per l'altro condensatore è necessario imporre la variabile coniugata, ossia la corrente



Equazione di uscita

$$\begin{cases} v_4 = v_{C1} - v_g \\ i_4 = (v_{C1} - v_g)/R \\ v_3 = v_g \\ i_3 = (v_{C1} - v_g)/R + C_2 \frac{d}{dt} v_{C1} + C_2 \frac{d}{dt} v_g \\ v_{C2} = v_{C1} \\ i_{C1} = -(v_{C1} - v_g)/R - C_2 \frac{d}{dt} v_{C1} - C_2 \frac{d}{dt} v_g \end{cases}$$

Nell'equazione di uscita del circuito compaiono, oltre alla v_{C1} e la v_g , anche le loro derivate.

79

Nei circuiti degeneri non è quindi assicurata la continuità analitica delle variabili di stato.

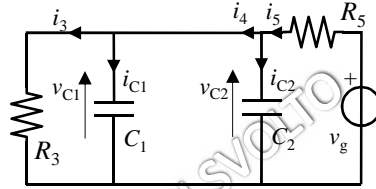
Nel caso in esame se la tensione impressa dal generatore è discontinua nasce un impulso di corrente necessario per far variare istantaneamente la tensione v_{C1} ai capi del condensatore e, quindi, l'energia accumulata al suo interno. Tale corrente impulsiva si richiude attraverso la maglia degenere, ed in particolare interessa il generatore di tensione che, nell'istante della discontinuità, fornisce una potenza infinita in grado di far variare istantaneamente l'energia dei condensatori

Si noti che la corrente impulsiva deve necessariamente richiudersi attraverso la maglia degenere. Se così non fosse infatti essa attraverserebbe delle resistenze e darebbe luogo ad una tensione infinita, violando così il principio di non amplificazione delle tensioni.

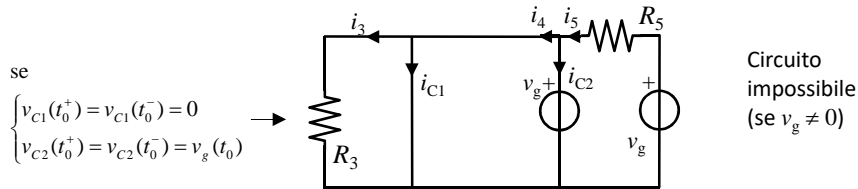
80

Caso 2: $R_4 = 0$. La commutazione dà luogo ad un circuito degenere

Per $t \geq t_0^+$ il circuito diventa



Il circuito è degenere. In corrispondenza della commutazione le tensioni sui condensatori sono discontinue. Infatti se si conservassero risulterebbe violata la LKT



81

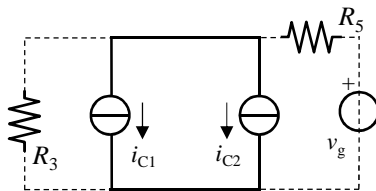
A seguito della commutazione le tensioni dei condensatori sono soggette al vincolo (LKT)

$$v_{C1}(t_0^+) - v_{C2}(t_0^+) = 0$$

Per soddisfare tale vincolo esse variano istantaneamente. Nei condensatori ha luogo quindi un impulso di corrente

$$\begin{aligned} i_{C1}(t) &= C_1 (v_{C1}(t_0^+) - v_{C1}(t_0^-)) u(t - t_0) \\ i_{C2}(t) &= C_2 (v_{C2}(t_0^+) - v_{C2}(t_0^-)) u(t - t_0) = C_2 (v_{C1}(t_0^+) - v_{C2}(t_0^-)) u(t - t_0) \end{aligned}$$

Tali impulsi debbono necessariamente richiudersi attraverso la maglia degenere. Se così non fosse infatti essi attraverserebbero delle resistenze e darebbero luogo a tensioni infinite, violando così il principio di non amplificazione delle tensioni (gli unici componenti in grado di erogare potenza sono i condensatori o i generatori indipendenti le cui tensioni sono comunque limitate). Dalla LKC risulta allora



$$\begin{aligned} \text{LKC} \quad i_{C1}(t_0) &= -i_{C2}(t_0) \\ \Rightarrow v_{C1}(t_0^+) &= v_{C2}(t_0^+) = \frac{C_1 v_{C1}(t_0^-) + C_2 v_{C2}(t_0^-)}{C_1 + C_2} \end{aligned}$$

82

Lo studio degli impulsi di corrente consente quindi di determinare la tensione comune $v_C(t_0^+)$ che si stabilisce su entrambi i condensatori a seguito della commutazione ($t = t_0^+$)

Si noti che con tale valore di tensione in corrispondenza della commutazione non risulta conservata l'energia immagazzinata dai condensatori. La differenza è assorbita dall'interruttore durante la commutazione.

La tensione $v_C(t_0^+)$ costituisce la condizione iniziale necessaria per lo studio del circuito per $t \geq t_0^+$

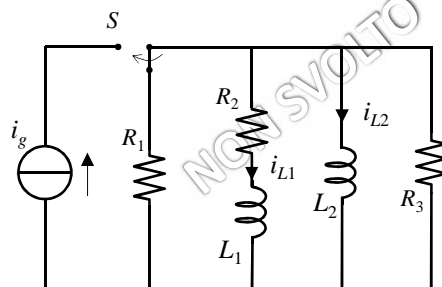
L'equazione di stato per $t \geq t_0^+$ si determina attraverso il metodo esposto per i circuiti degeneri e risulta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_{C1} = -\frac{(G_3 + G_5)}{(C_1 + C_2)} v_{C1} + \frac{G_5}{(C_1 + C_2)} v_g \\ v_{C1}(t_0^+) = \frac{C_1 v_{C1}(t_0^-) + C_2 v_{C2}(t_0^-)}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

83

Esercizio 9.11

Il circuito di figura opera in regime di corrente continua. All'istante $t = 0$ il deviatore ideale S commuta. Determinare il valore all'istante $t \geq 0^+$ delle correnti i_{L1} e i_{L2} degli induttori nel caso $R_3 = 2 \Omega$ e nel caso $R_3 \rightarrow \infty$

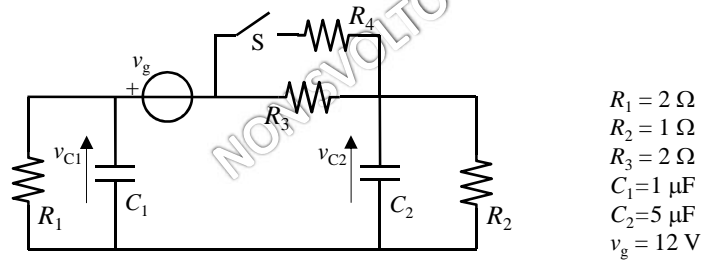


$$\begin{aligned} R_1 &= 4 \Omega \\ R_2 &= 1 \Omega \\ L_1 &= 2 \text{ mH} \\ L_2 &= 8 \text{ mH} \\ i_g &= 12 \text{ A} \end{aligned}$$

84

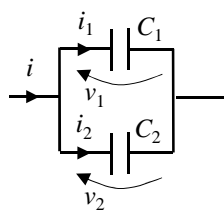
Esercizio 9.12

Il circuito di figura opera in regime di corrente continua. All'istante $t = 0$ l'interruttore ideale S commuta. Determinare il valore all'istante $t = 0^+$ delle tensioni v_{C1} e v_{C2} ai capi dei condensatori nel caso $R_4 = 2 \Omega$ e nel caso $R_4 = 0 \Omega$



85

Condensatori in parallelo

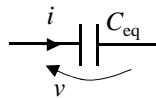


LKT: $v_1 = v_2 = v$

LKC: $i = i_1 + i_2$

$v_1(0) = v_2(0) = v_0$ La condizione iniziale è vincolata dalla LKT

$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{d}{dt} v_1 + C_2 \frac{d}{dt} v_2 = (C_1 + C_2) \frac{d}{dt} v$$



$$i = C_{eq} \frac{d}{dt} v$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$v(0) = v_0$$

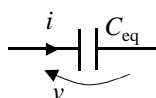
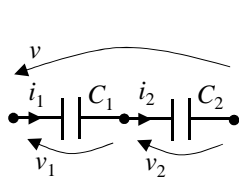
$$\Delta W = \frac{1}{2} C_1 v^2 + \frac{1}{2} C_2 v^2$$

La riduzione di due condensatori in parallelo ad un unico condensatore equivalente rispetta la conservazione dell'energia.

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_{eq} v^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) v^2$$

86

Condensatori in serie



LKT: $v = v_1 + v_2$

LKT: $i_1 = i_2 = i$

$v_1(0) = v_{10}; \quad v_2(0) = v_{20};$

$$\frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt} v_1 + \frac{d}{dt} v_2 = \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C_2} i_2 = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) i$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_1 v_1^2 + \frac{1}{2} C_2 v_2^2$$



$$i = C_{eq} \frac{d}{dt} v$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

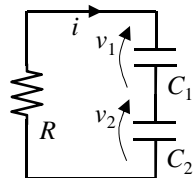
$v(0) = v_{10} + v_{20}$

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_{eq} v^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_1 + v_2)^2$$

87

La riduzione di due condensatori in serie ad un unico condensatore equivalente non rispetta la conservazione dell'energia. Ciò dà luogo ad alcune incongruenze quando tale equivalenza è utilizzata ai fini della soluzione dei circuiti.

Si consideri il circuito di figura contenente due condensatori in serie. Sono assegnate le tensioni v_{10} e v_{20} di entrambi i condensatori all'istante iniziale



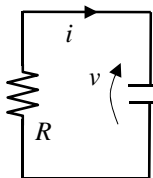
$v_1(0) = v_{10}$

$v_2(0) = v_{20}$

L'energia complessivamente posseduta dai condensatori all'istante iniziale è

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} C_2 v_{20}^2$$

Sostituendo i due condensatori con un unico condensatore equivalente (ossia trattando il circuito come se fosse del primo ordine) otteniamo



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$v(0) = v_{10} + v_{20}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} v = -\frac{v}{RC} \\ v(0) = v_{10} + v_{20} \end{array} \right. \longrightarrow v(t) = (v_{10} + v_{20}) e^{-\frac{t}{RC}}$$

A regime la tensione del condensatore equivalente è nulla. L'energia complessivamente ceduta al resistore è

$$\Delta W = \frac{1}{2} C v(0)^2 - \frac{1}{2} C v(\infty)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_{10} + v_{20})^2$$

Tale energia è diversa da quella complessivamente posseduta dai condensatori all'istante iniziale

88

Per superare questo apparente paradosso risolviamo il circuito senza introdurre l'equivalenza

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1/R & 1/R \\ 1/R & 1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1/RC_1 & 1/RC_1 \\ 1/RC_2 & 1/RC_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ v_1(0) = v_{10} \\ v_2(0) = v_{20} \end{cases}$$

doppio bipolo compl.

equazione di stato

L'equazione caratteristica associata all'equazione di stato è

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda^2 + \frac{1}{R} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \end{matrix} \right\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

L'equazione di stato possiede un autovalore nullo, al quale corrisponde un modo stazionario. La soluzione è

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{0t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ C_1/C_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_1(0) = v_{10} \\ v_2(0) = v_{20} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v_1(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_{10} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{20} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (v_{10} + v_{20}) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_2(t) = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} v_{10} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{20} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} (v_{10} + v_{20}) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

(si noti che dato che i condensatori sono in serie la matrice G del doppio bipolo complementare possiede sempre due righe identiche, che danno luogo all'autovalore nullo)

89

Oltre al termine esponenziale decrescente le due tensioni posseggono anche un termine costante

$$v_1(\infty) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_{10} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{20}$$

$$v_2(\infty) = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} v_{10} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{20}$$

A regime le tensioni dei due condensatori sono uguali e opposte. La tensione complessiva ai capi della serie è nulla.

Le singole tensioni non sono però nulle (in generale) pertanto non è nulla l'energia posseduta dai condensatori. A regime i due condensatori non sono completamente scarichi.

L'energia complessivamente ceduta al resistore coincide con la somma delle variazioni di energia dei due condensatori dall'istante $t = 0$ all'istante $t = \infty$ e risulta

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{1}{2} C_1 (v_{10}^2 - v_1(\infty)^2) + \frac{1}{2} C_2 (v_{20}^2 - v_2(\infty)^2)$$

Sostituendo le espressioni di $v_1(\infty)$ e $v_2(\infty)$ dopo alcuni passaggi si ottiene

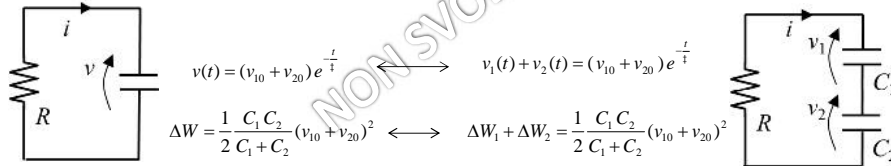
$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (v_{10} + v_{20})^2$$

L'energia ceduta al resistore coincide dunque con quella calcolata adoperando un unico condensatore equivalente

90

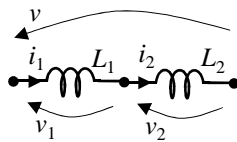
In definitiva se si adopera la capacità equivalente in luogo delle due capacità distinte si tratta un circuito del secondo ordine come se fosse del primo ordine. Ciò occulta il modo stazionario (sempre presente nel caso di condensatori in serie, qualunque sia il bipolo cui questi sono collegati) e dà luogo ad una apparente violazione del principio di conservazione dell'energia.

Ciononostante tutte le quantità relative alla rimanente parte del circuito sono correttamente calcolate anche adoperando il condensatore equivalente



Per quanto riguarda un circuito con due condensatori in parallelo notiamo che in realtà esso è degenerare per cui è del primo ordine. Nessuna violazione accade quindi quando si adopera un unico condensatore equivalente in luogo di due condensatori in parallelo.

Induttori in serie

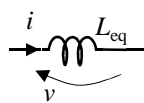


LKT: $v = v_1 + v_2$

LKT: $i_1 = i_2 = i$

$i_1(0) = i_2(0) = i_0$ La condizione iniziale è vincolata dalla LKC

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{d}{dt} i_1 + L_2 \frac{d}{dt} i_2 = (L_1 + L_2) \frac{d}{dt} i$$



$$v = L_{eq} \frac{d}{dt} i$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

$$i(0) = i_0$$

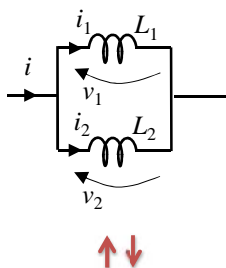
$$\Delta W = \frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2} L_2 i^2$$



La riduzione di due induttori in serie ad un unico induttore equivalente rispetta la conservazione dell'energia.

$$\Delta W = \frac{1}{2} L_{eq} i^2 = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) i^2$$

Induttori in parallelo



LKT: $v_1 = v_2 = v$

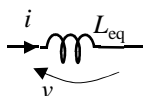
LKC: $i = i_1 + i_2$

$i_1(0) = i_{10}; \quad i_2(0) = i_{20};$

$$\frac{d}{dt} i = \frac{d}{dt} i_1 + \frac{d}{dt} i_2 = \frac{1}{L_1} v_1 + \frac{1}{L_2} v_2 = \left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} \right) v$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

↑



$v = L_{eq} \frac{d}{dt} i$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

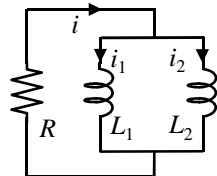
$i(0) = i_{10} + i_{20}$

La riduzione di due induttori in parallelo ad un unico induttore equivalente non rispetta la conservazione dell'energia. Ciò dà luogo ad alcune incongruenze quando tale equivalenza è utilizzata ai fini della soluzione dei circuiti.

$$\Delta W = \frac{1}{2} L_{eq} i^2 = \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_1 + i_2)^2$$

93

Si consideri il circuito di figura contenente due induttori in parallelo. Sono assegnate le correnti i_{10} e i_{20} di entrambi gli induttori all'istante iniziale

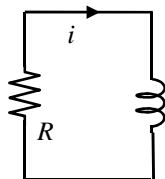


$i_1(0) = i_{10}$
 $i_2(0) = i_{20}$

L'energia complessivamente posseduta dagli induttori all'istante iniziale è

$$\Delta W = \frac{1}{2} L_1 i_{10}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{20}^2$$

Sostituendo i due induttori con un unico induttore equivalente (ossia trattando il circuito come se fosse del primo ordine) otteniamo



$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

$i(0) = i_{10} + i_{20}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i = -\frac{R}{L} i \\ i(0) = i_{10} + i_{20} \end{cases} \longrightarrow i(t) = (i_{10} + i_{20}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A regime la corrente dell' induttore equivalente è nulla. L'energia complessivamente ceduta al resistore è

$$\Delta W = \frac{1}{2} L i(0)^2 - \frac{1}{2} L i(\infty)^2 = \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_{10} + i_{20})^2$$

Tale energia è diversa da quella complessivamente posseduta dagli induttori all'istante iniziale

94

Per superare questo apparente paradosso risolviamo il circuito senza introdurre l'equivalenza

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R/L_1 & R/L_1 \\ R/L_2 & R/L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \\ i_1(0) = i_{10} \\ i_2(0) = i_{20} \end{cases}$$

doppio bipolo compl.

equazione di stato

L'equazione caratteristica associata all'equazione di stato è

$$\left\{ \lambda^2 + \frac{R}{L_1 L_2} \lambda \right\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

L'equazione di stato possiede un autovalore nullo, al quale corrisponde un modo stazionario. La soluzione è

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{0t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ L_1/L_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_1(0) = i_{10} \\ i_2(0) = i_{20} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} i_1(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{10} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{20} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} (i_{10} + i_{20}) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_2(t) = -\frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{10} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{20} + \frac{L_1}{L_1 + L_2} (i_{10} + i_{20}) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

(si noti che dato che i due induttori sono in parallelo la matrice R del doppio bipolo complementare possiede sempre due righe identiche, che danno luogo all'autovalore nullo)

95

Oltre al termine esponenziale decrescente le due correnti posseggono anche un termine costante

$$\begin{aligned} i_1(\infty) &= \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{10} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{20} \\ i_2(\infty) &= -\frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{10} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_{20} \end{aligned}$$

A regime le correnti dei due induttori sono uguali e opposte. La corrente complessiva del parallelo è nulla.

Le singole correnti non sono però nulle (in generale) pertanto non è nulla l'energia posseduta dagli induttori. A regime i due induttori non sono completamente scarichi.

L'energia complessivamente ceduta al resistore coincide con la somma delle variazioni di energia dei due induttori dall'istante $t = 0$ all'istante $t = \infty$ e risulta

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{1}{2} L_1 (i_{10}^2 - i_1(\infty)^2) + \frac{1}{2} L_2 (i_{20}^2 - i_2(\infty)^2)$$

Sostituendo le espressioni di $i_1(\infty)$ e $i_2(\infty)$ dopo alcuni passaggi si ottiene

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_{10} + i_{20})^2$$

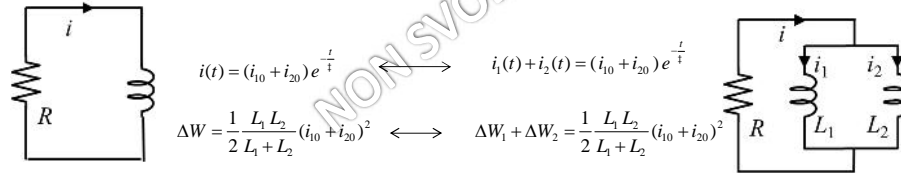
L'energia ceduta al resistore coincide dunque con quella calcolata doperando un unico induttore equivalente

96



In definitiva se si adopera l'induttore equivalente in luogo degli induttori distinti si tratta un circuito del secondo ordine come se fosse del primo ordine. Ciò occulta il modo stazionario (sempre presente nel caso di induttori in parallelo, qualunque sia il bipolo a cui questi sono collegati) e dà luogo ad una violazione del principio di conservazione dell'energia.

Cionostante tutte le quantità relative alla rimanente parte del circuito sono correttamente calcolate anche adoperando l'induttore equivalente.



Per quanto riguarda un circuito con due induttori in serie notiamo che in realtà esso è degenere per cui è del primo ordine. Nessuna violazione accade quindi quando si adopera un unico induttore equivalente in luogo di due induttori in serie .

