Appendice 1. Richiami su sistemi dinamici e sulle equazioni differenziali lineari

Sistema algebrico-differenziale. Equazione di stato ed equazione di uscita. Soluzione dell'equazione di stato lineare del primo ordine. Eccitazione costante ed eccitazione sinusoidale. Soluzione similare. Equazione caratteristica e costante di tempo. Risposta libera e risposta forzata (con ingresso zero e con stato zero). Stabilità dei sistemi del primo ordine. Comportamento transitorio e di regime. Equazione di stato del secondo ordine. Eccitazione costante ed eccitazione sinusoidale. Soluzione similare. Soluzione generale. Autovalori reali e distinti, reali e coincidenti e complessi coniugati. Stabilità dei sistemi del secondo ordine. Esistenza della soluzione similare per un sistema di ordine n. Decomposizione modale della soluzione di un sistema di equazioni differenziali di ordine n. Riduzione di un sistema del secondo ordine ad un unica equazione.

Sistemi algebrico-differenziali, equazione di stato ed equazione di uscita

Un sistema fisico il cui modello matematico contenga almeno un'equazione differenziale è detto **sistema dinamico**. Nel seguito si espongono alcune nozioni relative all'analisi dei sistemi dinamici. Si farà riferimento esclusivamente ai sistemi dinamici lineari.

Si consideri un sistema algebrico-differenziale costituito da N equazioni lineari in N incognite. Si assuma che N_S incognite compaiano sotto il segno di derivata in N_S equazioni distinte. Si indichi con $\mathbf{x}$ il vettore delle N_S incognite differenziali e con $\mathbf{y}$ il vettore delle rimanenti (N J N_S) incognite algebriche. Sia inoltre $\mathbf{u}$ il vettore degli N_U ingressi (forzanti) del sistema

Parte algebrica

Parte differenziale

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_O\,\mathbf{x} + \mathbf{R}_O\,\mathbf{y} = \mathbf{S}_O\,\mathbf{u} \\ \mathbf{P}_S \dfrac{d}{dt}\mathbf{x} + \mathbf{Q}_S\,\mathbf{x} + \mathbf{R}_S\,\mathbf{y} = \mathbf{S}_S\,\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\mathbf{Q}_O \in \mathbf{M}(\Re)_{(N-N_S)\times N_S}$$
$$\mathbf{R}_O \in \mathbf{M}(\Re)_{(N-N_S)\times (N-N_S)}$$
$$\mathbf{S}_O \in \mathbf{M}(\Re)_{(N-N_s)\times N_U}$$
$$\mathbf{P}_S \in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times N_S}$$
$$\mathbf{Q}_S \in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times N_S}$$
$$\mathbf{R}_S \in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times (N-N_S)}$$
$$\mathbf{S}_S \in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times N_U}$$

Per risolvere tale sistema è necessario isolarne la parte differenziale. Se la matrice dei coefficieneti $\mathbf{R}_{\mathrm{O}}$ è invertibile è possibile utilizzare la parte algebrica del sistema per esprimere $\mathbf{y}$ in funzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ **,** ossia

$$\mathbf{y} = -\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{Q}_{\mathrm{O}}\,\mathbf{x} + \mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{S}_{\mathrm{O}}\,\mathbf{u}$$

Tale equazione prende il nome di **equazione di uscita** del sistema dinamico e viene di solito riscritta nella seguente forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}$$

$\mathbf{y}$ vettore delle variabili di uscita

$$\mathbf{C} = -\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{Q}_{\mathrm{O}} \;\in \mathbf{M}(\Re)_{(N-N_S)\times N_S}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{S}_{\mathrm{O}} \;\in \mathbf{M}(\Re)_{(N-N_S)\times N_U}$$

Se la matrice dei coefficienti $\mathbf{P}_{\mathrm{S}}$ è invertibile sostituendo l'equazioni di uscita all'interno delle equazioni differenziali presenti nel sistema si ottiene

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = -\mathbf{P}_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathbf{Q}_{\mathrm{S}} - \mathbf{R}_{\mathrm{S}}\,\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{Q}_{\mathrm{O}})\,\mathbf{x} + \mathbf{P}_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathbf{S}_{\mathrm{S}} - \mathbf{R}_{\mathrm{S}}\,\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{S}_{\mathrm{O}})\,\mathbf{u}$$

Tale equazione prende il nome di **equazione di stato in forma canonica** del sistema dinamico e viene di solito riscritta nel seguente modo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

$\mathbf{x}$ vettore delle variabili di stato

$$\mathbf{A} = -\mathbf{P}_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathbf{Q}_{\mathrm{S}} - \mathbf{R}_{\mathrm{S}}\,\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{Q}_{\mathrm{O}}) \;\in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times N_S}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathbf{S}_{\mathrm{S}} - \mathbf{R}_{\mathrm{S}}\,\mathbf{R}_{\mathrm{O}}^{-1}\,\mathbf{S}_{\mathrm{O}}) \;\in \mathbf{M}(\Re)_{N_S\times N_U}$$

Per determinare l'evoluzione delle variabili di stato nell'intervallo $[t_0\ , t]$ è necessario conoscere, oltre all'andamento delle forzanti, il loro valore all'istante iniziale t_0

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Una volta determinato l'andamento delle variabili di stato è possibile determinare l'andamento di tutte le altre grandezze di interesse del sistema (vettore $\mathbf{y}$) adoperando l'equazione di uscita. Lo stato del sistema rappresenta quindi la minima quantità di informazione che è necessario conoscere per predirne il comportamento. Il numero di variabili di stato costituisce **l'ordine del sistema**

Si evidenzia che la decomposizione del sistema algebrico in equazione di stato ed equazione di uscita è possibile solo se entrambe le matrici $\mathbf{R}_O$ e $\mathbf{P}_S$ risultano invertibili. Se ciò non accade il sistema dinamico è detto **degenere**. Per quanto riguarda i circuiti è opportuno anticipare quanto segue:

1. In alcuni casi non è possibile ottenere l'equazione di uscita in quanto la matrice $\mathbf{R}_O$ non è invertibile (la parte algebrica del sistema risulta indeterminata). Il circuito è degenere e non è possibile esprimere $\mathbf{y}$ in funzione di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$. Si mostrerà che ciò accade quando le variabili di stato sono soggette a vincoli algebrici dovuti, ad esempio a maglie di condensatori, tagli di induttori, generatori pilotati .... In tali casi è ancora possibile isolare la parte differenziale ma l'ordine del sistema risulta ridotto. Non tutte le grandezze che compaiono sotto il segno di derivata diventano variabili di stato effettive.

2. In alcuni casi non è possibile ottenere l'equazione di stato nella sua forma canonica in quanto la matrice $\mathbf{P}_S$ non è invertibile. Il circuito è degenere. Si mostrerà che ciò si verifica quando in esso sono presenti induttori mutuamente accoppiati con accoppiamento ideale. In tali casi l'ordine del sistema risulta ridotto. Non tutte le grandezze che compaiono sotto il segno di derivata diventano variabili di stato effettive.

Si consideri un sistema dinamico retto dalle seguenti equazioni di stato e di uscita

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \qquad\qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}$$

Sussistono le seguenti proprietà

1. Se gli ingressi $\mathbf{u}$ del sistema non contengono impulsi, **le variabili di stato sono analiticamente continue**. Se così non fosse infatti l'operatore di derivazione darebbe luogo ad un termine impulsivo (non limitato) al primo membro che non troverebbe riscontro la secondo membro.
2. Le variabili di stato sono continue anche se gli ingressi sono discontinui (purchè non contengano impulsi (sono quindi ammesse solo discontinutà di prima specie). Tuttavia se gli ingressi sono discontinui (ma non impulsivi) le derivate delle variabili di stato (variabili coniugate) e le variabili di uscita possono essere discontinue ma sono comunque limitate

Si accennerà in seguito al fatto che nel caso dei circuiti degeneri gli ingressi dell'equazione di stato sono costituiti oltre che dalle grandezze impresse dai generatori anche dalle loro derivate. Se le grandezze impresse sono discontinue le loro derivate sono impulsive e nel circuito possono nascere degli impulsi.

Un esempio di sistema algebrico-differenziale lineare del secondo ordine

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -a\,x_5 + x_6 = u_1 \\ d\,\dfrac{d}{dt}x_1 + c\,x_1 - x_3 = -u_2 \\ b\,\dfrac{d}{dt}x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 1 \\ \hline c & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_\mathrm{O}\,\mathbf{x} + \mathbf{R}_\mathrm{O}\,\mathbf{y} = \mathbf{S}_\mathrm{O}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{P}_\mathrm{S}\,\dfrac{d}{dt}\mathbf{x} + \mathbf{Q}_\mathrm{S}\,\mathbf{x} + \mathbf{R}_\mathrm{S}\,\mathbf{y} = \mathbf{S}_\mathrm{S}\,\mathbf{u} \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Equazione di uscita

$$\begin{cases} x_4 + x_5 = -x_1 \\ x_6 = x_2 \\ x_3 = x_2 \\ -a\,x_5 + x_6 = u_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_4 = -x_1 - x_2/a + u_1/a \\ x_5 = x_2/a - u_1/a \\ x_6 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/a \\ 0 & 1/a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/a & 0 \\ -1/a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}$$

$\mathbf{R}_\mathrm{O}$ invertibile ($a \neq 0$)

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_4 = -x_1 - x_2/a + u_1/a \\ x_5 = x_2/a - u_1/a \\ x_6 = x_2 \\ d\,\dfrac{d}{dt}x_1 - x_3 + c\,x_1 = -u_2 \\ b\,\dfrac{d}{dt}x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Una volta determinate x_1 e x_2 attraverso l'equazione di stato (devono essere note le condizioni inziali) è possibile determinare x_3, x_4 , x_5 e x_6 utlizzando l'equazione di uscita

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} d\,\dfrac{d}{dt}x_1 + c\,x_1 - x_2 = -u_2 \\ b\,\dfrac{d}{dt}x_2 + x_1 + x_2/a = u_1/a \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{P}_\mathrm{S}\text{ invertibile}} \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = -c\,x_1/d + x_2/d - u_2/d \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = -x_1/b - x_2/ab + u_1/ab \end{cases}$$

$$\uparrow$$

Equazione di stato

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -1 \\ 1 & 1/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/d & 1/d \\ -1/b & -1/ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/d & 0 \\ 0 & 1/ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

Soluzione dell'equazione di stato lineare del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = a\,x + f \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

problema di Cauchy

La soluzione dipende dal tipo di eccitazione. Rivestono particolare interesse i due seguenti casi

- Eccitazione costante

$$f(t) = F$$

- Eccitazione sinusoidale con pulsazione µ

$$f(t) = F\cos(\mu t + \sim)$$

Si osserva che

- La derivata di una costante è anch'essa costante (ed in particolare è nulla)
- La derivata di una funzione sinusoidale di data frequenza è anch'essa una funzione sinusoidale della stessa frequenza

Da questo, data la linearità dell'equazione di stato, è lecito supporre che la soluzione avrà lo stesso andamento nel tempo della forzante (**soluzione similare**).

La ricerca della soluzione similare si applica anche per eccitazioni di tipo polinomiale e cisoidale ma queste hanno un minore interesse applicativo

eccitazione costante – soluzione similare

Si ipotizza una soluzione costante, del tipo $x^{ecc}(t) = X$. Tale soluzione è ammissibile se risulta

$$0 = a\,X + F$$

Se $a \neq 0$ si ottiene quindi

$$x^{ecc}(t) = X = -\frac{F}{a}$$

eccitazione sinusoidale – soluzione similare

L'eccitazione segue un andamento sinusoidale con pulsazione µ, cioè $f(t)=F\cos(\mu t+\sim)$.
Si ipotizza una soluzione sinusoidale alla stessa pulsazione, ossia $x^{ecc}(t)=X\cos(\mu t+\sim J\ddot{})$.
Tale soluzione è ammissibile se risulta

$$-\mu X\sin(\mu t + \sim - \ddot{}\,) = a\,X\cos(\mu t + \sim - \ddot{}\,) + F\cos(\mu t + \sim)$$

Adoperando le formule di addizione di seno e coseno e accorpando i termini simili si ottiene

$$\begin{cases} -a\,X\cos\ddot{} + \mu X\sin\ddot{} = F \\ -\mu X\cos\ddot{} - a\,X\sin\ddot{} = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} X \sin \text{¨} = \dfrac{\mu F}{(a^2 + \mu^2)} \\ X \cos \text{¨} = \dfrac{-a F}{(a^2 + \mu^2)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{F}{\sqrt{a^2 + \mu^2}} \\ \text{¨} = \tan^{-1} \dfrac{\mu}{-a} \quad \text{se} \quad -a \geq 0 \\ \text{¨} = \text{®} + \tan^{-1} \dfrac{\mu}{-a} \quad \text{se} \quad -a < 0 \end{cases}$$

La soluzione similare risulta quindi

$$x^{\text{ecc}}(t) = \frac{F}{\sqrt{a^2 + \mu^2}} \cos\left(\mu t + \sim - \tan^{-1} \frac{\mu}{a} \right)$$

Nello studio dei circuiti in regime di corrente alternata si vedrà come la soluzione similare per eccitazione sinusoidale può essere facilmente ottenuta ricorrendo al metodo fasoriale (trasformata di Steinmetz)

La soluzione similare trovata sofddisfa identicamente l'equazione di stato. La condizione iniziale non risulta però soddisfatta se

$$x^{\text{ecc}}(0) \neq x_0$$

Pertanto la soluzione similare da sola non è, in generale, accettabile. Si consideri ora l'equazione omogenea associata all'equazione di stato

$$\frac{d}{dt} x = a\, x$$

Si ipotizza che l'equazione omogenea sia soddisfatta da una soluzione del tipo

$$x^{\text{omo}}(t) = k\, e^{\text{ª} t}$$

dove *k* è una costante reale arbitraria. Ciò si verifica solo se

$$\text{ª}\, k\, e^{\text{ª} t} = a\, k\, e^{\text{ª} t}$$

data l'arbitrarietà di k la soluzione ipotizzata è ammissibile se è soddisfatta la seguente equazione algebrica caratteristica

$$\lambda = a$$

λ è detto autovalore dell'equazione di stato.
La soluzione x^{omo} dell'equazione omogenea associata di solito viene posta nella forma

$$x^{omo}(t) = k\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove si è posto

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$ costante di tempo caratteristica, [s]

Se si somma alla soluzione particolare x^{ecc} la soluzione x^{omo} dell'omogenea associata l'equazione di stato risulta comunque soddisfatta. L'integrale generale (∞^1 soluzioni) dell'equazione di stato risulta quindi

$$x(t) = k\,e^{-\frac{t}{\tau}} + x^{ecc}(t)$$

Tra le ∞^1 soluzioni possibili, identificate dalla costante di integrazione arbitraria k, occorre determinare quella unica che soddisfa la condizione iniziale, ossia

$$k + x^{ecc}(0) = x_0$$

La soluzione del problema di Cauchy in esame risulta dunqe

$$x(t) = x^{ecc}(t) + \left(x_0 - x^{ecc}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove l'espressione di x^{ecc} varia a seconda che si sia in presenza di eccitazione costante o sinusoidale

La soluzione trovata risulta costituta da due termini, uno dovuto alle forzanti, ed uno esponenziale necessario per il soddisfacimento delle condizioni iniziali. Qualunque altra grandezza del sistema è ottenibile dalla variabile di stato e dagli ingressi mediante l'equazione di uscita e pertanto sarà costituita anch'essa da un termine avente la stessa forma d'onda delle forzanti e da un termine esponenziale la cui costante di tempo è τ. La costante di tempo è unica per tutte le grandezze del sistema.

Si noti che il termine esponenziale non si verifica se la soluzione similiare all'istante inziale assume esattamente il valore dello stato iniziale

$$x^{\text{ecc}}(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x^{\text{ecc}}(t) + (x_0 - x_0)e^{-\frac{t}{²}} = x^{\text{ecc}}(t)$$

Nel caso di eccitazione costante risulta

$$x(t) = -\frac{F}{a} + \left(x_0 + \frac{F}{a}\right)e^{-\frac{t}{²}} \qquad\qquad -\frac{1}{²} = ª = a$$

Se il coefficiente a dell'equazione di stato (ossia l'autovalore ª) è nullo tale soluzione non è applicabile.

È immediato verificare che nel caso di autovalore nullo la soluzione del problema di Cauchy con eccitazione costante è costituita da due termini, uno costante dovuto allo stato iniziale ed uno crescente linearmente nel tempo dovuto alla forzante.

$$x(t) = x_0 + F\,t$$

Tale espressione può essere ottenuta come limite dell'espressione generale per a tendente a zero. Si ha infatti

$$\lim_{a\to 0} x(t) = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{F}{a} + \left(x_0 + \frac{F}{a}\right)e^{at}\right] = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{F}{a} + \left(x_0 + \frac{F}{a}\right)(1 + at + \ldots)\right] = x_0 + F\,t$$

Nle caso di eccitazione sinusoidale l'espressione tovata è perfettamente applicabile anche per a=0. Tale coefficiente compare infatti al denminatore solo nell'argomento dell'arcotangente e restuisce quindi un angolo ¨ pari a ®/2.

Stabilità dei sistemi del primo ordine

Sia dato un sistema avente una data eccitazione $f(t)$ a cui corrisponde la soluzione similare $x^{ecc}(t)$. Consideriamo due soluzioni $x_a(t)$ e $x_b(t)$ corrispondenti a due condizioni iniziali distinte x_{0a} e x_{0b}

$$x_a(t) = x^{ecc}(t) + \left(x_{0a} - x^{ecc}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad x_b(t) = x^{ecc}(t) + \left(x_{0b} - x^{ecc}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La differenza tra le due soluzioni è data da

$$x_a(t) - x_b(t) = \left(x_{0a} - x_{0b}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Nel caso di autovalore nullo, attaverso il passaggio al limite (λ =a $\rightarrow 0, -1/\tau \rightarrow 0$) la precedente si riduce a

$$x_a(t) - x_b(t) = \left(x_{0a} - x_{0b}\right)$$

Distinguiamo i seguenti tre casi

1. L'autovalore è negativo ($\lambda < 0$, $1/\tau > 0$).
La differenza tra le due soluzioni tende a zero, ossia le due soluzioni tenderanno a coincidere al trascorrere del tempo. Qualuque sia la condizione inizale il sistema raggiunge una soluzione di regime legata solo alle forzanti. Il sistema è detto **asintoticamente stabile.**

2. L'autovalore è nullo ($\lambda = 0$).
Le due soluzioni nè si avvicinano nè si allontanano tra loro al trascorrere del tempo. Il sistema è detto **semplicemente stabile.**

3. L'autovalore è positivo ($\lambda > 0$, $1/\tau < 0$).
Le due soluzioni si allontanano indefinitamente tra loro al trascorrere del tempo. Ciacuna di esse, singolarmente, diverge. Il sistema è detto **instabile.**

Nel caso di sistema asintoticamente stabile ($\lambda< 0$, $\tau>0$) il temine esponenziale tende a zero al crescere di t ed è detto **transitorio**. La soluzione raggiunge quindi un valore di regime il cui andamento è dello stesso tipo di quello delle eccitazioni

$$x(t) = x^{\text{ecc}}(t) + \left(x_0 - x^{\text{ecc}}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Componente di regime ($\tau > 0$), x_r

Componente transitoria ($\tau > 0$), x_t

La soluzione del sistema può essere anche riscritta nel seguente modo

$$x(t) = x_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(x^{\text{ecc}}(t) - x^{\text{ecc}}(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Risposta con ingresso zero (libera)

Risposta con stato zero (forzata)

Soluzione dell'equazione di stato lineare del secondo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

problema di Cauchy

$$\longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

eccitazione costante – soluzione similare

Le forzanti assumono valore costante pari ad F_1 e F_2 rispettivamente

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

Si ipotizza una soluzione costante, del tipo $\mathbf{x}^{\text{ecc}}(t)=\mathbf{X}$. Tale soluzione è ammissibile se risulta

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

Si ottiene quindi

$$\mathbf{x}^{\text{ecc}}(t) = \mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{F}$$

Dalla precedente si deduce che, nel caso di eccitazione costante, la soluzione similare esiste solo se la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile, ossia se non possiede un autovalore nullo.

eccitazione sinusoidale – soluzione similare

Entrabe le forzanti variano con legge sinusoidale alla stessa frequenza

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_1 \cos(\mu t + \sim_1) \\ F_2 \cos(\mu t + \sim_2) \end{pmatrix}$$

Si ipotizza una soluzione del tipo

$$\mathbf{x}^{\text{ecc}} = \begin{pmatrix} X_1 \cos(\mu t + \quad_1) \\ X_2 \cos(\mu t + \quad_2) \end{pmatrix}$$

Analogamente a quanto fatto per il sistema del primo ordine, sostituendo queste espressioni ed uguagliando i termini simili si determiano le espressioni di X_1, X_2, $\quad_1$ e $\quad_2$ in funzione dei parametri della matrice (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), della pulsazione ω e dei parametri delle forzanti (F_1, F_2, $\sim_1$ e $\sim_2$). Tali espressioni sono eccessivamente laboriose e non sono qui riportate. Esse sono tuttavia facilmente deducibili adoperando il metodo dei fasori che si adopera per l'analisi dei circuiti in corrente alternata.

Vedremo in seguito che, nel caso di eccitazione sinusoidale, la soluzione similare non esiste se la pulsazione delle forzanti coincide con la pulsazione naturale della matrice di stato

La soluzione similare trovata soddisfa identicamente l'equazione di stato. La condizione iniziale non risulta però soddisfatta se

$$\mathbf{x}^{\text{ecc}}(0) \neq \mathbf{x}_0$$

Pertanto la soluzione similare da sola non è, in generale, accettabile. Si consideri ora l'equazione omogenea associata all'equazione di stato

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

Si ipotizza che l'equazione omogenea sia soddisfatta da una soluzione del tipo

$$\mathbf{x}^{\text{omo}}(t) = k\,\mathbf{s}\,e^{ª t}$$

dove k è una costante reale arbitraria ed $\mathbf{s}$ è un vettore di coefficienti costanti detto autovettore. Ciò si verifica solo se

$$ª k\mathbf{s}e^{ª t} = \mathbf{A}k\mathbf{s}e^{ª t} \quad \Rightarrow \quad k\,(ª\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{s}\,e^{ª t} = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità

La soluzione ipotizzata ammette soluzione non ovvia ($\mathbf{s}$=0) solo se è soddisfatta la seguente equazione algebrica caratteristica

$$\det(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\,\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

Le soluzioni λ_1 e λ_2 dell'equazione caratteristica sono gli **autovalori** della matrice $\mathbf{A}$. Essi sono anche detti **frequenze naturali** del sistema. Possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o complessi e coniugati.

Autovalori reali e distinti

Ad autovalori reali e distinti λ_1 e λ_2 corrispondonoo autovettori distinti $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$. La soluzione dell'equazione omogenea risulta dunque

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{-\frac{t}{\tau_1}}+k_2\,\mathbf{s}_2\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

dove k_1 e k_2 sono sue costanti arbitrarie. Si è inoltre posto

$\tau_1=-\dfrac{1}{\lambda_1}$ $\tau_2=-\dfrac{1}{\lambda_2}$ τ_1 e τ_2 costanti di tempo caratteristiche, [s]

Le due componenti della soluzione dell'equazione omogenea associata sono detti **modi naturali** del sistema

La soluzione generale dell'equazione di stato è data dalla somma della soluzione particolare x^{ecc} e della soluzione x^{omo} dell'omogenea associata. Nel caso di autovalori reali e distinti integrale generale (∞^2 soluzioni) è dato da

$$\mathbf{x}(t)=k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{-\frac{t}{\tau_1}}+k_2\,\mathbf{s}_2\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(t)$$

Tra le ∞^2 soluzioni possibili, identificate dalle costanti di integrazione k_1 e k_1, occorre determinare quella unica che soddisfa la condizione iniziale, ossia

$$\mathbf{x}_0=k_1\,\mathbf{s}_1+k_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(0)$$

Dalla precedente si deducono le seguenti espressioni delle costanti di integrazione

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(0)\right)$$

dove $\mathbf{S}$ è la matrice degli autovettori (le cui colonne sono $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$). La soluzione del problema di Cauchy in esame risulta dunque completamente determinata. Si noti che una o entrambe le costanti possono risultare nulle se la soluzione particolare soddisfa le condizioni iniziali. I modi corrispondenti possono dunque non verificarsi.

Esempio di problema del secondo ordine con autovalori reali e distnti

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = -x_1 - 2x_2 + 6 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = x_1 - 4x_2 + 24 \\ x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = -1 \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Autovalori

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a+4 \end{pmatrix} = 0 \qquad a^2 + 5a + 6 = 0 \qquad \begin{matrix} a_1 = -3 \\ a_2 = -2 \end{matrix}$$

Autovettori

$$\begin{pmatrix} -3+1 & 2 \\ -1 & -3+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{1a} \\ s_{1b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{1a} = s_{1b} \qquad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 2 \\ -1 & -2+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{2a} \\ s_{2b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{2a} = 2\,s_{2b} \qquad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione ddell’equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{omo}} \\ x_2^{\mathrm{omo}} \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$$

Soluzione similare

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{\mathrm{ecc}} = \mathrm{cost} \\ x_2 = x_2^{\mathrm{ecc}} = \mathrm{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -x_1^{\mathrm{ecc}} - 2x_2^{\mathrm{ecc}} + 6 \\ 0 = x_1^{\mathrm{ecc}} - 4x_2^{\mathrm{ecc}} + 24 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{ecc}} \\ x_2^{\mathrm{ecc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Integrale generale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} k_1 = -19 \\ k_2 = 13 \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -19\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + 13\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Autovalori reali e coincidenti

Nel caso di autovalori reali e distinti la soluzione dell’equazione omogenea può essere espressa come

$$\mathbf{x}^{\text{omo}}(t) = k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{\lambda_1 t} + k_2\,\frac{\mathbf{s}_2\,e^{\lambda_2 t} - \mathbf{s}_1\,e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Nel caso di autovalori reali e coincidenti risulta $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ e $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$. Tale caso può essere analizzato come caso limite di autovalori reali e distinti per $\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda$ e $\mathbf{s}_2 \to \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$. Si ottiene quindi

$$\mathbf{x}^{\text{omo}}(t) = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda}\left(k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{\lambda_1 t} + k_2\,\frac{\mathbf{s}_2\,e^{\lambda_2 t} - \mathbf{s}_1\,e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = k_1\,\mathbf{s}\,e^{\lambda t} + k_2\,\frac{d}{d\lambda}\left(\mathbf{s}\,e^{\lambda t}\right)$$

La soluzione dell’equazione omogenea è data da

$$\mathbf{x}^{\text{omo}}(t) = \left(k_1\,\mathbf{s} + k_2\,\frac{d\,\mathbf{s}}{d\lambda} \right) e^{\lambda t} + k_2\,\mathbf{s}\,t\,e^{\lambda t}$$

La soluzione è dunque costituita da due modi, uno esponenziale puro e l’altro esponenziale moltiplicato pet *t*, caratterizzati dalla costante di tempo τ

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$ costante di tempo caratteristica, [s]

L’integrale generale (∞^2 soluzioni) dell’equazione di stato è dato da

$$\mathbf{x}(t) = \left(k_1\,\mathbf{s} + k_2\,\frac{d\,\mathbf{s}}{d\lambda} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + k_2\,\mathbf{s}\,t\,e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathbf{x}^{\text{ecc}}(t)$$

Tra le ∞^2 soluzioni possibili, identificate dalle costanti di integrazione k_1 e k_2, occorre determinare quella unica che soddisfa la condizione iniziale, ossia

$$\mathbf{x}_0 = k_1\,\mathbf{s} + k_2\,\frac{d\,\mathbf{s}}{d\lambda} + \mathbf{x}^{\text{ecc}}(0)$$

Dalla precedente si deducono le seguenti espressioni delle costanti di integrazione

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{\text{sds}}^{-1}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^{\text{ecc}}(0)\right)$$

dove $\mathbf{S}_{\text{sds}}$ è la matrice le cui colonne sono $\mathbf{s}$ e $d\mathbf{s}/d\lambda$. La soluzione del problema di Cauchy in esame risulta dunque completamente determinata. Si noti che una o entrambe le costanti posssono risultare nulle se la soluzione perticolare soddisfa le condizioni inziali. I corrispondenti modi possono dunque non verificarsi.

Esempio di problema del secondo ordine con autovalori reali e coincidenti

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = -x_1 - x_2 + 4 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = x_1 - 3x_2 + 12 \\ x_1(0) = 6 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Autovalori

$$\det\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Autovettore e sua derivata

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_a \\ s_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{d\lambda}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{omo}} \\ x_2^{\text{omo}} \end{pmatrix} = \left(-k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-2t} - k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\, e^{-2t}$$

Soluzione similare

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{\text{ecc}} = \text{cost} \\ x_2 = x_2^{\text{ecc}} = \text{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -x_1^{\text{ecc}} - x_2^{\text{ecc}} + 4 \\ 0 = x_1^{\text{ecc}} - 3x_2^{\text{ecc}} + 12 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{\text{ecc}} \\ x_2^{\text{ecc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Integrale generale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(-k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-2t} - k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\, e^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} k_1 = -6 \\ k_2 = -10 \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} t\, e^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Autovalori complessi e coniugati

I due autovalori risultano

$$a_1 = -\frac{1}{2} + j\mu_n \qquad\qquad a_2 = -\frac{1}{2} - j\mu_n$$

I corrispondenti autovettori risultano complessi e coniugati.

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_i + j\mathbf{s}_r \qquad\qquad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_i - j\mathbf{s}_r$$

La soluzione è esprimibile come

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t) = k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{a_1 t} + k_2\,\mathbf{s}_1^*\,e^{a_1^* t}$$

dove k_1 e k_2 sono sue costanti arbitrarie. Tale soluzione può essere riscritta come (i dettagli sono riportati nelle ultime pagine)

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t) = X\,e^{-\frac{t}{2}}\,\sin(\mu_n t + \sim)\,\mathbf{s}_r + X\,e^{-\frac{t}{2}}\,\cos(\mu_n t + \sim)\,\mathbf{s}_i$$

Le costanti X e $\sim$ dipendono esclusivamente dalle costanti k_1 e k_2 e pertanto sono anch'esse arbitrarie

La soluzione dell'equazione omogenea è dunque costituita da due modi oscillatori che evolvono con un sfasamento di 90 gradi l'uno rispetto all'altro. Entrambi questi modi oscillatori sono premoltiplicati da un termine esponenziale che può essere crescente oppure decrescente a seconda del segno della parte reale degli autovalori.

L' integrale generale dell'equazione di stato (∞^2 soluzioni) è dato da

$$\mathbf{x}(t) = X\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\sin(\mu_n t + \sim)\,\mathbf{s}_r + X\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\cos(\mu_n t + \sim)\,\mathbf{s}_i + \mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(t)$$

Tra le ∞^2 soluzioni possibili, identificate dalle costanti di integrazione X e $\sim$, quella unica che soddisfa la condizione iniziale è

$$\mathbf{x}(t) = X\,\sin\sim\,\mathbf{s}_r + X\,\cos\sim\,\mathbf{s}_i + \mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(t)$$

Si deducono quindi le seguenti espressioni delle costanti di integrazione

$$\begin{pmatrix} X\,\sin\sim \\ X\,\cos\sim \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{ri}^{-1}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^{\mathrm{ecc}}(0)\right)$$

dove $\mathbf{S}_{ri}$ è la matrice e cui colonne sono $\mathbf{s}_r$ e $\mathbf{s}_i$. Dalla precedente è possibile determinare i parametri X e $\sim$. La soluzione del problema di Cauchy in esame risulta dunque completamente determinata. Si noti che X risulta nullo se la soluzione particolare soddisfa le condizioni inziali. In tal caso i due modi oscillatori non si verificano.

Si noti che relativamente a ciascuna componente i due modi oscillatori sfasati di 90 gradi possono essere accorpati in un unico modo oscillatorio

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{omo}}(t) \\ x_2^{\text{omo}}(t) \end{pmatrix} = X\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\mu_n t + \sim) \begin{pmatrix} s_{r1} \\ s_{r2} \end{pmatrix} + X\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim) \begin{pmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1^{\text{omo}}(t) = X_1\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim_1) \\ x_2^{\text{omo}}(t) = X_2\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim_2) \end{cases}$$

L'ampiezza X_k e la fase $\sim_k$ del modo oscillatorio della componente k (k=1,2) dipendono dalle costanti di integrazione X e $\sim$ e dalle componenti dei vettori $\mathbf{s}_r$ e $\mathbf{s}_i$ attraverso le seguenti relazioni (i dettagli sono riportati nelle ultime pagine)

$$\begin{cases} X_1 = X\sqrt{s_{r1}^2 + s_{i1}^2} \\ \sim_1 = \tan^{-1} \dfrac{-X\, s_{r1}\cos\sim + X\, s_{i1}\sin\sim}{X\, s_{r1}\sin\sim + X\, s_{i1}\cos\sim} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = X\sqrt{s_{r2}^2 + s_{i2}^2} \\ \sim_2 = \tan^{-1} \dfrac{-X\, s_{r2}\cos\sim + X\, s_{i2}\sin\sim}{X\, s_{r2}\sin\sim + X\, s_{i2}\cos\sim} \end{cases}$$

Esempio di problema del secondo ordine con autovalori complessi e coniugati

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = -x_1 - 5x_2 + 6.5 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = 2x_1 - 3x_2 + 26 \\ x_1(0) = -2.5 \\ x_2(0) = 9 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Autovalori

$$\det\begin{pmatrix} a+1 & 5 \\ -2 & a+3 \end{pmatrix} = 0 \qquad a^2 + 4a + 13 = 0 \qquad \begin{cases} a_1 = -2 - j3 \\ a_2 = -2 + j3 \end{cases}$$

Autovettori

$$\begin{pmatrix} -2-j3+1 & 5 \\ -2 & -2-j3+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_a \\ s_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow s_b = \frac{1+j3}{5}s_a \longrightarrow \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1+j0 \\ 0.2+j0.6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{1,2} = \mathbf{s}_r \pm j\mathbf{s}_i \qquad \mathbf{s}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'equazione omogenea

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{omo}} \\ x_2^{\text{omo}} \end{pmatrix} = X\, e^{-2t} \sin(3t + \sim) \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + X\, e^{-2t} \cos(3t + \sim) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Soluzione similare

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{\text{ecc}} = \text{cost} \\ x_2 = x_2^{\text{ecc}} = \text{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -x_1^{\text{ecc}} - 5\, x_2^{\text{ecc}} + 6.5 \\ 0 = 2 x_1^{\text{ecc}} - 3 x_2^{\text{ecc}} + 26 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{\text{ecc}} \\ x_2^{\text{ecc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Integrale generale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X\, e^{-2t} \sin(3t + \sim) \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + X\, e^{-2t} \cos(3t + \sim) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Condizioni iniziali

$$\begin{pmatrix} -2.5 \\ 9 \end{pmatrix} = X \sin\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + X \cos\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} X \sin\sim = 6 \\ X \cos\sim = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X = 10 \\ \sim = 0.644 \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 10\, e^{-2t} \sin(3t + 0.644) \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 10\, e^{-2t} \cos(3t + 0.644) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\, e^{-2t} \cos(3t - 0.927) \\ 6.32\, e^{-2t} \cos(3t + 0.322) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Stabilità dei sistemi del secondo ordine

Si generalizzano ora ai sistemi del secondo ordine le nozioni di stabilità già introdotte per quelli del primo ordine. Faremo riferimento a due soluzioni differenti corrispondenti a due condizioni iniziali. Si distinguono i seguenti casi

1. Entrambi gli autovalori possiedono parte reale negativa($ª_{1,2} < 0$, $1/²_{1,2} > 0$).
La differenza tra le due soluzioni tende a zero, ossia componente per componente le due soluzioni tenderanno a coincidere al trascorrere del tempo. Qualunque sia la condizione iniziale il sistema raggiunge una soluzione di regime legata solo alle forzanti. Il sistema è detto **asintoticamente stabile.**

2. Esiste un autovalore con parte reale nulla, la parte reale dell'altro è non positiva
Le due soluzioni nè si avvicinano nè si allonatanano tra loro al trascorre del tempo. Il sistema è detto **semplicemente stabile.** Se i due autovalori sono complessi e coniugati con parte reale nulla la differenza tra le due soluzioni è sinusoidale. Nel circuito si stabilice un'oscillazione permanente alla frequenza naturale.

3. Almeno un auotovalore ha parte reale positiva
Le due soluzioni si allontanano indefinitamente tra loro al trascorrere del tempo. Ciacuna di esse, singolarmente, diverge. Tale sistema è detto **instabile.**

Esistenza della soluzione similare

Lo studio delle soluzioni similari, già affrontato per i casi di interesse pratico, può essere impostato con generalità utilizzando il metodo delle cisoidi. Si definice cisoide una funzione reale il cui andamento è

$$c(t) = C\,e^{\pm t}\cos(\mu t + \sim)$$

Adoperando la definizione di esponenziale complesso (formula di Eulero: $e^{j¯} = \cos ¯ + j\sin ¯$)
la cisoide può essere riscritta come parte reale di un numero complesso

$$c(t) = C\,e^{\pm t}\,\mathrm{Re}[e^{j(\mu t + \sim)}] = \mathrm{Re}[C\,e^{\pm t} e^{j(\mu t + \sim)}] = \mathrm{Re}[C\,e^{j\sim} e^{(\pm + j\mu)t}]$$

Si ha quindi

$$c(t) = \mathrm{Re}[\dot{C}\,e^{\dot{s}t}] \quad \text{dove}$$

$\dot{C} = C\,e^{j\sim}$ Fasore della cisoide

$\dot{s} = \pm + j\mu$ Pulsazione complessa della cisoide

Le funzioni cisoidali contengono come casi pari particolari le funzioni costanti, per le quali la pulsazione complessa è nulla ($\pm = \mu = 0$), e le funzioni sinusoidali, per le quali la pulsazione complessa possiede solo parte immaginaria ($\pm = 0$). Nel caso di eccitazione sinusoidale il metodo delle cisoidi coincide con la trasformata di Steimetz che si adopera per l'analisi dei circuiti in regime di corrente alternata.

$\dot{s} = 0 + j0$ Funzioni costanti $\qquad$ $\dot{s} = 0 + j\mu$ Funzioni sinusoidali

Nell’ambito delle cisoidi di data pulsazione complessa, ciascuna di essa è univocamente identificata dal numero complesso (fasore) rappresentativo

$$c(t) \quad \leftrightarrow \quad \dot{C}$$

La derivata di una cisoide di data pulsazione è anch’essa una cisoide avente la medesima pulsazione ed è rappresentabile come

$$c(t) = \mathrm{Re}[\dot{C}\, e^{\dot{s}t}] \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}c(t) = \mathrm{Re}[\dot{s}\dot{C}\, e^{\dot{s}t}]$$

$$c(t) \quad \leftrightarrow \quad \dot{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}c(t) \quad \leftrightarrow \quad \dot{s}\dot{C}$$

Data la linearità dell’equazione di stato è lecito supporre che se le forzanti sono cisoidi aventi entrambe la stessa pulsazione complessa anche la soluzione avrà lo stesso andamento nel tempo

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_1\, e^{\pm t} \cos(\mu t + \sim_2) \\ F_2\, e^{\pm t} \cos(\mu t + \sim_2) \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \dot{F}_1 = F_1\, e^{j\sim_1} \\ \dot{F}_2 = F_2\, e^{j\sim_2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{ecc}} = \begin{pmatrix} X_1\, e^{\pm t} \cos(\mu t + \ _2) \\ X_2\, e^{\pm t} \cos(\mu t + \ _2) \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} = \begin{pmatrix} \dot{X}_1 = X_1\, e^{j\ _1} \\ \dot{X}_2 = X_2\, e^{j\ _2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}[\dot{s}\,\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}}\, e^{\dot{s}t}] = \mathbf{A}\mathrm{Re}[\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}}\, e^{\dot{s}t}] + \mathrm{Re}[\dot{\mathbf{f}}\, e^{\dot{s}t}]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}[\, e^{\dot{s}t}\, (\dot{s}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} - \dot{\mathbf{f}}\,)\,] = \mathbf{0}$$

Dato che il termine esponenziale varia nel tempo (in particolare la sua parte immaginaria) la precedente è soddisfatta se e solo se

$$\dot{s}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} - \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\dot{s}\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} = \dot{\mathbf{f}}$$

da cui

$$\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{ecc}} = (\dot{s}\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\dot{\mathbf{f}}$$

Una volta determinati i fasori attraverso la precedente è possibile ricostruire l’andamento nel tempo della soluzione similare.

Notiamo che la soluzione similare non esiste se la matrice $\mathbf{A}$ possiede una frequenza naturale coincidente con la pulsazione delle forzanti. Ciò in particolare comporta che nel caso di eccitazione costante la soluzione similare non esiste se la matrice possiede un autovalore reale nullo. Nel caso di eccitazione sinusoidale la soluzione similare non esiste se la matrice possiede autovalori complessi e coniugati la cui parte reale è nulla e la cui parte immaginaria è coincidente con la frequenza delle forzanti

Nei casi in cui la soluzione similare non esista una soluzione particolare va ricercata attaverso considerazioni specifiche che dipendono dai casi e che qui non sono riportate.

Decomposizione modale della soluzione di un sistema di equazioni differenziali di ordine n

Abbiamo visto come la soluzione di un sistema del secondo ordine sia data dalla somma di due modi esponenziali nel caso di autovalori reali e distinti oppure di due modi osclillatori, sfasati di 90 gradi l'uno rispetto all'atro, nel caso di autovalori complessi e coniugati.

Ciò è generalizzabile ai sistemi di ordine n con n autovalori distinti. Infatti ad ogni autovalore reale corriponderà un modo esponenziale reale e ad ogni coppia di autovalori complessi e coniugati corrisponderà un coppia di modi oscillatori sfasati di 90 gradi.

Qualora siano presenti autovalori di molteplicità algebrica maggiore di uno la decomposizione modale della soluzione è ancora possibile purchè la molteplicità geometrica sia uguale a quella algebrica.

Riduzione di un sistema del secondo ordine ad un unica equazione

Si considera il generico problema differenziale del secondo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

Abbiamo visto che la soluzione è ottenibile ricorrendo agli autovalori del sistema e ai relativi autovettori. In alternativa la soluzione è ottenibile riducendo il sistema di due equazione di primo ordine ad un unica equazione del secondo ordine che coinvolge una sola delle variabili di stato.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{1}{a_{12}}\dfrac{d}{dt}x_1 - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1 - \dfrac{1}{a_{12}}b_1 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \\ x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} x_1 - (a_{11} + a_{22}) \dfrac{d}{dt} x_1 + (a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}) x_1 = \dfrac{d}{dt} b_1 - a_{22}\, b_1 + a_{12}\, b_2 \\ x_1(0) = x_{10} \\ \left. \dfrac{d}{dt} x_1 \right|_0 = a_{12} x_{20} + a_{11} x_{10} + b_1(0) \end{cases}$$

Tale equazione viene di solito riscritta come

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} x_1 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \dfrac{d}{dt} x_1 + \det(\mathbf{A}) x_1 = F_1 \\ x_1(0) = x_{10} \\ \left. \dfrac{d}{dt} x_1 \right|_0 = a_{12} x_{20} + a_{11} x_{10} + b_1(0) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad F_1 = \frac{d}{dt} b_1 - a_{22}\, b_1 + a_{12}\, b_2$$

Procedendo allo stesso modo si ottiene un equazione del secondo ordine del tutto analoga relativa alla variabile di stato x_2

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} x_2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \dfrac{d}{dt} x_2 + \det(\mathbf{A}) x_2 = F_2 \\ x_2(0) = x_{20} \\ \left. \dfrac{d}{dt} x_2 \right|_0 = a_{22} x_{20} + a_{21} x_{10} + b_2(0) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad F_2 = \frac{d}{dt} b_2 - a_{11}\, b_2 + a_{21}\, b_1$$

La soluzione generale dell'equazione completa è costituita dalla somma di una soluzione similare x^{ecc} legata alla forzanti e della soluzione x^{omo} dell'equazione omogenea associata. Si evidenzia che le equazioni del secondo ordine relative alle variabili di stato x_1 e x_2 differiscono esclusivamente per i termini forzanti e per le condizioni iniziali. L'equazione omogenea associata coincide e pertanto ammette la medesima soluzione x^{omo}. Le considerazioni che seguono si applicano ad entrambe le variabili di stato e pertanto si ometteranno i pedici 1 e 2

$$x(t) = x^{\mathrm{omo}}(t) + x^{\mathrm{ecc}}(t)$$

La soluzione generale dell'omogenea associata si calcola determinando gli autovalori (**o frequenze naturali**) dell'equazione, ossia risolvendo la seguente equazione caratteristica

$$a^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\, a + \det(\mathbf{A}) = 0$$

da cui risulta

$$a_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

dove

$$\Delta = \mathrm{tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21}$$

Gli autovalori possono risultare reali e distinti, reali e coincidenti o complessi e coniugati.

Autovalori reali e distinti

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}>0 \longrightarrow x(t)=k_1e^{\mathrm{a}_2 t}+k_2e^{\mathrm{a}_2 t}+x_{\mathrm{p}}(t)$$

Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si ottiene

$$k_1=\frac{\left.\frac{d}{dt}x\right|_0-\left.\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\right|_0-\mathrm{a}_2\left(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\right)}{\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_2};\qquad k_2=\frac{\left.\frac{d}{dt}x\right|_0-\left.\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\right|_0-\mathrm{a}_1\left(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\right)}{\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1}$$

Se entrambi gli autovalori sono negativi il sistema è asintoticamente stabile ed in particolare viene detto sovrasmorzato

Autovalori reali e coincidenti

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0 \Rightarrow \mathrm{a}_1=\mathrm{a}_2=\mathrm{a} \longrightarrow x(t)=k_1e^{\mathrm{a}t}+k_2\,t\,e^{\mathrm{a}t}+x_{\mathrm{p}}(t)$$

Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si ottiene

$$k_1=x(0)-x_{\mathrm{p}}(0);\qquad k_2=\left.\frac{d}{dt}x\right|_0-\left.\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\right|_0+\mathrm{a}\left(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\right)$$

Se $\lambda < 0$ il sistema è asintoticamente stabile ed in particolare viene detto criticamente smorzato

Autovalori complessi e coniugati

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}<0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{a}_1=-\frac{1}{2}-j\mu_n \\ \mathrm{a}_2=-\frac{1}{2}+j\mu_n \end{cases} \longrightarrow \quad x(t)=Xe^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\mu_n+\sim\right)+x_{\mathrm{p}}(t)$$

con X e $\sim$ costanti da determinare

$$con \quad \mu_n=\sqrt{-(a_{11}-a_{22})^2-4a_{12}a_{21}}$$

Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si ottiene

$$X\cos\sim\,=x(0)-x_{\mathrm{p}}(0); \qquad X\sin\sim\,=\frac{1}{\mu_n}\left(\frac{d}{dt}x\bigg|_0-\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\bigg|_0-\frac{1}{2}\big(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\big)\right)$$

da cui

$$X=\sqrt{\big(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\big)^2+\frac{1}{\mu_n^2}\left(\frac{d}{dt}x\bigg|_0-\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\bigg|_0-\frac{1}{2}\big(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\big)\right)^2}$$

$$\sim\,=\frac{\frac{1}{\mu_n}\left(\frac{d}{dt}x\Big|_0-\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\Big|_0-\frac{1}{2}\big(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\big)\right)}{x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)} \quad se \quad x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\geq 0$$

$$\sim\,=\text{®}+\frac{\frac{1}{\mu_n}\left(\frac{d}{dt}x\Big|_0-\frac{d}{dt}x_{\mathrm{p}}\Big|_0-\frac{1}{2}\big(x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)\big)\right)}{x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)} \quad se \quad x(0)-x_{\mathrm{p}}(0)<0$$

Se $\tau > 0$ il sistema è asintoticamente stabile ed in particolare viene detto armonico smorzato

Sviluppi relativi alla riformulazione della soluzione dell'equazione omogenea nel caso di autovalori complessi e coniugati

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=k_1\,\mathbf{s}_1\,e^{\mathrm{a}_1 t}+k_2\,\mathbf{s}_1^*\,e^{\mathrm{a}_1^* t}=k_1(\mathbf{s}_r+j\mathbf{s}_i)e^{-\frac{1}{2_1}t}\,e^{j\mu t}+k_2(\mathbf{s}_r-j\mathbf{s}_i)e^{-\frac{1}{2_1}t}\,e^{-j\mu t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=k_1\,e^{-\frac{1}{2_1}t}(\cos\mu t+j\sin\mu t)(\mathbf{s}_r+j\mathbf{s}_i)+k_2\,e^{-\frac{1}{2_1}t}(\cos\mu t-j\sin\mu t)(\mathbf{s}_r-j\mathbf{s}_i)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=k_1\,e^{-\frac{1}{2_1}t}\big((\cos\mu t\,\mathbf{s}_r-\sin\mu t\,\mathbf{s}_i)+j(\cos\mu t\,\mathbf{s}_i+\sin\mu t\,\mathbf{s}_r)\big)+$$

$$+k_2\,e^{-\frac{1}{2_1}t}\big((\cos\mu t\,\mathbf{s}_r-\sin\mu t\,\mathbf{s}_i)-j(\cos\mu t\,\mathbf{s}_i+\sin\mu t\,\mathbf{s}_r)\big)$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=c_1\,e^{-\frac{1}{2_1}t}(\cos\mu t\,\mathbf{s}_r-\sin\mu t\,\mathbf{s}_i)+c_2\,e^{-\frac{1}{2_1}t}(\cos\mu t\,\mathbf{s}_i+\sin\mu t\,\mathbf{s}_r)$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=e^{-\frac{1}{2_1}t}(c_1\cos\mu t+c_2\sin\mu t)\mathbf{s}_r+e^{-\frac{1}{2_1}t}(c_2\cos\mu t-c_1\sin\mu t)\mathbf{s}_i$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{omo}}(t)=X\,e^{-\frac{1}{2_1}t}\sin(\mu t+\sim)\mathbf{s}_r+X\,e^{-\frac{1}{2_1}t}\cos(\mu t+\sim)\mathbf{s}_i$$

$$\mathbf{s}_r = \begin{pmatrix} s_{r1} \\ s_{r2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x_1^{\text{omo}} = X\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\mu_n t + \sim)\, s_{r1} + X\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim)\, s_{i1} \\ x_2^{\text{omo}} = X\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\mu_n t + \sim)\, s_{r2} + X\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim)\, s_{i2} \end{cases}$$

$$X_1\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim_1) = X\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\mu_n t + \sim)\, s_{r1} + X\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\mu_n t + \sim)\, s_{i1}$$

$$\begin{aligned} & X_1 \cos\mu_n t \cos\sim_1 - X_1 \sin\mu_n t \sin\sim_1 = \\ & = X\, s_{r1} \sin\mu_n t \cos\sim + X\, s_{r1} \cos\mu_n t \sin\sim + \\ & + X\, s_{i1} \cos\mu_n t \cos\sim - X\, s_{i1} \sin\mu_n t \sin\sim \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_1 \cos\sim_1 = X\, s_{r1} \sin\sim + X\, s_{i1} \cos\sim \\ X_1 \sin\sim_1 = -X\, s_{r1} \cos\sim + X\, s_{i1} \sin\sim \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = X\sqrt{s_{r1}^2 + s_{i1}^2} \\ \sim_1 = \tan^{-1} \dfrac{-X\, s_{r1} \cos\sim + X\, s_{i1} \sin\sim}{X\, s_{r1} \sin\sim + X\, s_{i1} \cos\sim} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_2 = X\sqrt{s_{r2}^2 + s_{i2}^2} \\ \sim_2 = \tan^{-1} \dfrac{-X\, s_{r2} \cos\sim + X\, s_{i2} \sin\sim}{X\, s_{r2} \sin\sim + X\, s_{i2} \cos\sim} \end{cases}$$