

GRANDEZZE PERIODICHE

INTRODUZIONE

Una grandezza tempodipendente $a(t)$ si definisce **periodica** quando ad uguali intervalli T assume valori uguali, cioè quando vale la relazione (con n intero qualsiasi):

$$a(t) = a(t + nT) \quad (1)$$

- Il tempo T si definisce **periodo**;

- La grandezza $f = 1/T$, che rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo, si definisce **frequenza**. La frequenza si misura in Hertz [Hz] (periodi/secondo);

- Si definisce **valore medio** di $a(t)$ la media di $a(t)$ eseguita sul periodo T :

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt \quad (2)$$

- Si definisce **valore efficace** di $a(t)$ la radice quadrata della media dei quadrati dei valori istantanei di $a(t)$ eseguita su un periodo T :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt} \quad (3)$$

- Una grandezza periodica si definisce **alternata** quando il suo valore medio è nullo;

GRANDEZZE SINUSOIDALI

Una grandezza alternata del tipo:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

si dice **sinusoidale**.

- La grandezza A_M che compare nella (4) è detta **ampiezza**, ed è pari al valore massimo di $a(t)$;

- La grandezza ω è detta **pulsazione**, ha le dimensioni di una velocità angolare (radianti/secondo) ed è pari a $2\pi/T$;

- La grandezza α è detta **fase**. La fase dipende dal valore che $a(t)$ assume all'istante $t = 0$.

Il valore medio di una grandezza sinusoidale è pari a zero (per ogni valore di A_M e α).

Il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari a:

$$A = \sqrt{\frac{A_M^2}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0.707 A_M \quad (5)$$

Una grandezza sinusoidale è quindi completamente definita da tre parametri:

- 1) L'ampiezza A_M , o il valore efficace, A .
- 2) La pulsazione ω , o la frequenza f , o il periodo T .
- 3) La fase α , o la differenza di fase con un'altra grandezza sinusoidale nota di uguale pulsazione.

Siano $a(t)$ e $b(t)$ due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi figura 1):

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha_a)$$

$$b(t) = B_M \cos(\omega t + \alpha_b)$$

Si definisce **differenza di fase** tra a e b l'angolo

$$\phi = \alpha_a - \alpha_b$$

L'angolo ϕ è chiaramente indipendente dall'istante iniziale di riferimento.

- Se $\phi = 0$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **fase** (vedi figura 2.a);
- Se $\phi > 0$, $a(t)$ è in **anticipo di fase** rispetto a $b(t)$, che è a sua volta in **ritardo di fase** rispetto ad $a(t)$. Se $\phi < 0$ la situazione si inverte;
- Se $\phi = \pm \pi$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **opposizione** (vedi figura 2.b);
- Se $\phi = \pm \pi/2$, $a(t)$ e $b(t)$ si dicono in **quadratura** (vedi figura 2.c).

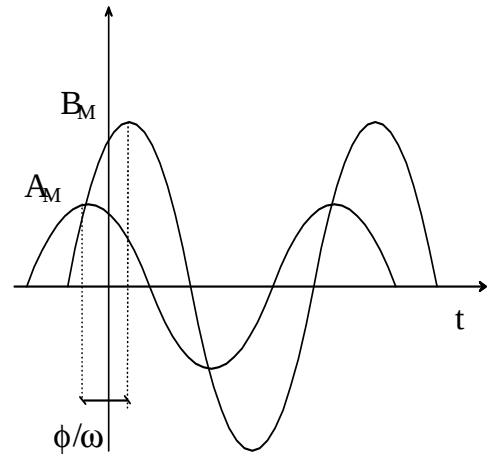


Figura 1. - $a(t)$ è in anticipo rispetto a $b(t)$.

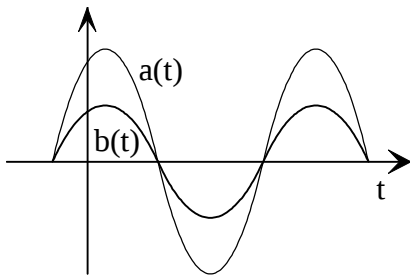


Figura 2.a - $a(t)$ e $b(t)$ sono in fase.

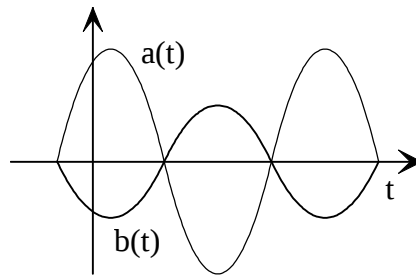


Figura 2.b - $a(t)$ e $b(t)$ sono in opposizione.

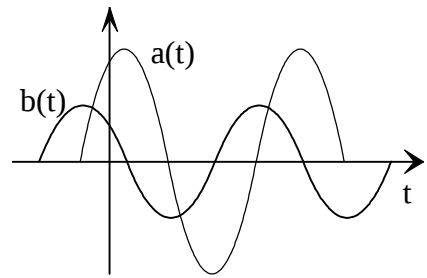


Figura 2.c - $a(t)$ e $b(t)$ sono in quadratura.

OPERAZIONI SU GRANDEZZE SINUSOIDALI

Il **prodotto** di una grandezza sinusoidale

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

per uno scalare m è una grandezza sinusoidale $c(t)$ con ampiezza pari a mA_M , con pulsazione ω , e con fase pari a α ($c(t)$ e $a(t)$ in fase) se $m > 0$, o a $\alpha + \pi$ ($c(t)$ e $a(t)$ in opposizione) se $m < 0$.

La **somma di due grandezze sinusoidali** isofrequenziali è ancora una grandezza isofrequenziale. Si ha infatti:

$$A_M \cos(\omega t + \alpha_a) + B_M \cos(\omega t + \alpha_b) = C_M \cos(\omega t + \alpha_c) \quad (6)$$

dove:

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha_a - \alpha_b)}; \quad \alpha_c = \arctg\left(\frac{A_M \sin \alpha_a + B_M \sin \alpha_b}{A_M \cos \alpha_a + B_M \cos \alpha_b}\right)$$

La **derivata** di una grandezza sinusoidale $a(t)$ è pari a:

$$\frac{d}{dt} [A_M \cos(\omega t + \alpha)] = -\omega A_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

La derivata di $a(t)$ è quindi una grandezza sinusoidale di pulsazione ω con ampiezza pari a ωA_M e con un anticipo di fase pari a $\pi/2$ (quindi in quadratura anticipo).

RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI CON I NUMERI COMPLESSI (TRASFORMATA DI STEINMETZ)

Si riporta la formula di Eulero:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (8)$$

da cui:

$$\cos(x) = \Re[e^{jx}] \quad (9)$$

dove con $\Re$ si indica l'operatore "parte reale". La grandezza sinusoidale:

$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha) = \Re[A_M e^{j(\omega t + \alpha)}] = \Re[\sqrt{2} A e^{j\omega t} e^{j\alpha}] \quad (10)$$

può essere quindi interpretata come componente reale di un opportuno numero complesso. Ponendo:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \quad (11)$$

Il numero complesso $\underline{A}$, detto **fasore**, individua univocamente la grandezza sinusoidale $a(t)$. La (10) definisce quindi una corrispondenza biunivoca tra grandezze sinusoidali e numeri complessi (trasformata di Steinmetz). Il numero complesso $\underline{A}$ può essere scritto nella forma:

$$\underline{A} = M + j N$$

dove M ed N sono la componente reale ed immaginaria di $\underline{A}$ (vedi figura 3); modulo e fase sono dunque:

$$|\underline{A}| = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M > 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{N}{M}\right), & \text{se } M < 0 \end{cases}$$

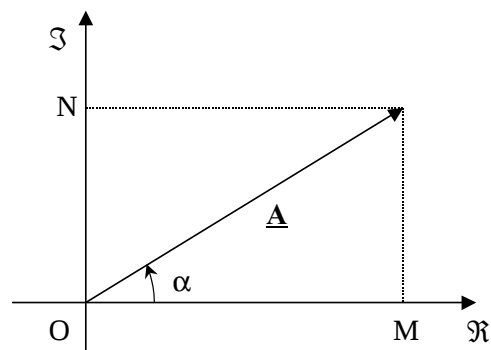


Figura 3.

• Operazioni con il metodo simbolico

- SOMMA: Date due grandezze sinusoidali rappresentate dai numeri complessi $\underline{A}e^{j\omega t} = (M_1 + j N_1)e^{j\omega t}$ e $\underline{B}e^{j\omega t} = (M_2 + j N_2)e^{j\omega t}$ è facile verificare la grandezza sinusoidale $a(t) + b(t)$ è rappresentata da un numero complesso $\underline{C}e^{j\omega t}$, dove:

$$\underline{C} = (M_1 + M_2) + j (N_1 + N_2)$$

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

- PRODOTTO PER UN NUMERO REALE: Data una grandezza sinusoidale $a(t)$ rappresentata dal numero complesso $\underline{A}e^{j\omega t}$ ed un numero reale m , si verifica immediatamente che il numero complesso $\underline{C}e^{j\omega t}$ che rappresenta il prodotto $m a(t)$ è tale che:

$$\underline{C} = m \underline{A}$$

- Prodotto per il numero immaginario puro j :

Data una grandezza sinusoidale $a(t)$ rappresentata dal numero complesso $\underline{A} e^{j\omega t}$ e tenendo conto che $j = e^{j\pi/2}$, si ha che:

$$j \underline{A} e^{j\omega t} = \underline{A} e^{j(\omega t + \pi/2)}$$

Sul piano di Gauss, $\underline{A} e^{j\omega t}$ moltiplicato per j viene ruotato di $\pi/2$ nel senso positivo di rotazione come mostrato in figura 4.

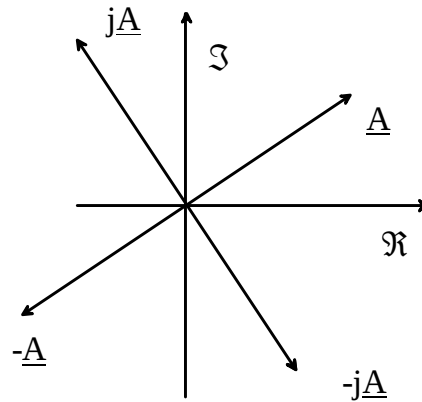


Figura 4.

- DERIVAZIONE: La derivata di $\underline{A} e^{j\omega t}$ è pari a $\underline{D} e^{j\omega t}$. Infatti:

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} e^{j\omega t}) = j\omega \underline{A} e^{j\omega t}, \text{ dove: } \underline{D} = j\omega \underline{A}$$

Sul piano complesso quindi la derivata di $\underline{A} e^{j\omega t}$ è rappresentata da un vettore di modulo pari a ωA e ruotato rispetto a $\underline{A} e^{j\omega t}$ di un angolo pari a $\pi/2$ in senso positivo.

RAPPRESENTAZIONE SIMBOLICA DI GRANDEZZE SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

In modo del tutto equivalente a quanto è stato fatto per i fasori, nella rappresentazione simbolica di più grandezze sinusoidali isofrequenziali è lecito omettere il fattore rotante $e^{j\omega t}$, poiché generalmente interessa conoscere la posizione reciproca dei vettori rappresentativi. Una qualsiasi grandezza sinusoidale:

$$a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha)$$

può quindi essere rappresentata dal numero complesso:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha}$$

In ogni problema, si può assumere una grandezza sinusoidale arbitraria come riferimento di fase, ponendo il suo angolo di fase pari a 0. In tal modo, la grandezza assunta come riferimento di fase sarà rappresentata da un numero reale puro. Quanto detto finora ci permette di esprimere le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{ll} a(t) \Leftrightarrow \underline{A} & a(t) + b(t) \Leftrightarrow \underline{A} + \underline{B} \\ \frac{da}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{A} & m a(t) \Leftrightarrow m \underline{A} \\ \frac{d^2 a}{dt^2} \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{A} & \int_{-\infty}^t a(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega} \end{array}$$

• Complesso coniugato

Dato un numero complesso $\underline{A} = A e^{j\alpha}$, si definisce “complesso coniugato di $\underline{A}$ ” il numero $\underline{A}^*$, avente modulo uguale e fase opposta:

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha} \quad (12)$$

Si verifica facilmente che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è pari al quadrato del modulo:

$$\underline{A} \underline{A}^* = A^2 \quad (13)$$